Über den Cauchyschen Integralsatz für reelle und komplexe Funktionen.

Von

J. Ridder in Baarn (Niederlande).

Es ist unsere Absicht, im folgenden zwei Hauptsätze [A und B] herzuleiten, welche Bedingungen enthalten, unter denen der Cauchysche Integralsatz bei reellen Funktionen seine Gültigkeit behält bzw. unter denen sich die Analytizität einer komplexen Funktion zeigen läßt. Weiter wird gezeigt, daß die verschiedenen Funktionengruppen, welche den meistbekannten, hinreichenden Bedingungen für die Gültigkeit jener Sätze genügen, dadurch auch implizit den Bedingungen des entsprechenden Hauptsatzes genügen. Damit ist dann aufs neue gezeigt, daß jene Bedingungen hinreichend sind. Sie sind dabei möglichst weit verallgemeinert, während die in den §§ 15 und 16 enthaltenen Bedingungen neu hinzugefügt wurden.

§ 1.

In unseren Beweisen brauchen wir den Begriff der Intervallfunktion in der Ebene. Eine derartige Funktion $\Phi(J)$ ist definiert in jedem Intervall J, das einem bestimmten Gebiete der Ebene angehört und dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel laufen. Sie heißt *beschränkt* additiv, wenn $\Phi(J) = \Phi(J_1) + \Phi(J_2) + \ldots + \Phi(J_n)$ ist, wobei das Intervall J in eine *endliche* Anzahl von Teilintervallen $J_1, J_2, \ldots, J_n$ zerfällt [1]). — Konvergiert $\Phi(J)$ in einem Punkte (x, y) des Bereiches immer nach Null, falls J eine Reihe den Punkt als inneren oder Randpunkt enthaltender und sich in den Punkt zusammenziehender Intervalle durchläuft, deren Maß nach Null konvergiert, so heißt die Intervallfunktion stetig in (x, y). — Die obere und untere Derivierte in (x, y), $\overset{+}{D}_{(x, y)} \Phi(J)$ bzw. $\overset{-}{D}_{(x, y)} \Phi(J)$, sollen nun

[1]) Wo im folgenden „additiv" steht, meinen wir „beschränkt additiv".

definiert werden als $\limsup\limits_{m(J)=0} \frac{\Phi(J)}{m(J)}$ und $\liminf\limits_{m(J)=0} \frac{\Phi(J)}{m(J)}$, wobei J ein *Quadrat* darstellt, das (x, y) im Innern oder auf dem Rande enthält[2]). Sind sie einander gleich, so existiert in (x, y) eine Ableitung $D_{(x,y)} \Phi(J)$.

§ 2.

Wenn in einem abgeschlossenen Intervall J, dessen Seitenlängen ein rationales Verhältnis haben, eine additive Intervallfunktion definiert ist, deren untere Derivierte in jedem Punkte > 0 ist, so ist $\Phi(J) \geqq 0$. Ist das Verhältnis der Seitenlängen irrational, so gilt dieselbe Aussage, wenn man noch Stetigkeit der Intervallfunktion in mindestens einem Punkte des abgeschlossenen J annimmt.

Im Falle eines Quadrates führte die Annahme $\Phi(J) < 0$, bei fortgesetzter Vierteilung in Quadrate, zu einem Punkte (x, y) in J, der Randpunkt oder innerer Punkt einer Folge von Quadraten Q_n wäre, deren Maß nach Null konvergierte und für die $\Phi(Q_n) < 0$ wäre. Also würde die untere Derivierte in (x, y) $\leqq 0$ sein entgegen der Voraussetzung.

Ein Intervall mit rationalem Seitenverhältnisse läßt sich in eine endliche Anzahl von Quadraten teilen. Aus der Additivität folgt damit auch in diesem Falle $\Phi(J) \geqq 0$.

Ist schließlich das Seitenverhältnis von J irrational und (x, y) ein Stetigkeitspunkt von Φ, so läßt sich J in zwei oder vier Intervalle I_j teilen [ausgenommen wenn (x, y) Eckpunkt von J ist] mittels der beiden Achsenparallelen durch (x, y). Jedes I_j [oder J selbst] ist wieder zu teilen in eine endliche Anzahl von Quadraten nebst einem Intervall U_j [oder U], das *kein* Quadrat zu sein braucht und (x, y) zum Eckpunkte hat. Dabei kann zufolge der Stetigkeit von Φ in (x, y) jedes Intervall U_j [oder U] so gewählt werden, daß bei positivem ε:

$$|\Phi(U_j)| < \varepsilon \quad [\text{oder } |\Phi(U)| < \varepsilon]$$

ist. Somit ist in jedem Falle:

$$\Phi(J) > -4\varepsilon$$

und, da ε beliebig klein sein darf, ist auch

$$\Phi(J) \geqq 0.$$

Die Voraussetzung $D^- \Phi > 0$ darf durch $D^- \Phi \geqq 0$ ersetzt werden.

---

[2]) Ist Φ definiert im abgeschlossenen Bereiche B, welcher aus einem Gebiete G hervorgeht durch Hinzufügung seiner Randpunkte, so lassen sich die oberen und unteren Derivierten in einem Randpunkte (x, y) definieren mittels der in B liegenden und (x, y) als Randpunkt enthaltenden Quadrate. Auch die Definition der Stetigkeit in einem Randpunkte läßt sich auf analoge Weise geben.

Durch Anwendung des vorherigen Satzes auf die Funktion $\Phi(J) + \varepsilon \cdot m(J)$, wobei ε positiv und beliebig klein, folgt:

$$\Phi(J) + \varepsilon \cdot m(J) \geqq 0.$$

Also für $\lim \varepsilon = 0$ wird:

$$\Phi(J) \geqq 0.$$

§ 3.

Im folgenden wird eine positive, stetige, additive Intervallfunktion konstruiert, deren Derivierten in einer Menge vom Maße Null positiv unendlich werden.

Sei M die ganz beliebige Menge vom Maße Null. Sie läßt sich einschließen in eine Folge von offenen Mengen $O_1 > O_2 > \ldots$, so daß $m(O_k) < \varepsilon_k$ und $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_k + \ldots < \varepsilon$ ist. Die charakteristische Funktion von O_k sei h_k. Dann ist im Intervall J:

$$\iint\limits_J h_k \, dx \, dy = m(O_k \cdot J) \leqq m(O_k) < \varepsilon_k.$$

Für jeden Punkt der Menge O_k ist dann die Ableitung dieses Integrals $= 1$. Setzen wir $\chi_k(J) = \sum\limits_{\nu=1}^{k} \iint\limits_J h_\nu \, dx \, dy$, so ist in O_k: $D_{(x,y)} \chi_k(J) = k$. Da $\chi_k(J) < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_k < \varepsilon$ ist und also $\lim\limits_{k=\infty} \chi_k(J)$ endlich ist, ist nach einem Satze von Levi [3]):

$$\lim_{k=\infty} \chi_k(J) = \lim_{k=\infty} \iint\limits_J \sum_{\nu=1}^{k} h_\nu \, dx \, dy = \iint\limits_J \lim_{k=\infty} \sum_{\nu=1}^{k} h_\nu \, dx \, dy < \varepsilon$$

für jedes Intervall J. Setzen wir $\chi(J) = \lim\limits_{k=\infty} \chi_k(J)$ und $H = \lim\limits_{k=\infty} \sum\limits_{1}^{k} h_\nu$, so ist

$$\chi(J) = \iint\limits_J H \, dx \, dy < \varepsilon$$

die gesuchte Funktion. Denn in M ist $D^{\pm}_{(x,y)} \chi(J) > D_{(x,y)} \chi_k(J) = k$ für jedes ganze, positive k. Weiter ist $\chi(J)$ sogar totalstetig und absolut additiv.

§ 4.

Wenn in einem abgeschlossenen Intervall J, dessen Seitenlängen ein rationales Verhältnis haben, eine additive Intervallfunktion definiert ist, deren untere Derivierte in keinem Punkte $-\infty$ und fast überall $\geqq 0$ ist, so ist auch $\Phi(J) \geqq 0$. Ist das Verhältnis der Seitenlängen irrational, so gilt dieselbe Aussage, wenn man noch Stetigkeit der Intervallfunktion in einem Punkte des abgeschlossenen J annimmt.

---

[3]) Siehe z. B. Schlesinger und Pleßner, Lebesguesche Integrale, Nr. 27 oder Carathéodory, Vorles. über reelle Funktionen, § 383, Satz 4.

M sei die Teilmenge in J, von der man nicht weiß, ob in ihren Punkten $D^- \Phi \geqq 0$ ist. Nun sei $\chi(J)$ das oben angedeutete Beispiel einer positiven, stetigen und additiven Intervallfunktion, deren Derivierten in der Menge M unendlich werden und deren Wert in jedem Intervall $< \varepsilon$ ist. Betrachten wir $\Phi_1(J) = \Phi(J) + \chi(J)$, so ist in allen Punkten des abgeschlossenen Intervalls $D^- \Phi_1 \geqq 0$. Mit § 2 folgt $\Phi_1(J) \geqq 0$, also auch, da $\chi(J)$ willkürlich klein ist, $\Phi(J) \geqq 0$.

§ 5.

Wir ändern die vorangehende Definition der Stetigkeit in der Weise ab, daß wir die Intervallfunktion Φ in jedem Punkte (x, y) eines Gebietes G als stetig betrachten, wenn immer $\lim\limits_{m(J)=0} \Phi(J) = 0$ ist, falls J eine Reihe den Punkt als inneren oder Randpunkt enthaltender Intervalle durchläuft, deren Maß nach Null konvergiert. Das Intervall braucht sich also nicht immer in den Punkt (x, y) zusammenzuziehen [4]). Die vorhergehenden Sätze gelten auch bei dieser Definition ungeändert. Wir können nun hinzufügen:

Ist Φ eine im abgeschlossenen Intervall J definierte, additive Intervallfunktion, welche in J (im abgeänderten Sinne) stetig ist, so ist $\Phi(J) \geqq 0$, falls in J: 1. die untere Derivierte nur in einer abzählbaren Menge E $-\infty$ werden kann, 2. die untere Derivierte fast überall $\geqq 0$ ist.*

Es sei E_n die Vereinigungsmenge aller derjenigen Punkte des abgeschlossenen Intervalls J, welche in J liegenden, abgeschlossenen Quadraten J_n angehören, für die $\frac{\Phi(J_n)}{m(J_n)} < -n$ ist. Hierbei sei n eine positive ganze Zahl. Aus der Stetigkeit* von Φ folgt, daß jeder Randpunkt eines J_n, welcher zugleich innerer Punkt von J ist, auch innerer Punkt eines Quadrates J'_n ist, das 1. J_n enthält, 2. im abgeschlossenen J liegt, und 3. für das ebenfalls $\frac{\Phi(J'_n)}{m(J'_n)} < -n$ ist. Jeder Punkt (x, y) von E_n, welcher zugleich Randpunkt von J ist, ist immer Randpunkt eines Quadrates J_n in J, das so gewählt werden kann, daß (x, y) kein Eckpunkt von J_n ist. Dieser Punkt ist dadurch auch als innerer Punkt eines Intervalls I_n zu betrachten, welches aus diesem J_n hervorgeht durch Verschiebung der durch (x, y) laufenden Seite um einen Abstand $\frac{1}{n}$ nach der Außenseite des Intervalles J. Die aus den inneren Punkten der J_n, (J'_n) und I_n existierenden Menge E'_n ist offen. Der Durchschnitt aller

[4]) Die neue Stetigkeitsdefinition in einem inneren Punkte oder Randpunkte eines abgeschlossenen Bereiches läßt sich auf analoge Weise geben.

dieser offenen Mengen E'_n fällt zusammen mit dem Durchschnitte D aller Mengen E_n. Somit ist D eine innere Grenzmenge.

Nun ist die abzählbare Menge E derjenigen Punkte des abgeschlossenen J, wo $D^- \Phi = -\infty$ ist, mit D identisch. Denn zu jedem Punkte (x, y) des Durchschnittes D gehört ein Intervall J_n aus J, das (x, y) im Innern oder auf dem Rande enthält und so daß $\frac{\Phi(J_n)}{m(J_n)} < -n$ oder $|\Phi(J_n| > n \cdot m(J_n)$ ist. Wäre $\liminf_{n=\infty} m(J_n)$ eine positive Zahl δ, so wäre $\lim_{n=\infty} |\Phi(J_n)| = +\infty$. Es existierte dann eine Folge von Quadraten J_ν aus den J_n und ein in J liegendes Intervall I derartig, daß 1. die Seiten der J_ν mit zunehmendem ν konvergierten gegen die übereinstimmenden Seiten von I, 2. $m(I) \geqq \delta$ und 3. zufolge der Stetigkeit * $|\Phi(I)| = \lim_{\nu=\infty} |\Phi(J_\nu)| = +\infty$ wäre. Da nur endliche Werte von Φ zugelassen sind, ist dies unmöglich. Also ist $\liminf_{n=\infty} m(J_n) = 0$ und gehört dadurch (x, y) zu E. Daß umgekehrt jeder Punkt von E zum Durchschnitt der E_n gehört, ist evident.

Da E abzählbar und innere Grenzmenge ist, ist sie nirgends dicht auf jeder perfekten Menge in J.[5])

Die Menge A der Punkte von J, in deren jeder Umgebung Intervalle I liegen mit $\Phi(I) < 0$, ist abgeschlossen. Es sei (x, y) ein Punkt von A und I ein Intervall aus einer Umgebung von (x, y), so daß $\Phi(I) < 0$ ist. Die Achsenparallelen durch (x, y) teilen I in zwei oder vier Intervalle I_j [ausgenommen, wenn (x, y) Eckpunkt oder äußerer Punkt von I ist]. Aus der Additivität von Φ folgt, daß für eines der I_j: $\Phi(I_j) < 0$ ist. Aus der Stetigkeit* von Φ folgt weiter, daß I_j [oder I] sich durch hinreichend kleine Verschiebung überführen läßt in ein Intervall I'_j [oder I'], das (x, y) nicht enthält und so daß auch $\Phi(I'_j) < 0$ [oder $\Phi(I') < 0$] ist. Fortgesetzte Vierteilung von I'_j [oder I'] zeigt schließlich, daß dieses Intervall einen Punkt von A enthält. Da (x, y) Intervalle I mit $\Phi(I) < 0$ und dadurch auch Punkte von A in einer jeden Umgebung hat, ist (x, y) Häufungspunkt von A. Somit ist A sogar perfekt.

Aus der Definition von A folgt, daß in der Komplementärmenge $(J - A)$: $D^- \Phi \geqq 0$ ist. E muß dadurch eine Untermenge von A sein.

E ist auf A nirgends dicht. A enthält innere Punkte von J. Es existiert dadurch ein offenes Unterintervall U von J, so daß die Menge $(U \cdot A)$ nicht leer ist und auf $(U \cdot A)$: $D^- \Phi \neq -\infty$ ist. In jeder beliebig kleinen Umgebung V eines Punktes von $(U \cdot A)$ ist dann $D^- \Phi \neq -\infty$ auf $(V \cdot A)$ und $\geqq 0$, also auch $\neq -\infty$, auf der Komplementärmenge

[5]) Siehe z. B. Carathéodory, Reelle Funktionen, § 81.

$(V - V \cdot A)$. Nach § 4 wäre somit für jedes Intervall dieser Umgebung $\Phi \geqq 0$ entgegen unserer Annahme. Die Menge A ist leer.

Anwendung auf Φ und $-\Phi$ liefert:

Die im abgeschlossenen Intervall J definierte, stetige, additive Intervallfunktion Φ ist in J identisch Null, falls* 1. *die unteren und oberen Derivierten nur in einer abzählbaren Menge unendlich werden können,* 2. *fast überall beide Derivierten Null sind*[6].

§ 6.

Das Linienintegral: $\int_J p(x, y)\,dx + q(x, y)\,dy$ ist ein Beispiel einer additiven Intervallfunktion. Anwendung des letzten Satzes liefert:

Hauptsatz A: *Es seien $p(x, y)$ und $q(x, y)$ in einem bestimmten (beschränkten) Gebiete G der Ebene nach x bzw. y linear summierbar. Dann ist $\Phi(J) = \int_J p\,dx + q\,dy$ in G identisch Null, falls in G* 1. *$\Phi(J)$ stetig* ist,* 2. *$D^+\Phi$ und $D^-\Phi$ nur in einer abzählbaren Menge unendlich werden können,* 3. *fast überall $D\Phi = 0$ ist*[7].

Sind p und q (zweidimensional) stetig nach x und y, so braucht man nur 2. *und* 3. *anzunehmen.* Denn in jedem in G liegenden, abgeschlossenen Intervall J sind dann p und q beschränkt und gleichmäßig stetig; daraus folgert man leicht, daß Φ stetig* ist in J und dadurch $\equiv 0$ in J, — also auch in G. *Außerdem verschwindet in diesem Falle das Linienintegral über jede einfache, geschlossene, rektifizierbare Kurve in G.*[8]

§ 7.

Verallgemeinerung eines Satzes von Lichtenstein: *In einem (beschränkten) Gebiete G der Ebene ist $\Phi(J) = \int_J p\,dx + q\,dy$ identisch Null, falls p und q diesen Bedingungen genügen:*

---

[6] *Statt* 2. genügt auch: *$D^+\Phi$ [oder $D^-\Phi$] ist fast überall Null.* — Für den Beweis und für weitere Sätze über additive Intervallfunktionen in der Ebene siehe einen im Nieuw Archief voor Wiskunde (Amsterdam) (2) 16, 1 (1929) erschienenen Artikel.

[7] *Statt* 3. genügt auch: *$D^+\Phi$ [oder $D^-\Phi$] ist fast überall Null in G.* — Vgl loc. cit. [6], § 8.

[8] Siehe für den Beweis des letzten Teiles: Pollard, Proc. of the London Math. Soc. (2) 21 (1923), § 8 (B) and (C). Dort wird bewiesen: „Wenn in einem beschränkten Gebiete G das Linienintegral einer stetigen Funktion $f(z)$, wobei $z = x + iy$, über den Rand eines jeden abgeschlossenen Intervalls verschwindet, so gilt dasselbe über jede einfache, geschlossene, rektifizierbare Kurve in G." Die Übertragung des Beweises für den im Texte gegebenen, reellen Fall bietet keine Schwierigkeiten.

1. *sie sind in jedem in G liegenden, abgeschlossenen Bereiche beschränkt und in G in bezug auf jede einzelne Variable stetig,*

2. *„mit Ausnahme einer höchstens abzählbaren Menge E" existiert für jeden Punkt von G eine bestimmte Umgebung folgender Art:*

$$\frac{1}{h}[\delta_x q(x, y) - \delta_y p(x, y)]$$

ist für alle Wertepaare (x, y) aus dieser Umgebung „jedoch bei Vernachlässigung einer Menge vom Maße Null" und alle Werte von $h > 0$ dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke,

3. *fast überall in G ist*

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h}[\delta_x q(x, y) - \delta_y p(x, y)] = 0, \qquad h > 0.$$

Hierbei ist

$$\delta_x q(x, y) = q(x+h, y) - q(x, y) \text{ und } \delta_y p(x, y) = p(x, y+h) - p(x, y).$$

In jedem in G liegenden, abgeschlossenen Intervall I ist nach 1. $p(x, y)$ beschränkt. Es sei A die obere Schranke und (ξ, η) ein willkürlicher Punkt in I. Dann ist für jedes abgeschlossene Intervall J, das in I liegt und dessen untere oder obere Seite (mit der Länge h) durch (ξ, η) geht:

$$\left|\int_J p\,dx\right| \leqq A \times 2h. \tag{1}$$

Also konvergiert $\int_J p\,dy$ nach Null, wenn h willkürlich klein wird.

Für jedes abgeschlossene Intervall J_n $[x_1 \leqq x \leqq x_2;\ \eta \leqq y \leqq d_n$ oder $d_n \leqq y \leqq \eta]$ in I, dessen Horizontalseite mit Ordinate d_n sich mit zunehmendem n der anderen Seite nähert, ohne daß diese in Länge oder Lage sich ändert, folgt durch Anwendung eines Satzes von Lebesgue (über Grenzübergang unter dem Integralzeichen bei gleichmäßig beschränkten Funktionen):

$$\lim_{d_n=\eta} \int_{x_1}^{x_2} p(x, d_n)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \lim_{d_n=\eta} p(x, d_n)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} p(x, d)\,dx.$$

Also:

$$\lim_{d_n=\eta} \int_{J_n} p\,dx = 0. \tag{2}$$

Aus dem Beweise des Lebesgueschen Satzes[9]) geht weiter hervor, daß das in (2) enthaltene Integral sich mit zunehmendem n der Null gleichmäßig nähert, wenn man als Integrationsgrenzen alle möglichen x_1 und x_2 zuläßt, welche der Bedingung: $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ genügen.

---

[9]) Siehe z. B. de la Vallée Poussin, Intégrales de Lebesgue, etc. (Coll. Borel), § 39.

Hierdurch und mit (1) folgert man leicht, daß $\int\limits_J p\,dx$ stetig* ist in I. Dasselbe gilt von $\int\limits_J q\,dy$; also auch von $\Phi(J)$.

Aus 1. folgt, daß $p(x, y)$ und $q(x, y)$ zur ersten Baireschen Klasse gehören[10]) und somit in jedem abgeschlossenen Bereiche in G summierbar sind. Nach dem Satze von Lebesgue folgt aus 2. und 3. für jedes Intervall J in einer bestimmten Umgebung eines jeden Punktes (ξ, η) „mit Ausnahme der höchstens abzählbaren Menge E“:

$$(3)\qquad \begin{aligned} &\lim_{h=0} \frac{1}{h}\iint\limits_J [\delta_x\, q(x,y) - \delta_y\, p(x,y)]\,dx\,dy \\ &= \iint\limits_J \lim_{h=0} \frac{1}{h}[\delta_x\, q(x,y) - \delta_y\, p(x,y)]\,dx\,dy = 0\,. \end{aligned}$$

Betrachten wir das Integral:

$$\iint\limits_J \frac{1}{h}[\delta_x q(x, y) - \delta_y p(x, y)]\,dx\,dy = \frac{1}{h}\iint\limits_J [q(x+h, y) - q(x, y)]\,dx\,dy$$

$$-\frac{1}{h}\iint\limits_J [p(x, y+h) - p(x, y)]\,dx\,dy = \frac{1}{h}\iint\limits_{J_1} q(x, y)\,dx\,dy - \frac{1}{h}\iint\limits_{J_2} q(x, y)\,dx\,dy$$

$$-\frac{1}{h}\iint\limits_{J_3} p(x, y)\,dx\,dy + \frac{1}{h}\iint\limits_{J_4} p(x, y)\,dx\,dy.$$

Genügen die Koordinaten von J den Ungleichungen: $\alpha \leqq x \leqq \beta$, $\gamma \leqq y \leqq \delta$, so gilt für J_1: $\beta \leqq x \leqq \beta + h$, $\gamma \leqq y \leqq \delta$; für J_2: $\alpha \leqq x \leqq \alpha + h$, $\gamma \leqq y \leqq \delta$; für J_3: $\alpha \leqq x \leqq \beta$, $\delta \leqq y \leqq \delta + h$; und für J_4: $\alpha \leqq x \leqq \beta$, $\gamma \leqq y \leqq \gamma + h$.

Nach einem Satze von Fubini ist:

$$\frac{1}{h}\iint\limits_{J_1} q(x, y)\,dx\,dy = \frac{1}{h}\int\limits_{\beta}^{\beta+h} dx \int\limits_{\gamma}^{\delta} q(x, y)\,dy.$$

Da $q(x, y)$ stetig nach x ist und beschränkt im abgeschlossenen Intervall J_1, ist auch $\int\limits_{\gamma}^{\delta} q(x, y)\,dy$ stetig nach x bei $\beta \leqq x \leqq \beta + h$. Daraus folgt:

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h}\iint\limits_{J_1} q(x, y)\,dx\,dy = \lim_{h=0} \frac{1}{h}\int\limits_{\beta}^{\beta+h} dx \int\limits_{\gamma}^{\delta} q(x, y)\,dy = \int\limits_{\gamma}^{\delta} q(\beta, y)\,dy.$$

Wendet man denselben Grenzübergang an auf die über J_2, J_3 und J_4 er-

[10]) Siehe z. B. **Carathéodory**, **Reelle Funktionen**, § 558 **Satz 2.**

streckten Doppelintegrale, so liefert Addition schließlich:

$$(4) \qquad \lim_{h=0} \frac{1}{h} \iint_J [\delta_x q(x, y) - \delta_y p(x, y)]\, dx\, dy = \int_J p\, dx + q\, dy.$$

Aus (3) und (4) folgt, daß $D\,\Phi = 0$ ist in jedem Punkte von G, die Menge E vielleicht ausgenommen. Demnach liefert Anwendung des Hauptsatzes A, daß $\Phi(J) \equiv 0$ ist in G[11]).

Korollar, Verallgemeinerung eines Montelschen Satzes:

$$\Phi(J) = \int_J p\, dx + q\, dy \ \mathit{ist} \ \equiv 0$$

im Gebiete G unter den Bedingungen:

1. *p und q sind in jedem in G liegenden, abgeschlossenen Bereiche beschränkt und in bezug auf jede einzelne Variable stetig;*

2. *„mit Ausnahme einer höchstens abzählbaren Menge E“ existiert für jeden Punkt P von G eine bestimmte Umgebung folgender Art: Die oberen und unteren Derivierten von p nach y und von q nach x sind in dieser Umgebung beschränkt „bei Vernachlässigung einer abzählbaren Menge von Punkten in dieser Umgebung“* [12]);

3. *fast überall in G ist $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$.*

Nach einem Satze von Lebesgue[13]) folgt aus Beschränktheit im Sinne von 2. auch Beschränktheit jener Derivierten, wenn in der betrachteten Umgebung des Punktes P keine abzählbare Menge vernachlässigt wird. Da nach Dini bei Funktionen einer Veränderlichen die oberen und unteren Derivierten und die zugehörigen Differenzenquotienten in einem abgeschlossenen Intervall dieselben oberen und unteren Schranken haben[14]), so sind hier in der Umgebung von P die Differenzenquotienten von p nach y gleichmäßig beschränkt auf allen Parallelen zur y-Achse, also beschränkt in der ganzen Umgebung von P. Das letztere gilt auch von den Differenzenquotienten von q nach x. Damit sind alle Bedingungen des verallgemeinerten Lichtensteinschen Satzes erfüllt.

§ 8.

Satz: *Im (beschränkten) Gebiete G existieren zwei abzählbare Mengen E_1 und E_2, so daß für die in G definierten Funktionen $p(x, y)$ und $q(x, y)$ folgendes gilt:*

---

[11]) Vgl. Lichtenstein, Sitzungsber. Berliner Math. Ges. (1910), Satz III und Beweis.

[12]) Hieraus folgt Stetigkeit nach x und y von beiden Funktionen in P.

[13]) Siehe Lebesgue, Leçons sur l'intégration (Coll. Borel), p. 80.

[14]) Siehe z. B. Carathéodory, Reelle Funktionen, § 476, Satz 5.

1. *p und q sind in G linear stetig nach x und nach y;*

2. *in jedem Punkte von $(G - E_1)$ sind die partiellen oberen und unteren Derivierten von p nach y und von q nach x endlich;*

3. *für jeden Punkt von $(G - E_2)$ existiert eine Umgebung U, in der $\frac{\partial p}{\partial y}$ und $\frac{\partial q}{\partial x}$ summierbar sind auf der Teilmenge von U, auf der beide existieren;*

4. *fast überall ist $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ auf derjenigen Menge in G, auf der beide existieren;*

5. *$\Phi(J) = \int_J p\,dx + q\,dy$ ist stetig* in den Punkten von E_2.*[15]

Dann ist in G: $\Phi \equiv 0$.

Da p und q stetig sind nach x und nach y, sind sie als Funktionen von zwei Veränderlichen meßbar[16]. Die Mengen K_1 und K_2 in G, auf der $\frac{\partial p}{\partial y}$ bzw. $\frac{\partial q}{\partial x}$ existiert, sind dadurch auch meßbar[16]. Da die oberen und und unteren Derivierten von p nach y auf einer Parallelen zur y-Achse nur in einer abzählbaren Menge unendlich werden können, so sind sie, nach einem Satze von Montel und Denjoy[17], auf der Parallelen einander gleich außer in einer linearen Nullmenge. Daraus folgt, daß K_1 und G gleiches Flächenmaß haben. Dasselbe gilt von K_2 und G. Somit existieren beide Ableitungen fast überall in G gleichzeitig.

Nehmen wir $\frac{\partial p}{\partial y}$ und $\frac{\partial q}{\partial x}$ gleich Null dort wo die partiellen Ableitungen nicht existieren. Dann ist in einer bestimmten Umgebung eines jeden Punktes von $(G - E_2)$ für ein willkürliches Intervall J $[x_1 \leqq x \leqq x_2;\ y_1 \leqq y \leqq y_2]$:

$$\iint_J \frac{\partial p}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial p}{\partial y}\,dy.$$

Für jeden Wert von x, für den das innere Integral existiert, ist, da $\frac{\partial p}{\partial y}$ höchstens abzählbar viele Unendlichkeitsstellen hat und p stetig ist nach y:

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial p}{\partial y}\,dy = p(x, y_2) - p(x, y_1)\ {}^{18)}.$$

[15] Diese Bedingung darf man fortlassen, wenn unter 1. (zwei-dimensionale) Stetigkeit von p und q nach x und y angenommen wird (vgl. § 6). Dann ist außerdem das Linienintegral Null über jede einfache geschlossene rektifizierbare Kurve in G. — In der Formulierung des Satzes sind dann auch die Mengen E_1 und E_2 zusammenzufassen.

[16] Siehe z. B. Carathéodory, Reelle Funktionen, § 558, Satz 2 und § 557, Satz 1.

[17] Siehe z. B. Hobson, Theory of functions I, § 298.

[18] Nach Carathéodory, Reelle Funktionen, § 527, Satz 4.

Somit ist:

$$\iint_J \frac{\partial p}{\partial y}\, dx\, dy = \int_{x_1}^{x_2} [p(x, y_2) - p(x, y_1)]\, dx,$$

oder da $\int_{x_1}^{x_2} p(x, y_2)\, dx$ und $\int_{x_1}^{x_2} p(x, y_1)\, dx$ nach 1. existieren, auch:

$$\iint_J \frac{\partial p}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_J p\, dx. \tag{5}$$

Auf dieselbe Weise läßt sich zeigen:

$$\iint_J \frac{\partial q}{\partial x}\, dx\, dy = \int_J q\, dy. \tag{6}$$

Nach 4. liefert Subtraktion von (5) und (6):

$$\int_J p\, dx + q\, dy = 0.$$

Auf $(G - E_2)$ ist dadurch $D\Phi = 0$.

In jedem in G liegenden abgeschlossenen Intervall $J[x_1 \leqq x \leqq x_2;\ y_1 \leqq y \leqq y_2]$ ist Φ stetig* in den Punkten von $(J \cdot E_2)$.

Es sei (ξ, η) ein innerer Punkt von $(J - J \cdot E_2)$. Enthält die Parallele L_η zur x-Achse durch (ξ, η) keinen Punkt von $(J \cdot E_2)$, so existiert für jeden Punkt von $(L_\eta \cdot J)$ eine Umgebung, in der $\Phi \equiv 0$ ist. Daraus folgt durch Anwendung des bekannten Borelschen Lemmas, daß es ein abgeschlossenes Intervall $J_1\ [x_1 \leqq x \leqq x_2;\ y_3 \leqq y \leqq y_4]$ gibt mit $y_1 \leqq y_3 < \eta \leqq y_4 \leqq y_2$, so daß auch in J_1: $\Phi \equiv 0$ ist. Somit ist $\lim\limits_{m(I_n)=0} \Phi(I_n) = 0$, wenn I_n eine abzählbare Folge von Intervallen durchläuft, die (ξ, η) im Innern oder auf dem Rande enthalten, ganz in J liegen und deren Vertikalseiten nach Null konvergierende Längen haben.

Enthält L_η dagegen Punkte von $(J \cdot E_2)$, so ist die Durchschnittsmenge D von L_η und $(J \cdot E_2)$ abgeschlossen, da auch E_2 zufolge ihrer Definition abgeschlossen ist. Es sei (ξ_2, η) die obere Schranke derjenigen Punkte von D, welche auf der linken Seite von (ξ, η) liegen, und (ξ_3, η) die untere Schranke der Punkte von D, auf der rechten Seite von (ξ, η). Nehmen wir vorläufig die Existenz beider Teilmengen an. Dann zerfällt $(L_\eta \cdot J)$ durch (ξ_1, η) und (ξ_2, η) in drei Teile, von links nach rechts: $L_1\ [x_1 \leqq x \leqq \xi_1]$, $L_2\ [\xi_1 \leqq x \leqq \xi_2]$ und $L_3\ [\xi_2 \leqq x \leqq x_2]$.

Für eine Folge von in J liegenden Intervallen I_n, welche (ξ, η) im Innern oder auf dem Rande enthalten, deren Vertikalseiten nach Null konvergierende Längen haben und deren linke Seiten L_1 überschneiden, ist $\lim\limits_{n=\infty} \Phi(I_n) = 0$. Denn alle I_n enthalten als inneren Punkt oder Randpunkt (ξ_1, η). Eine auf analoge Weise definierte Folge von Intervallen U_n, welche (ξ, η) enthalten und L_2 überschneiden, hat dieselbe Eigenschaft, da alle U_n (ξ_2, η) enthalten.

Eine Folge von Intervallen V_n, welche (ξ, η) enthalten, deren Vertikalseiten sich der Null nähern und deren x-Koordinaten alle im abgeschlossenen Intervall (ξ_1, ξ_2) liegen, hat auch die Eigenschaft: $\lim\limits_{n=\infty} \Phi(V_n) = 0$. Denn bei willkürlich positivem ε existieren Umgebungen (Intervalle) W_1 und W_2 von (ξ_1, η) bzw. (ξ_2, η), in denen $|\Phi| < \varepsilon$ bleibt für diejenigen Intervalle, welche (ξ_1, η) oder (ξ_2, η) enthalten. Die abgeschlossene Strecke S_1, welche W_1 und W_2 aus L_2 hinausschneiden, liegt ganz im Innern eines Intervalls W_3, in dem $\Phi \equiv 0$ ist. Daraus folgt, daß im Innern von $W_1 + W_2 + W_3$: $|\Phi| < 4\varepsilon$ ist für alle Intervalle, welche (ξ, η) enthalten. Da jedoch V_n für genügend großes n ganz im Innern von $W_1 + W_2 + W_3$ liegt und ε willkürlich positiv ist, ist die Konvergenz bewiesen.

Man folgert nun leicht, daß auch, wenn die Überschneidungen mit L_η willkürlich liegen, die Konvergenz nach Null stattfindet; so auch in den Fällen, wo D auf L_η nicht an „beiden" Seiten von (ξ, η) Punkte besitzt.

Übereinstimmende Betrachtungen gelten, wenn man Intervallfolgen um (ξ, η) betrachtet, deren Horizontalseiten nach Null konvergierende Längen besitzen.

Somit wird auch eine jede Folge von abgeschlossenen Intervallen, welche (ξ, η) enthalten, in J liegen und deren Maß nach Null konvergiert, nach Null konvergierende Werte von Φ geben. Das heißt: in J ist Φ auch stetig* in den nicht zu E_2 gehörigen inneren Punkten.

Im offenen Intervall J sind die Bedingungen des Hauptsatzes A erfüllt. Daraus folgt: $\Phi \equiv 0$ in J, also auch in G.

§ 9.

Es sei $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Dann läßt sich $\int\limits_J f(z)\,dz$ schreiben als $\int\limits_J u\,dx - v\,dy + i\int\limits_J v\,dx + u\,dy = \Phi_1(J) + i\Phi_2(J)$. Wir definieren $D\Phi = D\Phi_1 + iD\Phi_2$ und betrachten Φ als stetig*, wenn Φ_1 und Φ_2 es sind. Anwendung vom Hauptsatze A auf die reellen und imaginären Teile des Linienintegrals liefert:

„Es seien $u(x,y)$ und $v(x,y)$ in einem (beschränkten) Gebiete G der Ebene nach x und nach y linear summierbar. Dann ist

$$\Phi(J) = \int\limits_J f(z)\,dz = \Phi_1(J) + i\Phi_2(J)$$

in G identisch Null, falls in G: 1. $\Phi(J)$ stetig* ist, 2. die oberen und unteren Derivierten von Φ_1 und Φ_2 nur in einer abzählbaren Menge unendlich werden können[19]), 3. fast überall $D\Phi = 0$ ist"[20]).

Von Rademacher wurde bewiesen:

„Ist $g(z)$ eine komplexe Funktion im beschränkten Gebiete G der Ebene der $z = x + iy$, deren Real- und Imaginärteil für sich in G summierbar und auf jeder in G liegenden achsenparallelen Strecke auch linear summierbar sind, und ist für jeden achsenparallelen Rechtecksrand C, der samt seinem Innern in G liegt,

$$\int_C g(z)\,dz = 0,$$

so existiert eine analytische Funktion, welche in G fast überall mit $g(z)$ zusammenfällt.

$g(z)$ ist mit dieser analytischen Funktion identisch in G, wenn:

a) $g(z)$ stetig ist nach x oder nach y in G, oder:

b) $g(z)$ auf allen in G liegenden, abgeschlossenen Strecken, welche einer fest gewählten Achse parallel laufen, beschränkt ist und approximativ stetig als Funktion der zugehörigen Veränderlichen"[21]).

---

[19]) Oder in jedem Punkte von G, vielleicht mit Ausnahme einer abzählbaren Menge, $\limsup\limits_{m(J)=0} \dfrac{|\Phi(J)|}{m(J)}$ endlich ist, wobei der betrachtete Punkt im Innern oder auf dem Rande des *Quadrates* J liegt (vgl. § 1).

[20]) Statt 3. genügt: „aus einer jeden der beiden Gruppen $[D^-\Phi_1, D^+\Phi_1]$ und $[D^-\Phi_2, D^+\Phi_2]$ ist eine der Derivierten fast überall in G gleich Null". Und auch: „$\liminf\limits_{m(J)=0} \dfrac{|\Phi(J)|}{m(J)} = 0$ fast überall in G, wobei das *Quadrat* J sich auf (x, y) zusammenzieht (vgl. § 1)." — Vgl. für den Beweis der letzten Behauptung loc. cit. [6]) § 8 und § 19.

[21]) Siehe Rademacher, Math. Zeitschr. 4 (1919), Satz I. — Die Formulierung des Satzes ist in der zitierten Arbeit nicht ganz richtig; dort wird, ohne Bedingung a) oder b) anzunehmen, aus den „übrigen", oben im Texte gegebenen Bedingungen gefolgert: „$g(z)$ ist analytisch regulär in G". Jedoch genügt eine Funktion $g(z)$, gleich Null in allen Punkten (x, y), deren beide Koordinaten rational sind, und gleich Eins in den übrigen Punkten der Ebene, den „übrigen" Bedingungen, ohne selbst analytisch regulär zu sein; ein sehr einfaches Beispiel dieser Art ist eine Funktion, gleich Null in einem bestimmten Punkte P und gleich Eins in allen übrigen Punkten. — Rademacher zeigt, daß im Innern eines in G liegenden, abgeschlossenen Intervalls J $[x_1 \leqq x \leqq x_2;\ y_1 \leqq y \leqq y_2]$ die Funktion:

$$G(z) = G(x+iy) = \int_{x_1}^{x} g(\xi + iy_1)\,d\xi + i\int_{y_1}^{y} g(x + i\eta)\,d\eta$$

analytisch regulär ist. Die Ableitung von $G(z)$ nach z ist eine analytische Funktion, welche im allgemeinen „fast überall" in J mit $g(z)$ übereinstimmt. In den unter

(Fortsetzung der Fußnote [21]) auf nächster Seite.)

Definitionen. „Eine reelle Funktion $f(x)$, die in der Umgebung eines Punktes ξ definiert ist, heißt an der Stelle ξ approximativ stetig, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ die Menge $\mathfrak{M}(\xi, \varepsilon)$ der Punkte x, für die

$$|f(x) - f(\xi)| < \varepsilon$$

ist, im Punkte ξ die *innere* Dichte 1 hat.

Das soll bedeuten:

$$\liminf_{m(J)=0} \frac{m_i[\mathfrak{M}(\xi, \varepsilon)\cdot J]}{m(J)} = 1,$$

wobei J ein Intervall mit Mittelpunkte ξ-, $(\mathfrak{M}\cdot J)$ den Durchschnitt der Mengen $\mathfrak{M}$ und J- und $m_i[\mathfrak{M}\cdot J]$ das innere Maß des Durchschnittes bedeutet." — „$g(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ist approximativ stetig nach x oder y, wenn u und v es sind."

Aus den beiden vorherigen Sätzen läßt sich nun folgern:

Hauptsatz B. *$h(z)$ sei eine komplexe Funktion im (beschränkten) Gebiete G der Ebene, deren Real- und Imaginärteil für sich in jedem in G liegenden, abgeschlossenen Bereiche B summierbar und auf jeder achsenparallelen Strecke in B auch linear summierbar sind.*

Für die Intervallfunktion $\Phi(J) = \int_J h(z)\,dz$ soll folgendes gelten: 1. $\Phi(J)$ ist stetig in jedem abgeschlossenen Bereich in G, 2. bei Gebrauch von Quadraten J kann $\limsup_{m(J)=0} \frac{|\Phi(J)|}{m(J)}$ nur in einer abzählbaren Menge in G unendlich werden, 3. fast überall in G ist $D\Phi = 0$.*[22])

Dann existiert eine in G analytische Funktion, welche fast überall in G mit $h(z)$ übereinstimmt.

$h(z)$ ist mit dieser analytischen Funktion identisch in G, wenn:

a) *$h(z)$ stetig ist nach x oder nach y in G, oder:*

---

a) und b) gegebenen Fällen hat man völlige Übereinstimmung. Im Falle b) folgt dies durch Anwendung des Satzes: „Eine in (a, b) approximativ stetige, beschränkte Funktion ist in allen Punkten von (a, b) die Ableitung ihres unbestimmten Integrals" (siehe Denjoy, Bulletin Soc. Math. 1915, S. 172 u. 173).

[22]) Siehe Fußnote [20]). — Nimmt man statt 3. als Bedingung: „$\liminf_{m(J)=0} \frac{|\Phi(J)|}{m(J)} = 0$ *fast überall in G, bei Gebrauch von Quadraten J*", so ist ein Spezialfall des obigen Satzes der folgende, Looman-Wolffsche Satz: *Im beschränkten Gebiete G ist $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analytisch regulär, falls: 1. u und v in G (zwei-dim.) stetig sind nach x und y,* 2. $\limsup_{m(J)=0} \frac{|\Psi(J)|}{m(J)}$, *wobei im Quadrate J: $\Psi(J) = \int_J f(z)\,dz$ ist, endlich ist in den Punkten von G vielleicht mit Ausnahme einer abzählbaren Menge,* 3. $\liminf_{m(J)=0} \frac{|\Psi(J)|}{m(J)} = 0$ *ist (bei Gebrauch von Quadraten) fast überall in G.* Siehe Nieuw Archief (Amsterdam) (2) **14**, 3 (1924), Looman und **14**, 4 (1925), Wolff.

b) *$h(z)$ auf allen in G liegenden, abgeschlossenen Strecken, welche einer fest gewählten Achse parallel laufen, beschränkt ist und approximativ stetig als Funktion der zugehörigen Veränderlichen*[23])[23a]).

Man hat zum Beweise nur die beiden ersten Sätze dieses Paragraphen anzuwenden in jedem Bereiche B, der nebst seinem Rande in G liegt.

§ 10.

Der Satz von § 7 läßt sich auf komplexes Gebiet übertragen. Das Resultat ist die folgende

Verallgemeinerung eines Satzes von Lichtenstein: *In einem (beschränkten) Gebiete G der Ebene ist $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ analytisch regulär falls u und v diesen Bedingungen genügen:*

1. *sie sind in jedem in G liegenden, abgeschlossenen Bereiche beschränkt und in G in bezug auf jede einzelne Variable stetig;*

2. *„mit Ausnahme einer höchstens abzählbaren Menge E" existiert für jeden Punkt von G eine bestimmte Umgebung folgender Art:*

$$\frac{1}{h}[i\,\delta_x f(z) - \delta_y(z)]$$

ist für alle Werte z aus dieser Umgebung, „jedoch bei Vernachlässigung einer Menge vom Maße Null", und alle Werte $h > 0$ dem absoluten Betrage nach unterhalb einer endlichen Schranke;

3. *fast überall in G ist*

$$\lim_{h=0} \frac{1}{h}[i\,\delta_x f(z) - \delta_y f(z)] = 0, \quad h > 0.$$

Hierbei ist

$$\delta_x f(z) = f(x + h + iy) - f(x + iy)$$

und

$$\delta_y f(z) = f[x + i(y + h)] - f(x + iy).$$[24])

---

[23]) Wir haben Satz B (in seiner ersten Hälfte) in dieser etwas weitläufigen Formulierung gegeben und nicht in der einfacheren Form, welche Satz A gegeben wurde, damit deutlicher hervortritt, daß er den Looman-Wolffschen Satz umfaßt (wenn man in Satz B statt 3. die in Fußnote [20]) zuletzt genannte Bedingung einsetzt). Denn aus Stetigkeit von u und v in G nach x und y (siehe Fußnote [22])) folgt ohne weiteres nur Summierbarkeit von u und v, und Stetigkeit* von $\Psi(J)$ in jedem in G liegenden, abgeschlossenen Bereiche (vgl. § 6, letzten Teil).

[23a]) Bemerkung bei der Korrektur. Es läßt sich im Texte hinzufügen: *oder* c) *wenn zu jedem Punkte z von G eine Menge existiert, auf einer der Parallelen zur x- und y-Achse durch z, welche in z eine positive obere Dichte hat und auf der $h(z)$ stetig ist in z.*

[24]) Vgl. Lichtenstein, loc. cit. [11]) Satz IV.

Der Beweis kann auf zweierlei Art geführt werden. Erstens kann man zeigen, daß wenn

$$\Phi(J) = \int_J f(z)\,dz = \int_J u\,dx - v\,dy + i\int_J v\,dx + u\,dy = \Phi_1(J) + i\,\Phi_2(J)$$

ist, die Intervallfunktionen Φ_1 und Φ_2 den Bedingungen des Satzes von § 7 genügen und somit in G identisch Null sind. Dann sind in G auch Φ und $D\Phi$ identisch Null und daraus folgt nach dem Satze von Rademacher (§ 9) [oder nach Hauptsatz B], daß $f(z)$ in G analytisch regulär ist.

Zweitens ist es möglich, der in § 7 gegebenen Beweismethode folgend, ohne $f(z)$ und $\Phi(J)$ in reelle und imaginäre Bestandteile zu trennen, zu zeigen, daß Φ stetig* ist in jedem abgeschlossenen Intervall I in G und daß $D\Phi = 0$ ist in den Punkten von $(G - E)$. Darauf liefert Anwendung des Hauptsatzes B das gesuchte Resultat.

Korollar, Verallgemeinerung eines Satzes von Pompéiu (-Montel): *$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ist im (beschränkten) Gebiete G analytisch regulär unter den Bedingungen:*

1. *u und v sind in jedem in G liegenden, abgeschlossenen Bereiche beschränkt und in bezug auf jede einzelne Variable stetig;*

2. *„mit Ausnahme einer höchstens abzählbaren Menge E" existiert für jeden Punkt P von G eine bestimmte Umgebung folgender Art: Die oberen und unteren Derivierten von u und v nach x und y sind beschränkt in dieser Umgebung „bei Vernachlässigung einer abzählbaren Menge von Punkten der Umgebung[25])";*

3. *fast überall in G ist:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$ [26])

§ 11.

Schließlich erhalten wir die beiden folgenden, etwas verallgemeinerten Sätze von Rademacher:

I. *Die komplexe Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ist analytisch regulär in G unter den Bedingungen:*

1. *in jedem abgeschlossenen Bereiche in G ist $f(z)$ flächenhaft summierbar und in x und in y für sich linear totalstetig;*

---

[25]) Siehe Fußnote [12]).

[26]) Vgl. für die Herleitung aus dem ersten Satze dieses Paragraphen das Ende von § 7.

2. *fast überall genügen die partiellen Ableitungen von u und v den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf derjenigen Menge in G, auf der alle vier existieren;*

3. *sie sind in einer Umgebung eines jeden Punktes z in G „mit Ausnahme einer abzählbaren Menge E" summierbar auf der Teilmenge dieser Umgebung, auf der alle vier existieren;*

4. $\Phi(J) = \int_J f(z)\,dz$ *ist stetig* in den Punkten der unter 3. genannten Menge E.* [27])

Daß die partiellen Ableitungen von u und v flächenhaft meßbar sind, folgt aus 1. Aus der Totalstetigkeit von u nach y folgt, daß $\frac{\partial u}{\partial y}$ in G fast überall auf jeder Parallelen zur y-Achse existiert[28]) und dadurch auch fast überall in G. Das letztere gilt auch von den drei übrigen Ableitungen. Dadurch existieren, nach 2, die C.-R. Diff.-Gl. fast überall in G.

Nehmen wir $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ und $\frac{\partial v}{\partial y}$ gleich Null dort, wo sie nicht existieren. Dann ist in einer bestimmten Umgebung eines jeden Punktes von $(G - E)$ für ein willkürliches Intervall J $[x_1 \leqq x \leqq x_2;\ y_1 \leqq y \leqq y_2]$ (nach 3. und 1.):

$$\iint_J \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial u}{\partial y}\,dy = \int_{x_1}^{x_2} [u(x, y_2) - u(x, y_1)]\,dx = -\int_J u\,dx \text{ }^{28)}.$$

Analoge Identitäten existieren für die andern Ableitungen. Sie liefern zusammen:

$$\int_J f(z)\,dz = \int_J u\,dx - v\,dy + i\int_J v\,dx + u\,dy$$

$$= -\iint_J \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy + i\iint_J \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy = 0.$$

Auf $(G - E)$ ist dadurch $D\Phi = 0$.

Weiter ist, wie in § 8, zu beweisen, daß Φ stetig* ist in jedem abgeschlossenen J aus dem Gebiete G.

Nach Hauptsatz B ist nun $f(z)$ analytisch regulär in G.

II. *Im (beschränkten) Gebiete G existieren zwei abzählbare Mengen E_1 und E_2, so daß für die in G definierte Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ gilt:*

1. *$f(z)$ ist in G linear stetig nach x und nach y, und auf jedem in G liegenden abgeschlossenen Bereiche summierbar;*

---

[27]) Vgl. Rademacher, loc. cit. [21]) Satz II, und Pollard, loc. cit. [8]) § 9. — Ein entsprechender Satz existiert für den reellen Fall.

[28]) Siehe z. B. Carathéodory, Reelle Funktionen, § 485, Satz 2.

2. *in jedem Punkte von* $(G - E_1)$ *sind die partiellen, oberen und unteren Derivierten von* u *und* v *nach* x *und* y *endlich;*

3. *für jeden Punkt von* $(G - E_2)$ *existiert eine Umgebung* U, *in der alle partiellen Ableitungen von* u *und* v *auf der Teilmenge von* U *summierbar sind, auf der alle existieren;*

4. *die partiellen Ableitungen genügen den C.-R. Differentialgleichungen fast überall auf derjenigen Menge in* G, *auf der alle vier existieren;*

5. $\Phi(J) = \int_J f(z)\,dz$ *ist stetig* in den Punkten von* E_2.

Dann ist $f(z)$ *analytisch regulär in* G [29]).

Das Beweisverfahren des § 8 ergibt, daß auf $(G - E_2)$: $D\Phi = 0$ ist und daß Φ stetig* ist in jedem abgeschlossenen, in G liegenden Intervall. Damit sind die Bedingungen des Hauptsatzes B in G erfüllt.

§ 12.

In den Schlußparagraphen werden zwei Sätze C und D abgeleitet, welche neuere Bedingungen enthalten, unter denen sich der Cauchysche Integralsatz im reellen Fall bzw. die analytische Regularität von $f(z)$ im komplexen Fall zeigen läßt. Voran gehen einige Hilfssätze.

$f(x, y)$ sei eine im beschränkten Gebiete G definierte, reelle Funktion, für die definiert wird:

$$w_f(x, y; \varrho) = \text{obere Grenze von } \left| \frac{f(x+h, y+k) - f(x, y)}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \quad \text{für } 0 < h^2 + k^2 \leqq \varrho^2$$

und

$$L_f(x, y) = \lim_{\varrho = 0} w_f(x, y; \varrho).$$

Ist $f(x, y)$ *linear stetig nach* x *und nach* y, *so läßt sich zeigen, daß* $L_f(x, y)$ *flächenhaft meßbar ist.* Wir betrachten dazu zwei abzählbare Folgen von positiven und negativen Zahlen $h_1, h_2, \ldots$ und $k_1, k_2, \ldots$, welche im Intervall $(-\varrho, +\varrho)$ überall dicht liegen (ϱ positiv). Es sei

$$W_f(x, y; \varrho) = \text{obere Grenze von } \left| \frac{f(x+h_i, y+k_j) - f(x, y)}{\sqrt{h_i^2 + k_j^2}} \right| \quad \text{für } 0 < h_i^2 + k_j^2 \leqq \varrho^2.$$

Dann läßt sich aus der linearen Stetigkeit von $f(x, y)$ nach x und nach y folgern, daß $w_f(x, y; \varrho)$ und $W_f(x, y; \varrho)$ identisch sind in jedem Punkte eines abgeschlossenen Bereiches B in G. Wir wählen ϱ so klein, daß alle Punkte im Innern von oder auf dem Kreise, um einen willkürlichen Punkt

---

[29]) Vgl. Rademacher, loc. cit. [21]) Satz III.

des abgeschlossenen B mit dem Radius ϱ beschrieben, in G liegen. In B ist $W_f(x, y; \varrho)$ Grenzfunktion von nach x und nach y stetigen Funktionen $\varphi_n(x, y; \varrho)$, welche man wie folgt erhält. Man ordnet die abzählbare Menge von Funktionen:

$$\left|\frac{f(x+h_i, y+k_j)-f(x, y)}{\sqrt{h_i^2+k_j^2}}\right| \quad \text{für} \quad 0 < h_i^2 + k_j^2 \leqq \varrho^2$$

in eine abzählbare Reihe und nimmt dann $\varphi_n(x, y; \varrho) =$ Maximum in (x, y) von den n ersten Funktionen der Reihe. Die Funktionen $\varphi_n(x, y; \varrho)$ sind in B linear stetig nach x und nach y. Daraus folgt, daß sie auch flächenhaft meßbar sind in B[10]); somit auch $\lim\limits_{n=\infty} \varphi_n(x, y; \varrho) = W_f(x, y; \varrho)$ $= w_f(x, y; \varrho)$ und dadurch wieder $\lim\limits_{\varrho=0} w_f(x, y; \varrho) = L_f(x, y)$. Da B willkürlich in G liegt, ist $L_f(x, y)$ flächenhaft meßbar in G.

Wir erinnern an folgende Definition: „Die in einer Umgebung von (x, y) definierte Funktion $f(x, y)$ heißt an dieser Stelle vollständig differenzierbar, wenn

$$f(x+h, y+k) - f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\cdot h + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\cdot k + \varepsilon_1(h, k)\cdot h + \varepsilon_2(h, k)\cdot k$$

ist, wobei ε_1 und ε_2 nach Null konvergieren sollen in allen Fällen, daß h und k sich gleichzeitig der Null nähern."

Nun läßt sich zeigen:

Hilfssatz 1. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine in G nach x und nach y linearstetige Funktion $f(x, y)$ fast überall in G total differenzierbar sei, besteht darin, daß $L_f(x, y)$ fast überall in G endlich sei.*

Die Notwendigkeit der Bedingung ist einfach zu beweisen; in jedem Punkte (x, y), in welchem $f(x, y)$ total differenzierbar ist, ist die auf Seite 149 definierte Funktion $w_f(x, y; \varrho)$ beschränkt für alle positiven ϱ unterhalb einer gewissen Schranke und ist somit $L_f(x, y) = \lim\limits_{\varrho=0} w_f(x, y; \varrho)$ endlich.

Nehmen wir, umgekehrt, die Endlichkeit von $L_f(x, y)$ auf einer Menge K in G an mit $m(K) = m(G)$. Da f stetig ist nach x und nach y, ist sie flächenhaft meßbar[16]) und dadurch sind dies auch die oberen und unteren Derivierten von f nach x oder y[16]). Die Ableitungen nach x und y existieren nun auf meßbaren Mengen in G.

In den Punkten von K ist $f(x, y)$ (zweidimensional) stetig. Nach dem Satze von Fubini gibt es dadurch eine Menge E_x auf der x-Achse vom Maße Null, so daß für jeden Wert x, welcher nicht zu E_x gehört und für den die Parallele L_x zur y-Achse Punkte von G enthält, $f(x, y)$ fast überall linear stetig ist auf dem Durchschnitte $(L_x \cdot G)$. Sie ist also auch linear meßbar auf $(L_x \cdot G)$. Da die oberen und unteren Derivierten nach y auf K endlich sind, existiert eine E_x enthaltende Menge E'_x vom Maße Null, so daß für jeden Punkt x, der nicht zu E'_x gehört und dessen Parallele L_x zur y-Achse Punkte von G enthält, $f(x, y)$ fast überall auf $(L_x \cdot G)$ endliche obere und untere Derivierten besitzt. Nach einem Satze von G. C. Young[17]) besitzt dadurch $f(x, y)$ fast überall auf $(L_x \cdot G)$ eine endliche Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y}$, und somit auch fast überall in G.

Auf dieselbe Weise zeigt man, daß $\frac{\partial f}{\partial y}$ fast überall in G existiert.

Von hier an fährt der Beweis fort wie in den §§ 2 und 3 einer Arbeit von Rademacher: „Über partielle und totale Differenzierbarkeit usw.“, Math. Annalen Bd. 79 (1919). Dort enthält Satz 1 das Resultat: „Ist $f(x, y)$ eine in dem beschränkten Gebiete G definierte Funktion, für welche $L_f(x, y)$ in G endlich und summierbar ist, so ist $f(x, y)$ fast überall in G total differenzierbar[30]).“ Auch die weniger fordernden Bedingungen des Hilfssatzes 1 führen zu derselben Eigenschaft für die Funktion $f(x, y)$.

§ 13.

Hilfssatz 2. *Ist in der Umgebung eines Punktes (ξ, η) $p(x, y)$ linear summierbar nach x und $q(x, y)$ nach y und sind beide Funktionen in (ξ, η) total differenzierbar, so ist für die Intervallfunktion $\Phi(J) = \int_J p\,dx + q\,dy$ in (ξ, η) die (in § 1 definierte) Ableitung $= \frac{\partial q(\xi, \eta)}{\partial x} - \frac{\partial p(\xi, \eta)}{\partial y}$.*

Es sei (ξ, η) innerer Punkt oder Randpunkt eines Quadrates J $[\xi - t_1 \leqq x \leqq \xi + t_2;\ \eta - u_1 \leqq y \leqq \eta + u_2]$. Dann ist:

$$\int_J p\,dx = \int_{-t_1}^{+t_2} [p(\xi + t, \eta - u_1) - p(\xi + t, \eta + u_2)]\,dt$$

$$= \int_{-t_1}^{+t_2} [\{p(\xi + t, \eta - u_1) - p(\xi, \eta)\} - \{p(\xi + t, \eta + u_2) - p(\xi, \eta)\}]\,dt$$

$$= \int_{-t_1}^{+t_2} \Big[-\frac{\partial p(\xi, \eta)}{\partial y} \cdot u_1 + \varepsilon_1(t, u_1) \cdot t - \varepsilon_2(t, u_1) \cdot u_1$$
$$- \frac{\partial p(\xi, \eta)}{\partial y} \cdot u_2 - \varepsilon_3(t, u_2) \cdot t - \varepsilon_4(t, u_2) \cdot u_2\Big]\,dt$$

$$= -\frac{\partial p(\xi, \eta)}{\partial y} \cdot (u_1 + u_2)(t_1 + t_2) + \int_{-t_1}^{+t_2} [\varepsilon_1(t, u_1) - \varepsilon_3(t, u_2)] \cdot t\,dt$$
$$+ \int_{-t_1}^{+t_2} \varepsilon_5(t, u_1, u_2) \cdot [u_1 + u_2]\,dt.$$

[30]) Eine Verallgemeinerung, welche von Stepanoff gefunden wurde nach dem Verfahren, das im Texte zu Hilfssatz 1 führte, findet man in den Math. Annalen **90** (1923).

Hierbei konvergieren die Funktionen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_5$ nach Null, wenn sich das Quadrat in (ξ, η) zusammenzieht. Es existiert eine positive Funktion $\varepsilon_6(t_1, t_2, u_1, u_2)$, welche nach Null konvergiert, wenn t_1, t_2, u_1 und u_2 sich der Null nähern und welche die Eigenschaft besitzt, daß der absolute Wert der Summe der beiden letzten Integrale gleich

$$\varepsilon_6(t_1, t_2, u_1, u_2) \cdot \int_{-t_1}^{+t_2} [|t| + (u_1 + u_2)]\, d\,|t| < \varepsilon_6 \cdot \frac{3}{2} m(J)$$

ist.

Durchläuft J eine willkürliche Reihe den Punkt (ξ, η) als inneren oder Randpunkt enthaltender und sich in (ξ, η) zusammenziehender Quadrate, so folgt:

$$\lim_{m(J)=0} \frac{\int\limits_J p\,dx}{m(J)} = -\frac{\partial p(\xi, \eta)}{\partial y}.$$

Dann findet man auch auf gleiche Weise:

$$\lim_{m(J)=0} \frac{\int\limits_J q\,dy}{m(J)} = \frac{\partial q(\xi, \eta)}{\partial x},$$

womit der Beweis fertig ist [31].

§ 14.

Hilfssatz 3. *Die Funktionen $p(x, y)$ und $q(x, y)$ sind in der Umgebung von (ξ, η) linear summierbar nach x bzw. nach y. Die (wie in § 12 definierten) Funktionen $L_p(x, y)$ und $L_q(x, y)$ sind in (ξ, η) kleiner als ein positives M. Dann läßt sich zeigen, daß für die Intervallfunktion $\Phi(J) = \int\limits_J p\,dx + q\,dy$ die obere und untere Derivierten in (ξ, η) ihrem absoluten Werte nach kleiner sind als $4M\sqrt{2}$.*

---

[31]) Existiert eine Funktion $f(x,y)$ in der Umgebung von (ξ, η), so daß in dieser Umgebung die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x} = p(x,y)$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = q(x,y)$ endlich sind, und sind p und q in (ξ, η) total differenzierbar, so sind in der Umgebung von (ξ, η) p nach x und q nach y summierbar. Nach Hilfssatz 2 ist also $D_{(\xi, \eta)} \Phi(J) = \frac{\partial q(\xi,\eta)}{\partial x} - \frac{\partial p(\xi,\eta)}{\partial y}$, wobei $\Phi(J) = \int\limits_J p\,dx + q\,dy$ ist. Weiter ist einfach zu sehen, daß $\Phi(J) \equiv 0$ ist in der Umgebung von (ξ, η). Somit ist auch $D_{(\xi, \eta)} \Phi(J) = 0$ oder $\frac{\partial p(\xi,\eta)}{\partial y} = \frac{\partial q(\xi,\eta)}{\partial x}$. Damit ist ein neuer Beweis des folgenden Satzes von W. H. Young [Proc. London Math. Soc. (2) 7 (1909)] geliefert: *Besitzt eine Funktion $f(x, y)$ in der Umgebung eines Punktes (ξ, η) partielle Ableitungen $p(x, y)$ nach x und $q(x, y)$ nach y und sind diese Ableitungen in (ξ, η) total differenzierbar, so ist in (ξ, η):* $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$.

Da $L_p(x, y)$ kleiner ist als M, läßt sich ein positives ϱ angeben, so daß für jeden Punkt $(\xi + t, \eta + u)$ mit $0 < t^2 + u^2 \leqq \varrho^2$ gilt:

$$\left| \frac{p(\xi + t, \eta + u) - p(\xi, \eta)}{\sqrt{t^2 + u^2}} \right| < M.$$

Es sei J ein Quadrat, das (ξ, η) im Innern oder auf dem Rande enthält und das ganz im Innern des Kreises $K(\varrho)$, vom Radius ϱ um (ξ, η), liegt. Genügen die Koordinaten den Ungleichungen:

$$\xi - t_1 \leqq x \leqq \xi + t_2;\ \eta - u_1 \leqq y \leqq \eta + u_2,$$

so ist:

$$\int_J p\,dx = \int_{-t_1}^{+t_2} [\{p(\xi + t, \eta - u_1) - p(\xi, \eta)\} - \{p(\xi + t, \eta + u_2) - p(\xi, \eta)\}]\,dt$$

$$= M \int_{-t_1}^{+t_2} [\Theta_1(t, u_1) \cdot \sqrt{t^2 + u_1^2} - \Theta_2(t, u_2) \cdot \sqrt{t^2 + u_2^2}]\,dt,$$

wobei die beiden Funktionen Θ_1 und Θ_2, absolut genommen, kleiner als 1 sind. Hieraus folgt leicht:

$$\left| \int_J p\,dx \right| < M \times 2(t_1 + t_2)\sqrt{2} \int_{-t_1}^{+t_2} dt = M \times 2\sqrt{2} \times m(J).$$

Da übereinstimmende Betrachtungen gelten für $q(x, y)$, ist der Beweis leicht zu beendigen.

§ 15.

Nun folgt der

Satz C: $\Phi(J) = \int_J p\,dx + q\,dy$ *ist im (beschränkten) Gebiete* $G \equiv 0$ *unter den Bedingungen:*

1. *p und q sind beschränkt in jedem in G liegenden, abgeschlossenen Bereiche und in bezug auf jede einzelne Variable stetig,*

2. *$L_p(x, y)$ und $L_q(x, y)$ können nur in einer abzählbaren Menge E unendlich werden.*

3. *fast überall in G ist* $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$. [32])

Wie in § 7, folgt aus 1., daß Φ stetig* ist in jedem in G liegenden, abgeschlossenen Intervall I.

Aus 1. und 2. folgt, nach Hilfssatz 1, daß p und q fast überall in G total differenzierbar sind. Dieses und 3. liefert, nach Hilfssatz 2, daß $D\Phi$ fast überall Null ist in G.

---

[32]) Diese Bedingung hätte man auch schreiben können: „fast überall ist $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ auf derjenigen Menge in G, auf der beide existieren". Vgl. S. 141.

Nach 2. und Hilfssatz 3 sind in allen Punkten von G, die Menge E ausgenommen, obere und untere Derivierten von $\Phi(J)$ endlich.

Im offenen Intervall I sind die Bedingungen des Hauptsatzes A erfüllt. Daraus folgt: $\Phi \equiv 0$ in I-, also auch in G.

Nimmt man statt 1. *zwei-dim. Stetigkeit von p und q in G an, so verschwindet das Linienintegral auch über jede einfache, geschlossene, rektifizierbare Kurve in G* [8]).

§ 16.

Der übereinstimmende Satz bei komplexen Funktionen lautet:

Satz D: *Die komplexe Funktion $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ist analytisch regulär im (beschränkten) Gebiete G, falls:*

1. *$f(z)$ in jedem in G liegenden, abgeschlossenen Bereiche B beschränkt ist und in bezug auf jede einzelne Variable stetig,*

2. $\limsup\limits_{h=0} \left|\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}\right|$ *nur auf einer abzählbaren Menge E in G unendlich werden kann.*

3. *fast überall in G die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gelten.*

Aus 1. ist abzuleiten, daß $\Phi(J) = \int\limits_J f(z)\,dz$ in jedem abgeschlossenen Intervall I in G stetig* ist [33]).

Aus 2. folgt, daß $L_u(x, y)$ und $L_v(x, y)$ endlich sind in $(G - E)$. Dies und 1. liefert, nach Hilfssatz 1, daß u und v fast überall in G total differenzierbar sind. Es sei $\Phi(J) = \Phi_1(J) + i\,\Phi_2(J)$. Dann folgt mit 3., nach Hilfssatz 2, daß $D\,\Phi = D\,\Phi_1 + i\,D\,\Phi_2$ fast überall in G Null ist.

Nach 2. und Hilfssatz 3 können die oberen und unteren Derivierten von Φ_1 und Φ_2 nur auf E unendlich werden.

Schließlich folgt aus 1., daß $f(z)$ summierbar ist in jedem abgeschlossenen Bereiche B in G [10]).

Die Bedingungen des Hauptsatzes B sind also erfüllt und $f(z)$ ist analytisch regulär in G [34]).

---

[33]) Vgl. §§ 7 und 10.

[34]) Nach Montel [Comptes Rendus **156** (1913), p. 1820–1822] ist $f(z)$ (unter Annahme zwei-dimensionaler Stetigkeit) auch analytisch regulär, wenn man *statt* 2. *Endlichkeit der partiellen Ableitungen* annimmt. Ein Beweis wurde von ihm jedoch nicht gegeben. Ein Beweis von Borger [Bull. Am. Math. Soc. **27** (1921); er nimmt außerdem die C.-R.-Diff.-Gleichungen in „allen" Punkten von G an] ist, wie Looman [Gött. Nachr. (1923)] angibt, falsch. Aber auch dieser liefert [loc. cit.] keinen richtigen Beweis.

Er wünscht erstens zu zeigen: „In einem beschränkten Gebiete G ist für jedes achsenparallele Rechteck r: $\int\limits_r p\,dx + q\,dy = 0$, wenn p und q (zwei-dim.) stetig sind

Fortsetzung der Fußnote [34]) auf nächster Seite.)

Der bekannte Goursatsche Satz ist ein Korollar des obigen Satzes. Auch der verallgemeinerte Satz von Pompéiu(-Montel); denn aus Beschränktheit der partiellen Derivierten nach x und y in einem abgeschlossenen Intervall J folgt Beschränktheit der zugehörigen Differenzenquotienten[14]),

---

in G, $\frac{\partial p}{\partial y}$ und $\frac{\partial q}{\partial x}$ endlich sind in G und fast überall in G: $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ ist.“ Daraus würde dann leicht das verlangte Resultat folgen.

Zum Beweise dieses Satzes wird eine bestimmte Menge M definiert, welche die Eigenschaften besitzt, perfekt und nirgends dicht zu sein. Darauf wird gezeigt, daß in jedem abgeschlossenen Intervall r in G, das in seinem Innern Punkte von M enthält, ein abgeschlossenes Intervall r_1 liegt, das auch Punkte von M im Innern enthält und folgende Eigenschaft hat. Gehört (x, y) zu $(r_1 \cdot M) = \sigma(r_1)$ und gehört $(x, y+h)$ zu r_1, so liegt $\left|\frac{p(x, y+h) - p(x, y)}{h}\right|$ unterhalb einer endlichen Schranke A. Das abgeschlossene Intervall r_2 $[a_2 \leqq x \leqq b_2;\ c_2 \leqq y \leqq d_2]$ liege im Innern von r_1. Enthält die von r_2 auf einer Parallelen L_x zur y-Achse ausgeschnittene, abgeschlossene Strecke Punkte von $(r_2 \cdot M) = \sigma(r_2)$, so wird sie in zwei Mengen geteilt, und zwar in die perfekte Menge $(L_x \cdot \sigma(r_2))$ und die Menge der offenen, komplementären Intervalle $(\gamma_l \delta_l)$. Nun läßt sich zeigen, daß

$$p(x, d_2) - p(x, c_2) = \Sigma[p(x, \delta_l) - p(x, \gamma_l)] + \int\limits_{x, \sigma(r_2)} \frac{\partial p}{\partial y} \partial y,$$

wobei dann gilt:

(1) $$\left|\Sigma[p(x, \delta_l) - p(x, \gamma_l)]\right| < A \cdot \Sigma(\delta_l - \gamma_l).$$

Darauf wird eine Reihe von abgeschlossenen Quadraten r_2 betrachtet, welche einen Punkt (x, y) von $\sigma(r_1)$ enthalten und sich auf (x, y) zusammenziehen. Die Parallelen zur y-Achse, welche ein r_2 überschneiden, enthalten Punkte von $\sigma(r_2)$ oder nicht; die zugehörigen x-Werte der ersten Gruppe von Parallelen bilden eine Menge $E_1(x)$ und die der zweiten Gruppe eine Menge $E_2(x)$. Nun ist:

$$\int\limits_{r_2} p\,dx = -\int\limits_{a_2}^{b_2} dx \int\limits_{x, \sigma(r_2)} \frac{\partial p}{\partial y} dy - \int\limits_{E_1(x)} dx \cdot \Sigma[p(x, \delta_l) - p(x, \gamma_l)] - \int\limits_{E_2(x)} dx \cdot [p(x, d_2) - p(x, c_2)].$$

Die beiden letzten Integrale werden in der Loomanschen Arbeit zusammengenommen, und es wird aus (1) irrtümlich gefolgert, daß der absolute Wert ihrer Summe $< A \cdot \mu[r_2 - \sigma(r_2)]$, wobei μ das Flächenmaß andeutet. Aus (1) folgt zwar für das Integral über $E_1(x)$, daß sein absoluter Wert kleiner als $A \cdot \{\mu[r_2 - \sigma(r_2)] - (d_2 - c_2) \cdot m E_2(x)\}$ ist, wobei μ Flächenmaß und m lineares Maß andeutet. *Nun müßte jedenfalls noch bewiesen werden*:

(2) $$\left|\int\limits_{E_2(x)} dx \cdot [p(x, d_2) - p(x, c_2)]\right| < A \cdot (d_2 - c_2) \cdot m E_2(x),$$

damit die von Looman gegebene Abschätzung für die Summe beider Integrale richtig wäre. (2) wäre bewiesen, wenn $\left|\frac{p(x, d_2) - p(x, c_2)}{d_2 - c_2}\right| < A$ wäre auf $E_2(x)$ für *alle* Quadrate r_2 der sich auf (x, y) zusammenziehenden Reihe. Aber das ist ohne weiteres nicht einzusehen. Dadurch liefern natürlich die weiteren Schlüsse der zitierten Arbeit nicht den gesuchten Beweis.

dadurch auch von $\frac{u(x+h,\, y+k)-u(x,y)}{\sqrt{h^2+k^2}}$ und $\frac{v(x+h,\, y+k)-v(x,y)}{\sqrt{h^2+k^2}}$, und dadurch wieder von $\limsup\limits_{h=0} \left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h}\right|$ in J.

§ 17.

Daß die Bedingung der Beschränktheit von $f(z)$ in jedem in G liegenden, abgeschlossenen Bereiche nicht fortgelassen werden darf, zeigt das Beispiel: $f(z) = e^{-\frac{1}{z^4}}$. Diese Funktion genügt in der Umgebung von $[x=0,\ y=0]$ allen Bedingungen des Satzes D, ausgenommen die der Beschränktheit. Sie ist auch nicht analytisch regulär in dieser Umgebung[35]).

[35]) Das Beispiel entlehnen wir Looman, loc. cit. [34]).

(Eingegangen am 15. 11. 1928.)