Über das asymptotische Verhalten normierter Lösungen von Differentialgleichungen mit Parameter.

Von

Wolfgang Sternberg in Breslau.

In einer in den Math. Annalen[1]) erschienenen Arbeit habe ich das asymptotische Verhalten der Lösungen gewisser elliptischer Differentialgleichungen mit Parameter für große reelle positive Werte dieses Parameters untersucht. Im § 4 dieser Arbeit handelte es sich insbesondere um „normierte" Lösungen der Differentialgleichung

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \varrho^2 w = 0.$$

Es zeigte sich, daß eine in einem gegebenen Bereiche S normierte, d. h. der Bedingung

$$\iint_S w^2 \, dx \, dy = 1$$

genügende Lösung $w(x, y, \varrho)$ von (A) als Funktion von ϱ keineswegs für alle Punkte von S beschränkt zu sein braucht; es wurde nämlich eine normierte Lösung, welche in einem Punkte von S unendlich groß wie $\sqrt{\varrho}$ wird, tatsächlich angegeben. Dies war $w = \sqrt{\frac{\varrho}{2}} J_0(\varrho r)$, wo J_0 die Besselsche Funktion erster Art bezeichnete. Andrerseits ließ sich beweisen, daß die Ordnung des Unendlichwerdens der normierten Lösungen von (A) in bezug auf ϱ höchstens $\frac{1}{2}$ sein kann. Völlig analoge Sätze ergaben sich für die normierten Lösungen der Differentialgleichung

$$\text{(B)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + [A(x, y, \varrho) + \varrho^2] u = 0,$$

wobei vorausgesetzt war, daß die Funktion A in S endliche Ableitungen erster Ordnung besitzt und nebst diesen Ableitungen bei wachsendem ϱ beschränkt bleibt.

---

[1]) 86 (1922), S. 280—295.

Daraus ergeben sich z. B. Konvergenzsätze für Reihen, die der Bilinearreihe in der Theorie der Integralgleichungen eng verwandt sind. Bedeutet nämlich $\varphi_n(x, y)$ die der Differentialgleichung (A) genügende, zum n-ten Eigenwert $\lambda_n = \varrho_n^2$ gehörige normierte Eigenfunktion des Bereiches S, wobei etwa als Randbedingung $\varphi_n = 0$ vorgeschrieben ist, so läßt sich jetzt leicht die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x, y)\, \varphi_n(\xi, \eta)}{\lambda_n^{\frac{3}{2}+\varepsilon}}$$

für jedes positive ε beweisen. Da nämlich die Limesgleichung $\lim\limits_{n=\infty} \frac{\lambda_n}{n} = \text{konst.}$ (Weyl, Math. Annalen **71**, Crelles Journ. **141**, **143**; Courant, Math. Zeitschr. **7**) und andrerseits[2]) $\varphi_n(x, y) = O(\sqrt[4]{\lambda_n}) = O(\sqrt[4]{n})$ gilt, hat die obige Reihe die konvergente Majorantenreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$. Sie ist also für alle Punkte (x, y) und (ξ, η) von S gleichmäßig und absolut konvergent.

Ein ganz anderes Verhalten zeigen nun die normierten Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' + \varrho^2 y = 0, \tag{1}$$

sowie auch der allgemeineren Sturm-Liouvilleschen Differentialgleichung

$$z'' + [A(x) + \varrho^2] z = 0. \tag{2}$$

Für die Lösungen dieser Gleichungen kann man tatsächlich aus der Normiertheit auf die Beschränktheit schließen, was jetzt genauer ausgeführt werden soll.

Sei $y(x, \varrho)$ eine beliebige Lösung von (1), die im Intervalle $a \leqq x \leqq b$ zweimal stetig differentiierbar und normiert ist. Durch die lineare Transformation $x_1 = \frac{x-a}{b-a}$, durch die an der Form von (1) nichts Wesentliches geändert wird, kann man die Zurückführung auf das Intervall $0 \ldots 1$ erreichen, wodurch sich die Rechnung vereinfacht. Es wird also $a = 0$, $b = 1$ angenommen. Unsere Lösung kann in der Form

$$y = c_1(\varrho) \sin \varrho x + c_2(\varrho) \cos \varrho x$$

dargestellt werden, wo c_1 und c_2 Funktionen von ϱ allein sind. Nun ist

$$\int_0^1 y^2\, dx = c_1^2 \int_0^1 \sin^2 \varrho x\, dx + c_2^2 \int_0^1 \cos^2 \varrho x\, dx + 2 c_1 c_2 \int_0^1 \sin \varrho x \cos \varrho x\, dx$$
$$= 1.$$

---

[2]) Im folgenden wird das von E. Landau eingebürgerte Symbol O benutzt.

Oder

$$\int_0^1 y^2\,dx = c_1^2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sin 2\varrho}{4\varrho}\right)+c_2^2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sin 2\varrho}{4\varrho}\right)+2c_1c_2\frac{1-\cos 2\varrho}{4\varrho}$$

$$=\frac{c_1^2+c_2^2}{2}+c_1^2\,O\left(\frac{1}{\varrho}\right)+c_2^2\,O\left(\frac{1}{\varrho}\right)+2c_1c_2\,O\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

$$=\frac{c_1^2+c_2^2}{2}+(c_1^2+c_2^2)\,O\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

$$=(c_1^2+c_2^2)\left(\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right)$$

$$=1.$$

Daher ist

$$c_1^2+c_2^2=O(1),\qquad c_1=O(1),\qquad c_2=O(1).$$

Mithin gilt im Intervall $0\ldots 1$ gleichmäßig die Limesgleichung

$$y(x,\varrho)=O(1),$$

w. z. b. w.

Was nun die Gleichung (2) betrifft, in der $A(x)$ für $0\leqq x\leqq 1$ als stetig vorausgesetzt wird[3]), so benutzt man zuerst den fundamentalen Satz der Sturm-Liouvilleschen Theorie: Es existieren zwei für $0\leqq x\leqq 1$ zweimal stetig differentiierbare Lösungen z_1, z_2 von (2), die den Limesgleichungen

$$z_1(x,\varrho)=\sin\varrho x+O\left(\frac{1}{\varrho}\right),$$

$$z_2(x,\varrho)=\cos\varrho x+O\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

genügen. Sie bilden natürlich ein Fundamentalsystem. Sei nun $z(x,\varrho)$ eine beliebige für $0\leqq x\leqq 1$ zweimal stetig differentiierbare und normierte Lösung von (2).

Man kann

$$z=c_1(\varrho)\,z_1+c_2(\varrho)\,z_2$$

setzen.

Da

$$\int_0^1 z_1^2\,dx=\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{\varrho}\right),$$

$$\int_0^1 z_2^2\,dx=\frac{1}{2}+O\left(\frac{1}{\varrho}\right),$$

$$\int_0^1 z_1 z_2\,dx=O\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

---

[3]) Allgemeiner könnte man statt $A(x)$ eine Funktion $A(x,\varrho)$ zulassen, welche die Limesgleichung $A(x,\varrho)=O(1)$ erfüllt.

ist, findet man, wie oben,

$$\int_0^1 z^2\,dx = (c_1^2 + c_2^2)\left(\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right) = 1,$$

woraus sich wieder die Beschränktheit von c_1 und c_2 ergibt. Daraus folgt aber wegen $z_1 = O(1)$ und $z_2 = O(1)$ auch

$$z = O(1),$$

w. z. b. w.

Es sei noch bemerkt, daß ein analoger Satz für Gleichungen höherer Ordnung nicht gilt. So hat z. B. die Differentialgleichung vierter Ordnung

$$y^{\mathrm{IV}} - \varrho^4 y = 0$$

die in bezug auf das Intervall $0 \ldots 1$ normierte Lösung

$$y(x, \varrho) = \sqrt{2\varrho}\,\frac{e^{\varrho x}}{\sqrt{e^{2\varrho} - 1}}.$$

An der Stelle $x = 1$ hat man aber

$$y(1, \varrho) = \sqrt{2\varrho}\,\frac{e^{\varrho}}{\sqrt{e^{2\varrho} - 1}} = \sqrt{\varrho}\,O(1),$$

so daß $y(1, \varrho)$ unendlich groß und zwar von der Ordnung $\frac{1}{2}$ in bezug auf ϱ wird.

Ein ähnliches Resultat findet man bei Untersuchung der Gleichung

$$y^{\mathrm{IV}} + \varrho^4 y = 0.$$

Es ist also eine Eigenart der Sturm-Liouvilleschen Gleichung, daß sie keine normierten Lösungen besitzt, die nicht auch beschränkt sind. Hierin steht diese Gleichung in einem Gegensatz ebenso zu gewöhnlichen Differentialgleichungen höherer Ordnung wie auch zu partiellen Differentialgleichungen.

(Eingegangen am 1. 11. 1928.)