Über einen Satz von Herrn Esclangon.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Einleitung.

Alle Zahlen in dieser Arbeit seien reell, $n \geqq 2$ ganz, y und alle p Funktionen von x; alle Ableitungen in Endpunkten von Intervallen einseitig nach innen gemeint.

Satz 1. *Für* $x \geqq 0$ *sei*

$$y \text{ beschränkt},$$
$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y \quad \text{beschränkt},$$
$$p_m \quad (1 \leqq m \leqq n) \quad \text{beschränkt}.$$

Dann ist für $x \geqq 0$
$$y^{(m)} \quad (0 < m \leqq n) \quad \text{beschränkt}.$$

Dieser Satz ist neu. Herr Esclangon[1]) bewies einen schwächeren Satz, indem er überdies ausdrücklich die Existenz und Beschränktheit von $p_m^{(l)}$ für $1 \leqq m < n$, $1 \leqq l \leqq n - m$ und während des Beweises (unnötigerweise) stillschweigend[2]) noch mehr voraussetzte.

Da der Esclangonsche Wortlaut — er ist richtig — in neuerer Zeit zu wichtigen Anwendungen[3]) in der Theorie der fastperiodischen Funktionen

---

[1]) *Sur les intégrales bornées d'une équation différentielle linéaire* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, **160** (1915), S. 475—478]; *Nouvelles Recherches sur les Fonctions quasi-périodiques* [Annales de l'Observatoire de Bordeaux **16** (1921), S. 51—177], S. 149—154.

[2]) Bereits der von Herrn Esclangon auf S. 476 bzw. S. 150 eingeführte Differentialausdruck mit dem q_n existiert sonst nicht; bekanntlich existiert nicht zu jeder beschränkten Funktion ein unbestimmtes oder bestimmtes (Riemannsches oder Lebesguesches) Integral.

[3]) Bohr und Neugebauer, *Über lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und fastperiodischer rechter Seite* [Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, Jahrgang 1926, S. 8—22], S. 10 und S. 14.

führte, will ich einen einfacheren Beweis für ihn, nämlich alsbald für den weitergehenden Satz 1 angeben. Allerdings liegt dieser Beweis dem Kenner der ersten Seiten einer berühmten Hardy-Littlewoodschen [4]), zwei Jahre vor Herrn Esclangons erstgenannter Note erschienenen Arbeit sehr nahe.

Fügt man noch die Voraussetzung der Stetigkeit von $y^{(n)}$ hinzu, so ist der entstehende Satz überhaupt keiner Publikation wert. Denn, wer Hardy-Littlewoods [5]) Theorem $3(a)$ kennt, muß sich sagen: Wird

$$\omega(x) = \operatorname{Max}\left(1, \operatorname*{Max}_{0 \leqq z \leqq x} |y^{(n)}(z)|\right)$$

gesetzt, so ist mit von x freien P für $x \geqq 0$, $0 \leqq m \leqq n$

$$|y^{(m)}| \leqq P_1 \omega^{\frac{m}{n}},$$

also

$$|y^{(n)}| \leqq P_2 + \sum_{m=1}^{n} |p_m| \, |y^{(n-m)}| \leqq P_3 \omega^{\frac{n-1}{n}},$$

$$\omega \leqq \operatorname{Max}\left(1, P_3 \omega^{\frac{n-1}{n}}\right) \leqq P_4 \omega^{\frac{n-1}{n}},$$

$$\omega \leqq P_4^n,$$

$$|y^{(m)}| \leqq P_1 P_4^m \leqq P_5 \quad \text{für} \quad 0 \leqq m \leqq n.$$

Auch der volle Wortlaut des Satzes 1 ließe sich durch Hinzufügung weniger Zeilen zu Hardy-Littlewood beweisen. Doch will ich den Beweis ohne Zitate auf jene Abhandlung führen und werde statt dessen den in vierfacher Hinsicht weitergehenden Satz 2 und den in dreifacher Hinsicht weitergehenden Satz 3 beweisen.

Erstens wird die Voraussetzung der Beschränktheit der p_m und des Differentialausdrucks durch weniger ersetzt;

zweitens beziehen sich die Sätze auf ein endliches Intervall;

drittens wird in Satz 2 (nicht aber in Satz 3) vom Differentialausdruck nur eine einseitige Ungleichung vorausgesetzt (und entsprechend bei $y^{(n)}$ behauptet);

viertens hat die ganze Sache nichts mit **linearen** Differentialausdrücken zu tun; statt

$$p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y$$

(wo ja das Glied $p_n y$ ohne weiteres gestrichen werden kann) lege ich ein

---

[4]) *Contributions to the Arithmetic Theory of Series* [Proceedings of the London Mathematical Society (2) **11** (1913), S. 411–478].

[5]) Loc. cit., S. 422.

beliebiges Polynom

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(y', \ldots, y^{(n-1)}) = \sum p_{l_1, \ldots, l_{n-1}} y'^{l_1} \ldots y^{(n-1) l_{n-1}}$$

zugrunde, wo die l_m $(0 < m < n)$ die verschiedenen Systeme mit

$$(1) \qquad \sum_{m=1}^{n-1} m l_m < n, \qquad l_m \geqq 0 \text{ und ganz,}$$

durchlaufen; zur Abkürzung werde

$$N = N(l_1, \ldots, l_{n-1}) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n-1} m l_m$$

gesetzt.

Satz 2. *Es gibt zwei nur von n abhängige positive Zahlen $\varepsilon(n)$ und $P(n)$ mit folgender Eigenschaft:*

Für $|x| \leqq 1$ sei

$$|y| \leqq 1.$$

Es sei für jedes System (l_m) mit (1), wenn

$$(2) \qquad \mu = \operatorname{Max}(1, y^{(n)}(0))$$

gesetzt wird,

$$(3) \qquad |p_{l_1, \ldots, l_{n-1}}| < \varepsilon \mu^{1-N}$$

und

$$(4) \qquad y^{(n)} + \mathfrak{P} < \varepsilon \mu.$$

Dann ist

$$|y^{(m)}(0)| \leqq P \quad \text{für} \quad 0 < m < n$$

und

$$y^{(n)}(0) \leqq P.$$

Satz 3. *Es gibt zwei nur von n abhängige positive Zahlen $\varepsilon(n)$ und $P(n)$ mit folgender Eigenschaft:*

Für $|x| \leqq 1$ sei

$$|y| \leqq 1.$$

Es sei für jedes System (l_m) mit (1), wenn

$$(5) \qquad \mu = \operatorname{Max}(1, |y^{(n)}(0)|)$$

gesetzt wird,

$$(3) \qquad |p_{l_1, \ldots, l_{n-1}}| < \varepsilon \mu^{1-N}$$

und

$$(6) \qquad |y^{(n)} + \mathfrak{P}| < \varepsilon \mu.$$

Dann ist

$$|y^{(m)}(0)| \leqq P \quad \text{für} \quad 0 < m \leqq n.$$

Satz 3 ist natürlich ein Spezialfall des Satzes 2, obgleich eine Voraussetzung, wegen $y^{(n)}(0) \leqq |y^{(n)}(0)|$, geringer und eine Behauptung schärfer ist. Denn unter den Voraussetzungen des Satzes 3 ist nur Satz 2 im Falle $y^{(n)}(0) \geqq 0$ auf y, im Falle $y^{(n)}(0) \leqq 0$ auf $-y$ und $-\mathfrak{P}(-y', \ldots, -y^{(n-1)})$ statt $\mathfrak{P}$ anzuwenden.

Satz 3 enthält natürlich den Satz 1. Denn unter dessen Voraussetzungen ist bei passendem A für $x \geqq 0$

$$|y| < A,$$

(7) $$|y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y'| < A,$$

$$|p_m| < A \quad (1 \leqq m \leqq n-1).$$

Wird

$$r = \mathrm{Min}\left(1, \frac{\varepsilon}{A}, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

gesetzt, so genügt

$$\frac{y(rx)}{A} = Y(x)$$

für $x \geqq 0$ den Bedingungen

$$|Y| \leqq 1,$$

$$\left|\frac{1}{r^n} Y^{(n)} + \frac{p_1}{r^{n-1}} Y^{(n-1)} + \ldots + \frac{p_{n-1}}{r} Y'\right| < 1,$$

$$|Y^{(n)} + p_1 r Y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} r^{n-1} Y'| < r^n,$$

und hierin ist

$$|p_m r^m| < Ar \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad 0 < m < n,$$

$$r^n \leqq r < \varepsilon.$$

Satz 3 ist wegen $\mu \geqq 1$ bei jedem $\xi \geqq 1$ auf $Z(x) = Y(\xi + x)$ (statt y), $\mathfrak{P} = \sum_{m=1}^{n-1} p_m(\xi + x) r^m Z^{(n-m)}$ anwendbar und liefert

$$|Y^{(m)}(\xi)| \leqq P \quad \text{für} \quad 0 < m < n,$$

wo P von ξ frei ist.

$$y^{(m)}(x) = \frac{A}{r^m} Y^{(m)}\left(\frac{x}{r}\right) \qquad (0 < m < n)$$

ist also für $x \geqq r$ beschränkt und (wegen der Stetigkeit) selbstverständlich für $0 \leqq x \leqq r$. Nach (7) ist also auch $y^{(n)}$ für $x \geqq 0$ beschränkt.

Da Satz 3 wesentlich einfacher zu beweisen geht, will ich zunächst im ersten Teil diesen schwächeren Satz beweisen und erst im zweiten Teil den vollen Satz 2.

Erster Teil.

Satz 3.

§ 1.

Hilfssätze.

Hilfssatz 1.[6]) *Es sei* $a>0,\ b>0$. *Für* $|x| \leqq \sqrt{\frac{a}{b}}$ *sei*

$$|y| \leqq a, \qquad |y''| \leqq b.$$

Dann ist dort

$$|y'| \leqq 2\sqrt{ab}.$$

Beweis. 1. Es sei $a=b=1$. Für $|x| \leqq 1$ ist bei passenden ξ_1, ξ_2 mit $-1 \leqq \xi_1 \leqq x \leqq \xi_2 \leqq 1$

$$y(x)-y(-1)=(1+x)\,y'(x)-\frac{(1+x)^2}{2}\,y''(\xi_1),$$

$$y(1)-y(x) \quad =(1-x)\,y'(x)+\frac{(1-x)^2}{2}\,y''(\xi_2),$$

also

$$2y'(x)=y(1)-y(-1)+\frac{(1+x)^2}{2}\,y''(\xi_1)-\frac{(1-x)^2}{2}\,y''(\xi_2),$$

$$2|y'(x)| \leqq 1+1+\frac{(1+x)^2}{2}+\frac{(1-x)^2}{2}=3+x^2 \leqq 4,$$

$$|y'(x)| \leqq 2.$$

2. Im allgemeinen Fall genügt

$$Y(x)=\frac{1}{a}\,y\left(x\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$$

für $|x| \leqq 1$ den Bedingungen

$$|Y(x)| \leqq 1, \qquad |Y''(x)|=\left|\frac{1}{b}\,y''\left(x\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\right| \leqq 1.$$

Also ist für $|x| \leqq 1$ nach 1.:

$$\left|\frac{1}{\sqrt{ab}}\,y'\left(x\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\right|=|Y'(x)| \leqq 2,$$

folglich für $|x| \leqq \sqrt{\frac{a}{b}}$

$$|y'(x)| \leqq 2\sqrt{ab}.$$

---

[6]) Nicht neu. Vgl. meine Arbeit *Einige Ungleichungen für zweimal differentiierbare Funktionen* [Proceedings of the London Mathematical Society (2) **13** (1914), S. 43–49], S. 44, Fußnote *.

Hilfssatz 2. *Es sei* $0 < a \leqq b$. *Für* $|x| \leqq 1$ *sei*

$$|y| \leqq a, \quad |y''| \leqq b.$$

Dann ist dort

$$|y'| \leqq 2\sqrt{ab}.$$

Beweis. Hilfssatz 1 mit $y(\xi + x)$, $|\xi| \leqq 1 - \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Hilfssatz 3. *Es sei für* $|x| \leqq \frac{1}{\sqrt[n]{\omega}}$

$$|y| \leqq 1, \quad |y^{(n)}| \leqq \omega.$$

Dann ist dort für $0 < m < n$

$$|y^{(m)}| \leqq 2^{2^n} \omega^{\frac{m}{n}}.$$

Beweis. 1. Es sei $\omega = 1$. Man setze

$$\chi = \operatorname{Max}\left(2^{2^n}, \operatorname*{Max}_{0<m<n} \operatorname*{Max}_{|x| \leqq 1} |y^{(m)}|\right).$$

Durch Induktion wird sich auf $|x| \leqq 1$ für $0 \leqq m < n$

$$(8) \qquad |y^{(m)}| \leqq 4\chi^{1-\frac{1}{2^m}}$$

ergeben.

Für $m = 0$ ist

$$|y^{(m)}| = |y| \leqq 1 < 4 = 4\chi^{1-\frac{1}{2^m}}.$$

Aus (8) mit einem m auf $0 \leqq m < n-1$ folgt (8) mit $m+1$, wenn Hilfssatz 2 auf $y^{(m)}$ statt y, $a = 4\chi^{1-\frac{1}{2^m}}$, $b = \chi$ angewendet wird. In der Tat ist erstens

$$0 < a = 2^2 \chi^{1-\frac{1}{2^m}} \leqq \chi^{\frac{1}{2^{n-2}}} \chi^{1-\frac{1}{2^m}} \leqq \chi = b,$$

zweitens nach (8)

$$|y^{(m)}| \leqq a,$$

drittens für $m < n-2$ nach Definition von χ, für $m = n-2$ nach Voraussetzung (man beachte $1 \leqq \chi$)

$$|y^{(m+2)}| \leqq \chi = b.$$

Hilfssatz 2 ergibt also

$$|y^{(m+1)}| \leqq 2\sqrt{4\chi^{1-\frac{1}{2^m}}\chi} = 4\chi^{1-\frac{1}{2^{m+1}}};$$

d. h. (8) gilt mit $m+1$ statt m.

(8) gilt also für $0 \leqq m < n$.

Folglich ist

$$\underset{0<m<n}{\mathrm{Max}}\ \underset{|x|\leqq 1}{\mathrm{Max}} \left| y^{(m)} \right| \leqq 4\chi^{1-\frac{1}{2^{n-1}}}.$$

Andererseits ist nach Definition von χ

$$2^{2^n} = 4\left(2^{2^n}\right)^{1-\frac{1}{2^{n-1}}} \leqq 4\chi^{1-\frac{1}{2^{n-1}}}.$$

Nach Definition von χ ist also

$$\chi \leqq 4\chi^{1-\frac{1}{2^{n-1}}},$$

$$\chi \leqq 4^{2^{n-1}} = 2^{2^n};$$

nach Definition von χ ist also

$$\left| y^{(m)} \right| \leqq 2^{2^n} \quad \text{für} \quad 0 < m < n.$$

2. Ist ω beliebig, so werde 1. auf

$$y\left(\frac{x}{\sqrt[n]{\omega}}\right) = Y(x)$$

angewendet. Auf $|x| \leqq 1$ ist

$$|Y(x)| \leqq 1, \qquad \left| Y^{(n)}(x) \right| = \frac{1}{\omega} \left| y^{(n)}\left(\frac{x}{\sqrt[n]{\omega}}\right) \right| \leqq 1,$$

also nach 1.:

$$\left| Y^{(m)}(x) \right| \leqq 2^{2^n} \quad \text{für} \quad 0 < m < n,$$

also für $|x| \leqq \frac{1}{\sqrt[n]{\omega}}$, $0 < m < n$,

$$\left| y^{(m)}(x) \right| = \omega^{\frac{m}{n}} \left| Y^{(m)}(x\sqrt[n]{\omega}) \right| \leqq 2^{2^n} \omega^{\frac{m}{n}}.$$

§ 2.

Beweis von Satz 3.

Es sei $k = k(n)$ die Lösungszahl von (1),

$$P = P(n) = 2^{2^n},$$

$$\varepsilon = \varepsilon(n) = \frac{1}{4kP^n} \quad \left(< \frac{1}{4}\right).$$

Ich behaupte, daß diese Zahlen P und ε das in Satz 3 Behauptete leisten.

$y^{(n)}$ ist nach (3) und (6) für $|x| \leqq 1$ beschränkt.

Ich setze

$$\omega = \operatorname{Max}(1, \underset{|x| \leqq 1}{\text{obere Grenze von}} |y^{(n)}|).$$

Nach Hilfssatz 3 $\left(\text{man beachte } \frac{1}{\sqrt[n]{\omega}} \leqq 1\right)$ mit $y(\xi + x)$, $|\xi| \leqq 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{\omega}}$, ist, da für $|x| \leqq 1$

$$|y| \leqq 1, \quad |y^{(n)}| \leqq \omega$$

ist, für $|x| \leqq 1$, $0 < m < n$

(9) $$|y^{(m)}| \leqq 2^{2^n} \omega^{\frac{m}{n}} = P\omega^{\frac{m}{n}}.$$

Jedes der k Glieder von $\mathfrak{P}$ ist nach (3) (da $\mu \leqq \omega$ wegen (5)) absolut

$$< \varepsilon \omega^{1-N} P^{l_1 + \cdots + l_{n-1}} \omega^N \leqq \varepsilon P^n \omega = \frac{\omega}{4k};$$

nach (6) ist also für $|x| \leqq 1$

$$|y^{(n)}| < k \frac{\omega}{4k} + \frac{\omega}{4} = \frac{\omega}{2},$$

$$\underset{|x| \leqq 1}{\text{obere Grenze von}} |y^{(n)}| \leqq \frac{\omega}{2}.$$

Nach Definition von ω ist also

(10) $$\omega = 1,$$

$$|y^{(n)}(0)| \leqq \frac{1}{2} < P$$

und nach (9) und (10)

$$|y^{(m)}(0)| \leqq P \quad \text{für} \quad 0 < m < n.$$

Zweiter Teil.

Satz 2.

§ 1.

Hilfssätze.

Hilfssatz 4. *Für* $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ *sei*

$$|y| \leqq 1, \quad y^{(n)} \leqq 1.$$

Dann ist

$$y^{(n-1)}(0) \geqq -P_1(n).$$

Beweis. Mit $h = \frac{1}{2(n-1)}$ ist

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^{n-1-\nu} \binom{n-1}{\nu} y(\nu h) = \int_0^h dx_1 \int_{x_1}^{x_1+h} dx_2 \ldots \int_{x_{n-2}}^{x_{n-2}+h} y^{(n-1)}(x_{n-1})\, dx_{n-1}.$$

Die linke Seite ist

$$\geqq - \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n-1}{\nu} = -2^{n-1}.$$

Im Integral rechts ist nach dem Mittelwertsatz

$$y^{(n-1)}(x_{n-1}) \leqq y^{(n-1)}(0) + x_{n-1} \leqq y^{(n-1)}(0) + \frac{1}{2}.$$

Daher ist

$$-2^{n-1} \leqq h^{n-1}\left(y^{(n-1)}(0) + \frac{1}{2}\right),$$

$$y^{(n-1)}(0) \geqq -P_1(n).$$

Hilfssatz 5. *Es sei* $\tau \geqq \frac{1}{\sqrt[n]{\omega}}$. *Für* $|x| \leqq \tau$ *sei*

$$|y| \leqq 1, \quad y^{(n)} \leqq \omega.$$

Dann ist für $|x| \leqq \tau - \frac{1}{\sqrt[n]{\omega}}$, $0 < m < n$,

$$|y^{(m)}| \leqq P_2(n)\, \omega^{\frac{m}{n}}.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\omega = 1$ $\Bigl($sonst betrachte man $y\left(\frac{x}{\sqrt[n]{\omega}}\right)\Bigr)$.

Nach Hilfssatz 4, angewendet auf $y(x+\xi)$ mit $-\tau \leqq \xi \leqq \tau - \frac{1}{2}$ und auf $(-1)^n y(-x+\xi)$ mit $-\tau + \frac{1}{2} \leqq \xi \leqq \tau$, ist

$$y^{(n-1)}(\xi) \geqq -P_1(n) \quad \text{für} \quad -\tau \leqq \xi \leqq \tau - \frac{1}{2}$$

und

$$-y^{(n-1)}(\xi) \geqq -P_1(n) \quad \text{für} \quad -\tau + \frac{1}{2} \leqq \xi \leqq \tau.$$

Für $|x| \leqq \tau - \frac{1}{2}$ ist also

(11) $$|y^{(n-1)}(x)| \leqq P_1(n).$$

Im Fall $n = 2$ sind wir wegen $\tau - 1 < \tau - \frac{1}{2}$ am Ziel.

Im Fall $n > 2$ werde der Hilfssatz für $n-1$ als wahr angenommen. Es ist nach (11), wo $P_1(n) \geqq 2^{n-1}$ gewählt werden darf $\left(\text{dann ist } \tau - 1 \leqq \tau - \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt[n-1]{P_1(n)}}\right)$, mit $n-1$ statt n, $\tau - \frac{1}{2}$ statt τ, $P_1(n)$ statt ω, für $|x| \leqq \tau - 1$, $0 < m \leqq n-2$,

$$(12) \qquad |y^{(m)}| \leqq P_2(n-1)\, P_1^{\frac{m}{n-1}}(n) \leqq P_2(n-1)\, P_1(n).$$

Für $|x| \leqq \tau - 1$, $0 < m < n$ ist schließlich nach (11) und (12)

$$|y^{(m)}| \leqq \operatorname{Max}\left(P_1(n),\, P_2(n-1)\, P_1(n)\right) = P_2(n).$$

§ 2.

Beweis von Satz 2.

Das $P_2(n)$ des Hilfssatzes 5 darf ich $\geqq 1$ gewählt denken. Alsdann setze ich, wenn k die Lösungszahl von (1) ist,

$$\varepsilon = \varepsilon(n) = \frac{1}{2^{n+1}\, k\, P_2^n(n)} \qquad \left(\leqq \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

und

$$P(n) = P_2(n)\, 4^n.$$

Ich behaupte, daß diese Zahlen ε und P das in Satz 2 Behauptete leisten.

$y^{(n)}$ ist nach den Voraussetzungen (3) und (4) für $|x| \leqq 1$ nach oben beschränkt.

Ich setze für $0 \leqq t \leqq 1$

$$\omega(t) = \operatorname{Max}\left(4^n,\ \text{obere Grenze von}_{|x| \leqq t}\ y^{(n)}(x)\right),$$

$$\Omega(t) = \sqrt[n]{\omega(t)}.$$

Dann fallen $\omega(t)$ und $\Omega(t)$ mit wachsendem t nicht, und es ist

$$\Omega(t) \geqq 4$$

und nach (2)

$$(13) \qquad \omega(t) \geqq \omega(0) \geqq \mu.$$

Es sei $0 \leqq t \leqq \frac{3}{4}$, also

$$\tau = \tau(t) = t + \frac{1}{\Omega(t)} \leqq t + \frac{1}{4} \leqq 1.$$

Für $|x| \leqq \tau$ ist

$$|y| \leqq 1,$$

$$y^{(n)} \leqq \omega(\tau).$$

Nach Hilfssatz 5 $\Bigg($man beachte

$$\tau - \frac{1}{\Omega(\tau)} = t + \frac{1}{\Omega(t)} - \frac{1}{\Omega(\tau)} \geqq t\Bigg)$$

ist für $|x| \leqq t$, $0 < m < n$,

$$(14) \qquad |y^{(m)}| \leqq P_2(n)\,\omega^{\frac{m}{n}}(\tau) = P_2(n)\,\Omega^m(\tau).$$

Nach Definition von ε, (3), (13) und (14) ist jedes der k Glieder in $\mathfrak{P}$ für $|x| \leqq t$ absolut

$$< \varepsilon\,\mu^{1-N}\,P_2^{l_1+\cdots+l_{n-1}}(n)\,\omega^N(\tau) \leqq \varepsilon\,\omega^{1-N}(\tau)\,P_2^n(n)\,\omega^N(\tau) = \frac{\omega(\tau)}{2^{n+1}k},$$

also nach (4) für $|x| \leqq t$

$$y^{(n)} < k\,\frac{\omega(\tau)}{2^{n+1}k} + \frac{\omega(\tau)}{2^{n+1}} = \frac{\omega(\tau)}{2^n},$$

$$\underset{|x| \leqq t}{\text{obere Grenze von}}\; y^{(n)} \leqq \frac{\omega(\tau)}{2^n}.$$

Nach Definition von $\omega(t)$ ist daher für $0 \leqq t \leqq \frac{3}{4}$

$$\omega(t) \leqq \operatorname{Max}\left(4^n, \frac{\omega(\tau)}{2^n}\right),$$

$$(15) \qquad \Omega(t) \leqq \operatorname{Max}\left(4, \frac{\Omega(\tau)}{2}\right).$$

Die Zahlen

$$\frac{\Omega\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2^\nu}\right)}{2^{\nu+1}}, \qquad \nu \geqq 1 \text{ ganz},$$

beginnen mit $\dfrac{\Omega\left(\frac{1}{4}\right)}{4} \geqq 1$ und streben $\left(\text{da der Zähler } \leqq \Omega\left(\frac{3}{4}\right) \text{ ist}\right)$ bei $\nu \to \infty$ gegen 0. Für ein passendes $\nu \geqq 1$ ist also

$$(16) \qquad \frac{\Omega\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2^\nu}\right)}{2^{\nu+1}} \geqq 1$$

und

$$(17) \qquad \frac{\Omega\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2^{\nu+1}}\right)}{2^{\nu+2}} < 1.$$

Aus (16) und (15) folgt

$$(18) \qquad 2^{\nu+1} \leqq \Omega\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2^\nu}\right) \leqq \operatorname{Max}\left(4, \frac{1}{2}\,\Omega\left(\tau\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2^\nu}\right)\right)\right).$$

Hierin ist nach (16)

$$\tau\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2^\nu}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2^\nu} + \frac{1}{\Omega\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2^\nu}\right)} \leqq \frac{3}{4} - \frac{1}{2^\nu} + \frac{1}{2^{\nu+1}} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2^{\nu+1}},$$

also nach (17)

$$\frac{1}{2}\,\Omega\left(\tau\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2^\nu}\right)\right) \leqq \frac{1}{2}\,\Omega\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2^{\nu+1}}\right) < 2^{\nu+1}.$$

Daher ist die rechte Seite von (18) gleich 4, also

$$\Omega\left(\frac{1}{4}\right) \leqq \Omega\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2^\nu}\right) \leqq 4.$$

Daher ist erstens

$$y^{(n)}(0) \leqq \mu \leqq \omega\left(\frac{1}{4}\right) \leqq 4^n \leqq P_2(n)\, 4^n = P(n),$$

zweitens nach (14) mit $t = 0$, $\tau = \frac{1}{\Omega(0)} \leqq \frac{1}{4}$

$$|y^{(m)}(0)| \leqq P_2(n)\, \Omega^m\left(\frac{1}{4}\right) \leqq P_2(n)\, 4^n = P(n) \quad \text{für} \quad 0 < m < n.$$

Göttingen, den 27. Februar 1929.

(Eingegangen am 2. 3. 1929.)