Theorie der adiabatischen Invarianten allgemeiner Differentialsysteme.

Von

Harald Geppert in Gießen, z. Zt. Rom.[1])

I.

Wie so viele mathematische Probleme verdankt auch die Frage nach den adiabatischen Invarianten mechanischer Systeme ihren Ursprung der Quantentheorie, und für ihre Zwecke wurde auch das erste auf sie bezügliche Theorem, der Sommerfeldsche Satz von der adiabatischen Invarianz der Phasenintegrale, bewiesen[2]). Daß diese Frage, unabhängig von den Strömungen der modernen Atomtheorie, auch für die Probleme der klassischen Mechanik von Wichtigkeit ist, hat man erst neuerdings erkannt, und man verdankt Herrn Levi-Civita[3]) eine sehr elegante, umfassende Theorie der adiabatischen Invarianten mechanischer Systeme, die die Basis für eine durchdringende mathematische Behandlung des ganzen Komplexes bildet. Die Levi-Civitasche Theorie unterliegt zwei wesentlichen Einschränkungen: Erstens gilt sie nur für Hamiltonsche Differentialsysteme, und zweitens setzt sie voraus, daß die bekannten Integrale derselben in Involution (im Lieschen Sinne) liegen, und es erhebt sich naturgemäß a posteriori die Frage, wie weit die erhaltenen Resultate von den genannten Bedingungen unabhängig sind. Bei der Untersuchung derselben zeigte sich, daß der Begriff der adiabatischen Invarianten viel weiter zu fassen ist als bisher und auf allgemeine Differentialsysteme übertragen werden muß, und daß sich alsdann eine weitreichende, in das Gebiet der Funktionalanalysis zu verweisende, mathematische Theorie desselben entwickeln läßt[4]), die reich an analytisch belangreichen Ergebnissen ist. Ihr sind die folgenden Zeilen gewidmet.

---

[1]) Fellow of the International Education Board.

[2]) Vgl. Burgers 1. 2. und die bei Born 1. wiedergegebenen Beweise.

[3]) Vgl. Levi-Civita 1. 2.

[4]) Vgl. die zusammenfassenden Noten: Geppert 1. 2. 3.

Ihrer Natur entsprechend hat die zu entwickelnde Theorie zwei Seiten, eine mathematische und eine physikalische. Wir werden in unserer Behandlung das Hauptgewicht auf die erstere legen, ohne den Kontakt mit den physikalisch wichtigen Problemen aufzugeben; dieser wird sich besonders in den die Mittelbildung betreffenden Fragen und der Klassifizierung der Systeme nach Imprimitivitätsordnungen bemerkbar machen. Zunächst setzen wir den allgemeinen Begriff der adiabatischen Invariante eines beliebigen Differentialsystems auseinander; diese Invarianten werden selbst durch ein neues Differentialsystem bestimmt, dessen nicht identisch befriedigte Integrabilitätsbedingungen die notwendigen und hinreichenden Voraussetzungen für die Existenz der adiabatischen Invarianten bilden. Es ist eine beachtenswerte Tatsache, daß sich für eine ausgedehnte Klasse von Fällen die Invarianten direkt angeben lassen, wodurch das Gibbs-Hertzsche Theorem verallgemeinert wird. Die entwickelte Theorie ist reich an Anwendungen auf die Mechanik auch nichthamiltonscher Systeme.

§ 1.

Der Begriff der adiabatischen Invariante.

Wir gehen aus von einem Differentialsystem erster Ordnung der Form:

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1 \dots x_n \,|\, a_1 \dots a_\varrho) \qquad (i = 1 \dots n) \tag{1.1}$$

in den Variablen $x_1 \dots x_n$. Die X_i seien (in dem zu betrachtenden Gebiete) stetig derivierbare Funktionen, die außer den genannten Variablen noch gewisse Parameter $a_1 \dots a_\varrho$ enthalten; wir setzen sie — ohne daß dies für die folgenden Begriffsbildungen wesentlich ist — als von t frei voraus. Sind die Parameter $a_1 \dots a_\varrho$ konstant, so besitzt das System Lösungen, die man formal schreiben kann:

$$x_i = x_i(t - t_0, \; c_1 \dots c_{n-1} \,|\, a_1 \dots a_\varrho) \qquad (i = 1 \dots n), \tag{1.2}$$

wobei $t_0, c_1 \dots c_{n-1}$ die n Integrationskonstanten bedeuten; sie sind im Kleinen eindeutig und daher in einem gewissen Bereich auflösbar in der Form:

$$\begin{aligned} f_i(x_1 \dots x_n \,|\, a_1 \dots a_\varrho) &= c_i \qquad (i = 1 \dots n-1), \\ f_n(x_1 \dots x_n \,|\, a_1 \dots a_\varrho) &= t - t_0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Es wird zweckmäßig sein, sich diese Beziehungen im Raume R_n der $x_1 \dots x_n$ zu deuten; interpretieren wir t als Zeit, so stellen die Gleichungen (1.2) die Bahn eines sich im R_n bewegenden Punktes P dar, dessen Geschwindigkeitskomponenten durch (1.1) als Funktionen des Ortes gegeben sind. Wir wollen diese Trajektorie oder Integralkurve in Zukunft mit $\mathfrak{T}$

bezeichnen. Die ersten $n-1$ der Gleichungen (1.3) repräsentieren $n-1$ Hyperflächen des R_n der Dimension $n-1$, und $\mathfrak{T}$ erscheint als deren eindimensionale Schnittkurve. Dies alles gilt nur in einem Gebiete des R_n, in dem die Gleichungen (1.2) regulär und eindeutig auflösbar sind.

Sind nun die Parameter $a_1 \dots a_\varrho$ nicht mehr konstant, sondern auch Funktionen von t, so kann man zwar den Lösungen des Systems i. a. die Form (1.2) bzw. (1.3) belassen, muß dann aber auch die t_0, $c_1 \dots c_{n-1}$ als Funktionen von t ansehen, und zwar bestimmen sich letztere aus den auch der Störungstheorie zugrunde liegenden Differentialgleichungen:

$$(1.4) \qquad \frac{dc_i}{dt} = \sum_{\nu=1}^{\varrho} \frac{\partial f_i}{\partial a_\nu} \frac{da_\nu}{dt}, \qquad \frac{dt_0}{dt} = -\sum_{\nu=1}^{\varrho} \frac{\partial f_n}{\partial a_\nu} \frac{da_\nu}{dt} \qquad (i = 1 \dots n-1),$$

zu deren Integration wir zweckmäßig in $\frac{\partial f_i}{\partial a_\nu}$ $(i = 1 \dots n)$ die Relationen (1.2) an Stelle der x_i substituieren, wodurch wir etwa die Gleichungen:

$$(1.5) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial a_\nu} = \varphi_{i\nu}(t - t_0,\ c_1 \dots c_{n-1} \,|\, a_1 \dots a_\varrho) \qquad (i = 1 \dots n;\ \nu = 1 \dots \varrho)$$

finden mögen. Das System (1.4) geht dann über in:

$$(1.6) \qquad dc_i = \sum_{\nu=1}^{\varrho} \varphi_{i\nu}\, da_\nu, \qquad dt_0 = -\sum_{\nu=1}^{\varrho} \varphi_{n\nu}\, da_\nu \qquad (i = 1 \dots n-1),$$

in dem nur noch die Variablen t, t_0, $c_1 \dots c_{n-1}$, $a_1 \dots a_\varrho$ vorkommen. Diese Gleichungen sind, wie aus (1.4) ersichtlich, bei vorgelegten $a_\nu(t)$ integrabel, und die $c_\nu(t)$ resultieren aus ihnen als *fonctions de ligne* bezüglich der $a_\nu(t)$; damit letztere zu gewöhnlichen Funktionen der a_ν werden, ist hingegen erforderlich, daß die Gleichungen (1.6) für beliebige a_ν unbeschränkt integrabel seien, was weitere Integrabilitätsbedingungen impliziert. Die Beziehungen (1.6) liefern zusammen mit (1.2) die Trajektorien der „gestörten“ Bewegung. Man kann sie also, wenn man vom Falle konstanter Parameter als Grundlage ausgeht, als eine andere Form der Gleichungen (1.1) auffassen.

An Stelle dieses Differentialsystems (1.6), dessen Betrachtung nichts Neues geben würde, legen wir im folgenden ein anderes Differentialsystem zugrunde, das aus (1.6) dadurch hervorgeht, daß man die Koeffizienten $\varphi_{i\nu}$ einer Funktionaloperation bezüglich t unterwirft. Wir wollen hier speziell solche Operationen heranziehen, die den Charakter einer Mittelbildung tragen, jedoch ist auch das allgemeinere Problem einer beliebigen Operation der Behandlung zugänglich. Es sei also $T = T_0 \dots T_1$ ein beliebiges, aber festes Intervall der Variablen t, über das wir die Mittelbildung erstrecken, $F(t - t_0,\ c_1 \dots c_{n-1} \,|\, a_1 \dots a_\varrho)$ die Verteilungsfunktion der letzteren, so setzen wir generell für eine von $t - t_0$, $c_1 \dots c_{n-1}$, $a_1 \dots a_\varrho$ abhängende Größe α als „Mittelwert“:

$$(1.7) \qquad \bar{\alpha} = \int_{t_0+T_0}^{t_0+T_1} \alpha(t - t_0, c_1 \dots c_{n-1} \,|\, a_1 \dots a_\varrho)\, F(t - t_0, c_1 \dots c_{n-1} \,|\, a_1 \dots a_\varrho)\, dt$$
$$: \int_{t_0+T_0}^{t_0+T_1} F(t - t_0, c_1 \dots c_{n-1} \,|\, a_1 \dots a_\varrho)\, dt,$$

natürlich unter der Voraussetzung, daß die auftretenden Integrale einen Sinn haben [5]). Die Integration in (1.7) verstehen wir so, daß sie sich nur auf das in α und F explizit auftretende Argument $t - t_0$ bezieht und demnach die Größen t_0, $c_1 \dots c_{n-1}$, $a_1 \dots a_\varrho$ als Konstanten behandelt.

Durch Anwendung der Operation (1.7) auf die Koeffizienten von (1.6) entsteht das neue n-gliedrige Differentialsystem:

$$(1.8) \qquad dc_i = \sum_{\nu=1}^{\varrho} \bar{\varphi}_{i\nu}\, da_\nu \qquad dt_0 = -\sum_{\nu=1}^{\varrho} \bar{\varphi}_{n\nu}\, da_\nu \qquad (i = 1 \dots n-1),$$

das nur noch die Variablen t_0, $c_1 \dots c_{n-1}$, $a_1 \dots a_\varrho$ enthält, und in dem $a_1 \dots a_\varrho$ die Rolle der unabhängigen Variablen spielen. Es bildet die wesentliche Grundlage der folgenden Theorie. In das Gebiet der Physik verweisen wir die Frage, unter welchen Bedingungen das System (1.6) durch (1.8) *praktisch* ersetzt werden kann; es wird dies immer dann der Fall sein, wenn die Parameter sich gegenüber der Bewegung des Punktes P in einer zu präzisierenden Weise „unendlich langsam“ oder „adiabatisch“ ändern [6]). Wir setzen natürlich die Existenz der $\bar{\varphi}_{i\nu}$ voraus, wozu notwendig ist, daß T im Regularitätsintervall von (1.2) liege. Wir bezeichnen (1.8) kurz als das *gemittelte System.*

Das gemittelte System ist nicht immer komplett integrabel, wir werden vielmehr seine Integrabilitätsbedingungen, die sich in Einschränkungen für das ursprüngliche System (1.1) äußern, zu besprechen haben. Wir definieren nun:

Definition 1. *Jede Invariante des gemittelten Systems heißt eine adiabatische Invariante.*

Für eine adiabatische Invariante $J(t_0, c_1 \dots c_{n-1} \,|\, a_1 \dots a_\varrho)$ ist also charakteristisch das simultane Bestehen der folgenden ϱ Differentialgleichungen:

$$(1.9) \qquad \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial J}{\partial c_i} \bar{\varphi}_{i\nu} - \frac{\partial J}{\partial t_0} \bar{\varphi}_{n\nu} + \frac{\partial J}{\partial a_\nu} = 0 \qquad (\nu = 1 \dots \varrho).$$

[5]) In der Physik hat man bisher nur den Fall der einfachsten Mittelbildung: $F \equiv 1$ in Erwägung gezogen, doch bedeutet unser allgemeiner Standpunkt keine Erschwerung.

[6]) Vgl. hierzu die Note in Levi-Civita 3.

Die Systeme (1. 8) und (1. 9) sagen dasselbe aus und besitzen die gleichen Integrabilitätsbedingungen.

Nennen wir eine Größe „im Mittel invariant" gegenüber dem System (1.1), wenn der durch (1. 7) erklärte Mittelwert ihrer totalen Ableitung nach t vermöge (1. 1) verschwindet, so können wir die obige Definition auch durch die folgende ersetzen:

Definition 2. *Eine für alle Werte der* $\frac{d a_\nu}{d t}$ $(\nu = 1 \ldots \varrho)$ *im Mittel invariante Funktion der Integrationskonstanten und Parameter des Systems* (1. 1) *heißt eine adiabatische Invariante desselben.*

Man hat nämlich nur zu beachten, daß nach (1. 6)

$$\frac{dJ}{dt} = \sum_{\nu=1}^{\varrho} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial J}{\partial c_i} \varphi_{i\nu} - \frac{\partial J}{\partial t_0} \varphi_{n\nu} + \frac{\partial J}{\partial a_\nu} \right\} \frac{d a_\nu}{d t}$$

ist, und die Definition 2 fordert, da J von t nicht explizit abhängen soll, das Bestehen des Gleichungssystems (1. 9).

Diese zweite Definition ist die ursprünglich von den Physikern angenommene Begriffsbildung; denn für sie handelte es sich darum, Größen zu finden, die bei beliebiger adiabatischer Änderung der Parameter invariant bleiben, wobei das „unendlich schwach" der Änderung dadurch präzisiert wird, daß an die Stelle der gewöhnlichen Invarianz die Invarianz im Mittel treten darf. Dies hat praktisch den Vorteil, daß man im System (1. 9) zu Gleichungen gelangt, die viel leichter zu integrieren sind als die ursprünglichen Beziehungen (1. 6); wir werden, wie sich noch zeigen wird, in der Lage sein, in einer großen Klasse von Fällen ihre Integrale wirklich anzugeben.

Die durch (1. 7) definierten Mittelwerte hängen i. a. noch von t_0 ab; wir wollen uns aber im folgenden ausschließlich auf solche Fälle beschränken, in denen dies nicht eintritt, nämlich in denen das Intervall T nicht von t_0 abhängt, und unser Interesse in erster Linie auf die Fälle konzentrieren, in denen die Mittelwerte über unendliches Intervall erstreckt werden, also

$$(1.10)\quad \bar{\alpha} = \lim_{T \to \infty} \int_{t_0}^{t_0+T} \alpha(t - t_0, c_1 \ldots c_{n-1} \,|\, a_1 \ldots a_\varrho) F(t - t_0, c_1 \ldots c_{n-1} \,|\, a_1 \ldots a_\varrho) \, dt$$
$$: \int_{t_0}^{t_0+T} F(t - t_0, c_1 \ldots c_{n-1} \,|\, a_1 \ldots a_\varrho) \, dt$$

zu setzen ist, weil hier unsere Theorie besonders schöne Resultate liefern wird. Man kann dann das Problem der adiabatischen Invarianten etwas enger fassen und sich auf die Aufsuchung solcher Invarianten beschränken, die von t_0 unabhängig sind, d. h. solcher Funktionen $J(c_1 \ldots c_{n-1} \,|\, a_1 \ldots a_\varrho)$, für die die Gleichungen

(1.11) $$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial J}{\partial c_i} \overline{\varphi}_{i\nu} + \frac{\partial J}{\partial a_\nu} = 0 \qquad (\nu = 1 \ldots \varrho)$$

identisch befriedigt sind.

Da jede Funktion einer oder mehrerer adiabatischen Invarianten wieder eine solche ist, wird es genügen, die unabhängigen partikulären Lösungen von (1.11) zu finden, deren größtmögliche Anzahl $n-1$ sein wird; sie werden die Größen $c_1 \ldots c_{n-1}$ mit den Parametern in Beziehung setzen. Die Gleichungen (1.11) setzen die Existenz der $\overline{\varphi}_{i\nu}$ und diese wieder die eindeutige Auflösbarkeit von (1.2) im Gebiete T voraus; sollte diese Bedingung für eine Reihe von Größen $\overline{\varphi}_{i\nu}$ nicht erfüllt sein, so kann trotzdem das Problem seinen Sinn behalten, indem man J von den entsprechenden c_i als unabhängig voraussetzt. Schließlich entnimmt man aus (1.11) den trivialen Satz:

Satz 1. *Jedes von den Parametern freie Integral $f_i(x_1 \ldots x_n) = c_i$ des ursprünglichen Systems ist eine adiabatische Invariante.*

§ 2.

Zwei Beispiele.

Bevor wir uns der allgemeinen Theorie zuwenden, mögen hier zwei Beispiele Platz finden, die wir später von andern Gesichtspunkten aus behandeln werden.

1. Beispiel. Die eindimensionale elastische Bewegung kann, wenn a_1 die Elastizitätskonstante bedeutet, folgendermaßen dargestellt werden:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -a_1 x_1.$$

Die Integrale sind:

$$f_1 \equiv \sqrt{x_1^2 + \frac{1}{a_1} x_2^2} = c_1, \qquad f_2 \equiv \operatorname{arctang} \sqrt{a_1}\, \frac{x_1}{x_2} = t - t_0.$$

Nimmt man $F \equiv 1$, $T = \infty$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, gleich der Periode $\frac{2\pi}{\sqrt{a_1}}$ der Bewegung, so wird

$$\overline{\varphi}_{11} = -\frac{c_1}{4a_1},$$

und (1.11) lautet:

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} - \frac{c_1}{4a_1} \frac{\partial J}{\partial c_1} = 0,$$

deren allgemeine Lösung

(2.1) $$J = f(a_1 c_1^4)$$

ist; d. h. bei adiabatischer Variation der Elastizitätskonstanten ändert sich die Amplitude der Schwingung umgekehrt proportional der vierten Wurzel aus der Elastizitätskonstanten.

2. Beispiel. Das Differentialsystem

$$x_1 \frac{dx_1}{dt} = a_1^2 x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -a_2^2$$

besitzt die Integrale

$$f_1 \equiv x_1^2 + \frac{a_1^2}{a_2^2} x_2^2 = c_1, \qquad f_2 \equiv -\frac{x_2}{a_2^2} = t - t_0,$$

und die (elliptische) Trajektorie ist nur dann reell, wenn $t - t_0$ zwischen den Grenzen $-\frac{\sqrt{c_1}}{a_1 a_2}$ und $\frac{\sqrt{c_1}}{a_1 a_2}$ liegt. Nehmen wir dieses Intervall als T und $F \equiv 1$, so lautet das System (1.9) folgendermaßen:

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} + \frac{2}{3}\frac{c_1}{a_1}\frac{\partial J}{\partial c_1} = 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial a_2} - \frac{2}{3}\frac{c_1}{a_2}\frac{\partial J}{\partial c_1} = 0,$$

es ist komplett integrabel und besitzt die Lösung

$$J = f\left(\frac{a_2}{a_1} c_1^{3/2};\ t_0\right) \tag{2.2}$$

als adiabatische Invariante.

Auf das später zu behandelnde Beispiel des gedämpften Oszillators wollen wir hier nur verweisen.

§ 3.

Zweidimensionale Systeme.

Indem wir uns nunmehr dem allgemeinen Problem zuwenden, werden wir vorerst den Fall der zweidimensionalen Systeme ($n = 2$) erledigen, weil er sich vollkommen behandeln läßt und einen Leitfaden für die folgenden Betrachtungen abgibt. Es handelt sich also um das System

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1(x_1, x_2 \,|\, a_1 \ldots a_\varrho); \qquad \frac{dx_2}{dt} = X_2(x_1, x_2 \,|\, a_1 \ldots a_\varrho), \tag{3.1}$$

dessen Integral (wir lassen den Index 1 weg) lautet:

$$f(x_1, x_2 \,|\, a_1 \ldots a_\varrho) = c, \tag{3.2}$$

und das mithin die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} X_2 \equiv 0 \tag{3.3}$$

befriedigen muß. Man entnimmt dieser Beziehung die Existenz einer Größe μ derart, daß

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = -\mu X_2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \mu X_1 \tag{3.4}$$

ist. Die Integrabilitätsbedingung von (3.4) erfordert, daß μ eine Lösung der Gleichung

$$(3.5)\qquad \frac{\partial}{\partial x_1}(\mu X_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(\mu X_2)\equiv X_1\frac{\partial\mu}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial\mu}{\partial x_2}+\mu\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\frac{\partial X_2}{\partial x_2}\right)=0,$$

d. h. daß μ ein sogenannter Jacobischer Multiplikator des Systems (3.1) sei. Vorerst ist μ jedoch nicht ein beliebiger Multiplikator, sondern eben derjenige, der durch die Gleichungen (3.4) eindeutig festgelegt ist; μ ist eine Funktion von $x_1, x_2 \mid a_1 \ldots a_\varrho$.

Wir wollen annehmen, daß die Trajektorie $\mathfrak{T}$ frei von allen Singularitäten sei, derart, daß im besonderen die beiden Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ nicht gleichzeitig verschwinden; dies besagt dann, daß μ zufolge (3.4) längs $\mathfrak{T}$ und damit wegen der Stetigkeit auch in einer gewissen Umgebung von $\mathfrak{T}$ niemals verschwindet, wenn wir annehmen, daß X_1, X_2 daselbst sich regulär verhalten. μ hat also in seinem Regularitätsgebiet längs $\mathfrak{T}$ ein bestimmtes Vorzeichen. Das Bogenelement von $\mathfrak{T}$ läßt sich dann wegen (3.1) und (3.4) auf die Form bringen:

$$(3.6)\quad ds=\sqrt{dx_1^2+dx_2^2}=dt\cdot\sqrt{X_1^2+X_2^2}=\frac{dt}{\mu}\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2}=dt\cdot\frac{\Gamma_{12}}{\mu},$$

wobei wir gesetzt haben:

$$(3.7)\qquad \Gamma_{12}^2=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2.$$

Unseren Voraussetzungen gemäß verschwindet auch Γ_{12} längs $\mathfrak{T}$ niemals und kann — indem der Richtungssinn von s nach fortschreitendem t orientiert wird — als mit μ von gleichem Vorzeichen angenommen werden.

Diese Beziehung (3.6) versetzt uns in die Lage, die bisher in unsern Definitionen auftretenden Mittelwerte nach t durch räumliche, über $\mathfrak{T}$ zu erstreckende Integralbildungen zu ersetzen. Bei diesem Übergang tritt dann an Stelle des Intervalls T der Variablen $t-t_0$ vermöge (1.2) ein räumliches Intervall S auf $\mathfrak{T}$ für die Variable s; ferner muß die bisherige Verteilungsfunktion $F(t-t_0, c_1 \mid a_1 \ldots a_\varrho)$ vermöge (1.3) durch eine eindeutige reguläre räumliche Verteilungsfunktion $F(x_1, x_2 \mid a_1 \ldots a_\varrho)$ ersetzt werden, so daß die zugrunde gelegte Operation (1.7) übergeht in

$$(3.8)\quad \bar{\alpha}=\int_S \alpha(x_1, x_2 \mid a_1 \ldots a_\varrho)\, F(x_1, x_2 \mid a_1 \ldots a_\varrho)\frac{\mu}{\Gamma_{12}}\, ds : \int_S F(x_1, x_2 \mid a_1 \ldots a_\varrho)\frac{\mu}{\Gamma_{12}}\, ds$$

Hier ist eine Bemerkung über μ einzufügen; μ war bisher ein durch (3.4) eindeutig bestimmter Multiplikator von (3.1). Nun gilt aber der leicht zu beweisende Satz, daß der Quotient zweier verschiedener Multiplikatoren eine Invariante des ursprünglichen Systems ist, mit andern Worten: auf der Trajektorie $\mathfrak{T}$ unterscheiden sich die Multiplikatoren nur um einen konstanten Faktor. Da letzterer in (3.8) sich forthebt, darf daselbst nunmehr μ jeden beliebigen Multiplikator, d. h. jede Lösung von (3.5) bedeuten.

Ist das System (3.1) ein Liouvillesches System, d. h. verschwindet seine „Divergenz":

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} = 0, \tag{3.9}$$

so zeigt (3.5), daß $\mu =$ konst. gesetzt und demnach μ aus (3.8) und allen folgenden Beziehungen gestrichen werden kann. Ein Spezialfall der Liouvilleschen sind wiederum die Hamiltonschen Systeme [7]).

Infolge von (3.8) nehmen die Bestimmungsgleichungen (1.11) der adiabatischen Invarianten die Form an:

$$\frac{\partial J}{\partial c} \cdot \int\limits_S \frac{\partial f}{\partial a_\nu} F \frac{\mu}{\Gamma_{12}} \, ds + \frac{\partial J}{\partial a_\nu} \cdot \int\limits_S F \frac{\mu}{\Gamma_{12}} \, ds = 0 \qquad (\nu = 1 \ldots \varrho). \tag{3.10}$$

Der wichtigste zu betrachtende Fall ist der der einfachen Mittelbildung $F \equiv 1$. Bevor wir an die Lösung dieser Gleichungen gehen, müssen wir ihre Integrabilitätsbedingungen untersuchen.

§ 4.

Die notwendigen Integrabilitätsbedingungen.

Die Bedingungen für die vollständige Integrabilität des Systems (1.11) oder, was auf dasselbe hinauskommt, der ersten $n-1$ Gleichungen (1.8) lauten in unserm zweidimensionalen Falle:

$$\frac{d}{da_\lambda} \overline{\varphi}_{1\varkappa} - \frac{d}{da_\varkappa} \overline{\varphi}_{1\lambda} \equiv \frac{\partial}{\partial a_\lambda} \overline{\varphi}_{1\varkappa} - \frac{\partial}{\partial a_\varkappa} \overline{\varphi}_{1\lambda} + \overline{\varphi}_{1\lambda} \frac{\partial}{\partial c} \overline{\varphi}_{1\varkappa} - \overline{\varphi}_{1\varkappa} \frac{\partial}{\partial c} \overline{\varphi}_{1\lambda} = 0 \tag{4.1}$$
$$(\varkappa, \lambda = 1 \ldots \varrho).$$

Führen wir vorübergehend die Bezeichnung ein:

$$g = \int\limits_S F \frac{\mu}{\Gamma_{12}} \, ds; \qquad g_\nu = \int\limits_S \frac{\partial f}{\partial a_\nu} F \frac{\mu}{\Gamma_{12}} \, ds \qquad (\nu = 1 \ldots \varrho), \tag{4.2}$$

so kann man (4.1) in die Form setzen:

$$g\left(\frac{\partial g_\varkappa}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial g_\lambda}{\partial a_\varkappa}\right) + g_\lambda\left(\frac{\partial g_\varkappa}{\partial c} + \frac{\partial g}{\partial a_\varkappa}\right) - g_\varkappa\left(\frac{\partial g_\lambda}{\partial c} + \frac{\partial g}{\partial a_\lambda}\right) = 0 \tag{4.3}$$
$$(\varkappa, \lambda = 1 \ldots \varrho),$$

und es ist unsere Aufgabe, die hierin auftretenden Derivierten wirklich zu berechnen.

---

[7]) Eine andere Ableitung von (3.8) für letztere findet sich bei Levi-Civita 1, S. 335–337.

Das zu betrachtende Stück S der Trajektorie $\mathfrak{T}$ möge sich von dem Punkte P_0, der dem Werte $t - t_0 = T_0$ entspreche, bis zu P_1, der für $t - t_0 = T_1$ angenommen wird, erstrecken, derart, daß $T_1 - T_0 = T$ das Mittelungsintervall bedeutet. Erstreckt sich die Mittelung über die gesamte unendlich lange Trajektorie, so ist im folgenden die Betrachtung der Randpunkte P_0; P_1 überflüssig. Sowohl T_0 als T_1 sind Funktionen von $c \,|\, a_1 \ldots a_\varrho$. Es wird dann zweckmäßig sein, neben der Kurvenschar (3.2) der Trajektorien $\mathfrak{T}$ die der sogenannten Synchronen (vgl. (1.3)):

$$f_2(x_1, x_2 \,|\, a_1 \ldots a_\varrho) = t - t_0 = \text{konst.}, \tag{4.4}$$

die wir generell mit $\mathfrak{S}$ bezeichnen wollen, einzuführen und jeden der zu betrachtenden Punkte als Schnitt einer $\mathfrak{T}$ mit (mindestens) einer $\mathfrak{S}$ aufzufassen. Die Randpunkte werden auf $\mathfrak{T}$ von den Synchronen

$$f_2(x_1, x_2 \,|\, a_1 \ldots a_\varrho) = T_0 \text{ bzw. } T_1 \tag{4.5}$$

ausgeschnitten. Ändern wir nun c allein um dc und lassen $a_1 \ldots a_\varrho$ fest, so geht $\mathfrak{T}$ in eine neue Trajektorie $\mathfrak{T}'$ mit der Gleichung

$$f(x_1, x_2 \,|\, a_1 \ldots a_\varrho) = c + dc \tag{4.6}$$

über, und deren Randpunkte P_0', P_1' werden von den Synchronen

$$f_2(x_1, x_2 \,|\, a_1 \ldots a_\varrho) = T_0 + \frac{\partial T_0}{\partial c} dc \quad \text{bzw.} \quad T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial c} dc \tag{4.7}$$

ausgeschnitten.

Wir ordnen jedem Punkte P von $\mathfrak{T}$ den auf seiner Normalen n liegenden Schnittpunkt mit $\mathfrak{T}'$ zu und nennen diesen P'; diese Zuordnung läßt den Punkten P_0 bzw. P_1 zwei Punkte $\overline{P}_0'$ bzw. $\overline{P}_1'$ entsprechen, die im allgemeinen von P_0', P_1' verschieden sein werden. Um die in (4.3) auftretenden Derivierten nach c zu berechnen, müssen wir die Integrale $g_\varkappa$ längs $\mathfrak{T}'$ von P_0' bis P_1' erstrecken und den längs $\mathfrak{T}$ genommenen Wert derselben subtrahieren. Wir können also schreiben:

$$\frac{\partial g_\varkappa}{\partial c} = \lim_{dc \to 0} \frac{1}{dc} \left\{ \int_{P_0'}^{\overline{P}_0'} + \int_{\overline{P}_1'}^{P_1'} + \left(\int_{\overline{P}_0'}^{\overline{P}_1'} - \int_{P_0}^{P_1} \right) \right\}; \tag{4.8}$$

die beiden ersten Summanden nennen wir die (infinitesimalen) Randglieder, der dritte läßt sich vermöge unserer normalen Zuordnung $P \to P'$ leicht berechnen. Es sei nämlich $d'n$ die normale Verschiebung $P' - P$ und ihre Komponenten $d'x_1$, $d'x_2$, also

$$d'x_1 = \frac{1}{\Gamma_{12}} \frac{\partial f}{\partial x_1} d'n, \qquad d'x_2 = \frac{1}{\Gamma_{12}} \frac{\partial f}{\partial x_2} d'n, \tag{4.9}$$

und es mögen durch Akzente alle auf $\mathfrak{T}'$ bezüglichen Größen bezeichnet werden; dann ist bis auf Größen zweiter Ordnung:

$$d's = \sqrt{d(x_1 + d'x_1)^2 + d(x_2 + d'x_2)^2} = ds\left\{1 + \frac{1}{\Gamma_{12}}\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{d}{ds}(d'x_1) - \frac{1}{\Gamma_{12}}\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{d}{ds}(d'x_2)\right\}$$

$$(4.10)\qquad = ds\left\{1 + \frac{d'n}{\Gamma_{12}^3}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 - 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\right]\right\},$$

$$\frac{1}{\Gamma_{12}'} = \frac{1}{\Gamma_{12}}\left\{1 - \frac{d'n}{\Gamma_{12}^3}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\right]\right\}.$$

Aus (4.6) und (4.9) folgt aber andrerseits:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}d'x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}d'x_2 \equiv \Gamma_{12}\,d'n = dc,$$

somit

$$(4.11)\qquad d'n = \frac{dc}{\Gamma_{12}};\qquad d'x_1 = \frac{1}{\Gamma_{12}^2}\frac{\partial f}{\partial x_1}dc,\qquad d'x_2 = \frac{1}{\Gamma_{12}^2}\frac{\partial f}{\partial x_2}dc,$$

und damit sind wir in der Lage, den dritten Summanden in (4.8) hinzuschreiben.

Wir berechnen noch die Randglieder. Die Koordinaten von $\overline{P}_0'$ sind nach (4.11)

$$\overline{P}_0':\qquad x_1 + \frac{1}{\Gamma_{12}^2}\frac{\partial f}{\partial x_1}dc\Big|^0,\qquad x_2 + \frac{1}{\Gamma_{12}^2}\frac{\partial f}{\partial x_2}dc\Big|^0,$$

diejenigen von P_0' dagegen finden sich aus den beiden Gleichungen (4.6) und (4.7). Bedeutet nämlich $(\delta' x_1, \delta' x_2)$ den Vektor $P_0 P_0'$, so ist in P_0

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta' x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\delta' x_2 = dc,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\delta' x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\delta' x_2 = \frac{\partial T_0}{\partial c}dc,$$

also, wenn wir vorübergehend

$$\mathfrak{F} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$$

setzen:

$$(4.12)\qquad \delta' x_1 = \frac{dc}{\mathfrak{F}}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial T_0}{\partial c}\right)\Big|^0,\qquad \delta' x_2 = \frac{dc}{\mathfrak{F}}\left(-\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial T_0}{\partial c}\right)\Big|^0.$$

Aus den wegen (3.1) folgenden Gleichungen

$$(4.13)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}X_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}X_2 = 0,\qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_1}X_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}X_2 = 1$$

folgt, daß $\mathfrak{F} \neq 0$ ist. Die Komponenten von $P_0'\overline{P}_0'$ sind demnach:

$$dc\left\{\frac{1}{\mathfrak{F}}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial T_0}{\partial c}\right) - \frac{1}{\Gamma_{12}^2}\frac{\partial f}{\partial x_1}\right\}\Big|^0;\qquad dc\left\{\frac{1}{\mathfrak{F}}\left(-\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial T_0}{\partial c}\right) - \frac{1}{\Gamma_{12}^2}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\}\Big|^0$$

und daher die Länge dieser Strecke:

$$\overline{P_0'\overline{P}_0'} = \frac{dc}{\mathfrak{F}\,\Gamma_{12}}\left[\Gamma_{12}^2\frac{\partial T_0}{\partial c} - \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)\right]\Big|^0$$

$$= dc\cdot\sqrt{X_1^2 + X_2^2}\left[\frac{\partial T_0}{\partial c} - \frac{1}{\Gamma_{12}^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)\right]\Big|^0.$$

Ein entsprechender Ausdruck findet sich für den andern Randpunkt; die Randglieder in der Summe (4.8) haben also schließlich den Wert:

$$\frac{\partial f}{\partial a_\varkappa} F \mu \frac{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}{\Gamma_{12}} \left[\frac{\partial T_{0,1}}{\partial c} - \frac{1}{\Gamma_{12}^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)\right]_{P_1}^{P_0}.$$

Damit sind wir endlich in der Lage, den Ausdruck für $\frac{\partial g_\varkappa}{\partial c}$ zusammenzusetzen; man hat nach Vorangehendem:

$$(4.14)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial g_\varkappa}{\partial c} = &-\int\limits_S \frac{\partial f}{\partial a_\varkappa} F \frac{\mu}{\Gamma_{12}^5}\left\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right)\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\right) + 4\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\} ds \\ &+ \int\limits_S F \frac{\mu}{\Gamma_{12}^3}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial a_\varkappa \partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial a_\varkappa \partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) ds \\ &+ \int\limits_S \frac{\partial f}{\partial a_\varkappa} F \frac{1}{\Gamma_{12}^3}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) ds \\ &+ \int\limits_S \frac{\partial f}{\partial a_\varkappa}\frac{\mu}{\Gamma_{12}^3}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) ds \\ &+ \frac{\partial f}{\partial a_\varkappa} F \mu \frac{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}}{\Gamma_{12}}\left[\frac{\partial T_{0,1}}{\partial c} - \frac{1}{\Gamma_{12}^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)\right]_{P_1}^{P_0}. \end{aligned}\right.$$

In gleicher Weise leisten wir nun die Berechnung der Derivierten von g und $g_\varkappa$ nach a_λ. Geht a_λ in $a_\lambda + da_\lambda$ über, während alle übrigen Größen festbleiben, so tritt an Stelle von $\mathfrak{T}$ die Kurve $\mathfrak{T}^*$ mit der Gleichung

$$(4.15)\qquad f(x_1, x_2 \mid a_1 \ldots a_\lambda + da_\lambda \ldots a_\varrho) = c,$$

und die Randpunkte werden auf ihr durch die Synchronen

$$(4.16)\quad f_2(x_1, x_2 \mid a_1 \ldots a_\lambda + da_\lambda \ldots a_\varrho) = T_0 + \frac{\partial T_0}{\partial a_\lambda} da_\lambda \quad \text{bzw.} \quad T_1 + \frac{\partial T_1}{\partial a_\lambda} da_\lambda$$

ausgeschnitten; wir bezeichnen sie mit P_0^*, P_1^*, während $\overline{P}_0^*, \overline{P}_1^*$ die normal über P_0, P_1 auf $\mathfrak{T}^*$ liegenden Punkte bezeichnen sollen. Jedem Punkte P von $\mathfrak{T}$ ordnen wir den auf seiner Normalen liegenden Punkt P^* zu und bezeichnen mit d^*n den Vektor PP^*, dessen Komponenten

$$(4.17)\qquad d^*x_1 = \frac{1}{\Gamma_{12}}\frac{\partial f}{\partial x_1} d^*n, \qquad d^*x_2 = \frac{1}{\Gamma_{12}}\frac{\partial f}{\partial x_2} d^*n$$

sind. Eine zu (4.8) entsprechende Zerlegung führt auch hier zum Ziel. Nun folgt aber aus (4.15) und (4.17)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} d^*x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} d^*x_2 \equiv \Gamma_{12}\, d^*n = -\frac{\partial f}{\partial a_\lambda} da_\lambda,$$

also

$$(4.18)\qquad d^*n = -\frac{\partial f}{\partial a_\lambda}\frac{da_\lambda}{\Gamma_{12}};$$

$$d^*x_1 = -\frac{1}{\Gamma_{12}^2}\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial a_\lambda} da_\lambda, \qquad d^*x_2 = -\frac{1}{\Gamma_{12}^2}\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial a_\lambda} da_\lambda.$$

Die auf $\mathfrak{T}^*$ bezüglichen Größen erhalten im folgenden einen Stern; dann ist nach (4.10), worin nur d^*n statt $d'n$ zu substituieren ist:

$$d^*s = ds\left\{1 - \frac{da_\lambda}{\Gamma_{12}^4}\frac{\partial f}{\partial a_\lambda}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\right]\right\}; \tag{4.19}$$

in gleicher Weise findet man aus der auf (4.10) folgenden Formel, wenn man beachtet, daß a_λ in f auch explizit auftritt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma_{12}^*} = \frac{1}{\Gamma_{12}}\Bigg\{1 + \frac{da_\lambda}{\Gamma_{12}^4}\frac{\partial f}{\partial a_\lambda}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\right] \\ - \frac{da_\lambda}{\Gamma_{12}^2}\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial a_\lambda} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial a_\lambda}\right]\Bigg\},\end{aligned} \tag{4.20}$$

und mittels dieser Formeln sind wir in der Lage, die dem dritten Summanden von (4.8) entsprechenden Terme hinzuschreiben.

Es bleiben wieder die Randglieder zu bestimmen. Wegen (4.18) hat $\overline{P}_0^*$ die Koordinaten

$$\overline{P}_0^*: \qquad x_1 - \frac{1}{\Gamma_{12}^2}\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial a_\lambda}da_\lambda\Big|^0, \quad x_2 - \frac{1}{\Gamma_{12}^2}\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial a_\lambda}da_\lambda\Big|^0.$$

P_0^* hingegen möge die Koordinaten $x_i + \delta^* x_i\,|^0$ haben, dann folgt aus (4.15) und (4.16):

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta^* x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\delta^* x_2 = -\frac{\partial f}{\partial a_\lambda}da_\lambda,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\delta^* x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\delta^* x_2 = \frac{\partial(T_0 - f_2)}{\partial a_\lambda}da_\lambda,$$

gültig in P_0, und demnach:

$$\begin{aligned}\delta^* x_1 &= \frac{da_\lambda}{\mathfrak{F}}\left(-\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial(T_0 - f_2)}{\partial a_\lambda}\right), \\ \delta^* x_2 &= \frac{da_\lambda}{\mathfrak{F}}\left(+\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial a_\lambda} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial(T - f_2)}{\partial a_\lambda}\right).\end{aligned} \tag{4.21}$$

Die Komponenten des Vektors $P_0^*\,\overline{P}_0^*$ sind also

$$da_\lambda\left[-\frac{1}{\mathfrak{F}}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial a_\lambda} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial(T_0 - f_2)}{\partial a_\lambda}\right) + \frac{1}{\Gamma_{12}^2}\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial a_\lambda}\right],$$

$$da_\lambda\left[\frac{1}{\mathfrak{F}}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial a_\lambda} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial(T_0 - f_2)}{\partial a_\lambda}\right) + \frac{1}{\Gamma_{12}^2}\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial a_\lambda}\right],$$

und daher die Länge dieses Vektors:

$$\begin{aligned}\overline{P_0^*\,\overline{P}_0^*} &= \frac{da_\lambda}{\mathfrak{F}\Gamma_{12}}\left[\frac{\partial(T_0 - f_2)}{\partial a_\lambda}\Gamma_{12}^2 + \frac{\partial f}{\partial a_\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)\right]\Bigg|^0 \\ &= da_\lambda \cdot \sqrt{X_1^2 + X_2^2}\left[\frac{\partial(T_0 - f_2)}{\partial a_\lambda} + \frac{1}{\Gamma_{12}^2}\frac{\partial f}{\partial a_\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)\right]\Bigg|^0,\end{aligned}$$

und ein entsprechender Ausdruck gilt im andern Endpunkt. Damit lauten beispielsweise die den beiden ersten Summanden in (4.8) entsprechenden Randglieder in der Zerlegung für $\frac{\partial g}{\partial a_\lambda}$:

$$F\mu\frac{\sqrt{X_1^2+X_2^2}}{\Gamma_{12}}\left[\frac{\partial(T_{0,1}-f_2)}{\partial a_\lambda}+\frac{1}{\Gamma_{12}^2}\frac{\partial f}{\partial a_\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)\right]\Bigg|_{P_1}^{P_0}$$

und analog für $\frac{\partial g_\varkappa}{\partial a_\lambda}$, wo nur der Faktor $\frac{\partial f}{\partial a_\varkappa}$ hinzutritt.

Setzt man alles zusammen, so findet man endlich:

$$(4.22)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial a_\lambda} = {} & \int_S \frac{\partial f}{\partial a_\lambda} F\frac{\mu}{\Gamma_{12}^5}\left\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right)\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2-\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\right)+4\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\}ds\\
& -\int_S F\frac{\mu}{\Gamma_{12}^3}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial a_\lambda\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial^2 f}{\partial a_\lambda\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)ds\\
& -\int_S \frac{\partial f}{\partial a_\lambda}F\frac{1}{\Gamma_{12}^3}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial \mu}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)ds\\
& -\int_S \frac{\partial f}{\partial a_\lambda}\frac{\mu}{\Gamma_{12}^3}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)ds+\int_S\left(F\frac{\partial\mu}{\partial a_\lambda}+\mu\frac{\partial F}{\partial a_\lambda}\right)\frac{1}{\Gamma_{12}}ds\\
& +F\mu\frac{\sqrt{X_1^2+X_2^2}}{\Gamma_{12}}\left[\frac{\partial(T_{0,1}-f_2)}{\partial a_\lambda}+\frac{1}{\Gamma_{12}^2}\frac{\partial f}{\partial a_\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)\right]\Bigg|_{P_1}^{P_0},\end{aligned}\right.$$

und:

$$(4.23)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial g_\varkappa}{\partial a_\lambda} = {} & \int_S \frac{\partial f}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial f}{\partial a_\lambda} F\frac{\mu}{\Gamma_{12}^5}\left\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right)\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2-\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\right)+4\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\}ds\\
& -\int_S \frac{\partial f}{\partial a_\varkappa}F\frac{\mu}{\Gamma_{12}^3}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial a_\lambda\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial^2 f}{\partial a_\lambda\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)ds\\
& -\int_S \frac{\partial f}{\partial a_\lambda}F\frac{\mu}{\Gamma_{12}^3}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial a_\varkappa\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial^2 f}{\partial a_\varkappa\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)ds\\
& -\int_S \frac{\partial f}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial f}{\partial a_\lambda}F\frac{1}{\Gamma_{12}^3}\left(\frac{\partial \mu}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial \mu}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)ds\\
& -\int_S \frac{\partial f}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial f}{\partial a_\lambda}\frac{\mu}{\Gamma_{12}^3}\left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)ds\\
& +\int \frac{\partial f}{\partial a_\varkappa}\left(F\frac{\partial\mu}{\partial a_\lambda}+\mu\frac{\partial F}{\partial a_\lambda}\right)\frac{1}{\Gamma_{12}}ds+\int_S\frac{\partial^2 f}{\partial a_\varkappa\partial a_\lambda}F\frac{\mu}{\Gamma_{12}}ds\\
& +\frac{\partial f}{\partial a_\varkappa}F\mu\frac{\sqrt{X_1^2+X_2^2}}{\Gamma_{12}}\left[\frac{\partial(T_{0,1}-f_2)}{\partial a_\lambda}+\frac{1}{\Gamma_{12}^2}\frac{\partial f}{\partial a_\lambda}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f_2}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)\right]\Bigg|_{P_1}^{P_0}.\end{aligned}\right.$$

Diese etwas länglichen Formeln versetzen uns in die Lage, die Integrabilitätsbedingungen (4. 3) in extenso hinzuschreiben. Man findet zunächst aus (4. 14), (4. 22) und (4. 23) die einfachen Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial g_\varkappa}{\partial a_\lambda}-\frac{\partial g_\lambda}{\partial a_\varkappa} &= \int\limits_S \left\{\frac{\partial f}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial(\mu F)}{\partial a_\lambda}-\frac{\partial f}{\partial a_\lambda}\frac{\partial(\mu F)}{\partial a_\varkappa}\right\}\frac{1}{\Gamma_{12}}\,ds \\
&\quad + F\mu\frac{\sqrt{X_1^2+X_2^2}}{\Gamma_{12}}\left\{\frac{\partial f}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial(T_{0,1}-f_2)}{\partial a_\lambda}-\frac{\partial f}{\partial a_\lambda}\frac{\partial(T_{0,1}-f_2)}{\partial a_\varkappa}\right\}\Bigg|_{P_1}^{P_0},
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

$$
\frac{\partial g_\varkappa}{\partial c}+\frac{\partial g}{\partial a_\varkappa}=\int\limits_S\frac{\partial(\mu F)}{\partial a_\varkappa}\frac{1}{\Gamma_{12}}\,ds+F\mu\frac{\sqrt{X_1^2+X_2^2}}{\Gamma_{12}}\left\{\frac{\partial(T_{0,1}-f_2)}{\partial a_\varkappa}+\frac{\partial f}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial T_{0,1}}{\partial c}\right\}\Bigg|_{P_1}^{P_0}.
\tag{4.25}
$$

Wir wollen uns im folgenden ausschließlich auf den Fall beschränken, daß in diesen beiden Gleichungen die auf P_0 und P_1 bezüglichen Randglieder für sich verschwinden, was eine jetzt zu interpretierende Bedingung für T_0, T_1 darstellt. Das von uns geforderte Verschwinden ist offenbar identisch damit, daß in den Endpunkten P_0, P_1 die Beziehungen

$$
\frac{\partial(f_2-T_{0,1})}{\partial a_\varkappa}=\frac{\partial f}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial T_{0,1}}{\partial c}\qquad(\varkappa=1\ldots\varrho)
\tag{4.26}
$$

gelten. Aus (4. 12) und (4. 21) entnimmt man dann, daß daselbst

$$
\frac{\delta' x_1}{\delta' x_2}=\frac{\delta^* x_1}{\delta^* x_2}
\tag{4.27}
$$

wird, d. h. daß dann die Punkte P_0, P_0' und P_0^* bzw. P_1, P_1', P_1^* auf einer Geraden liegen. Umgekehrt, liegen diese Punktetripel je auf einer Geraden, so muß (4. 27) gelten, und aus (4. 12), (4. 21) entnimmt man, da, wie schon oben bemerkt, $\mathfrak{F}\neq 0$ ist, das Bestehen von (4. 26). Man kann das auch anders ausdrücken: Nehmen wir nämlich an, die Randpunkte lägen je auf einer von den $a_1\ldots a_\varrho$ unabhängigen Kurve $\mathfrak{C}$ mit der Gleichung

$$
\Pi(x_1, x_2)=0,
\tag{4.28}
$$

so müssen alle Randpunkte mit gleichem Index auf der Tangente an $\mathfrak{C}$ in P_0 bzw. P_1 liegen, indem nämlich aus (4. 28) folgt

$$
\frac{\delta' x_1}{\delta' x_2}=\frac{\delta^* x_1}{\delta^* x_2}=-\frac{\partial\Pi}{\partial x_2}:\frac{\partial\Pi}{\partial x_1}\Bigg|^{0,1},
$$

es muß also (4. 26) gelten; und umgekehrt, wenn die Randpunkte auf einer Geraden liegen, so werden sie von einer Kurve, deren Gleichung die $a_1\ldots a_\varrho$ nicht enthält (z. B. eben jener Geraden) ausgeschnitten. Unsere Forderung bezüglich des Verschwindens der Randterme ist also gleichbedeutend mit der Annahme:

Forderung: *Das Mittelungsintervall S erstreckt sich entweder über die unendliche Länge der Trajektorien, oder wird auf diesen von einer festen, die Parameter nicht enthaltenden Kurve ausgeschnitten.*

Wir haben dabei die *beiden* Kurven, die P_0 und P_1 ausschneiden, in eine einzige zusammengefaßt, was stets erlaubt ist.

Ist dieses Postulat erfüllt, so geben (4.3), (4.24) und (4.25) schließlich die Integrabilitätsbedingungen:

$$\begin{aligned}(4.29)\quad &\int\limits_S F\frac{\mu}{\Gamma_{12}}ds\cdot\int\limits_S\left\{\frac{\partial f}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial(\mu F)}{\partial a_\lambda}-\frac{\partial f}{\partial a_\lambda}\frac{\partial(\mu F)}{\partial a_\varkappa}\right\}\frac{1}{\Gamma_{12}}ds+\int\limits_S\frac{\partial f}{\partial a_\lambda}F\frac{\mu}{\Gamma_{12}}ds\cdot\int\limits_S\frac{\partial(\mu F)}{\partial a_\varkappa}\frac{1}{\Gamma_{12}}ds\\ &+\int\limits_S\frac{\partial f}{\partial a_\varkappa}F\frac{\mu}{\Gamma_{12}}ds\cdot\int\limits_S\frac{\partial(\mu F)}{\partial a_\lambda}\frac{1}{\Gamma_{12}}ds=0\qquad(\varkappa,\lambda=1\ldots\varrho).\end{aligned}$$

Verwenden wir die Bezeichnung (3.8), so können wir ihnen folgende, sehr übersichtliche Form geben:

$$(4.30)\quad \overline{\frac{\partial f}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial\log\mu F}{\partial a_\lambda}}-\overline{\frac{\partial f}{\partial a_\varkappa}}\cdot\overline{\frac{\partial\log\mu F}{\partial a_\lambda}}=\overline{\frac{\partial f}{\partial a_\lambda}\frac{\partial\log\mu F}{\partial a_\varkappa}}-\overline{\frac{\partial f}{\partial a_\lambda}}\cdot\overline{\frac{\partial\log\mu F}{\partial a_\varkappa}}\quad(\varkappa,\lambda=1\ldots\varrho),$$

in der sie eine gewisse Permutabilität von Mittelbildung und Multiplikation fordern.

Wir beschließen diesen Paragraphen mit dem

Satz 2. *Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz der adiabatischen Invarianten eines zweidimensionalen Systems lauten* (4.30).

§ 5.

Hinreichende Existenzbedingungen.

Wir wenden uns nun der Deutung und Verwertung des Gefundenen zu. Längs $\mathfrak{T}$ können wir die Größen $\frac{\partial f}{\partial a_\varkappa}$, $\frac{\partial\log\mu F}{\partial a_\varkappa}$ als Funktionen des Parameters $t-t_0$ ausdrücken; setzen wir vorübergehend:

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial a_\varkappa}}=\alpha_\varkappa,\qquad\overline{\frac{\partial\log\mu F}{\partial a_\varkappa}}=\beta_\varkappa\qquad(\varkappa=1\ldots\varrho),$$

so können wir eine Zerlegung vornehmen:

$$(5.1)\qquad\frac{\partial f}{\partial a_\varkappa}=\alpha_\varkappa+h_\varkappa(t-t_0),\qquad\frac{\partial\log\mu F}{\partial a_\varkappa}=\beta_\varkappa+j_\varkappa(t-t_0),$$

worin $h_\varkappa$, $j_\varkappa$ Funktionen ihres Arguments bezeichnen, deren Mittelwert über das Intervall T genommen verschwindet. Die Bedingung (4.30) erhält dann die Form:

$$(5.2)\qquad\overline{h_\varkappa j_\lambda}=\overline{h_\lambda j_\varkappa}\qquad(\varkappa,\lambda=1\ldots\varrho).$$

Was sie bedeutet, kann man sich etwa an dem Falle einer periodischen Lösung, in dem $h_\varkappa$ und $j_\varkappa$ zu Fourierreihen werden, klarmachen; doch wollen wir sie nicht in ihrer Allgemeinheit behandeln, sondern drei Spezialfälle herausgreifen, die der weiteren Analyse zugänglich sind:

Fall I. Es sind alle

$$h_\varkappa(t-t_0)=0 \qquad (\varkappa=1\ldots\varrho),$$

d. h. auf $\mathfrak{T}$ ist $\frac{\partial f}{\partial a_\varkappa}$ konstant, es muß also

$$\frac{\partial f}{\partial a_\varkappa}=\Phi_\varkappa(f|a_1\ldots a_\varrho) \qquad (\varkappa=1\ldots\varrho) \tag{5.3}$$

sein. Dann folgen neben (3.3) durch Differentiation nach $a_\varkappa$ noch die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial X_1}{\partial a_\varkappa}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial X_2}{\partial a_\varkappa}=0 \qquad (\varkappa=1\ldots\varrho), \tag{5.4}$$

d. h. f ist nicht nur Integral des ursprünglichen Systems (3.1), sondern auch der ϱ folgenden:

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{\partial X_1}{\partial a_\varkappa},\qquad \frac{dx_2}{dt}=\frac{\partial X_2}{\partial a_\varkappa} \qquad (\varkappa=1\ldots\varrho), \tag{5.5}$$

was besagt, daß f gegenüber den Parametern ein stationäres Integral ist. In den Gleichungen (1.8) verschwindet die Funktionaloperation, sie werden mit (1.6), d. h. hier mit

$$dc=\sum_{\nu=1}^{\varrho}\frac{\partial f}{\partial a_\nu}da_\nu$$

identisch. Weiterhin ergeben (3.3) und (5.4) die Proportionen:

$$X_1:X_2=\frac{\partial X_1}{\partial a_\varkappa}:\frac{\partial X_2}{\partial a_\varkappa} \qquad (\varkappa=1\ldots\varrho),$$

$$\frac{\partial}{\partial a_\varkappa}\left(\frac{X_1}{X_2}\right)=0,$$

woraus folgt, daß auf der Trajektorie $\mathfrak{T}$ der Richtungsfaktor

$$\frac{dx_1}{dx_2}=\frac{X_1}{X_2}$$

eine Funktion von x_1, x_2 allein ist. Man kann mithin die Kurvenschar der $\mathfrak{T}$ von den Parametern unabhängig wählen und ein Integral $f(x_1, x_2)$ von (3.1) finden, das die Parameter überhaupt nicht enthält und für das dann nach Satz 1 c die adiabatische Invariante wird. Dieser Fall ist also erledigt.

Fall II. Für einen bestimmten Multiplikator μ ist in (5.1)

$$j_\varkappa(t-t_0)=0 \qquad (\varkappa=1\ldots\varrho),$$

also längs $\mathfrak{T}$ ist $\frac{\partial \log \mu F}{\partial a_\varkappa}$ konstant, mithin:

$$(5.6) \qquad \frac{\partial \log \mu F}{\partial a_\varkappa} = \Psi_\varkappa(f|a_1 \ldots a_\varrho) \qquad (\varkappa = 1 \ldots \varrho).$$

Diese Bedingung ist im besonderen dann erfüllt, wenn die ϱ Gleichungen

$$(5.7) \qquad \frac{\partial \log \mu F}{\partial a_\varkappa} = 0 \qquad (\varkappa = 1 \ldots \varrho)$$

gelten, also μF von den Parametern gar nicht abhängt — ein Fall, mit dem wir uns gleich eingehender beschäftigen werden. Die Beziehungen (5.6) lassen eine einfache Deutung zu, wenn die Verteilungsfunktion $F \equiv 1$ ist. Es bezeichne nämlich

$$(5.8) \qquad \Delta_0 = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2}$$

die Divergenz des Systems (3.1), dann kann man (3.5) schreiben:

$$(5.9) \qquad \frac{\partial \log \mu}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial \log \mu}{\partial x_2} X_2 + \Delta_0 = 0,$$

und die Differentiation nach $a_\varkappa$ gibt, wenn (5.6) mit $F \equiv 1$ besteht:

$$(5.10) \qquad \frac{\partial \log \mu}{\partial x_1}\frac{\partial X_1}{\partial a_\varkappa} + \frac{\partial \log \mu}{\partial x_2}\frac{\partial X_2}{\partial a_\varkappa} + \frac{\partial \Delta_0}{\partial a_\varkappa} = 0 \qquad (\varkappa = 1 \ldots \varrho),$$

was besagt, daß μ auch ein Multiplikator der Systeme (5.5), oder mit andern Worten ein gegenüber den Parametern stationärer Multiplikator ist. Aus (5.9) und (5.10) folgt, daß in der Matrix

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \Delta_0 \\ \frac{\partial X_1}{\partial a_\varkappa} & \frac{\partial X_2}{\partial a_\varkappa} & \frac{\partial \Delta_0}{\partial a_\varkappa} \end{pmatrix} \qquad (\varkappa = 1 \ldots \varrho)$$

sämtliche dreireihigen Determinanten verschwinden müssen. (5.7) ist speziell erfüllt, wenn $F \equiv 1$ und $\mu =$ konst., also das System (3.1) ein Liouvillesches ist. Damit ist als Spezialfall unserer Untersuchungen der auf Gibbs und Hertz[8]) zurückgehende Satz bewiesen:

Satz 3. *Ein zweidimensionales Hamiltonsches Differentialsystem besitzt bei einfacher Mittelbildung eine adiabatische Invariante.*

Fall III. $\qquad j_\varkappa(t - t_0) = \text{konst.}\, h_\varkappa(t - t_0) \qquad (\varkappa = 1 \ldots \varrho),$

wobei die Konstante für alle $\varkappa$ die gleiche ist. Aus (5.1) folgt dann, daß

$$(5.11) \qquad \frac{\partial \log \mu F}{\partial a_\varkappa} = p(f|a_1 \ldots a_\varrho)\frac{\partial f}{\partial a_\varkappa} + q_\varkappa(f|a_1 \ldots a_\varrho) \qquad (\varkappa = 1 \ldots \varrho)$$

[8]) Vgl. Gibbs 1., Hertz 1., S. 534—535.

sein muß. Bestimmt man dann ein $\varphi(f|a_1 \dots a_\varrho)$ derart, daß

$$\frac{\partial \log \varphi(f|a_1 \dots a_\varrho)}{\partial f} = p(f|a_1 \dots a_\varrho)$$

ist, so gibt (5.11)

$$\frac{\partial \log(\mu F : \varphi)}{\partial a_\varkappa} = -\frac{1}{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial a_\varkappa} + q_\varkappa = \Psi_\varkappa(f|a_1 \dots a_\varrho) \qquad (\varkappa = 1 \dots \varrho),$$

und da mit μ zugleich auch $\mu : \varphi$ ein Multiplikator von (3.1) ist, kommen wir auf den Fall II zurück.

Wir fassen unsere Resultate zusammen:

Satz 4. *Hinreichende Existenzbedingungen für die adiabatische Invariante eines zweidimensionalen Systems sind* a) *die Stationarität eines Integrals,* b) *bei einfacher Mittelbildung die Stationarität eines Multiplikators gegenüber den Parametern.*

§ 6.

Die Invariante der generalisiert-Liouvilleschen Systeme.

Bereits in (5.7) haben wir den Fall hervorgehoben, in dem ein Multiplikator μ angegeben werden kann, derart, daß μF von den Parametern $a_1 \dots a_\varrho$ unabhängig ist; wir bezeichnen dann das System (3.1) aus einem später ersichtlichen Grunde als generalisiert-Liouvillesches System. Für dasselbe muß eine adiabatische Invariante existieren. Die Gleichungen (4.24), (4.25) vereinfachen sich (unter Beibehaltung der Forderung des § 4) zu:

$$(6.1) \qquad \frac{\partial g_\varkappa}{\partial a_\lambda} = \frac{\partial g_\lambda}{\partial a_\varkappa}, \qquad \frac{\partial g}{\partial a_\varkappa} + \frac{\partial g_\varkappa}{\partial c} = 0 \qquad (\varkappa, \lambda = 1 \dots \varrho),$$

und es muß sich demnach eine Funktion $V(c|a_1 \dots a_\varrho)$ finden lassen derart, daß

$$(6.2) \qquad \frac{\partial V}{\partial c} = g, \qquad \frac{\partial V}{\partial a_\varkappa} = -g_\varkappa$$

ist; die Gleichungen (3.10) zeigen dann, daß V die gesuchte adiabatische Invariante unseres zweidimensionalen Systems wird.

Wir können V leicht explizit angeben. Bezeichnet nämlich $\mathfrak{C}$ eine feste, von den $a_1 \dots a_\varrho$ unabhängige Kurve, die gemäß unserer Forderung das Mittelungsintervall S auf $\mathfrak{T}$ ausschneidet, bzw. eine beliebige feste Kurve, wenn $T = \infty$ ist, und ist B der von $\mathfrak{C}$ und S begrenzte Bereich der x_1, x_2-Ebene, so ist

$$(6.3) \qquad J = V = \iint_B \mu F \, dx_1 \, dx_2,$$

vorausgesetzt, daß dieses Integral einen Sinn hat. Der Beweis, daß (6.2) erfüllt ist, ist mittels der Entwicklungen des § 4 leicht zu führen.

Bei bloßer Variation von c bleiben nämlich μF und $\mathfrak{C}$ ungeändert, nur die Trajektorie $\mathfrak{T}$ geht in $\mathfrak{T}'$ über; die normale Verschiebung der Punkte P in P' wird dabei durch (4.11) charakterisiert, und es wird also

$$\frac{\partial V}{\partial c} = \int\limits_S \mu F\, ds\, d'n : dc = \int\limits_S F \frac{\mu}{\Gamma_{12}}\, ds = g;$$

man überzeugt sich leicht, daß die Unterscheidung von P_0', $\overline{P}_0'$ bzw. P_1', $\overline{P}_1'$ für die Berechnung dieser Derivierten belanglos ist, indem die Dreiecke $P_0 P_0' \overline{P}_0'$ bzw. $P_1 P_1' \overline{P}_1'$ unendlich klein von zweiter Ordnung sind ($\mathfrak{C}$ kann ja offenbar $\mathfrak{T}$ nicht in P_0, P_1 berühren, da sonst nach (4.12) $\mathfrak{F} = 0$ sein müßte). Bei bloßer Variation von $a_\varkappa$ bleibt nach Voraussetzung (5.7) μF ebenso wie $\mathfrak{C}$ unbeeinflußt, und $\mathfrak{T}$ geht durch die normale Verschiebung $d^* n$ in $\mathfrak{T}^*$ über, so daß mittels (4.18) folgt:

$$\frac{\partial V}{\partial a_\varkappa} = \int\limits_S \mu F\, ds\, d^* n : da_\varkappa = -\int\limits_S \frac{\partial f}{\partial a_\varkappa} F \frac{\mu}{\Gamma_{12}}\, ds = -g_\varkappa,$$

wie wir behauptet hatten. Wir haben also folgenden Satz gefunden:

Satz 5. *Die adiabatische Invariante eines zweidimensionalen generalisiert-Liouvilleschen Systems ist* $V = \iint\limits_B \mu F\, dx_1\, dx_2$.

Ist $\mathfrak{T}$ im besonderen periodisch und $T = \infty$ oder gleich der Periode, so wird man für B den von $\mathfrak{T}$ eingeschlossenen Bereich nehmen können. Handelt es sich um einfache Mittelbildung: $F \equiv 1$, so fallen die Liouvilleschen Systeme ($\Delta_0 = 0$, $\mu =$ konst.) unter die betrachtete Klasse; sie lassen sich im zweidimensionalen Falle (aber auch nur hier) in die Klasse der Hamiltonschen Systeme transformieren[9]), und Satz 5 fällt dann mit der Aussage des Gibbs-Hertzschen Theorems[10]) zusammen, daß das „Phasenvolumen“

$$V = \iint dx_1\, dx_2$$

adiabatisch invariant ist. Die Gleichung (5.7) verlangt dann, daß μ von den Parametern unabhängig sei, und für solche Systeme gilt ein Satz, den wir später gleich für n Dimensionen beweisen und hier einstweilen nur aussprechen wollen:

Satz 6. *Ist μ von den Parametern unabhängig, so gibt es eine von den Parametern freie Koordinatentransformation, die das ursprüngliche System in ein Liouvillesches überführt, und umgekehrt.*

Solche, die Parameter nicht enthaltende Transformationen sind natürlich gestattet und für die Berechnung der adiabatischen Invarianten ohne

---

[9]) Vgl. Levi-Civita 1., S. 336.

[10]) Vgl. Gibbs 1., Hertz 1., S. 534–535, Levi-Civita 1., S. 339–342.

Einfluß, und man sieht daher, daß die genannte Klasse von Systemen im wesentlichen mit der der Liouvilleschen Systeme zusammenfällt, und dadurch erklärt sich die am Anfang des Paragraphen eingeführte Bezeichnung.

§ 7.

Beispiele. Der gedämpfte Oszillator.

Die beiden Beispiele des § 2 lassen sich mittels der vorangehenden Sätze sofort erledigen.

1. Beispiel. Es ist $\Delta_0 = 0$, $\mu = \text{konst.} = 1$; als B nehmen wir wegen der Periodizität das Innere der Ellipse

$$x_1^2 + \frac{1}{a_1} x_2^2 = c_1^2,$$

so daß

$$J = V = \iint_B dx_1\, dx_2 = \pi \sqrt{a_1}\, c^2$$

wird, was mit (2.1) übereinstimmt.

2. Beispiel. Es ist

$$\Delta_0 = -a_1^2 \frac{x_2}{x_1^2}, \qquad \mu = x_1,$$

wir haben also den Fall des § 6 vor uns. Demgemäß existiert eine adiabatische Invariante. Als Kurve $\mathfrak{C}$, die die Endpunkte bestimmt, nehmen wir die Achse $x_1 = 0$ und demnach als B den rechten (oder linken), von der x_2-Achse begrenzten Teil der Ellipse

$$x_1^2 + \frac{a_1^2}{a_2^2} x_2^2 = c_1,$$

so daß also nach Satz 5 folgt:

$$J = \iint_B x_1\, dx_1\, dx_2 = \frac{2}{3} \frac{a_2}{a_1} c_1^{3/2},$$

was mit (2.2) in Einklang steht.

3. Beispiel. Schließlich wollen wir, weil von physikalischem Interesse, den gedämpften Oszillator behandeln; der harmonische Oszillator fällt unter die klassischen Beispiele [11]). Es bezeichnen a_1 und a_2 die Frequenz- bzw. Dämpfungskonstante des Oszillators; dessen Bewegung wird dann durch die Differentialgleichungen:

$$(7.1) \qquad \frac{dx_1}{dt} = x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -2a_2 x_2 - a_1^2 x_1$$

---

[11]) Vgl. Born 1., Levi-Civita 1., S. 345; 2., S. 13–14; wir verdanken den Hinweis auf dieses Beispiel Herrn Levi-Civita.

wiedergegeben, deren Integrale lauten:

$$(7.2)\quad \begin{aligned} x_1 &= c\, e^{-a_2(t-t_0)} \cos\gamma(t-t_0) \\ x_2 &= -c\, e^{-a_2(t-t_0)} \{a_2 \cos\gamma(t-t_0) + \gamma \sin\gamma(t-t_0)\}, \end{aligned}$$

worin gesetzt ist:

$$\gamma = \sqrt{a_1^2 - a_2^2}.$$

In aufgelöster Form lauten diese Gleichungen:

$$f(x_1, x_2 \mid a_1, a_2) \equiv \frac{1}{\gamma} \sqrt{\gamma^2 x_1^2 + (a_2 x_1 + x_2)^2}\, e^{-\frac{a_2}{\gamma} \operatorname{arctang} \frac{a_2 x_1 + x_2}{\gamma x_1}} = c,$$

$$f_2(x_1, x_2 \mid a_1, a_2) \equiv -\frac{1}{\gamma} \operatorname{arctang} \frac{a_2 x_1 + x_2}{\gamma x_1} = t - t_0,$$

so daß man findet:

$$(7.3)\left\{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a_1} &= \varphi_{11} = -\frac{a_1 c}{\gamma^2}\left\{a_2(t-t_0) + \sin^2\gamma(t-t_0) + \frac{a_2}{2\gamma}\sin 2\gamma(t-t_0)\right\}, \\ \frac{\partial f}{\partial a_2} &= \varphi_{12} = \frac{c}{2\gamma^3}\{2a_1^2\gamma(t-t_0) + (2a_2^2 - a_1^2)\sin 2\gamma(t-t_0) \\ &\qquad\qquad - 2a_2\gamma\cos 2\gamma(t-t_0)\}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_1} &= \varphi_{21} = -\frac{a_1}{\gamma^2}\left\{(t-t_0) + \frac{1}{2\gamma}\sin 2\gamma(t-t_0)\right\}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial a_2} &= \varphi_{22} = \frac{-1}{\gamma^2}\left\{a_2(t-t_0) - \cos^2\gamma(t-t_0) + \frac{a_2}{2\gamma}\sin 2\gamma(t-t_0)\right\}. \end{aligned}\right.$$

Die Trajektorie ist eine sich immer enger um den Nullpunkt wickelnde Spirale; als die Endpunkte des Mittelungsintervalls bestimmende Kurve $\mathfrak{C}$ nehmen wir die x_2-Achse, wählen

$$T_0 = \frac{\pi}{2\gamma}, \quad T_1 = \frac{(2n+1)\pi}{2\gamma}, \quad T = \frac{n\pi}{\gamma}$$

und finden demnach die Mittelwerte ($F \equiv 1$ angenommen):

$$\bar{\varphi}_{11} = -\frac{a_1 c}{2\gamma^3}\{a_2\pi(n+1) + \gamma\}, \qquad \bar{\varphi}_{12} = \frac{a_1^2 c(n+1)\pi}{2\gamma^3},$$

so daß sich die adiabatische Invariante aus den beiden Gleichungen (1.11), d. h.

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial c}\cdot a_1 c\{a_2\pi(n+1) + \gamma\} &- \frac{\partial J}{\partial a_1}\cdot 2\gamma^3 = 0, \\ \frac{\partial J}{\partial c}\cdot a_1^2 c(n+1)\pi &+ \frac{\partial J}{\partial a_2}\cdot 2\gamma^3 = 0 \end{aligned}$$

bestimmen müßte. Man sieht aber sofort, daß die Integrabilitätsbedingung (4.1) hier nicht erfüllt ist, indem deren linke Seite den Wert

$$-\frac{a_1 a_2 c}{\gamma^4}$$

annimmt. Den gleichen Wert ergibt die linke Seite von (4.29), wenn man beachtet, daß die Größe

$$\mu = e^{-\frac{2a_2}{\gamma}\operatorname{arctang}\frac{a_2 x_1 + x_2}{\gamma x_1}}$$

ein Multiplikator des Systems (7.1) ist.

Es gibt also keine adiabatische Invariante im absoluten Sinne, d. h. keine Größe, die bei *beliebiger* adiabatischer Änderung der a_1, a_2 invariant bliebe; womit übrigens der Nachweis erbracht ist, daß unsere Existenzbedingungen (4.30) nicht trivial sind. Das gleiche gilt a fortiori für $T = \infty$, weil da die auftretenden Mittelwerte überhaupt nicht existieren.

Aber eine andere Fragestellung führt zu bemerkenswerten Ergebnissen; wir fragen: Kann man eine solche Funktion $\lambda(a_1, a_2)$ angeben, daß *bei absoluter Konstanz von λ* eine adiabatische Invariante existiert? Dann sind also die adiabatischen Änderungen von a_1, a_2 nicht mehr beliebig, sondern durch die Konstanz von λ beschränkt, und eine solche Invariante trägt den Charakter einer *relativen adiabatischen Invariante.* Wir werden also statt a_1, a_2 zwei Funktionen $\varkappa(a_1, a_2)$ und $\lambda(a_1, a_2)$ einführen und beachten, daß

$$\frac{\partial f}{\partial \varkappa} = \frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial \varkappa} + \frac{\partial f}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial \varkappa}, \qquad \frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial \lambda}$$

ist. Es gibt nur eine Gleichung für die adiabatische Invariante (vgl. (1.9)):

$$(7.4) \qquad \frac{\partial J}{\partial c}\cdot\overline{\frac{\partial f}{\partial \varkappa}} - \frac{\partial J}{\partial t_0}\cdot\overline{\frac{\partial f_2}{\partial \varkappa}} + \frac{\partial J}{\partial \varkappa} = 0,$$

indem die auf λ bezügliche Gleichung nach unserer Voraussetzung wegfällt. Wir wählen der Einfachheit halber $T = \infty$; dann sind $\varkappa, \lambda$ so zu wählen, daß mindestens einer der Mittelwerte in (7.4) existiert, d. h. entweder in $\frac{\partial f}{\partial \varkappa}$ oder $\frac{\partial f_2}{\partial \varkappa}$ die Glieder mit $t - t_0$ wegfallen, also

$$(7.5) \qquad -a_2\frac{\partial a_1}{\partial \varkappa} + a_1\frac{\partial a_2}{\partial \varkappa} = 0 \quad \text{oder} \quad -a_1\frac{\partial a_1}{\partial \varkappa} + a_2\frac{\partial a_2}{\partial \varkappa} = 0$$

wird. Setzen wir noch fest, daß etwa

$$\frac{\partial(\varkappa, \lambda)}{\partial(a_1, a_2)} = 1$$

sein soll, so gibt die erste Gleichung (7.5) die Werte

$$(7.6) \qquad \varkappa = \frac{1}{2}a_1^2, \qquad \lambda = \frac{a_2}{a_1},$$

und die zweite die Transformation

$$(7.7) \qquad \varkappa = \frac{1}{4}\ln\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}, \qquad \lambda = a_1^2 - a_2^2 = \gamma^2.$$

Im Falle (7.6) erhalten wir aus (7.4) die Gleichung

$$-c\cdot\frac{\partial J}{\partial c}+4\varkappa(1-\lambda^2)\cdot\frac{\partial J}{\partial\varkappa}=0,$$

$$J=f(a_1 c^{2(1-\lambda^2)})=f\left(a_1 c_1^2 c_1^{-2\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2}\right);$$

dies ist also die Invariante des gedämpften Oszillators, wenn das Verhältnis $\frac{a_2}{a_1}$ *absolut konstant bleibt.* Im Falle (7.7) führt die Gleichung

$$\mathfrak{Cof}\,2\varkappa\cdot\frac{\partial J}{\partial t_0}-\sqrt{\lambda}\cdot\frac{\partial J}{\partial\varkappa}=0$$

auf die Invariante

$$J=f\left(t_0+\frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\mathfrak{Sin}\,2\varkappa\right)=f(2\gamma^2 t_0-a_2),$$

die dann als solche gilt, wenn die reduzierte Frequenz γ *konstant bleibt.*

II.

§ 8.

Klassifizierung der n-dimensionalen Systeme.

Auf den im vorangehenden entwickelten Ausführungen aufbauend wenden wir uns nun der Behandlung n-dimensionaler Differentialsysteme vom Typus (1.1) zu und werden zunächst eine Klassifizierung der sich darbietenden Probleme vornehmen. Eine erste Unterteilung ergibt sich daraus, daß das Mittelungsintervall T entweder endlich oder unendlich groß ist, also man die Definition (1.7) bzw. (1.10) zugrunde legt. Wir verwenden nämlich in unsern Betrachtungen als wesentlichen Bestandteil die Integrale (1.3) des Systems, die aus der Auflösung der eindeutigen Beziehungen (1.2) entstanden sind; aber die Eindeutigkeit sowohl, wie die Auflösbarkeit sind Eigenschaften im kleinen, die jeweils nur für ein beschränktes Intervall der Variablen $t-t_0$, und damit der Trajektorie gelten. Die in (1.7) bzw. (1.10) zugrunde gelegten Definitionen der Mittelbildung verlangen aber mehr, sie fordern die Kenntnis der Integrale f_i im großen, nämlich im ganzen Intervall T oder ∞. Solange T endlich ist und in diesem Intervall die X_i regulär sind, ist diese Unterscheidung nicht wesentlich, denn ihm entspricht auf der Trajektorie $\mathfrak{T}$ ein endliches Stück S, das wir als singularitätenfrei voraussetzen wollen, und das durch eine endliche Anzahl der oben erwähnten Eindeutigkeitsbereiche überdeckt wird. Längs dieses eindimensionalen Bogens S sind die f_i also entweder eindeutig oder höchstens endlichvieldeutig und man kann S als endliches Stück der

Schnittlinie der $n-1$ Hyperflächen

$$f_i(x_1 \ldots x_n \,|\, a_1 \ldots a_\varrho) = c_i \qquad (i = 1 \ldots n-1) \tag{8.1}$$

des R_n deuten. Durch Projektion auf die Koordinatenebenen $(x_i\, x_k)$ geht S in ein endliches Bogenstück der $x_i x_k$-Ebene über; wir werden nun später gerade diese Projektionen zu betrachten haben und es ist daher naturgemäß, daß wir auf sie die im § 4 bezüglich des zweidimensionalen Falles gemachte Forderung übertragen, dergemäß die Endpunkte des Mittelungsintervalls von einer festen, die Parameter nicht enthaltenden Kurve ausgeschnitten werden. In den R_n zurückprojiziert besagt dies, daß die Endpunkte von S auf einer parameterfreien Hyperfläche:

$$\Phi(x_1 \ldots x_n) = 0$$

liegen müssen. Wir fassen also zusammen als ersten Fall:

A. *T ist endlich, S ebenfalls, die f_i längs S sind endlichvieldeutig. Die Endpunkte von S liegen auf einer parameterfreien Hyperfläche.*

Dieser Fall entspricht also im großen und ganzen den bisherigen Betrachtungen. Wir nehmen nun zweitens an, es sei $T = \infty$. Wie schon oben bemerkt, kommt es uns auf das Verhalten der f_i im großen an, und darüber ist bis heutigen Tags sehr wenig bekannt. Unsere Kenntnis darüber beschränkt sich im wesentlichen auf den Poincaré-Carathéodoryschen Wiederkehrsatz, der folgendes besagt: Liegen die Trajektorien von (1.1), wenigstens für die in Betracht kommenden Werte der Konstanten und Parameter, in einem zusammenhängenden Gebiet G des R_n von endlichem Maße, und kann ein Multiplikator μ gefunden werden, der in G positiv ist und höchstens in einer Nullmenge verschwindet, so kommen fast alle Trajektorien jedem ihrer Punkte unendlich oft beliebig nahe[12]). Es liegt daher nahe, anzunehmen, daß in diesem Falle die Trajektorien entweder geschlossen, also periodisch sind, oder fast alle Trajektorien eine gewisse Mannigfaltigkeit Φ dicht erfüllen. Die Integrale (1.3), die diese Trajektorien bestimmen, spalten sich dann, eventuell nach vorheriger Kombination, in zwei irreduzible Gruppen, deren erste diejenigen m unter ihnen umfaßt, die längs der ganzen Trajektorie $\mathfrak{T}$ eindeutig oder endlichvieldeutig sind:

$$f_\lambda(x_1 \ldots x_n \,|\, a_1 \ldots a_\varrho) = c_\lambda \qquad (\lambda = 1 \ldots m) \tag{8.2}$$

und deren zweite die längs $\mathfrak{T}$ unendlichvieldeutigen Integrale enthält, die also praktisch belanglos sind. Die Gleichungen (8.2) bestimmen im R_n

---

[12]) Vgl. Poincaré 1, Kap. 26; Carathéodory 1. Über das Wenige, das darüber hinaus bekannt ist, orientiert Smekal 1, S. 179–181; Levi-Civita 1, S. 331.

eine $n-m$-dimensionale Mannigfaltigkeit Φ, und wir werden uns nur mit solchen Systemen befassen, die die sogenannte *quasi-ergodische Hypothese* befriedigen: *Fast alle Trajektorien erfüllen die Mannigfaltigkeit Φ dicht.* Es gibt solche quasiergodische Systeme[13]). Bezüglich Φ wollen wir annehmen, daß es eine geschlossene Mannigfaltigkeit des R_n bilde.

Die Zahl m, die eine charakteristische Konstante des Systems bildet, bezeichnen wir als seine Imprimitivitätsordnung[14]). Die Trajektorien eines primitiven Systems erfüllen also ein Stück des R_n dicht und besitzen gar kein eindeutiges Integral, bei ihnen hat die Frage nach adiabatischen Invarianten offenbar keinen Sinn. Bei m-fach imprimitiven Systemen wird man nach solchen Invarianten suchen, die die m Konstanten $c_1 \dots c_m$ mit den Parametern $a_1 \dots a_\varrho$ in Beziehung setzen, und demnach, einer Bemerkung am Schluß des § 1 zufolge, in den Gleichungen (1.11) nur die diesbezüglichen Glieder berücksichtigen. Der größte Wert $m = n-1$ wird angenommen, wenn alle Integrale des Systems endlichvieldeutig sind; Φ reduziert sich dann auf den eindimensionalen Schnitt der Hyperflächen (8.1), d. h. auf $\mathfrak{T}$, und somit ist in diesem Falle die Quasiergodenhypothese trivial. Wir fassen zusammen:

B. *T ist unendlich; das System ist von der Imprimitivitätsordnung m und erfüllt eine geschlossene $n-m$-dimensionale Mannigfaltigkeit quasiergodisch.*

Wir werden in drei Unterfälle teilen:

B 1. $m = 1$, das System ist einfach imprimitiv;

B 2. $1 < m < n-1$, das System ist m-fach imprimitiv;

B 3. $m = n-1$, alle Integrale f_i sind endlichvieldeutig, $\Phi \equiv \mathfrak{T}$ ist eindimensional.

Schließlich bietet sich als letzte Möglichkeit die dar, daß das System keine Quasiergodizitätseigenschaft besitzt, wie dies insbesondere bei Auftreten von Singularitäten zutreffen kann; solche Systeme entziehen sich, soweit man nicht auf Grund der Kenntnis ihrer Integrale ebenso verfahren kann, wie wir es in den Fällen A und B tun werden, unserer Behandlung; wir müssen sie im folgenden ausschließen.

C. *T ist unendlich; das System besitzt keine Quasiergodizitätseigenschaften.*

An Hand dieser Klassifikation wenden wir uns nun dem Problem der adiabatischen Invarianten zu.

---

[13]) Beispiele enthalten: Cherry 1; Levi-Civita 1, S. 326—328.

[14]) Wir schließen uns damit der Bezeichnung von Levi-Civita 1, S. 330 an, während sie in Levi-Civita 2 um eine Einheit verschoben ist.

§ 9.

Problemstellung für einfach-imprimitive Systeme.

Die im vorangehenden erörterten topologischen Voraussetzungen bezüglich der Trajektorien haben nur den einen Zweck, die in (1.10) definierte, auf t bezügliche Funktionaloperation in eine räumliche, auf Φ bezügliche Operation zu verwandeln, in ähnlicher Weise, wie wir es in (3.8) für zweidimensionale Systeme durchführen konnten. Die wirklich genuine Generalisierung der zweidimensionalen Systeme sind die einfach-imprimitiven; alle übrigen Fälle werden wir durch Reduktion mittels der bekannten Integrale auf zweidimensionale oder einfach-imprimitive Systeme zurückführen können.

Das System (1.1) sei einfach-imprimitiv und besitze das endlich-vieldeutige Integral

$$f(x_1 \dots x_n \,|\, a_1 \dots a_\varrho) = c, \tag{9.1}$$

durch das die $n-1$-dimensionale geschlossene Hyperfläche Φ charakterisiert wird. Die Verteilungsfunktion F wollen wir für den Augenblick als konstant annehmen. Wir wollen dann erreichen, daß an Stelle der Definition (1.10) eine Mittelbildung, d. h. eine Integration, über Φ tritt, was zufolge der quasiergodischen Verteilung der Trajektorien über Φ möglich ist. Es fragt sich nur, welche Verteilungsfunktion müssen wir dieser Mittelbildung zuordnen oder welches ist die eindeutige Dichte $\varkappa$, mit der wir jedes Flächenelement $d\Phi$ zu multiplizieren haben?

$\varkappa$ muß eine gewisse Invarianzeigenschaft erfüllen, es muß nämlich „auf den Trajektorien mitgenommen werden“, d. h. sind $d\Phi$, $d\Phi_1$ zwei Elemente von Φ, die infolge der Gleichungen (1.1) auseinander hervorgehen (in dem Sinne, daß, wenn allen Punkten von $d\Phi$ der Wert $t = t_0$ zugeordnet wird, $d\Phi_1$ die Gesamtheit der Punkte darstellt, die auf den entsprechenden Trajektorien zum Werte $t = t_1$ gehören), so muß

$$\varkappa\, d\Phi = \varkappa_1\, d\Phi_1 \tag{9.2}$$

sein; dies folgt daraus, daß der Mittelwert (1.10) unabhängig von t_0, d. h. vom Ausgangselement $d\Phi$ sein muß.

Wir zeigen nun, daß es im wesentlichen *nur eine* Funktion $\varkappa$ gibt, die dieser Invarianz genügt. Gälte nämlich dasselbe von einer andern eindeutigen Dichteverteilung λ, so müßten $\varkappa\, d\Phi$, $\lambda\, d\Phi$ also auch $\varkappa : \lambda$ gegenüber (1.1) invariant, mithin letztere Größe ein Integral des Systems (1.1) sein. Da dieses aber nach Voraussetzung nur ein endlichvieldeutiges Integral, nämlich f, besitzt, muß also

$$\varkappa : \lambda = \Psi(f(x_1 \dots x_n \,|\, a_1 \dots a_\varrho)),$$

also dieses Verhältnis auf Φ konstant sein; auf einen Proportionalitätsfaktor kommt es aber bei der Dichte nicht an, demnach gibt es im wesentlichen nur eine Dichtefunktion $\varkappa$.[15])

Man kann die $(n-1)$-dimensionalen Flächenelemente $d\Phi$, $d\Phi_1$ leicht zu Raumelementen $d\tau$, $d\tau_1$ des R_n ergänzen, die auseinander infolge von (1.1) hervorgehen. Dazu betrachten wir neben der Fläche (9.1) die Hyperfläche Φ' mit der Gleichung

$$f(x_1 \dots x_n \,|\, a_1 \dots a_\varrho) = c + dc; \tag{9.3}$$

wir ordnen jedem Punkte P von Φ den auf seiner Normalen liegenden Punkt P' von Φ' zu und bezeichnen den Vektor PP' mit $d'n$; diese Zuordnung ist, weil wir Φ als geschlossen und frei von Singularitäten annehmen, überall eindeutig. Die Richtungkosinus der Normalen sind

$$\frac{1}{\Gamma_{1n}} \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad (i = 1 \dots n); \qquad \Gamma_{1n}^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2, \tag{9.4}$$

und daher die Komponenten von $d'n$:

$$d'x_i = \frac{1}{\Gamma_{1n}} \frac{\partial f}{\partial x_i} d'n;$$

andrerseits folgt aus (9.1), (9.3) und (9.4):

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} d'x_i \equiv \Gamma_{1n} d'n = dc,$$

mithin

$$d'n = \frac{dc}{\Gamma_{1n}}; \qquad d'x_i = \frac{1}{\Gamma_{1n}^2} \frac{\partial f}{\partial x_i} dc. \tag{9.5}$$

Nennen wir nun $d\tau = d\Phi\, d'n$ das über $d\Phi$ liegende Raumelement der zwischen Φ und Φ' liegenden Schicht, so geht es infolge der Gleichungen (1.1) in das über $d\Phi_1$ liegende Schichtelement $d\tau_1 = d\Phi_1 d'n_1$ über, da die in der Schicht beginnenden Trajektorien dieselbe nie verlassen können und überall dicht ausfüllen. Aus (9.2) folgt dann, daß

$$\varkappa\, d\Phi\, dc = \varkappa \Gamma_{1n}\, d\tau = \varkappa_1\, d\Phi_1\, dc = (\varkappa \Gamma_{1n})_1\, d\tau_1,$$

also die Größe

$$\mu = \varkappa \Gamma_{1n} \tag{9.6}$$

die Beziehung befriedigen muß:

$$\mu\, d\tau = \mu_1\, d\tau_1,$$

d. h. in moderner Ausdrucksweise: *$\int \mu\, d\tau$ ist eine Integralinvariante des Systems* (1.1). Nun gilt der leicht zu beweisende Satz[16]), daß, wenn diese

[15]) Vgl. Levi-Civita 1, S. 337 f.

[16]) Vgl. Poincaré 1, S. 41 ff.

Größe eine Integralinvariante ist, dann der Faktor μ ein Jacobischer Multiplikator von (1.1) sein, d. h. die Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} X_i + \mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0 \tag{9.7}$$

erfüllen muß, und umgekehrt gibt jeder Multiplikator eine Integralinvariante. Mithin folgt aus (9.6)

$$\varkappa = \frac{\mu}{\Gamma_{1n}}, \tag{9.8}$$

wo μ jeden beliebigen eindeutigen bzw. endlichvieldeutigen Multiplikator von (1.1) bedeuten kann. Es gibt im wesentlichen nur einen solchen Multiplikator μ, da der Quotient zweier solcher ein endlichvieldeutiges Integral von (1.1), also nach Voraussetzung eine bloße Funktion von f und demnach auf Φ konstant ist.

Wir setzen im folgenden voraus, daß es eine endlichvieldeutige Lösung μ von (9.7) *gibt und daß μ auf Φ — abgesehen von endlich vielen Punkten — nicht verschwindet,* also ein bestimmtes Vorzeichen hat, das wir als positiv wählen. Wir werden später (§ 11) sehen, daß diese Voraussetzung gleichbedeutend ist mit der Aussage: Die die Trajektorie im kleinen definierenden Funktionen $f_1 \ldots f_{n-1}$ sollen längs derselben keine Singularitäten besitzen. An die Stelle der Mittelbildung (1.10) tritt dann also (immer noch $F \equiv 1$ angenommen) die Definition:

$$\bar{\alpha} = \int\limits_{\Phi} \alpha(x_1 \ldots x_n \,|\, a_1 \ldots a_\varrho) \frac{\mu}{\Gamma_{1n}} d\Phi : \int\limits_{\Phi} \frac{\mu}{\Gamma_{1n}} d\Phi. \tag{9.9}$$

Ist $F \not\equiv 1$, so tritt hier noch unter das Integralzeichen die durch (1.3) transformierte, endlichvieldeutige Verteilungsfunktion $F(x_1 \ldots x_n \,|\, a_1 \ldots a_\varrho)$ hinzu, so daß

$$\bar{\alpha} = \int\limits_{\Phi} \alpha(x_1 \ldots x_n \,|\, a_1 \ldots a_\varrho) F(x_1 \ldots x_n \,|\, a_1 \ldots a_\varrho) \frac{\mu}{\Gamma_{1n}} d\Phi : \int\limits_{\Phi} F(x_1 \ldots x_n \,|\, a_1 \ldots a_\varrho) \frac{\mu}{\Gamma_{1n}} d\Phi \tag{9.10}$$

wird.

Damit gehen wir in die Differentialgleichungen (1.11) der adiabatischen Invarianten ein und berücksichtigen nur die auf c und a_ν bezüglichen Differentiationen. Dann lautet dieses Differentialsystem:

$$\frac{\partial J}{\partial c} \cdot \int\limits_{\Phi} \frac{\partial f}{\partial a_\nu} F \frac{\mu}{\Gamma_{1n}} d\Phi + \frac{\partial J}{\partial a_\nu} \cdot \int\limits_{\Phi} F \frac{\mu}{\Gamma_{1n}} d\Phi = 0 \qquad (\nu = 1 \ldots \varrho), \tag{9.11}$$

das die evidente Generalisierung von (3.10) bildet. Wir werden seine Integrabilitätsbedingungen und seine Lösung später untersuchen.

§ 10.

Problemstellung für m-fach imprimitive Systeme.

Ist das System (1. 1) m-fach imprimitiv, d. h. gestattet es die m endlichvieldeutigen Integrale

$$f_\lambda(x_1 \ldots x_n \mid a_1 \ldots a_\varrho) = c_\lambda \qquad (\lambda = 1 \ldots m), \tag{10.1}$$

die die geschlossene $n - m$-dimensionale Mannigfaltigkeit Φ bestimmen, so führen ähnliche Überlegungen wie oben zum Ziel. Die Dichtefunktion $\varkappa$ muß wieder der Invarianzeigenschaft (9. 2) genügen und ist damit bis auf einen konstanten Faktor auf Φ bestimmt, da der Quotient zweier solcher Dichten ein endlichvieldeutiges Integral des Systems, also eine Funktion der $f_1 \ldots f_m$ sein muß.

Wir ergänzen wieder $d\Phi$, $d\Phi_1$ zu Raumelementen des R_n und verfahren dazu folgendermaßen: Neben Φ führen wir die Mannigfaltigkeit Φ' ein, die durch die Gleichungen

$$f_\lambda(x_1 \ldots x_n \mid a_1 \ldots a_\varrho) = c_\lambda + dc_\lambda \qquad (\lambda = 1 \ldots m) \tag{10.2}$$

definiert wird und mit Φ zusammen eine von den Trajektorien dicht ausgefüllte Schicht bildet, die von diesen nicht verlassen wird. Die Normalen auf den Hyperflächen (10. 1) haben die Richtungskosinus

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} : \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i}\right)^2} \qquad (i = 1 \ldots n;\ \lambda = 1 \ldots m), \tag{10.3}$$

sie stehen natürlich auf jedem in Φ enthaltenen Vektor senkrecht. Wir bestimmen ferner $n - m$ weitere Funktionen $u_j(x_1 \ldots x_n \mid a_1 \ldots a_\varrho)$ derart, daß die Hyperflächen

$$u_j(x_1 \ldots x_n \mid a_1 \ldots a_\varrho) = \mathfrak{c}_j \qquad (j = 1 \ldots n - m) \tag{10.4}$$

sämtliche Flächen (10. 1) orthogonal schneiden und selbst zueinander orthogonal sind, d. h. daß

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} = 0 \quad (j = 1 \ldots n - m,\ \lambda = 1 \ldots m), \tag{10.5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} = 0 \quad (j \neq \varkappa = 1 \ldots n - m) \tag{10.6}$$

gilt. Eine solche Wahl der Funktionen u_j ist stets möglich. Die Normalenrichtungen auf (10. 4) berühren zufolge (10. 5) die Mannigfaltigkeit Φ und bilden demnach in einem Punkte deren $n - m$-dimensionale Tangentialmannigfaltigkeit. Betrachten wir neben den Flächen (10. 4) noch die folgenden:

$$u_j(x_1 \ldots x_n \mid a_1 \ldots a_\varrho) = \mathfrak{c}_j + d\mathfrak{c}_j \qquad (j = 1 \ldots n - m), \tag{10.7}$$

so gilt für je ein Paar zusammengehöriger Flächen (10.4) und (10.7) nach (9.5), daß das dazwischen liegende Normalenstück die Länge

$$d' n_j = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} d\mathfrak{c}_j$$

besitzt. Das Element $d\Phi$ ist definitionsgemäß gleich dem seiner Tangentialmannigfaltigkeit, und dessen Größe wiederum ist zufolge der Orthogonalität der $d' n_j$ gleich

$$(10.8) \qquad d\Phi = \prod_{j=1}^{n-m} d' n_j = \left\{ \prod_{j=1}^{n-m} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} d\mathfrak{c}_1 \ldots d\mathfrak{c}_{n-m}.$$

Die $2n$ Flächen (10.1), (10.2), (10.4) und (10.7) definieren in ihrem Schnitt ein Raumelement $d\tau$ des R_n; die lineare Unabhängigkeit der Funktionen f_λ, u_j gestattet, diese Größen als neue Koordinaten des R_n einzuführen und demnach zu setzen:

$$(10.9) \quad d\tau = dx_1 \ldots dx_n = \left[\frac{\partial (f_1 \ldots f_m, u_1 \ldots u_{n-m})}{\partial (x_1 \ldots x_n)} \right]^{-1} . dc_1 \ldots dc_m \, d\mathfrak{c}_1 \ldots d\mathfrak{c}_{n-m}.$$

Andrerseits folgert man aus (10.5), (10.6), daß:

$$\left[\frac{\partial (f_1 \ldots f_m, u_1 \ldots u_{n-m})}{\partial (x_1 \ldots x_n)} \right]^2 = \prod_{j=1}^{n-m} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2 \cdot \Gamma_{m,n}^2,$$

worin

$$\Gamma_{m,n}^2 = \operatorname{Det}_{\varkappa,\lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_i} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial (f_1 \ldots f_m)}{\partial (x_1 \ldots x_n)} \right)^2$$

das Quadrat der letzthingeschriebenen Matrix bedeutet. (10.9) gibt also in Verbindung mit (10.8)

$$(10.10) \qquad d\tau = \frac{1}{\Gamma_{m,n}} d\Phi \cdot dc_1 \ldots dc_m$$

als Ausdruck für das Raumelement der zwischen Φ und Φ' liegenden Schicht.

Aus (9.2) ergibt sich also

$$\varkappa \, d\Phi \, dc_1 \ldots dc_m = \varkappa \, \Gamma_{m,n} \, d\tau = \varkappa_1 \, d\Phi_1 \, dc_1 \ldots dc_m = (\varkappa \, \Gamma_{m,n})_1 \, d\tau_1,$$

woraus man, wie in § 9, folgert, daß die Größe

$$(10.11) \qquad \mu = \Gamma_{m,n} \varkappa$$

ein Multiplikator des vorgelegten Systems sein muß, und umgekehrt gibt jeder auf Φ endlichvieldeutige Multiplikator μ — der durch diese Forderung bis auf einen konstanten Faktor festgelegt ist — durch (10.11) eine gültige Dichtefunktion

$$\varkappa = \frac{\mu}{\Gamma_{m,n}}.$$

Die an Stelle von (1.10) anzuwendende Funktionaloperation lautet sonach in diesem Falle:

$$\bar{\alpha} = \int_{\Phi} \alpha\, F \frac{\mu}{\Gamma_{m,n}}\, d\Phi : \int_{\Phi} F \frac{\mu}{\Gamma_{m,n}}\, d\Phi, \tag{10.12}$$

und die später zu behandelnden Differentialgleichungen der adiabatischen Invarianten werden:

$$\sum_{\lambda=1}^{m} \frac{\partial J}{\partial c_\lambda} \cdot \int_{\Phi} \frac{\partial f_\lambda}{\partial a_\nu} F \frac{\mu}{\Gamma_{m,n}}\, d\Phi + \frac{\partial J}{\partial a_\nu} \cdot \int_{\Phi} F \frac{\mu}{\Gamma_{m,n}}\, d\Phi = 0 \qquad (\nu = 1 \dots \varrho). \tag{10.13}$$

§ 11.

$n-1$-fach imprimitive Systeme.

Der Klassifikation des § 8 entsprechend bleiben noch die Fälle A und B 3 zu besprechen, die unabhängig von allen topologischen Voraussetzungen und der Quasiergodenhypothese sind. Man kennt die Integrale

$$f_i(x_1 \dots x_n \,|\, a_1 \dots a_\varrho) = c_i \qquad (i = 1 \dots n-1) \tag{11.1}$$

und folgert aus den Identitäten

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_\varkappa} X_\varkappa \equiv 0 \qquad (i = 1 \dots n-1) \tag{11.2}$$

die Relationen:

$$X_i = \frac{(-1)^i}{\mu} \frac{\partial (f_1 \dots f_{n-1})}{\partial (x_1 \dots x_{i-1}\, x_{i+1} \dots x_n)} = \frac{(-1)^i}{\mu} \mathfrak{F}_i, \tag{11.3}$$

worin μ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet und wir gesetzt haben:

$$\mathfrak{F}_i = \frac{\partial (f_1 \dots f_{n-1})}{\partial (x_1 \dots x_{i-1}\, x_{i+1} \dots x_n)}.$$

Da die $\mathfrak{F}_i$ nicht unabhängig voneinander sind, muß μ eine leicht zu findende Gleichung befriedigen; es ist nämlich:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu X_i) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{\partial \mathfrak{F}_i}{\partial x_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\varkappa=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{i-1} (-1)^{\varkappa+l+i} \frac{\partial^2 f_\varkappa}{\partial x_i\, \partial x_l} \frac{\partial (f_1 \dots f_{\varkappa-1}\, f_{\varkappa+1} \dots f_{n-1})}{\partial (x_1 \dots x_{l-1}\, x_{l+1} \dots x_{i-1}\, x_{i+1} \dots x_n)}$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \sum_{\varkappa=1}^{n-1} \sum_{l=i+1}^{n} (-1)^{\varkappa+l+i} \frac{\partial^2 f_\varkappa}{\partial x_i\, \partial x_l} \frac{\partial (f_1 \dots f_{\varkappa-1}\, f_{\varkappa+1} \dots f_{n-1})}{\partial (x_1 \dots x_{i-1}\, x_{i+1} \dots x_{l-1}\, x_{l+1} \dots x_n)}$$

$$\equiv 0,$$

wie man durch Vertauschung von i und l in der zweiten Summe erkennt; μ genügt also der Differentialgleichung

$$(11.4)\qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}(\mu X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mu}{\partial x_i} X_i + \mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i} = 0,$$

ist mithin ein Jacobischer Multiplikator des Systems (1.1). Führen wir dessen Divergenz

$$(11.5)\qquad \Delta_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}$$

ein, so kann man (11.4) auch in die Form setzen

$$(11.6)\qquad \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial \log \mu}{\partial x_i} + \Delta_0 = 0.$$

Wir wollen auch hier, wie in den vorangehenden Paragraphen, die Forderung stellen, daß μ auf der Trajektorie (außer eventuell in endlich vielen Punkten) nicht verschwindet. Wäre μ längs $\mathfrak{T}$ Null, so besagte dies nach (11.3), da wir die X_i daselbst als regulär voraussetzen, daß längs $\mathfrak{T}$ sämtliche $\mathfrak{F}_i$ verschwinden, und dies wiederum, daß die Gleichungen (11.2) linear abhängig sind, also etwa eine Relation

$$\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_i} = \sum_{\varkappa=1}^{n-2} \alpha_\varkappa \frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_i} \qquad (i = 1 \ldots n)$$

mit konstanten $\alpha_\varkappa$ besteht. Geometrisch drückt dies aus, daß die Integralfläche

$$f_{n-1} - \sum_{\varkappa=1}^{n-2} \alpha_\varkappa f_\varkappa = \text{konst.}$$

des Systems (1.1) längs $\mathfrak{T}$ singulär ist. Unsere Annahme fordert also, *daß keine mögliche Integralfläche die Trajektorie als singuläre Linie besitzt.* Die gleiche Überlegung hat auch für die vorangehenden Paragraphen Geltung, nur daß sie dort *im kleinen* gilt.

Nunmehr folgert man aus (1.1) und (11.3), daß

$$(11.7)\qquad dt = \frac{dx_i}{X_i} = (-1)^i \mu \frac{dx_i}{\mathfrak{F}_i} = \mu \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} dx_i^2}{\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{F}_i^2}} = \mu \frac{ds}{\Gamma_{n-1,n}},$$

worin ds das Bogenelement der Trajektorie $\mathfrak{T}$ in R_n bezeichnet und gesetzt ist:

$$(11.8)\qquad \Gamma_{n-1,n}^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{F}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial(f_1 \ldots f_{n-1})}{\partial(x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n)}\right]^2.$$

Einer bekannten Identität zufolge stimmt $\Gamma_{n-1,n}$ mit dem Ausdruck überein, der aus der im vorigen Paragraphen definierten Größe $\Gamma_{m,n}$ für $m = n-1$ hervorgeht; man kann ihr eine geometrische Bedeutung unterschieben durch die Bemerkung, daß

$$(-1)^i \frac{\mathfrak{F}_i}{\Gamma_{n-1,n}} = \mu \frac{X_i}{\Gamma_{n-1,n}}$$

die Richtungskosinus der Tangente an $\mathfrak{T}$ sind. Auf Grund von (11.7) tritt an Stelle von (1.7) die Mittelbildung:

$$\bar{\alpha} = \int\limits_S \alpha F \frac{\mu}{\Gamma_{n-1,n}} ds : \int\limits_S F \frac{\mu}{\Gamma_{n-1,n}} ds, \tag{11.9}$$

worin S das dem Intervall T von t entsprechende Stück der Trajektorie bzw. für $T=\infty$ die Gesamtlänge der letzteren bezeichnet. Die Differentialgleichungen der adiabatischen Invarianten lauten demnach in diesem Falle

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial J}{\partial c_i} \cdot \int\limits_S \frac{\partial f_i}{\partial a_\nu} F \frac{\mu}{\Gamma_{n-1,n}} ds + \frac{\partial J}{\partial a_\nu} \cdot \int\limits_S F \frac{\mu}{\Gamma_{n-1,n}} ds = 0 \quad (\nu = 1 \dots \varrho). \tag{11.10}$$

§ 12.

Die Invarianten einfach-imprimitiver Systeme.

Nachdem so die Differentialgleichungen der adiabatischen Invarianten in allen Fällen aufgestellt sind, wollen wir zunächst ihre Integrabilitätsbedingungen und mögliche Lösung für einfach-imprimitive Systeme untersuchen. Bezeichnen wir analog zu (4.2):

$$g = \int\limits_\Phi F \frac{\mu}{\Gamma_{1n}} d\Phi, \qquad g_\nu = \int\limits_\Phi \frac{\partial f}{\partial a_\nu} F \frac{\mu}{\Gamma_{1n}} d\Phi, \tag{12.1}$$

so lauten die Integrabilitätsbedingungen des Systems (9.11) genau wie (4.3). Um sie in expliziter Form zu gewinnen, führen uns die §§ 4, 6 zu einem Kunstgriff.

Es sei im Innern von Φ eine stetige Ortsfunktion $G(x_1 \dots x_n \,|\, a_1 \dots a_\varrho)$ vorgelegt; wir betrachten dann das Integral

$$H = \int G(x_1 \dots x_n \,|\, a_1 \dots a_\varrho)\, dx_1 \dots dx_n, \tag{12.2}$$

wo sich die Integration über das ganze Innere von Φ erstrecken soll, und wollen seine Ableitungen berechnen. Um $\frac{\partial H}{\partial c}$ zu finden, müssen wir neben Φ die durch (9.3) definierte Hyperfläche Φ' betrachten und haben mit den dortigen Bezeichnungen:

$$\frac{\partial H}{\partial c} = \int\limits_\Phi G\, d\Phi\, d'n : dc = \int\limits_\Phi G \frac{1}{\Gamma_{1n}} d\Phi, \tag{12.3}$$

wie aus (9.5) folgt. Um dagegen $\frac{\partial H}{\partial a_\nu}$ zu ermitteln, führen wir neben Φ die Fläche Φ^* ein, deren Gleichung

$$f(x_1 \dots x_n \mid a_1 \dots a_\nu + da_\nu \dots a_\varrho) = c \tag{12.4}$$

lautet, und deren Punkte P^* wir uns aus denen P von Φ durch die normale Verschiebung d^*n entstanden denken, deren Richtungskosinus durch (9.4) gegeben sind, und deren Komponenten demnach lauten

$$d^*x_i = \frac{1}{\Gamma_{1n}} \frac{\partial f}{\partial x_i} d^*n;$$

andrerseits gibt uns (12.4):

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} d^*x_i \equiv \Gamma_{1n} d^*n = -\frac{\partial f}{\partial a_\nu} da_\nu,$$

also

$$d^*n = -\frac{\partial f}{\partial a_\nu} \frac{1}{\Gamma_{1n}} da_\nu; \qquad d^*x_i = -\frac{1}{\Gamma_{1n}^2} \frac{\partial f}{\partial a_\nu} \frac{\partial f}{\partial x_i} da_\nu. \tag{12.5}$$

Bei der Berechnung von $\frac{\partial H}{\partial a_\nu}$ ist zu beachten, daß durch die Variation von a_ν nicht nur Φ, sondern auch die Funktion G im Innern von Φ variiert, so daß also

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial a_\nu} &= \int_\Phi G\, d\Phi\, d^*n : da_\nu + \int \frac{\partial G}{\partial a_\nu} dx_1 \dots dx_n \\ &= -\int_\Phi \frac{\partial f}{\partial a_\nu} G \frac{1}{\Gamma_{1n}} d\Phi + \int \frac{\partial G}{\partial a_\nu} dx_1 \dots dx_n \end{aligned} \tag{12.6}$$

wird. Vergleicht man diese Formeln mit den Integralen g, g_ν, so liegt es also nahe, das Integral

$$V = \int F\mu\, dx_1 \dots dx_n, \tag{12.7}$$

über das Innere von Φ erstreckt, einzuführen. Dann ist nämlich nach (12.3) und (12.6)

$$g = \frac{\partial V}{\partial c}, \quad g_\nu = -\frac{\partial V}{\partial a_\nu} - \int \frac{\partial (F\mu)}{\partial a_\nu} dx_1 \dots dx_n, \tag{12.8}$$

woraus folgt, indem man wieder (12.3) und (12.6) heranzieht, daß:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_\varkappa}{\partial a_\lambda} - \frac{\partial g_\lambda}{\partial a_\varkappa} &= \int_\Phi \left\{ \frac{\partial f}{\partial a_\lambda} \frac{\partial (F\mu)}{\partial a_\varkappa} - \frac{\partial f}{\partial a_\varkappa} \frac{\partial (F\mu)}{\partial a_\lambda} \right\} \frac{1}{\Gamma_{1n}} d\Phi, \\ \frac{\partial g}{\partial a_\varkappa} + \frac{\partial g_\varkappa}{\partial c} &= -\int \frac{\partial (F\mu)}{\partial a_\nu} \frac{1}{\Gamma_{1n}} d\Phi \end{aligned} \tag{12.9}$$

gilt.

Die Integrabilitätsbedingungen (4. 3) lauten demzufolge explizit:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\Phi} F\frac{\mu}{\Gamma_{1n}}\,d\Phi\cdot\int\limits_{\Phi}\left\{\frac{\partial f}{\partial a_\lambda}\frac{\partial(F\mu)}{\partial a_\varkappa}-\frac{\partial f}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial(F\mu)}{\partial a_\lambda}\right\}\frac{1}{\Gamma_{1n}}\,d\Phi\\
(12.10)\qquad &+\int\limits_{\Phi}\frac{\partial f}{\partial a_\varkappa}F\frac{\mu}{\Gamma_{1n}}\,d\Phi\cdot\int\limits_{\Phi}\frac{\partial(F\mu)}{\partial a_\lambda}\frac{1}{\Gamma_{1n}}\,d\Phi\\
&-\int\limits_{\Phi}\frac{\partial f}{\partial a_\lambda}F\frac{\mu}{\Gamma_{1n}}\,d\Phi\cdot\int\limits_{\Phi}\frac{\partial(F\mu)}{\partial a_\varkappa}\frac{1}{\Gamma_{1n}}\,d\Phi\equiv 0\qquad(\varkappa,\lambda=1\ldots\varrho).
\end{aligned}
$$

Unter Benutzung der Bezeichnung (9. 10) können wir somit den Satz formulieren:

Satz 7. *Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer adiabatischen Invariante eines einfach-imprimitiven Systems lauten:*

$$
(12.11)\qquad \overline{\frac{\partial f}{\partial a_\varkappa}\frac{\partial\log\mu F}{\partial a_\lambda}}-\overline{\frac{\partial f}{\partial a_\varkappa}}\cdot\overline{\frac{\partial\log\mu F}{\partial a_\lambda}}\equiv\overline{\frac{\partial f}{\partial a_\lambda}\frac{\partial\log\mu F}{\partial a_\varkappa}}-\overline{\frac{\partial f}{\partial a_\lambda}}\cdot\overline{\frac{\partial\log\mu F}{\partial a_\varkappa}}
$$
$$(\varkappa,\lambda=1\ldots\varrho).$$

Ein Vergleich mit (4. 30) zeigt, daß sie die gleiche Form haben wie im zweidimensionalen Falle, und daher lassen sich entsprechende Erörterungen anknüpfen wie dort.

Die Voraussetzung, daß Φ im R_n geschlossen sei, ermöglicht die Feststellung, daß auf Φ sowohl die Koordinaten $x_1\ldots x_{n-1}$, als auch alle Funktionen derselben, im besonderen $\frac{\partial f}{\partial a_\varkappa}$ und $\frac{\partial\log\mu F}{\partial a_\varkappa}$, nach $n-1$ reellen Parametern $t_1\ldots t_{n-1}$ in mehrfache Fourierreihen entwickelbar sind. Setzen wir dann

$$
(12.12)\qquad \frac{\partial f}{\partial a_\varkappa}=\alpha_\varkappa+h_\varkappa(x_1\ldots x_n),\qquad \frac{\partial\log\mu F}{\partial a_\varkappa}=\beta_\varkappa+j_\varkappa(x_1\ldots x_n)
$$
$$(\varkappa=1\ldots\varrho),$$

worin

$$
\alpha_\varkappa=\overline{\frac{\partial f}{\partial a_\varkappa}},\qquad \beta_\varkappa=\overline{\frac{\partial\log\mu F}{\partial a_\varkappa}}
$$

die konstanten Terme der Fourierreihen für $F\frac{\partial f}{\partial a_\varkappa}$ und $F\frac{\partial\log\mu F}{\partial a_\varkappa}$ bedeuten, so sind die $h_\varkappa, j_\varkappa$ Funktionen, deren Mittelwert über Φ verschwindet, und man kann (12. 11) die Form geben:

$$
(12.13)\qquad \overline{h_\varkappa j_\lambda}=\overline{h_\lambda j_\varkappa},
$$

was sich auch als Relation zwischen Fourierkonstanten schreiben läßt.

Drei Spezialfälle treten denen des § 5 an die Seite; die Entwicklungen sind die gleichen wie dort, wir sprechen nur die Resultate aus:

Fall I. $$h_\varkappa(x_1 \ldots x_n) = 0 \qquad (\varkappa = 1 \ldots \varrho).$$

Aus den Gleichungen (1.8) verschwindet die Funktionaloperation, sie werden mit (1.6) identisch. f ist ein gegenüber den Parametern stationäres Integral, d. h. nicht nur Integral des Systems (1.1), sondern auch der ϱ Systeme

$$(12.14) \qquad \frac{d x_i}{d t} = \frac{\partial X_i}{\partial a_\varkappa} \qquad (\varkappa = 1 \ldots \varrho),$$

wofür notwendig ist, daß in der Matrix

$$\begin{pmatrix} X_1 & \ldots & X_n \\ \frac{\partial X_1}{\partial a_\varkappa} & \ldots & \frac{\partial X_n}{\partial a_\varkappa} \end{pmatrix} \qquad (\varkappa = 1 \ldots \varrho)$$

alle n-reihigen Determinanten verschwinden.

Fall II. Für einen bestimmten Multiplikator μ ist

$$j_\varkappa(x_1 \ldots x_n) = 0 \qquad (\varkappa = 1 \ldots \varrho),$$

also

$$(12.15) \qquad \frac{\partial \log \mu F}{\partial a_\varkappa} = \Psi_\varkappa(f \mid a_1 \ldots a_\varrho) \qquad (\varkappa = 1 \ldots \varrho).$$

Für $F \equiv 1$ folgt, daß μ ein stationärer Multiplikator, d. h. auch ein solcher der Systeme (12.14) ist. Notwendig ist dazu, daß in der Matrix

$$\begin{pmatrix} X_1 & \ldots & X_n, & \Delta_0 \\ \frac{\partial X_1}{\partial a_\varkappa} & \ldots & \frac{\partial X_n}{\partial a_\varkappa}, & \frac{\partial \Delta_0}{\partial a_\varkappa} \end{pmatrix} \qquad (\varkappa = 1 \ldots \varrho)$$

sämtliche $(n+1)$-reihigen Determinanten verschwinden. Dies ist im besonderen für Liouvillesche Systeme ($\Delta_0 = 0$), speziell Hamiltonsche Systeme, der Fall.

Fall III. $$j_\varkappa(x_1 \ldots x_n) = \text{konst.}\, h_\varkappa(x_1 \ldots x_n) \qquad (\varkappa = 1 \ldots \varrho)$$

läßt sich wie in § 5 auf den vorangehenden Fall zurückführen.

Zusammenfassend tritt also dem Satz 4 der folgende an die Seite:

Satz 8. *Hinreichende Bedingungen für die Existenz der adiabatischen Invariante eines einfach-imprimitiven Systems sind*: a) *die Stationarität des endlichvieldeutigen Integrals*, b) *bei einfacher Mittelbildung die Stationarität eines Multiplikators gegenüber den Parametern.*

§ 13.

Die generalisiert-Liouvilleschen Systeme.

In (12.15) ist als besondere Möglichkeit die enthalten, daß

$$(13.1) \qquad \frac{\partial \mu F}{\partial a_\varkappa} = 0 \qquad (\varkappa = 1 \ldots \varrho)$$

ist; wir wollen dann das System als generalisiert-Liouvillesches bezeichnen.

Aus (12.8) einerseits und (9.11) andrerseits folgt, daß die Gleichungen der adiabatischen Invariante die Form annehmen

$$\frac{\partial J}{\partial c}\frac{\partial V}{\partial a_\nu} - \frac{\partial J}{\partial a_\nu}\frac{\partial V}{\partial c} = 0 \qquad (\nu = 1 \dots \varrho),$$

d. h. aber:

$$J = V = \int F\mu\, dx_1 \dots dx_n \tag{13.2}$$

ist die adiabatische Invariante unseres Systems. Dem Satz 5 tritt also der folgende an die Seite:

Satz 9. *Die adiabatische Invariante eines einfach-imprimitiven generalisiert-Liouvilleschen Systems ist*

$$V = \int F\mu\, dx_1 \dots dx_n.$$

Handelt es sich um einfache Mittelbildung ($F \equiv 1$), so ist in der betrachteten Systemklasse speziell die Klasse der Liouvilleschen Systeme enthalten, für die $\Delta_0 = 0$, $\mu =$ konst. ist; für sie reduziert sich die Invariante auf das von Φ eingeschlossene Volumen des R_n. Als besondere Möglichkeit sind hierin wieder diejenigen Hamiltonschen Systeme enthalten, die außer dem Energieintegral kein weiteres endlichvieldeutiges Integral besitzen und für die unser Satz mit der Aussage des Gibbs-Hertzschen Theorems[17]) zusammenfällt, daß das Phasenvolumen der Energiefläche adiabatisch invariant ist. Allgemeiner umfaßt (13.1) bei einfacher Mittelbildung die Systeme, die einen von den Parametern unabhängigen Multiplikator gestatten, und diese sind, wie der Satz 6 behauptet, durch eine von den Parametern freie, also erlaubte Transformation in Liouvillesche Systeme überführbar.

Wir beweisen nunmehr diesen Satz 6. Führen wir zunächst statt der $x_1 \dots x_n$ neue Koordinaten $\xi_1 \dots \xi_n$ ein, die reguläre, umkehrbare, die Parameter $a_1 \dots a_\varrho$ nicht enthaltende Funktionen der $x_1 \dots x_n$ sind, so transformiert sich das System (1.1) in ein neues System

$$\frac{d\xi_i}{dt} = H_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_\varkappa} X_\varkappa \qquad (i = 1 \dots n);$$

wir verlangen, daß dieses transformierte System vom Liouvilleschen Typus sei, also seine Divergenz verschwinde:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H_i}{\partial \xi_i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial H_i}{\partial x_\lambda}\frac{\partial x_\lambda}{\partial \xi_i} \equiv 0$$

oder:

$$\sum\sum_{i,\varkappa,\lambda=1}^{n}\sum \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_\varkappa\, \partial x_\lambda}\frac{\partial x_\lambda}{\partial \xi_i} X_\varkappa + \sum\sum_{\varkappa,\lambda=1}^{n} \frac{\partial X_\varkappa}{\partial x_\lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_\lambda}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial x_\varkappa} \equiv 0. \tag{13.3}$$

---

[17]) Vgl. Levi-Civita 1., S. 339–342.

Andrerseits gelten die Identitäten

$$\frac{\partial x_\lambda}{\partial x_\varkappa} = \sum_{\iota=1}^{n} \frac{\partial x_\lambda}{\partial \xi_\iota} \frac{\partial \xi_\iota}{\partial x_\varkappa} = \delta_{\lambda\varkappa},$$

aus denen man folgert:

$$\frac{\partial x_\lambda}{\partial \xi_\iota} \cdot \frac{\partial(\xi_1 \ldots \xi_n)}{\partial(x_1 \ldots x_n)} = (-1)^{\iota-\lambda} \frac{\partial(\xi_1 \ldots \xi_{\iota-1}\, \xi_{\iota+1} \ldots \xi_n)}{\partial(x_1 \ldots x_{\lambda-1}\, x_{\lambda+1} \ldots x_n)},$$

und daher erhält (13.3) die Form:

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} X_\varkappa \sum_{i=1}^{n} \sum_{\lambda=1}^{n} (-1)^{i+\lambda} \frac{\partial^2 \xi_\iota}{\partial x_\varkappa \partial x_\lambda} \frac{\partial(\xi_1 \ldots \xi_{\iota-1}\, \xi_{i+1} \ldots \xi_n)}{\partial(x_1 \ldots x_{\lambda-1}\, x_{\lambda+1} \ldots x_n)} + \frac{\partial(\xi_1 \ldots \xi_n)}{\partial(x_1 \ldots x_n)} \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{\partial X_\varkappa}{\partial x_\varkappa} \equiv 0$$

oder endlich:

$$(13.4) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\varkappa} \left\{ X_\varkappa \cdot \frac{\partial(\xi_1 \ldots \xi_n)}{\partial(x_1 \ldots x_n)} \right\} \equiv 0,$$

woraus sich durch Vergleich mit (11.4) findet, daß die Funktionaldeterminante

$$(13.5) \qquad \frac{\partial(\xi_1 \ldots \xi_n)}{\partial(x_1 \ldots x_n)} = \mu$$

ein Multiplikator des Systems (1.1) sein muß. Die linke Seite ist nach Voraussetzung von den Parametern unabhängig, und das gleiche muß somit bezüglich eines der möglichen Multiplikatoren von (1.1) gelten.

Gibt es umgekehrt unter den Multiplikatoren von (1.1) einen — wir nennen ihn μ —, der von $a_1 \ldots a_\varrho$ unabhängig ist, so kann man stets eine Transformation der x in die ξ finden, deren Funktionaldeterminante (13.5) gleich μ, und die frei von den Parametern ist. Sie führt dann, obigen Gleichungen zufolge, das System (1.1) in ein solches von Liouvilleschem Charakter über. Damit ist der Satz 6 bewiesen.

§ 14.

Die Reduktion der imprimitiven Systeme.

Wir wenden uns nunmehr der Behandlung der allgemeinen m-fach imprimitiven Systeme, also in der Klassifikation des § 8 gesprochen, der Fälle A, B 2 und B 3 zu, für deren Invarianten die Differentialsysteme (10.13) und (11.10) charakteristisch sind. Wir kennen also die m unabhängigen Integrale von (1.1):

$$(14.1) \qquad f_i(x_1 \ldots x_n \,|\, a_1 \ldots a_\varrho) = c_i \qquad (i = 1 \ldots m \leq n-1),$$

die im R_n die geschlossene Mannigfaltigkeit Φ bestimmen. Es ist der nächstliegende Gedanke, die Kenntnis dieser Integrale zur Erniedrigung des Ranges des ursprünglichen Differentialsystems nutzbar zu machen, um dadurch auf ein einfach-imprimitives oder zweidimensionales System überzugehen.

Dazu führt folgendes Verfahren: wir nehmen die Integrale

$$f_1, f_2 \dots f_{\varkappa-1}, f_{\varkappa+1} \dots f_m \tag{14.2}$$

und lösen sie nach $m-1$ von den $x_1 \dots x_n$ auf, was wegen ihrer Unabhängigkeit stets möglich ist. Diese Variablen, deren Wahl natürlich von $\varkappa$ abhängen kann, seien mit $x_1 \dots x_{m-1}$ bezeichnet. Dann gibt also die Auflösung auf Φ das Bestehen von $m-1$ Beziehungen der Art:

$$x_i = \psi_{i\varkappa}(x_m \dots x_n, a_1 \dots a_\varrho \,|\, c_1 \dots c_{\varkappa-1} c_{\varkappa+1} \dots c_m) \quad (i = 1 \dots m-1), \tag{14.3}$$

die identisch den folgenden Gleichungen genügen:

$$f_\lambda(\psi_{1\varkappa} \dots \psi_{m-1,\varkappa}, x_m \dots x_n \,|\, a_1 \dots a_\varrho) \equiv c_\lambda \qquad (\lambda = 1 \dots \varkappa - 1, \varkappa + 1 \dots m). \tag{14.4}$$

Da die Größen (14.2) Integrale von (1.1) sind, folgen einmal die weiteren Identitäten:

$$\frac{d\psi_{i\varkappa}}{dt} = \sum_{j=m}^{n} \frac{\partial \psi_{i\varkappa}}{\partial x_j} X_j \equiv X_i \qquad (i = 1 \dots m-1), \tag{14.5}$$

die man sich natürlich in den Variablen $x_m \dots x_n$ geschrieben denken muß, andrerseits bleibt ein System von $n - m + 1$ Differentialgleichungen übrig:

$$\frac{dx_j}{dt} = X_j(\psi_{1\varkappa} \dots \psi_{m-1,\varkappa}, x_m \dots x_n \,|\, a_1 \dots a_\varrho) \qquad (j = m \dots n), \tag{14.6}$$

das nach unsern Voraussetzungen ein einziges bekanntes endlich-deutiges Integral zuläßt, nämlich

$$f_\varkappa(\psi_{1\varkappa} \dots \psi_{m-1,\varkappa}, x_m \dots x_n) = c_\varkappa, \tag{14.7}$$

also einfach-imprimitiv bzw., wenn $m = n - 1$, zweidimensional ist.

Dieses Integral ist nichts anderes als die durch Elimination der $x_1 \dots x_{m-1}$ aus (14.1) hervorgehende Beziehung, d. h. stellt geometrisch gesprochen die Projektion Φ^* der Mannigfaltigkeit Φ aus dem R_n der $x_1 \dots x_n$ auf den $n-m+1$-dimensionalen Koordinatenraum R^* der $x_m \dots x_n$ dar; woraus erhellt, daß diese geschlossene Mannigfaltigkeit Φ^* invariant ist gegenüber der Wahl des Index $\varkappa$, vorausgesetzt, daß die Variablen, nach denen aufgelöst wird, dabei die gleichen bleiben. Φ^* wird gemäß unsern topologischen Voraussetzungen von den Trajektorien des Systems (14.6) quasiergodisch bedeckt bzw. fällt mit diesen in der (x_{n-1}, x_n)-Ebene zusammen. Man wird nun statt des ursprünglichen Systems (1.1) diese reduzierten Systeme (14.6) untersuchen, und wir werden einmal die adiabatischen Invarianten der letzteren aufsuchen und dann nachsehen, unter welchen Bedingungen diese auch Invarianten des ursprünglichen Systems sind.

Es wird dazu zweckmäßig sein, vorerst einige auf das System (14.6) bezügliche Beziehungen aufzustellen. Alle Größen können in unsern Rechnungen in zwei verschiedenen Formen auftreten: Einmal als Funktionen der $x_1 \dots x_n$ $a_1 \dots a_\varrho$ und frei von den $c_1 \dots c_m$, ein andermal als Funktionen der $x_m \dots x_n$ $a_1 \dots a_\varrho$ $c_1 \dots c_{k-1}$ $c_{k+1} \dots c_m$; in dieser letzteren Form geschrieben, in der sie also die Projektion auf R^* darstellen, wollen wir sie mit einem Stern versehen. Ferner wird in unseren Ausführungen die Matrix

$$(14.8) \qquad D \equiv \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial f_i}{\partial x_{m-1}}\right) \qquad (i = 1 \dots m)$$

eine Rolle spielen. Die durch Streichung der Zeilen $p, q, r \dots$ und der Spalten $\lambda, \mu \dots$ hervorgehenden Determinanten wollen wir durch

$$D^{\lambda, \mu \dots}_{p, q, r \dots}$$

bezeichnen.

Wir bestimmen zunächst die Divergenz von (14.6); es ist:

$$(14.9) \qquad \varDelta_\varkappa = \sum_{j=m}^{n} \frac{\partial X_j^*}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=m}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_{i\varkappa}}{\partial x_j} + \sum_{j=m}^{n} \frac{\partial X_j}{\partial x_j}.$$

Aus (14.4) folgen andrerseits die Gleichungen

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_{1\varkappa}}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_{m-1}} \frac{\partial \psi_{m-1,\varkappa}}{\partial x_j} = -\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_j} \qquad (j = m \dots n;\ \lambda \neq \varkappa = 1 \dots m),$$

deren Auflösung ergibt:

$$(14.10) \quad \frac{\partial \psi_{i\varkappa}}{\partial x_j} = \frac{(-1)^{i-1}}{D_\varkappa} \left\{ \sum_{\lambda=1}^{\varkappa-1} (-1)^\lambda \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_j} D^i_{\lambda\varkappa} - \sum_{\lambda=\varkappa+1}^{n} (-1)^\lambda \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_j} D^i_{\varkappa\lambda} \right\},$$

also

$$\varDelta_\varkappa = \frac{1}{D_\varkappa} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=m}^{n} (-1)^{i-1} \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \left[\sum_{\lambda=1}^{\varkappa-1} (-1)^\lambda \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_j} D^i_{\lambda\varkappa} - \sum_{\lambda=\varkappa+1}^{n} (-1)^\lambda \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_j} D^i_{\varkappa\lambda} \right] + \sum_{i=m}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_i}.$$

Nun sind aber die $f_1 \dots f_m$ Integrale von (1.1), d. h. es gelten die Identitäten

$$(14.11) \qquad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_j} X_j \equiv 0 \qquad (\lambda = 1 \dots m),$$

durch deren Differentiation nach x_i man findet:

$$\sum_{j=m}^{n} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_j} \frac{\partial X_j}{\partial x_i} = -\sum_{j=1}^{m-1} \frac{\partial f_\lambda}{\partial x_j} \frac{\partial X_j}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f_\lambda}{\partial x_i \partial x_j} X_j,$$

so daß schließlich folgt:

$$\varDelta_\varkappa = \frac{1}{D_\varkappa}\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\partial X_j}{\partial x_i}\left[\sum_{\lambda=1}^{\varkappa-1}(-1)^{i+\lambda}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_j}D^i_{\lambda\varkappa} - \sum_{\lambda=\varkappa-1}^{m}(-1)^{\lambda-i}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_j}D^i_{\varkappa\lambda}\right]$$

$$+\frac{1}{D_\varkappa}\sum_{j=1}^{n}X_j\sum_{i=1}^{m-1}\left[\sum_{\lambda=1}^{\varkappa-1}(-1)^{i+\lambda}\frac{\partial^2 f_\lambda}{\partial x_i\partial x_j}D^i_{\lambda\varkappa} - \sum_{\lambda=\varkappa+1}^{m}(-1)^{i+\lambda}\frac{\partial^2 f_\lambda}{\partial x_i\partial x_j}D^i_{\varkappa\lambda}\right] + \sum_{i=m}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial x_i}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial X_i}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n}X_j\frac{\partial \log D_\varkappa}{\partial x_j},$$

oder, wenn $\varDelta_0$ die Divergenz des ursprünglichen Systems bedeutet:

$$\varDelta_\varkappa = \varDelta_0 + \sum_{i=1}^{n}X_i\frac{\partial \log D_\varkappa}{\partial x_i}. \tag{14.12}$$

Für diese Ableitung ist die Bemerkung wichtig, daß $D_\varkappa$ nicht verschwinden kann, weil wir die Auflösbarkeit der Größen (14.2) nach den $x_1 \ldots x_{m-1}$ voraussetzen. Der Formel (14.12) entnimmt man beiläufig die Tatsache, daß die Divergenz des reduzierten Systems mit der des ursprünglichen identisch wird, wenn $D_\varkappa$ ein Integral von (1.1) ist, und speziell den

Satz 10. *Ist das ursprüngliche System von Liouvilleschem Typus, so gilt das gleiche vom reduzierten System dann und nur dann, wenn $D_\varkappa$ ein Integral des ersteren ist.*

Nunmehr sind wir in der Lage, den Multiplikator $\mu_\varkappa$ des reduzierten Systems (14.6) zu finden, dessen Differentialgleichung lautet:

$$\sum_{j=m}^{n}X_j^*\frac{\partial \mu_\varkappa^*}{\partial x_j} + \mu_\varkappa^*\varDelta_\varkappa^* = 0,$$

oder

$$\sum_{j=m}^{n}\sum_{i=1}^{m-1}\frac{\partial \mu_\varkappa}{\partial x_i}\frac{\partial \psi_{i\varkappa}}{\partial x_j}X_j + \sum_{j=m}^{n}\frac{\partial \mu_\varkappa}{\partial x_j}X_j + \mu_\varkappa\varDelta_\varkappa = 0,$$

was unter Benutzung von (14.10) und der aus (14.11) folgenden Identität

$$\sum_{j=m}^{n}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_j}X_j = -\sum_{j=1}^{m-1}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_j}X_j \qquad (\lambda = 1\ldots m)$$

die Gestalt annimmt:

$$\sum_{i=1}^{m-1}\frac{1}{D_\varkappa}\frac{\partial \mu_\varkappa}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{m-1}X_j\left\{\sum_{\lambda=1}^{\varkappa-1}(-1)^{i+\lambda}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_j}D^i_{\lambda\varkappa} - \sum_{\lambda=\varkappa+1}^{m}(-1)^{i+\lambda}\frac{\partial f_\lambda}{\partial x_j}D^i_{\varkappa\lambda}\right\}$$

$$+\sum_{j=m}^{n}\frac{\partial \mu_\varkappa}{\partial x_j}X_j + \mu_\varkappa\varDelta_\varkappa = 0,$$

oder

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mu_\varkappa}{\partial x_i} X_i + \mu_\varkappa \Delta_\varkappa = 0; \tag{14.13}$$

in Verbindung mit (14.12) folgt hieraus:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \log(\mu_\varkappa D_\varkappa)}{\partial x_i} X_i + \Delta_0 = 0,$$

d. h. bezeichnet μ_0 einen Multiplikator des ursprünglichen Systems, so ist

$$\mu_\varkappa = \frac{\mu_0}{D_\varkappa} \tag{14.14}$$

ein solcher des reduzierten Systems (14.6).

Das System (14.6) ist — wenn wir ganz von seinem Ursprung absehen und es für sich allein betrachten — ein einfach-imprimitives $n-m+1$-dimensionales System, dessen rechte Seiten die Parameter $a_1 \ldots a_\varrho \,|\, c_1 \ldots c_{\varkappa-1}\, c_{\varkappa+1} \ldots c_m$ enthalten, und diese Parameter sind auf eine zweifache Weise hineingekommen: einmal waren die $a_1 \ldots a_\varrho$ schon in den X_j enthalten, sodann kommen sie, wie auch die c durch Ausführung der Substitution (14.3) noch einmal zum Vorschein. Wir wollen ihr Auftreten im Integral $f_\varkappa^*$ und Multiplikator $\mu_\varkappa^*$ eingehender untersuchen. Aus den Identitäten (14.4) folgt zunächst durch Differentiation nach c_λ

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_{1\varkappa}}{\partial c_\lambda} + \ldots + \frac{\partial f_j}{\partial x_{m-1}} \frac{\partial \psi_{m-1,\varkappa}}{\partial c_\lambda} \equiv \delta_{j\lambda} \qquad (j, \lambda = 1 \ldots \varkappa - 1,\ \varkappa + 1 \ldots m),$$

woraus sich durch Auflösung findet:

$$\frac{\partial \psi_{i\varkappa}}{\partial c_\lambda} = \begin{cases} (-1)^{i+\lambda} \dfrac{D^i_{\lambda\varkappa}}{D_\varkappa}, & \text{wenn } \lambda < \varkappa, \\[2ex] (-1)^{i+\lambda+1} \dfrac{D^i_{\varkappa\lambda}}{D_\varkappa}, & \text{wenn } \lambda > \varkappa. \end{cases} \tag{14.15}$$

Ferner folgt:

$$\frac{\partial f_\varkappa^*}{\partial c_\lambda} = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_{i\varkappa}}{\partial c_\lambda} = (-1)^{\varkappa+\lambda+1} \frac{D_\lambda}{D_\varkappa} \qquad (\lambda \gtrless \varkappa) \tag{14.16}$$

und:

$$\frac{\partial \mu_\varkappa^*}{\partial c_\lambda} = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial \mu_\varkappa}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_{i\varkappa}}{\partial c_\lambda} = \begin{cases} \dfrac{1}{D_\varkappa} \displaystyle\sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{i+\lambda} D^i_{\lambda\varkappa} \frac{\partial \mu_\varkappa}{\partial x_i}, & \text{wenn } \lambda < \varkappa, \\[2ex] \dfrac{1}{D_\varkappa} \displaystyle\sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{i+\lambda+1} D^i_{\varkappa\lambda} \frac{\partial \mu_\varkappa}{\partial x_i}, & \text{wenn } \lambda > \varkappa. \end{cases} \tag{14.17}$$

In ähnlicher Weise gibt die Differentiation von (14.4) nach a_ν die Gleichungen

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_1} \frac{\partial \psi_{1\varkappa}}{\partial a_\nu} + \ldots + \frac{\partial f_j}{\partial x_{m-1}} \frac{\partial \psi_{m-1,\varkappa}}{\partial a_\nu} = -\frac{\partial f_j}{\partial a_\nu}$$
$$(j = 1 \ldots \varkappa - 1,\ \varkappa + 1 \ldots m;\ \nu = 1 \ldots \varrho),$$

aus denen folgt:

$$\frac{\partial \psi_{i\varkappa}}{\partial a_\nu} = \frac{1}{D_\varkappa}\left[-\sum_{\lambda=1}^{\varkappa-1}(-1)^{i+\lambda}\frac{\partial f_\lambda}{\partial a_\nu}D^i_{\lambda\varkappa} + \sum_{\lambda=\varkappa+1}^{m}(-1)^{i+\lambda}\frac{\partial f_\lambda}{\partial a_\nu}D^i_{\varkappa\lambda}\right]. \tag{14.18}$$

Mithin wird:

$$\frac{\partial f^*_\varkappa}{\partial a_\nu} = \sum_{i=1}^{m-1}\frac{\partial f_\varkappa}{\partial x_i}\frac{\partial \psi_{i\varkappa}}{\partial a_\nu} + \frac{\partial f_\varkappa}{\partial a_\nu} = \sum_{\lambda=1}^{\varkappa-1}(-1)^{\varkappa+\lambda}\frac{D_\lambda}{D_\varkappa}\frac{\partial f_\lambda}{\partial a_\nu} + \sum_{\lambda=\varkappa+1}^{m}(-1)^{\varkappa+\lambda}\frac{D_\lambda}{D_\varkappa}\frac{\partial f_\lambda}{\partial a_\nu} + \frac{\partial f_\varkappa}{\partial a_\nu}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{m}(-1)^{\varkappa+\lambda}\frac{\partial f_\lambda}{\partial a_\nu}\frac{D_\lambda}{D_\varkappa}. \tag{14.19}$$

Beiläufig folgen hieraus in Verbindung mit (14.16) die Formeln

$$\frac{\partial f^*_\varkappa}{\partial a_\nu} - \frac{\partial f_\varkappa}{\partial a_\nu} = -\sum_{\lambda=1}^{m}{}'\frac{\partial f_\lambda}{\partial a_\nu}\frac{\partial f^*_\varkappa}{\partial c_\lambda} \qquad (\nu = 1\ldots\varrho), \tag{14.20}$$

in denen der Akzent an der Summe das Auslassen des Gliedes $\lambda = \varkappa$ andeuten soll. Schließlich wird:

$$\frac{\partial \mu^*_\varkappa}{\partial a_\nu} = \sum_{i=1}^{m-1}\frac{\partial \mu_\varkappa}{\partial x_i}\frac{\partial \psi_{i\varkappa}}{\partial a_\nu} + \frac{\partial \mu_\varkappa}{\partial a_\nu} = \frac{1}{D_\varkappa}\left[\sum_{\lambda=1}^{\varkappa-1}\frac{\partial f_\lambda}{\partial a_\nu}\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{i+\lambda+1}\frac{\partial \mu_\varkappa}{\partial x_i}D^i_{\lambda\varkappa}\right.$$

$$\left. + \sum_{\lambda=\varkappa+1}^{m}\frac{\partial f_\lambda}{\partial a_\nu}\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{i+\lambda}\frac{\partial \mu_\varkappa}{\partial x_i}D^i_{\varkappa\lambda}\right] + \frac{\partial \mu_\varkappa}{\partial a_\nu},$$

$$\frac{\partial \mu^*_\varkappa}{\partial a_\nu} - \frac{\partial \mu_\varkappa}{\partial a_\nu} = -\sum_{\lambda=1}^{m}{}'\frac{\partial f_\lambda}{\partial a_\nu}\frac{\partial \mu^*_\varkappa}{\partial c_\lambda}. \tag{14.21}$$

§ 15.

Existenzbedingungen der adiabatischen Invarianten.

Das System (14.6) mit den Parametern $a_1\ldots a_\varrho$, $c_1\ldots c_{\varkappa-1}\, c_{\varkappa+1}\ldots c_m$ und dem Integral (14.7) kann eine adiabatische Invariante $J^*_\varkappa$ besitzen, die dann gemäß (9.11) durch das Gleichungssystem definiert ist:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial J^*_\varkappa}{\partial c_\varkappa}\cdot\int\limits_{\Phi^*}\frac{\partial f^*_\varkappa}{\partial c_\lambda}F^*\frac{\mu^*_\varkappa\, d\Phi^*}{\Gamma^*} + \frac{\partial J^*_\varkappa}{\partial c_\lambda}\cdot\int\limits_{\Phi^*}F^*\frac{\mu^*_\varkappa\, d\Phi^*}{\Gamma^*} = 0 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\lambda = 1\ldots\varkappa-1,\ \varkappa+1\ldots m), \\ &\frac{\partial J^*_\varkappa}{\partial c_\varkappa}\cdot\int\limits_{\Phi^*}\frac{\partial f^*_\varkappa}{\partial a_\nu}F^*\frac{\mu^*_\varkappa}{\Gamma^*}d\Phi^* + \frac{\partial J^*_\varkappa}{\partial a_\nu}\cdot\int\limits_{\Phi^*}F^*\frac{\mu^*_\varkappa}{\Gamma^*}d\Phi^* = 0 \qquad (\nu = 1\ldots\varrho), \end{aligned}\right. \tag{15.1}$$

worin Γ^* das Analogon der durch (9.4) definierten Größe Γ_{1n} für $f^*_\varkappa$ bedeutet; $J^*_\varkappa$ ist eine bloße Funktion der $a_1\ldots a_\varrho$, $c_1\ldots c_m$. Die hier auftretenden Integrale über die Projektion Φ^* lassen sich leicht in solche über Φ umformen. Man beachte, daß nach (10.10) das Raumelement des R_n die Größe

$$d\tau = dx_1 \dots dx_n = \frac{1}{\Gamma_{mn}} d\Phi\, df_1\, df_2 \dots df_m,$$

andrerseits nach (9.5) das Raumelement von R^* den Ausdruck

$$d\tau^* = dx_m \dots dx_n = \frac{1}{\Gamma^*} d\Phi^*\, df_\varkappa$$

besitzt, woraus die Beziehungen — vgl. (14.14) —

$$\frac{d\Phi}{\Gamma_{m,n}} = \frac{1}{D_\varkappa}\frac{d\Phi^*}{\Gamma^*}, \qquad \mu_0 \frac{d\Phi}{\Gamma_{m,n}} = \mu_\varkappa \frac{d\Phi^*}{\Gamma^*} \tag{15.2}$$

folgen. Durch Übergang von der Projektion auf die Mannigfaltigkeit Φ können wir also den Gleichungen (15.1) die Gestalt geben:

$$\tag{15.3} \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial J_\varkappa^*}{\partial c_\varkappa} \cdot \int\limits_\Phi \frac{\partial f_\varkappa^*}{\partial c_\lambda} F \frac{\mu_0}{\Gamma_{m,n}} d\Phi + \frac{\partial J_\varkappa^*}{\partial c_\lambda} \cdot \int\limits_\Phi F \frac{\mu_0}{\Gamma_{m,n}} d\Phi = 0 \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (\lambda = 1 \dots \varkappa - 1, \varkappa + 1 \dots m), \\ &\frac{\partial J_\varkappa^*}{\partial c_\varkappa} \cdot \int\limits_\Phi \frac{\partial f_\varkappa^*}{\partial a_\nu} F \frac{\mu_0}{\Gamma_{m,n}} d\Phi + \frac{\partial J_\varkappa^*}{\partial a_\nu} \cdot \int\limits_\Phi F \frac{\mu_0}{\Gamma_{m,n}} d\Phi = 0 \qquad (\nu = 1 \dots \varrho). \end{aligned} \right.$$

Das reduzierte System war von uns eingeführt worden, um die Berechnung der adiabatischen Invarianten des ursprünglichen Systems (1.1) zu ermöglichen. A priori wäre man geneigt zu behaupten, daß jede adiabatische Invariante des reduzierten Systems eine solche des ursprünglichen ist; *wir werden jedoch sehen, daß dem nicht so ist*, daß dazu vielmehr gewisse Bedingungen erfüllt sein müssen. Unsere Frage lautet also: Wann ist eine Lösung von (15.3) auch eine solche von (10.13)? Da natürlich $\frac{\partial J_\varkappa^*}{\partial c_\varkappa} \neq 0$ ist, gibt die Elimination der Derivierten von $J_\varkappa^*$ aus (15.3) und (10.13) die Bedingungen:

$$\tag{15.4} \begin{aligned} &\sum_{\lambda=1}^{m} \int\limits_\Phi \frac{\partial f_\varkappa^*}{\partial c_\lambda} F \frac{\mu_0}{\Gamma_{m,n}} d\Phi \cdot \int\limits_\Phi \frac{\partial f_\lambda}{\partial a_\nu} F \frac{\mu_0}{\Gamma_{m,n}} d\Phi \\ &\quad + \int\limits_\Phi \left\{ \frac{\partial f_\varkappa^*}{\partial a_\nu} - \frac{\partial f}{\partial a_\nu} \right\} F \frac{\mu_0}{\Gamma_{m,n}} d\Phi \cdot \int\limits_\Phi F \frac{\mu_0}{\Gamma_{m,n}} d\Phi = 0 \qquad (\nu = 1 \dots \varrho), \end{aligned}$$

die mittels (10.12), (14.16) und (14.19) die einfache Form annehmen:

$$\sum_{\lambda=1}^{m} (-1)^\lambda \left\{ \overline{\frac{D_\lambda}{D_\varkappa} \frac{\partial f_\lambda}{\partial a_\nu}} - \overline{\frac{D_\lambda}{D_\varkappa}} \cdot \overline{\frac{\partial f_\lambda}{\partial a_\nu}} \right\} = 0 \qquad (\nu = 1 \dots \varrho). \tag{15.5}$$

Satz 11. *Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine adiabatische Invariante des reduzierten Systems auch eine solche des ursprünglichen sei, lauten:*

$$\sum_{\lambda=1}^{m}(-1)^{\lambda}\left\{\overline{\frac{D_\lambda}{D_\varkappa}\frac{\partial f_\lambda}{\partial a_\nu}} - \overline{\frac{D_\lambda}{D_\varkappa}}\cdot\overline{\frac{\partial f_\lambda}{\partial a_\nu}}\right\} = 0 \qquad (\nu = 1\ldots\varrho).$$

Beispielsweise ist (15.5) erfüllt, wenn gewisse unter den f_λ in der Sprechweise des § 12 stationäre Integrale und die ergänzenden $\frac{D_\lambda}{D_\varkappa}$ auf Φ konstant, also Funktionen von $f_1\ldots f_m$ sind. Der Fall, daß *sämtliche* $\frac{\partial f_\lambda}{\partial a_\nu}$ $(\lambda = 1\ldots m,\ \nu = 1\ldots\varrho)$ auf Φ konstant, also alle bekannten Integrale stationär gegenüber den Parametern sind, ist trivial, denn dann verschwinden die Mittelbildungen in (10.13) bzw. (1.8), J wird die *gewöhnliche* Invariante von (1.6), und für diese gibt es kein Analogon der Reduktionsbedingungen (15.5); eine andere Möglichkeit für das Erfülltsein von (15.5) ist die, daß sämtliche

$$\frac{D_\lambda}{D_\varkappa} = \Psi(f_1\ldots f_m \,|\, a_1\ldots a_\varrho) \qquad (\lambda = 1\ldots\varkappa-1,\ \varkappa+1\ldots m) \tag{15.6}$$

sind; auch dies läßt sich deuten. Benutzt man nämlich zur Reduktion statt der Integrale (14.2) die folgenden: $f_1\ldots f_{\lambda-1}$, $f_{\lambda+1}\ldots f_m$ und sind diese nach den gleichen Variablen $x_1\ldots x_{m-1}$ auflösbar, so sind die Multiplikatoren μ_λ $(\lambda = 1\ldots m)$ sämtlicher m reduzierten Systeme nach (14.14) und (15.6) bis auf einen auf Φ konstanten Faktor miteinander identisch. Nach (14.13) wird dies im besonderen eintreten, *wenn die Divergenz* Δ_λ *für alle* m *reduzierten Systeme die gleiche ist.*

Ist also (15.5) erfüllt, so wissen wir, daß die adiabatische Invariante des reduzierten Systems auch eine solche des ursprünglichen ist, und wir haben demnach nur noch die Existenzbedingungen für erstere, d. h. die Integrabilitätsbedingungen von (15.1) hinzuzuschreiben. Dazu ziehen wir den Satz 7 heran und erhalten drei Gruppen von Bedingungen:

$$\left\{\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad \overline{\frac{\partial f_\varkappa^*}{\partial a_\nu}\frac{\partial \log\mu_\varkappa^* F^*}{\partial a_\mu}} - \overline{\frac{\partial f_\varkappa^*}{\partial a_\nu}}\cdot\overline{\frac{\partial \log\mu_\varkappa^* F^*}{\partial a_\mu}} = \overline{\frac{\partial f_\varkappa^*}{\partial a_\mu}\frac{\partial \log\mu_\varkappa^* F^*}{\partial a_\nu}} - \overline{\frac{\partial f_\varkappa^*}{\partial a_\mu}}\cdot\overline{\frac{\partial \log\mu_\varkappa^* F^*}{\partial a_\nu}}\\
&\hspace{25em}(\nu,\mu = 1\ldots\varrho),\\
&\text{(b)}\quad \overline{\frac{\partial f_\varkappa^*}{\partial c_\lambda}\frac{\partial \log\mu_\varkappa^* F^*}{\partial a_\nu}} - \overline{\frac{\partial f_\varkappa^*}{\partial c_\lambda}}\cdot\overline{\frac{\partial \log\mu_\varkappa^* F^*}{\partial a_\nu}} = \overline{\frac{\partial f_\varkappa^*}{\partial a_\nu}\frac{\partial \log\mu_\varkappa^* F^*}{\partial c_\lambda}} - \overline{\frac{\partial f_\varkappa^*}{\partial a_\nu}}\cdot\overline{\frac{\partial \log\mu_\varkappa^* F^*}{\partial c_\lambda}}\\
&\hspace{20em}(\lambda = 1\ldots\varkappa-1,\ \varkappa+1\ldots m),\\
&\text{(c)}\quad \overline{\frac{\partial f_\varkappa^*}{\partial c_\lambda}\frac{\partial \log\mu_\varkappa^* F^*}{\partial c_j}} - \overline{\frac{\partial f_\varkappa^*}{\partial c_\lambda}}\cdot\overline{\frac{\partial \log\mu_\varkappa^* F^*}{\partial c_j}} = \overline{\frac{\partial f_\varkappa^*}{\partial c_j}\frac{\partial \log\mu_\varkappa^* F^*}{\partial c_\lambda}} - \overline{\frac{\partial f_\varkappa^*}{\partial c_j}}\cdot\overline{\frac{\partial \log\mu_\varkappa^* F^*}{\partial c_\lambda}}\\
&\hspace{18em}(j,\lambda = 1\ldots\varkappa-1,\ \varkappa+1\ldots m),
\end{aligned}\right. \tag{15.7}$$

worin wir nach den vorangehenden Bemerkungen die Mittelbildung im Sinne von (10.12) über Φ erstreckt denken können. Mittels (14.16) bis (14.20) und (15.5) lassen sie sich auf eine, allerdings wenig übersichtliche Form bringen, in der das Auftreten der gesternten Größen vermieden wird. Sind die $\frac{1}{2}\varrho(\varrho-1)+(m-1)\varrho+\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ Bedingungen (15.7), sowie die ϱ Gleichungen (15.5) erfüllt, so wissen wir nach vorangehendem, daß das reduzierte System (14.6) eine adiabatische Invariante besitzt und daß diese zugleich eine solche des ursprünglichen Systems (1.1) ist. Die Gesamtheit dieser Bedingungen ist stärker als die der Integrabilitätsbedingungen von (10.13), die in extenso eine sehr komplizierte Form haben[18]), bietet aber den Vorteil übersichtlicher Handhabung.

Zwei Spezialfälle, in denen die Beziehungen (15.7) befriedigt sind, sind erwähnenswert:

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial \log \mu_\varkappa^* F^*}{\partial c_j} = A_j(f_1^* \ldots f_m^* \; a_1 \ldots a_\varrho); \qquad \frac{\partial \log \mu_\varkappa^* F^*}{\partial a_\nu} = B_\nu(f_1^* \ldots f_m^* \,|\, a_1 \ldots a_\varrho)$$
$$(j = 1 \ldots \varkappa-1,\ \varkappa+1 \ldots m;\ \nu = 1 \ldots \varrho),$$

d. h. die linken Seiten sind auf Φ konstant;

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial f_\varkappa^*}{\partial c_j} = \bar{A}_j(f_1^* \ldots f_m^* \; a_1 \ldots a_\varrho); \qquad \frac{\partial f_\varkappa^*}{\partial a_\nu} = \bar{B}_\nu(f_1^* \ldots f_m^* \,|\, a_1 \ldots a_\varrho).$$

Der Fall der Proportionalität der linken Seiten in (I), (II) läßt sich wie in § 12 auf die beiden eben genannten Möglichkeiten reduzieren.

Fall I. Ist $F \equiv 1$, so ist, in früherer Ausdrucksweise gesprochen, $\mu_\varkappa$ ein stationärer Multiplikator des Systems (14.6). Sind sämtliche $A_j = 0$, so ist also

$$\text{(15.8)} \qquad \frac{\partial \mu_\varkappa^* F^*}{\partial c_j} = 0 \qquad (j = 1 \ldots \varkappa-1,\ \varkappa+1 \ldots m),$$

und das besagt nach (14.17) — denn eine ähnliche Gleichung wie jene gilt auch für $\mu_\varkappa^* F^*$ — daß

$$\text{(15.9)} \qquad \frac{\partial \mu_\varkappa F}{\partial x_i} = 0 \qquad (i = 1 \ldots m-1)$$

gelten muß. (14.21) gibt dann weiter

$$\frac{\partial \mu_\varkappa^* F^*}{\partial a_\nu} = \frac{\partial \mu_\varkappa F}{\partial a_\nu} \qquad (\nu = 1 \ldots \varrho),$$

so daß also

$$\text{(15.10)} \qquad \frac{\partial \log \mu_\varkappa F}{\partial a_\nu} = B_\nu(f_1 \ldots f_m) \qquad (\nu = 1 \ldots \varrho)$$

sein muß. Sind auch alle $B_\nu = 0$, so wird demnach

$$\text{(15.11)} \qquad \frac{\partial \mu_\varkappa F}{\partial a_\nu} = 0 \qquad (\nu = 1 \ldots \varrho),$$

---

[18]) In dieser Beziehung ist zu erwähnen, daß Fermi 1 die Aufstellung dieser Bedingungen fur Hamiltonsche Systeme versucht; er beweist nur ihre Existenz an einem Beispiel.

was in Verbindung mit (15.9) besagt, daß *die Größe*

$$\mu_\varkappa F = \frac{\mu_0}{D_\varkappa} F$$

von $x_1 \ldots x_{m-1}$, $a_1 \ldots a_\varrho$ *nicht abhängen darf.* In früherer Ausdrucksweise ist dann das System (14.6) von generalisiert-Liouvilleschem Typus. Hinzu tritt dann noch die Reduktionsbedingung (15.5); hat diese die besondere Form (15.6), so sind alle möglichen reduzierten Systeme (wenn $D_\lambda \neq 0$ ist) vom generalisiert-Liouvilleschem Typus.

Fall II. $f_\varkappa^*$ ist ein stationäres Integral des Differentialsystems (14.6), und aus den Gleichungen (15.1) verschwindet die Funktionaloperation. Dieser Fall tritt im besonderen ein, wenn sämtliche $\bar{A}_j$, $\bar{B}_\nu$ verschwinden, d. h. nach (14.16) und (14.20), wenn

$$D_\lambda = 0 \qquad (\lambda \neq \varkappa = 1 \ldots m) \tag{15.12}$$

und

$$\frac{\partial f_\varkappa^*}{\partial a_\nu} = \frac{\partial f_\varkappa}{\partial a_\nu} = 0 \qquad (\nu = 1 \ldots \varrho), \tag{15.13}$$

d. h. *wenn* $f_\varkappa$ *weder von* $x_1 \ldots x_{m-1}$, *noch von* $a_1 \ldots a_\varrho$ *abhängt.* Wegen (15.12) sind dann die Reduktionsbedingungen (15.5) identisch befriedigt. $f_\varkappa$ ist dann also auch ein stationäres Integral des ursprünglichen Systems.

Tritt die oben erwähnte Möglichkeit des gleichzeitigen Bestehens von (15.9) und (15.11) ein, so gibt uns der Satz 9 direkt die adiabatische Invariante des reduzierten, und damit des ursprünglichen Systems

$$\begin{aligned} J = J_\varkappa^* &= \int\limits_{f_\varkappa^*} \mu_\varkappa^* F^* \, dx_m \ldots dx_n = \int\limits_{f_\varkappa^*} \frac{\mu_0^*}{D_\varkappa^*} F^* \, dx_m \ldots dx_n \\ &= \int\limits_{f_\varkappa^*} \frac{\mu_0}{D_\varkappa} F \, dx_m \ldots dx_n . \end{aligned} \tag{15.14}$$

Es ist günstigstenfalls möglich, durch Ausführung der m vorhandenen Reduktionen auf diese Weise sämtliche m verschiedenen Invarianten zu berechnen, die die $c_1 \ldots c_m$ mit den $a_1 \ldots a_\varrho$ in Verbindung setzen; dies wird nämlich dann der Fall sein, *wenn sämtliche reduzierten Systeme vom generalisiert-Liouvilleschen Typus mit wesentlich verschiedenen Multiplikatoren sind.* In den Fällen A und B 3 der Klassifikation des § 8 ist entsprechend der Satz 5 anzuwenden. Wir fassen zusammen:

Satz 12. *Außer der notwendigen Reduktionsbedingung* (15.15) *sind hinreichende Bedingungen für die Existenz einer adiabatischen Invariante eines m-fach imprimitiven Systems* a) *daß* $\frac{\mu_0 F}{D_\varkappa}$ *oder* b) *daß* $f_\varkappa$ *von*

$x_1 \dots x_{m-1}$, $a_1 \dots a_\varrho$ nicht abhängt. Im ersten Falle ist

$$J = \int\limits_{\Phi^*} \frac{\mu_0 F}{D_\varkappa} dx_m \dots dx_n$$

eine adiabatische Invariante.

Dieser Satz gestattet viele Anwendungen, wir wollen nur einen Spezialfall erwähnen:

Satz 13. *Sind das ursprüngliche, wie alle m reduzierten Systeme vom Liouvilleschen Typus und $D_\varkappa \neq 0$ $(\varkappa = 1 \dots m)$, so ist der Rauminhalt der Projektion*

$$J = \int\limits_{\Phi^*} dx_m \dots dx_n$$

bei einfacher Mittelbildung adiabatisch invariant.

Denn dann sind alle $\mu_\varkappa$ auf Φ konstant, das gleiche gilt von μ_0, mithin von $D_\varkappa$, und (15.5) ist identisch erfüllt.

§ 16.

Ein Beispiel.

Als Beispiel, das die vorangehende Theorie illustriert, wollen wir die durch das System

$$(16.1) \quad \frac{dx_1}{dt} = a_2 x_2 - a_3 x_3; \qquad \frac{dx_2}{dt} = a_3 x_3 - a_1 x_1; \qquad \frac{dx_3}{dt} = a_1 x_1 - a_2 x_2$$

charakterisierte ebene elliptische Schwingung behandeln. Das System gestattet die beiden Integrale:

$$f_1 \equiv x_1 + x_2 + x_3 = c_1, \qquad f_2 \equiv a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = c_2,$$

wir befinden uns somit im Falle B 3. Wir nehmen einfache Mittelbildung $F \equiv 1$ und $T = \infty$. Zur Berechnung der adiabatischen Invarianten stehen uns hier zwei Wege zur Verfügung: 1. die direkte Methode des § 1 unter Benutzung der x_i als Funktionen von $t - t_0$, und 2. das Verfahren des § 15 mittels Reduktion auf eine zweidimensionale Koordinatenebene.

Ad 1. Setzt man zur Abkürzung

$$h^2 = a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1, \qquad k^2 = c_2 h^2 - a_1 a_2 a_3 c_1^2,$$

so gibt die Integration von (16.1) die Beziehungen

$$x_1 = \frac{1}{h^2} \frac{k}{\sqrt{a_1 + a_2}} \left\{ a_2 \cos h (t - t_0) + h \sin h (t - t_0) \right\} + \frac{a_2 a_3 c_1}{h^2},$$

$$x_2 = \frac{1}{h^2} \frac{k}{\sqrt{a_1 + a_2}} \left\{ a_1 \cos h (t - t_0) - h \sin h (t - t_0) \right\} + \frac{a_1 a_3 c_1}{h^2},$$

$$x_3 = -\frac{1}{h^2} k \sqrt{a_1 + a_2} \cos h (t - t_0) + \frac{a_1 a_2 c_1}{h^2}.$$

In der Bezeichnung (1.5) wird somit:

$$\varphi_{11} = \varphi_{12} = \varphi_{13} = 0,$$

$$\overline{\varphi}_{21} = \frac{1}{2h^4}\{2a_2^2 a_3^2 c_1^2 + k^2(a_2 + a_3)\}, \qquad \overline{\varphi}_{22} = \frac{1}{2h^4}\{2a_1^2 a_3^2 c_1^2 + k^2(a_1 + a_3)\},$$

$$\overline{\varphi}_{23} = \frac{1}{2h^4}\{2a_1^2 a_2^2 c_1^2 + k^2(a_1 + a_2)\}.$$

Damit ist das Gleichungssystem (1.11) aufzustellen, und man verifiziert leicht, daß seine beiden Integrale lauten

$$J_1 = c_1; \qquad J_2 = \frac{k^2}{h^3}. \tag{16.2}$$

Ad 2. Zunächst ist nach Satz 1 c_1 eine adiabatische Invariante, also

$$J_1 = c_1.$$

Zur Reduktion verwenden wir f_1, d. h. setzen

$$x_1 \equiv \psi_{12} = c_1 - x_2 - x_3,$$

so daß sich (16.1) auf das folgende System reduziert:

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dt} &= a_1 x_2 + (a_1 + a_3) x_3 - a_1 c_1; \\ \frac{dx_3}{dt} &= -(a_1 + a_2) x_2 - a_1 x_3 + a_1 c_1 \end{aligned} \tag{16.3}$$

mit dem Integral

$$\begin{aligned} \varPhi^* = f_2^* \equiv (a_1 + a_2) x_2^2 + (a_1 + a_3) x_3^2 + 2a_1 x_2 x_3 \\ - 2a_1 c_1 (x_2 + x_3) + a_1 c_1^2 - c_2 = 0. \end{aligned} \tag{16.4}$$

Sind a_1, a_2, a_3 positiv, so ist die Trajektorie im R_3 der Schnitt des Ellipsoids f_2 mit der festen Ebene f_1, also eine Ellipse; $\varPhi^*$ ist deren Projektion auf die x_2, x_3-Ebene, also auch eine Ellipse. Das reduzierte System (16.3) ist, wie das ursprüngliche (16.1), von der Divergenz Null, also

$$\mu_0 = \mu_2 = 1.$$

Die Reduktionsbedingung (15.5) ist wegen $\frac{\partial f_1}{\partial a_\nu} = 0$ erfüllt, desgleichen nach Satz 12 die Integrabilitätsbedingungen. Die Invariante ist der Flächeninhalt der Ellipse $\varPhi^*$, der sich zu

$$J_2 = \pi \frac{k^2}{h^3}$$

berechnet. Die Reduktion mittels f_2 hingegen ist nicht anwendbar.

Literaturnachweis.

Born, Max. 1. Vorlesungen uber Atomdynamik. Bd. I. Berlin 1925.

Burgers, J. M. 1. Philos. Mag. **33** (1917), S. 514—520,

2. Dissertation Univers. Leiden. Haarlem 1918.

Carathéodory, Constantin. 1. Über den Wiederkehrsatz von Poincaré. Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 1919, S. 580—584.

Cherry, T. M. 1. Transactions of the Cambridge Philosophical Society **23** (1924), S. 43f.

Ehrenfest, Paul. 1. Adiabatic invariants and the theory of quanta. Phil. Mag. **33** (1917), S. 500—513.

Fermi, Enrico. 1. Alcuni teoremi di meccanica analitica. Nuovo Cimento (7) **25** (1923).

Geppert, Harald. 1. Sugli invarianti adiabatici di un generico sistema differenziale. Nota I. Rend. Acc. Lincei **8**, 2º sem. 1928, S. 30—34.

2. Idem, Nota II, ibidem S. 191—198.

3. Idem, Nota III, ibidem S. 294—299.

4. Die adiabatischen Invarianten beliebiger Differentialsysteme. Atti Congresso Intern. dei Matematici, Bologna 1928.

Gibbs, William. 1. Statistical mechanics. Yale Univers. Press 1902.

Hertz, Paul. 1. Weber-Gans, Repertorium d. Physik, Bd. I, 2. Leipzig 1916.

Levi-Civita, Tullio. 1. Drei Vorlesungen uber adiabatische Invarianten. Abh. d. Math. Seminars Hamburg **6** (1928), S. 323—366.

2. Sugli invarianti adiabatici. Atti Congresso Intern. dei Fisici **2** (1927), S. 1—39.

3. Alcune applicazioni astronomiche degli invarianti adiabatici. Bollettino dell' Unione Mat. Italiana **7**, Nr. 4, 1928.

Poincaré, Henri. 1. Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. Bd. 3. Paris 1899.

Smekal, Adolf. 1. Statistische und molekulare Theorie der Wärme, in Handbuch der Physik, Bd. 9. Berlin 1927.

(Eingegangen am 5. 12. 1928.)