Zur Geometrie der kontinuierlichen Transformationsgruppen.

Von

J. A. Schouten in Delft.

Einleitung.

Den beiden großen Abschnitten der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, „Klassifizierungstheorie" und „Darstellungstheorie", ist kürzlich ein neuer Abschnitt zur Seite getreten, der methodisch den beiden anderen voranzugehen hat und geeignet wäre, die klassische Theorie, sofern sie nicht den beiden anderen Abschnitten angehört, in sich aufzunehmen. Dieser Abschnitt, den ich mit dem Namen „Geometrie der Gruppenmannigfaltigkeit" bezeichnen möchte, zerfällt in zwei grundverschiedene Teile, Geometrie des Gruppenkeims, im kleinen, und Geometrie des Zusammenhangs, im großen. Vom ersten Teil soll im folgenden eine Übersicht des Wichtigsten gegeben werden, eine Übersicht, erwachsen aus Vorlesungen, die ich 1926—1927 an der Universität zu Leiden zu halten die Ehre hatte als Vorbereitung der Vorlesungen in 1927—1928 über Klassifizierungstheorie. In dieser Übersicht werden natürlich die Resultate der klassischen Theorie, insbesondere die drei Fundamentaltheoreme, vorausgesetzt. Das erste Kapitel bringt eine vorläufige synthetische Orientierung. Das zweite Kapitel zeigt, wie sich die drei Übertragungen und die wichtigsten Größen der Geometrie des Gruppenkeims auf kürzestem Wege aus den drei Fundamentaltheoremen ableiten. Im dritten Kapitel wird die Bedeutung der adjungierten Gruppe und ihrer Komitanten für die Geometrie des Gruppenkeims skizziert. Einer gegeschlossenen Darstellung zuliebe konnte es nicht immer umgangen werden, hin und wieder ein Resultat der klassischen Theorie mit zutage zu fördern. Dagegen sind Übergriffe in das Gebiet der Klassifizierungstheorie (bis auf die bloße Angabe der Kriterien für halbeinfache und integrabele Gruppen) streng vermieden und führt die Arbeit eben bis zu dem Punkte, wo diese Theorie einzusetzen hat.

I. Vorläufige Orientierung; Synthetisches.

§ 1.

Allgemeines.

Es seien

$$(1)\qquad '\overset{z}{x} = \overset{z}{f}(\overset{y}{x}, \overset{\nu}{\xi}) \qquad (y, z = 1, \ldots, n;\ \alpha, \ldots, \omega = a_1, \ldots, a_r)$$

die Gleichungen einer kontinuierlichen Transformationsgruppe in n Variablen mit r wesentlichen Parametern. Die ξ lassen sich als Koordinaten einer X_r auffassen. Wir betrachten im folgenden nur den *Gruppenkeim*, d. i. eine Umgebung der identischen Transformationen $\underset{0}{\xi}$, so klein, daß in ihr die $\overset{z}{f}$ regulär sind und eine eindeutige Korrespondenz zwischen den Punkten der X_r und den Transformationen der Gruppe besteht. Wo also von X_r gesprochen wird, ist nur der Teil von X_r gemeint, der mit dem Gruppenkeim korrespondiert.

Transformationen sollen mit großen Buchstaben angegeben werden, z. B. S, T, U, die Identität insbesondere mit I. Sollen die Parameter mit angedeutet werden, so schreiben wir T_ξ für die Transformation mit den Parametern ξ. Unter T^{-1} verstehen wir die Umkehrung von T, unter $T_\eta T_\xi$ die Transformation, die entsteht, indem *zuerst* T_ξ und *dann* T_η wirkt. Dabei gehen die x vermöge T_ξ über in x', und T_η ist also auf die x' anzuwenden:

$$(2)\qquad T_\eta T_\xi: \qquad \overset{z}{x}'' = \overset{z}{f}(x', \eta) = \overset{z}{f}\{\overset{z}{f}(x, \xi), \eta\}.$$

Aus (1) folgt, daß man dieselbe Transformation erhält, wenn *zuerst* T_η auf die x wirkt und *dann* T_ξ auf die x in $\overset{z}{f}(x, \eta)$ angewandt wird.

§ 2.

Die Äquipollenzen[1]).

Zwei geordnete Punktepaare (S, T) und (A, B) in X_r sollen $(+)$-*äquipollent* bzw. $(-)$-*äquipollent* heißen, wenn

$$(3)\qquad TS^{-1} = BA^{-1} \text{ bzw. } S^{-1}T = A^{-1}B.$$

Die Äquipollenzen haben u. a. folgende unmittelbar aus der Definition folgenden Eigenschaften[2]):

---

[1]) E. Cartan und J. A. Schouten, On the geometry of the group-manifold of simple and semi-simple groups, Proc. Kon. Akad. v. W. **29** (1926), S. 803–815, hier weiter angedeutet mit C & S I.

[2]) Eine vollständige Aufzählung findet man bei Cartan, La géométrie des groupes de transformations, Journal de Math. p. et. a. **6** (1927), S. 1–119, hier weiter angedeutet mit C. G.

1. S, T und A bestimmen B eindeutig; S, T und B bestimmen A eindeutig.

2. Transitivität: aus (S, T) $(\pm)$-äquipollent (A, B) $(\pm)$-äquipollent (U, V) folgt (S, T) $(\pm)$-äquipollent (U, V).

3. Aus (S, T) $(\pm)$-äquipollent (A, B); (T, U) $(\pm)$-äquipollent (B, C) folgt (S, U) $(\pm)$-äquipollent (A, C).

4. Wenn von vier Punkten A, B, C, D die Paare (A, B) und (C, D) $(\pm)$-äquipollent sind, so sind die Paare (A, C) und (B, D) $(\mp)$-äquipollent.

Aus 1. folgt: Zu jedem Punkte S gibt es eine endliche Umgebung, die durch die $(\pm)$-Äquipollenz eineindeutig auf eine Umgebung jedes anderen Punktes T abgebildet wird. Läßt man T mit der identischen Transformation zusammenfallen, so folgt überdies, daß die $(\pm)$-Äquipollenz jedem geordneten Punktepaar in eineindeutiger Weise eine Transformation zuordnet. Jedes gerichtete Linienelement $(T_\xi, T_{\xi+d\xi})$ wird vermittels der $(\pm)$-Äquipollenz abgebildet auf eine *infinitesimale* Transformation:

$$(4) \qquad \begin{cases} T_{\xi+d\xi}\, T_\xi^{-1} = \underset{0}{T}_{\xi+\delta_1\xi}\, \underset{0}{T}_\xi^{-1} = \underset{0}{\overline{T}}_{\xi+\delta_1\xi}, \\ T_\xi^{-1}\, T_{\xi+d\xi} = \underset{0}{T}_\xi^{-1}\, \underset{0}{T}_{\xi+\delta_2\xi} = T_{\xi+\delta_2\xi}. \end{cases}$$

Im allgemeinen ist $\delta_1 \xi \neq \delta_2 \xi$.

Aus 2. folgt: Die solcherweise zustande kommenden zwei Abbildungen der Umgebungen der Punkte von X_r aufeinander sind eine jede unabhängig von der Wahl von S.

Aus 3. folgt: Die unendlich kleinen Umgebungen erster Ordnung werden durch jede der beiden Äquipollenzen *affin* aufeinander abgebildet. Die X_r trägt also *zwei* im allgemeinen verschiedene euklidische (d. h. integrabele) *lineare Übertragungen*, die $(+)$- und die $(-)$-Übertragung. Der Begriff der $(\pm)$-Äquipollenz überträgt sich so auf *Vektoren*. Ein Feld, das bei der $(\pm)$-Übertragung invariant ist, soll $(\pm)$-*konstant* heißen. Vermöge der $(\pm)$-Äquipollenz zugeordnete Richtungen heißen $(\pm)$-parallel. Die nähere analytische Bestimmung erfolgt später aus den Fundamentaltheoremen.

Eine Kurve heißt *geodätisch in* X_r, wenn sie zu je drei Punkten S, T und U stets auch $TS^{-1}U$ enthält. Daraus folgt, daß eine geodätische Linie entsteht, indem ein Linienelement stets entweder $(+)$- oder auch $(-)$-parallel in der eigenen Richtung verschoben wird. Eine geodätische Linie ist also in sich sowohl $(+)$- als $(-)$-parallel, aber zwei geodätische Linien, die $(\pm)$-parallel sind, sind im allgemeinen nicht $(\mp)$-parallel. Aus 1. folgt, daß durch zwei Punkte nur eine geodätische Linie geht; dies liegt natürlich daran, daß wir uns ausdrücklich auf den Gruppenkeim beschränken.

§ 3.

Die Parametergruppen und die adjungierte Gruppe.

Ist T eine allgemeine Transformation der Gruppe und durchläuft U sämtliche Transformationen der Gruppe, so stellt bekanntlich

$$'T = U T \quad \text{bzw.} \quad 'T = T U \tag{5}$$

eine r-gliedrige Gruppe von Transformationen der Punkte der X_r dar, die *erste* bzw. *zweite Parametergruppe.* Aus der Definition der Äquipollenz folgt[3]):

1. Ein Punktepaar geht vermöge einer Transformation der ersten bzw. zweiten Parametergruppe über in ein $(-)$- bzw. $(+)$-äquipollentes Punktepaar.

2. $(+)$- und $(-)$-Äquipollenz bleiben bei beiden Gruppen erhalten.

3. Die Punktepaare (T, T') sind alle $(+)$- bzw. $(-)$-äquipollent.

Die beiden Parametergruppen sind unter sich und mit der gegebenen Gruppe *holoedrisch isomorph*; zugeordnet sind U, $'T = U\,T$ und $'T = T\,U^{-1}$.

Zur geometrischen Deutung der Parametergruppen bemerken wir, daß die Gleichung (1) zwei Deutungen zuläßt:

1. Als *Punkttransformation* der X_n, wobei der *Punkt* mit den Koordinaten x *übergeht* in den Punkt mit den Koordinaten $'x$ in bezug auf *dasselbe* Koordinatensystem.

2. Als *Koordinatentransformation,* wobei der *Punkt fest bleibt,* aber in bezug auf das *neue* Koordinatensystem die Koordinaten $'x$ bekommt.

Es sei nun das Koordinatensystem $\overset{z}{x}$, wie üblich, durch n Systeme von ∞^1 $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, von denen einer jeden eine Zahl zugeordnet ist, veranschaulicht. Ein solches veranschaulichtes Koordinatensystem wollen wir das „Gitter der x" nennen und mit Σ_0[4]) bezeichnen. Dieses Gitter hat also nichts mit dem aus lauter Punkten bestehenden Gitter der Zahlentheorie zu tun.

Das „Gitter der $'x$", d. i. das Gitter, in bezug auf welches dieselben festgebliebenen Punkte die Koordinaten $'x$ haben, wollen wir Σ_ξ nennen. Es entsteht, indem auf Σ_0 die Punkttransformation T_ξ^{-1} angewandt wird. Wir schreiben dies

$$\Sigma_\xi = \Sigma_0\, T_\xi^{-1}. \tag{6}$$

---

[3]) C & S I, S. 812.

[4]) E. Cartan verwendet C. G., S. 19 fur Σ_0 eine beliebige Figur, die so gewählt ist, daß eine eineindeutige Korrespondenz zwischen den transformierten Figuren und den Transformationen besteht. Bei ihm entsteht Σ_ξ durch T_ξ, nicht durch T_ξ^{-1}. Die hier verwendete Methode bietet den Vorteil, daß keine neuen Figuren eingefuhrt zu werden brauchen, da man mit den doch einmal vorhandenen Koordinatensystemen auskommt, und *daß $'x = T_\xi x$ gerade die Koordinaten in bezug auf Σ_ξ werden.*

Änderung des Gitters vermöge T_ξ^{-1} ist also gleichbedeutend mit Änderung der Koordinaten vermöge T_ξ.

Die Gruppenmannigfaltigkeit ist jetzt eineindeutig abgebildet auf die Gesamtheit aller Gitter Σ und es entspricht dabei Σ_ξ der Transformation T_ξ.

Sei jetzt $\bar{x} = Tx$ eine beliebige Transformation der x, so kann man sich die Frage stellen, wie diese Punkttransformation geschrieben wird in bezug auf das Gitter Σ_ξ. In bezug auf dieses Gitter sind die Koordinaten vor und nach der Transformation $'x = T_\xi x$ bzw. $'\bar{x} = T_\xi \bar{x}$, und es ist also

$$(7) \qquad '\bar{x} = T_\xi \bar{x} = T_\xi T x = T_\xi T T_\xi^{-1}\, 'x.$$

Es ist also dasselbe, ob T ausgeführt wird auf die x oder $T_\xi T T_\xi^{-1}$ auf die $'x = T_\xi x$. Da auch $T_\xi T T_\xi^{-1}$ eine Transformation der Gruppe ist, werden die Transformationen der Gruppe beim Übergang von Σ_0 zu Σ_ξ vertauscht. Läßt man Σ_ξ nacheinander alle möglichen Stellungen einnehmen, so bilden diese Vertauschungen bekanntlich eine Gruppe, die *adjungierte* Gruppe. Da in der X_r jede Transformation mit einem Gitter korrespondiert, ist die adjungierte Gruppe eine Gruppe von Vertauschungen dieser Gitter. Die mit T_ξ korrespondierende Transformation führt dabei das zu T gehörige Bezugssystem $\Sigma = \Sigma_0 T^{-1}$ über in $\Sigma_0 T_\xi T^{-1} T_\xi^{-1}$.

Betrachten wir zwei Gitter Σ_ξ und Σ_η mit den zugehörigen Koordinaten $'x$ und $''x$. Dann geht Σ_ξ über in Σ_η durch die Transformation $T_\eta^{-1} T_\xi$ angewandt auf die x, und dies ist, wie wir sahen, gleichwertig mit $T_\xi T_\eta^{-1}$ wirkend auf die $'x$. $T_\eta^{-1} T_\xi$ gibt also die „absolute“ gegenseitige Lage von Σ_ξ und Σ_η an, d. h. die Lage in bezug auf Σ_0, $T_\xi T_\eta^{-1}$ dagegen die „relative“ gegenseitige Lage, d. h. die Lage in bezug auf Σ_ξ. Die gegenseitige Lage in bezug auf Σ_η ist gegeben durch $T_\eta T_\xi^{-1} = (T_\xi T_\eta^{-1})^{-1}$, und es entsteht dabei also nichts wesentlich Neues. Aus der Definition der $(+)$-Äquipollenz folgt also, daß zwei Gitterpaare $(\Sigma_\xi, \Sigma_\eta)$ und $(\Sigma_{'\xi}, \Sigma_{'\eta})$ $(+)$-äquipollent sind, wenn sie gleiche *relative* gegenseitige Lage haben, d. h. wenn es eine Transformation der Gruppe gibt, die auf die Koordinaten von Σ_ξ angewandt, Σ_ξ überführt in Σ_η, und ebenso auf die Koordinaten von $\Sigma_{'\xi}$ angewandt, $\Sigma_{'\xi}$ überführt in $\Sigma_{'\eta}$. Ebenso folgt aus der Definition der $(-)$-Äquipollenz, daß die zwei Gitterpaare $(-)$-äquipollent sind, wenn sie gleiche *absolute* gegenseitige Lage haben, d. h. wenn es eine Transformation der Gruppe gibt, die, auf die zu Σ_0 gehörigen Koordinaten angewandt, gleichzeitig Σ_ξ in Σ_η und $\Sigma_{'\xi}$ in $\Sigma_{'\eta}$ überführt. Unmittelbar evident ist jetzt, daß die Gitterpaare $(\Sigma_\xi, \Sigma_{'\xi})$ und $(\Sigma_\eta, \Sigma_{'\eta})$ $(\pm)$-äquipollent sind, wenn die Paare $(\Sigma_\xi, \Sigma_\eta)$ und $(\Sigma_{'\xi}, \Sigma_{'\eta})$ $(\mp)$-äquipollent sind.

Bei einer Transformation der *ersten* Parametergruppe $'T = UT$ geht Σ_ξ über in das Gitter, das aus Σ_0 entsteht durch $T_\xi^{-1} U^{-1}$ auf x wirkend, also aus Σ_ξ durch $T_\xi^{-1} U^{-1} T_\xi$ auf x wirkend oder U^{-1} auf $'x$ wirkend. Jedes

Gitter erfährt dabei also in den Koordinaten dieses Gitters selbst die Transformation U^{-1}, alle Gitter erleiden demnach, auf sich selbst bezogen, die gleiche Änderung. Dagegen ändert sich die *absolute* gegenseitige Lage zweier Gitter Σ_ξ und Σ_η nicht, da $T_\eta^{-1} T_\xi$ invariant ist.

Bei einer Transformation der *zweiten* Parametergruppe $'T = TU$ geht Σ_ξ über in das Gitter, das aus Σ_ξ entsteht, wenn U^{-1} auf x wirkt. Daß sich dabei die *relative* gegenseitige Lage zweier Gitter Σ_ξ und Σ_η nicht ändern kann, ist selbstverständlich, folgt aber übrigens auch noch aus der Invarianz von $T_\xi T_\eta^{-1}$.

Wählen wir als Beispiel die sechsgliedrige Gruppe der Bewegungen in R_3. Ein beliebiges rechtwinkliges Koordinatengitter werde mit Σ_0 bezeichnet, Σ_ξ entsteht aus Σ_0 vermöge T_ξ^{-1}. $(\Sigma_\xi, \Sigma_\eta)$ und $(\Sigma_{'\xi}, \Sigma_{'\eta})$ sind $(-)$-äquipollent, wenn es eine Schraubung in R_3 gibt, die gleichzeitig Σ_ξ in $\Sigma_{'\xi}$ und Σ_η in $\Sigma_{'\eta}$ überführt, sie sind $(+)$-äquipollent, wenn $\Sigma_{'\eta}$ aus $\Sigma_{'\xi}$ entstehen kann durch eine Schraubung, die in bezug auf $\Sigma_{'\xi}$ dieselbe Stellung im Raume hat wie eine Σ_ξ in Σ_η überführende Schraubung in bezug auf Σ_ξ. Die geodätische Linie, die die Punkte ξ und η verbindet, bildet alle Gitter ab, die aus Σ_ξ entstehen durch fortgesetzte Ausübung einer infinitesimalen Schraubung, die so gewählt ist, daß schließlich Σ_η entsteht.

Durch die Äquipollenzen werden Segmente einer und derselben geodätischen Linie der Länge nach vergleichbar. Man kann diesen Umstand verwenden zur Definition der „Spiegelung“. T_ξ soll das Spiegelbild von $T_{'\xi}$ in bezug auf T_η heißen, wenn $T_\xi^{-1} T_\eta = T_\eta^{-1} T_{'\xi}$. Aus der Definition der Äquipollenzen folgt unmittelbar, daß bei einer Spiegelung die $(\pm)$-Äquipollenz übergeht in die $(\mp)$-Äquipollenz. Ein Punktepaar und sein Spiegelbild sind aber im allgemeinen weder $(+)$- noch $(-)$-äquipollent. Einen besonderen Fall bildet die Spiegelung an $\underset{0}{\xi}$, wobei T_ξ übergeht in T_ξ^{-1}. Wir machen im nächsten Abschnitt gerade von dieser Spiegelung Gebrauch, um von den Eigenschaften der $(+)$-Äquipollenz zu denen der $(-)$-Äquipollenz zu gelangen.

II. Geometrie des Gruppenkeimes.

§ 1.

Die drei Fundamentaltheoreme.

Die drei klassischen Fundamentaltheoreme der Theorie der kontinuierlichen Gruppen lauten:

I. Bilden die Transformationen

$$'\overset{z}{x} = \overset{z}{f}(\overset{y}{x}, \overset{\nu}{\xi}) \qquad (y, z = 1, \ldots, n;\ \ \nu = a_1, \ldots, a_n) \tag{8}$$

in n Variablen $\overset{z}{x}$ $(z = 1, \ldots, n)$ *und* r *wesentlichen Parametern* $\overset{\nu}{\xi}$ $(\nu = a_1, \ldots, a_r)$ *eine Gruppe, so existieren* r^2 *Funktionen* $A_\lambda^i(\xi)$ *der* ξ $(i = 1, \ldots, r)$, *deren Determinante* $|A_\lambda^i| \neq 0$ *ist, und* nr *Funktionen* $\xi_i^z(x)$ *der* x $(z = 1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, r)$, *die keiner Gleichung der Form*

$$c^i \xi_i^z = 0 \tag{9}$$

mit ***konstanten*** c^i *genügen, so daß*

$$\boxed{\partial_\lambda{}'x^z = \xi_j^z('x)\, A_\lambda^j(\xi)}\,. \tag{10}$$

Ist umgekehrt eine Schar von Transformationen (8) *mit* r *wesentlichen Parametern gegeben, die die identische Transformation* $\xi = \underset{0}{\xi}$ *enthält und einem System von Gleichungen der Form* (10) *genügt, wo* $|A_\lambda^z(\underset{0}{\xi})| \neq 0$, *so ist die Schar eine Gruppe.*

II. *Sind* X_i *die Symbole von* r *unabhängigen infinitesimalen Transformationen der Gruppe:*

$$X_i = \xi_i^y(\xi)\, \frac{\partial}{\partial x^y}\,, \tag{11}$$

so gelten für die Klammersymbole $(X_i X_j) = X_i X_j - X_j X_i$ *die Gleichungen*

$$\boxed{(X_i X_j) = c_{ij}^{\cdot\cdot k} X_k}\,, \tag{12}$$

wo die $c_{ij}^{\cdot\cdot k}$ ***Konstanten*** *sind, die der Gleichung* $c_{(ij)}^{\cdot\cdot k} = 0$ *genügen. Sind umgekehrt* X_i *die Symbole von* r *unabhängigen infinitesimalen Transformationen, die den Gleichungen* (12) *genügen, so bilden die Transformationen der durch die* ∞^{r-1} *infinitesimalen Transformationen* $e^i X_i$ *erzeugten eingliedrigen Gruppen eine* r*-gliedrige Gruppe.*

III. *Die Konstanten* $c_{ij}^{\cdot\cdot k}$ *genügen den Gleichungen*

$$\boxed{c_{[ij}^{\cdot\cdot l}\, c_{k]l}^{\cdot\cdot m} = 0}\,. \tag{13}$$

Gibt es umgekehrt r^3 *Konstanten* $c_{ij}^{\cdot\cdot k}$, *die den Gleichungen* $c_{(ij)}^{\cdot\cdot k} = 0$ *und* (13) *genügen, so gibt es stets eine* r*-gliedrige Gruppe, in der man* r *infinitesimale Transformationen so wählen kann, daß* (12) *gilt.*

§ 2.

Die (+)- bzw. (—)-Äquipollenz der Systeme $\binom{k}{i}$ und $\binom{K}{I}$.

Schreiben wir (10) in der Form

$$d'x^z = \xi_j^z('x)\, A_\lambda^j(\xi)\, d\xi^\lambda\,, \tag{14}$$

so stellt diese Gleichung die unendlich kleine auf $'x$ angewandte Transformation dar, die nach T_ξ auf x angewandt äquivalent ist mit $T_{\xi+d\xi}$ auf x angewandt, d. i. also $T_{\xi+d\xi}\,T_\xi^{-1}$. Nun ist $|A_\lambda^k| \neq 0$, und die

$$(15) \qquad (d\xi)^k = A_\lambda^k(\xi)\, d\xi^\lambda \text{ [5]}$$

sind also Bestimmungszahlen des Linienelementes der X_r in bezug auf ein System $\binom{k}{i}$ von Maßvektoren $\underset{i}{e}$, $\overset{k}{e}$, für deren Bestimmungszahlen in bezug auf das zu den Urvariablen $\overset{\nu}{\xi}$ gehörige System $\binom{\nu}{\lambda}$ folgende skalare Gleichungen gelten:

$$(16) \qquad \overset{k}{e}_\lambda \overset{*}{=} A_\lambda^k;\ \underset{i}{e}^\nu \overset{*}{=} A_i^\nu;\ A_i^a A_a^k \overset{*}{=} \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases} \text{ [5a]}$$

Die A_λ^k sowie die A_i^ν sind Bestimmungszahlen des Einheitsaffinors in bezug auf diese beiden Systeme. Für die Transformation $T_{\xi+d\xi}\,T_\xi^{-1}$, angewandt auf x, können wir jetzt schreiben:

$$(17) \qquad dx^z = \underset{j}{\xi}^z(x)\,(d\xi)^j.$$

Sind jetzt η^k beliebige andere Werte der Parameter und werden die $d\eta^k$ so gewählt, daß

$$(18) \qquad T_{\eta+d\eta}\,T_\eta^{-1} = T_{\xi+d\xi}\,T_\xi^{-1},$$

d. h. daß die beiden Strecken T_η, $T_{\eta+d\eta}$ und T_ξ, $T_{\xi+d\xi}$ $(+)$-äquipollent sind, so folgt aus (17)

$$(19) \qquad (d\xi)^k = (d\eta)^k.$$

$(+)$-äquipollente Strecken haben also in bezug auf das $\binom{k}{i}$-System dieselben Bestimmungszahlen, mit anderen Worten: *das aus dem ersten Teil des ersten Fundamentalsatzes hervorgehende* $\binom{k}{i}$*-System ist in je zwei Punkten* $(+)$*-äquipollent* [6] [7].

---

[5]) Wir schreiben $(d\xi)^k$ statt $d\xi^k$, da die ξ^k für sich im allgemeinen keinen Sinn haben.

[5a]) Wir verwenden das Zeichen $\overset{*}{=}$, um anzudeuten, daß die Ausdrucke links und rechts sich nicht stets in derselben Weise transformieren. Eine Gleichung mit $\overset{*}{=}$ bleibt also nicht bei allen Transformationen richtig und darf z. B. nicht kovariant differenziert werden.

[6]) C & S I, S. 805.

[7]) Es sei kurz daran erinnert, wie sich die $\underset{i}{\xi}^z$ und die A_λ^z aus den Gleichungen der Gruppe berechnen lassen. In den Gleichungen

$$'\overset{z}{x} = \overset{z}{f}(x, \xi),$$

$$''\overset{z}{x} = \overset{z}{f}('x, \eta) = \overset{z}{f}(x, \varphi)$$

(Fortsetzung der Fußnote [7]) auf nachster Seite.)

Da auch die Umkehrung von (8)

$$\overset{z}{x} = \overset{z}{F}('\overset{y}{x}, \overset{\nu}{\xi}) \tag{20}$$

eine Gruppe darstellt, gilt als Gegenstück zu (14)

$$dx^z = \Xi^z_J(x)\, A^J_\lambda(\xi)\, d\xi^\lambda \qquad (J = \bar{1}, \ldots, \bar{r}), \tag{21}$$

die Gleichung der infinitesimalen Transformation $T^{-1}_{\xi + d\xi} T_\xi$ in den x. Da $|A^K_\lambda| \neq 0$ ist, sind die

$$(d\xi)^K = A^K_\lambda(\xi)\, d\xi^\lambda \tag{22}$$

Bestimmungszahlen des Linienelementes der X_r in bezug auf ein System $\binom{K}{J}$ von Maßvektoren $\underset{J}{e}$, $\overset{K}{e}$, für deren Bestimmungszahlen die skalaren Gleichungen

$$\overset{K}{e}_\lambda \overset{*}{=} A^k_\lambda; \quad \underset{I}{e}^\nu \overset{*}{=} A^\nu_I; \quad A^\alpha_I A^K_\alpha \overset{*}{=} \begin{cases} 1, & I = K, \\ 0, & I \neq K \end{cases} \tag{23}$$

gelten. Wie oben wird gezeigt, daß das System $\binom{K}{I}$ *in je zwei Punkten* $(-)$*-äquipollent ist.* Den synthetischen Betrachtungen im ersten Abschnitt zufolge ist dies übrigens unmittelbar evident, da ja bei Spiegelung an $\underset{0}{\xi}$ $(+)$- und $(-)$-Äquipollenz vertauscht werden.

Zusammenfassend lesen wir jetzt die Hauptgleichung (14) des ersten Fundamentalsatzes sowie (21) folgendermaßen:

Jedem System von $(+)$- bzw. $(-)$-äquipollenten infinitesimalen Strecken der X_r ist in eineindeutiger Weise eine infinitesimale Transformation zugeordnet, eben die Transformation, die mit dem Endpunkte der in $\underset{0}{\xi}$ anfangenden Strecke korrespondiert.

Die erste der beiden Zuordnungen tritt am schärfsten hervor, wenn wir wie üblich setzen:

$$\xi^y_i(x) \frac{\partial f}{\partial x^y} = X_i f, \tag{24}$$

$$A^k_\lambda d\xi^\lambda = (d\xi)^k = e^k dt; \tag{25}$$

---

betrachtet man x, ξ und φ als unabhangige Variable und differenziert nach den ξ. Dann läßt sich $\partial_\lambda 'x^k$ lösen in der Form

$$\partial_\lambda 'x^z = \Phi^z_j('x, \eta)\, \Psi^j_\lambda(\xi, \eta).$$

Erteilt man in dieser Gleichung den η beliebige, aber feste Werte, so entsteht eine Gleichung der Form (10). Die ξ^k_i und die A^k_λ und somit auch das System $\binom{k}{i}$ lassen sich also rein durch Differentiationen und Eliminationen aus den Gleichungen der Gruppen bestimmen. Verschiedene Wertsysteme der η fuhren zu verschiedenen Systemen $\binom{k}{i}$.

e^k ist sodann ein $(+)$-konstantes kontravariantes Vektorfeld und $e^k X_k$ das Symbol der zu e^k gehörigen infinitesimalen Transformation:

$$df = e^j X_j \mathring{f} dt. \tag{26}$$

Jede infinitesimale Transformation setzt sich linear mit konstanten Koeffizienten aus den X_j zusammen, und die X_j transformieren sich bei linearen Transformationen des Systems $\binom{k}{i}$ wie die Bestimmungszahlen eines kovarianten Vektors.

Die Größen A_i^ν und A_I^ν stehen in enger Beziehung zu den beiden Parametergruppen. Setzen wir

$$A_i^\mu \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} = A_i; \qquad A_I^\mu \frac{\partial}{\partial \xi^\mu} = A_I, \tag{27}$$

so ist A_i das Symbol einer infinitesimalen Transformation in den ξ, die auf ξ^ν angewandt liefert

$$d\xi^\nu = A_i \xi^\nu dt = \underset{i}{e}^\nu dt \tag{28}$$

und also eine Verschiebung darstellt über die in je zwei Punkten $(+)$-äquipollente Strecke $\underset{i}{e}^\nu dt$. Ist U die zu diesem Streckenfeld gehörige infinitesimale Transformation in x, so stellt die Gleichung $'T = UT$ also gerade die infinitesimale Transformation A_i dar. A_i bzw. A_I ist also *Symbol einer infinitesimalen Transformation der ersten bzw. zweiten Parametergruppe* (vgl. S. 247).

§ 3.

Die Größen C und $\overline{C}$ und ihre geometrische Bedeutung.

Sind $\bar{\xi}$ die Parameter der Umkehrung von T_ξ:

$$x^z = \overset{z}{F}('x, \xi) = \overset{z}{f}('x, \bar{\xi}), \tag{29}$$

so ist

$$T^{-1}_{\xi+d\xi} T_\xi = T_{\bar{\xi}+d\bar{\xi}} T_{\bar{\xi}}^{-1}, \tag{30}$$

so daß (21) äquivalent ist mit

$$dx^z = \xi_j^z(x) A_\lambda^j(\bar{\xi}) d\bar{\xi}^\lambda. \tag{31}$$

Für $\xi = \underset{0}{\xi}$ ist aber $d\bar{\xi}^\lambda = -d\xi^\lambda$, und aus (21) und (31) folgt also

$$\Xi_I^z(x) = -\xi_j^z(x) A_I^j(\underset{0}{\xi}). \tag{32}$$

Wir wollen nun die $\binom{K}{I}$-Systeme so wählen, daß in $\underset{0}{\xi}$ das $\binom{K}{I}$-System sich mit dem $\binom{k}{i}$-System deckt. Dann gelten die skalaren Gleichungen

$$A_I^k(\xi_0) \overset{*}{=} \begin{cases} 1, & I = \bar{k}, \\ 0, & I \neq k, \end{cases} \tag{33}$$

und es wird $\Xi_I^z = -\xi_i^z$ für $I = \bar{i}$. Ist also $\bar{C}$ eine Größe, deren $\binom{k}{I}$-Bestimmungszahlen in *allen* Punkten gleich $A_I^k(\underset{0}{\xi})$ sind, und C ihre Umkehrung, so daß die skalaren Gleichungen gelten

$$\bar{C}_I^{\cdot k} \overset{*}{=} \begin{cases} 1, & I = \bar{k} \\ 0, & I \neq \bar{k} \end{cases}; \qquad C_i^{\cdot K} \overset{*}{=} \begin{cases} 1, & K = \bar{i} \\ 0, & K \neq \bar{i} \end{cases}, \tag{34}$$

so geht (32) über in

$$\boxed{\Xi_I^z(x) = -\bar{C}_I^{\cdot j} \xi_j^z(x)}\,. \tag{35}$$

Da infolge (34) z. B. $C_j^{\cdot K} v^j$ einen Vektor darstellt, der in bezug auf $\binom{K}{I}$ dieselben Bestimmungszahlen hat wie v in bezug auf $\binom{k}{i}$, ist die geometrische Bedeutung von C und $\bar{C}$ klar, in jedem Punkte der X_r bewirken das lokale C und $\bar{C}$ die linearen Transformationen, die die Systeme $\binom{k}{i}$ und $\binom{K}{I}$ ineinander überführen.

Die Größen C und $\bar{C}$ stehen, wie wir zeigen wollen, in enger Beziehung zur adjungierten Gruppe. Die infinitesimale Transformation $T_{\xi+d\xi} T_\xi^{-1}$, angewandt auf die $'x$, ist gegeben durch (14). Ferner ist $T_{\xi+d\xi}^{-1} T_\xi$, angewandt auf die x, gegeben durch (21), und die Umkehrung $T_\xi^{-1} T_{\xi+d\xi}$, ebenfalls angewandt auf die x, läßt sich also unter Berücksichtigung von (35) schreiben:

$$dx^z = \xi_j^z(x)\, \bar{C}_J^{\cdot j} A_\lambda^J(\xi)\, d\xi^\lambda. \tag{36}$$

Nun ist aber, wie wir auf S. 248 sahen, $T_\xi^{-1} T_{\xi+d\xi}$, angewandt auf die x, äquivalent mit $T_{\xi+d\xi}^{-1} T_\xi$, angewandt auf die $'x$. Ist also f eine Funktion der x und somit auch der $'x$, so ist bei dieser Transformation

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^z} \xi_j^z(x)\, \bar{C}_J^{\cdot j} A_\lambda^J\, d\xi^\lambda = \frac{\partial f}{\partial 'x^z} \xi_i^z('x)\, A_\lambda^i\, d\xi^\lambda, \tag{37}$$

woraus folgt

$$\xi_i^k('x) \frac{\partial}{\partial 'x^k} = \bar{C}_i^{\cdot j}\; \xi_j^k(x) \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{38}$$

oder abgekürzt

$$'X_i = \bar{C}_i^{\cdot j}(\xi)\, X_j. \tag{39}$$

Ist nun $e^i X_i$ eine gegebene infinitesimale Transformation in x, und $e^{i\prime} X_i'$ dieselbe Transformation in $'x$ geschrieben, so daß also

$$(40) \qquad e^i X_i f = {}'e^{i\prime} X_i f,$$

so folgt aus (39)

$$(41) \qquad {}'e^k = C_j^{\cdot k}(\xi)\, e^j$$

oder

$$(42) \qquad {}'e^K(\xi) = C_j^{\cdot K} e^j.$$

Aus dieser letzten Gleichung folgt, daß $'e^k$ das $(+)$-konstante Vektorfeld ist, dessen $\binom{K}{I}$-Bestimmungszahlen im Punkte ξ den $\binom{k}{i}$-Bestimmungszahlen von e^k gleich sind. Mit anderen Worten:

e^k sei ein $(+)$-konstantes Vektorfeld. Um die infinitesimale Transformation in $'x = T_\xi x$ zu finden, die der zu $e^k dt$ gehörigen infinitesimalen Transformation in x gleichwertig ist, hat man den Vektor e^k in $\underset{0}{\xi}$ $(-)$-äquipollent nach ξ zu verschieben und aus dem so erhaltenen Vektor $'e^k$ ein $(+)$-konstantes Feld zu bilden.

In der Tat, ist T die zu $e^k dt$ gehörige infinitesimale Transformation, so geht die zu $e^k dt$ in $\underset{0}{\xi}$ gehörige Strecke (I, S) bei $(-)$-äquipollenter Verschiebung über in $(T_\xi, T_\xi T)$, und wenn man diese Strecke $(+)$-äquipollent zurück verschiebt, so entsteht $(I, T_\xi T T_\xi^{-1})$.

$T_\xi T T_\xi^{-1}$ ist eine Transformation der adjungierten Gruppe. Bei dieser Gruppe transformieren sich also die infinitesimalen Transformationen linear, und es gilt der Satz:

In ihrer Wirkung auf die infinitesimalen Transformationen ist die adjungierte Gruppe die Gruppe aller durch die Größen $C_i^{\cdot k}$ in den verschiedenen Punkten von X_r vermittelten Transformationen. Mit T_ξ korrespondiert die durch $C_i^{\cdot k}$ im Punkte ξ vermittelte Transformation, die das lokale $\binom{k}{i}$-System in das $\binom{K}{I}$-System überführt.

§ 4.

Die Größe c und die drei Übertragungen.

Aus der Transformation der X_i bei Änderung des $\binom{k}{i}$-Systems folgt, daß die im zweiten Fundamentalsatz auftretenden Koeffizienten $c_{ij}^{\cdot\cdot k}$ die $\binom{k}{i}$-Bestimmungszahlen einer Größe dritten Grades sind. Da sie konstant sind, ist diese Größe $(+)$-konstant. Geht man von der Umkehrung (20) aus, so folgen die Gleichungen

$$\Xi_I^z \frac{\partial}{\partial x^z} \Xi_J^y - \Xi_J^z \frac{\partial}{\partial x^z} \Xi_I^y = \bar{c}_{IJ}{}^K \Xi_K^y, \tag{43}$$

wo die $\bar{c}_{IJ}{}^K$ konstant sind. Neben c existiert also noch eine $(-)$-konstante Größe $\bar{c}$ mit den $\binom{K}{I}$-Bestimmungszahlen $\bar{c}_{IJ}{}^K$. Aus (38) folgt direkt, daß die $\binom{K}{I}$-Bestimmungszahlen von $-\bar{c}$ den korrespondierenden $\binom{k}{i}$-Bestimmungszahlen von c gleich sind. Daß aber c und $-\bar{c}$ *überhaupt identisch* sind, daß es also eine Größe c gibt, die in jedem Punkte der X_r dieselben Bestimmungszahlen in bezug auf $\binom{k}{i}$ und auf $\binom{K}{I}$ hat, welche überdies noch in allen Punkten der X_r dieselben sind, wird das wichtigste Resultat dieses Paragraphen sein.

Bei dem bekannten Beweise des ersten Teiles des zweiten Fundamentalsatzes geht man aus von der Tatsache, daß das System der Gleichungen (10) die Lösungen (8) besitzt, wo die x die Rolle von n beliebigen Integrationskonstanten spielen. Das System (10) ist also *vollständig*, und das gleiche gilt infolge eines bekannten Satzes aus der Theorie der Differentialgleichungen für das *adjungierte* System in $n+r$ Variablen

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\lambda} \Omega(x', \xi) + \frac{\partial}{\partial' x^z} \Omega('x, \xi)\, \xi_i^z('x)\, A_\lambda^i(\xi) = 0, \tag{44}$$

das sich auch in der Form (vgl. (38), (39) und (27))

$$A_i \Omega + X_i' \Omega = 0 \tag{45}$$

schreiben läßt. Die Integrabilitätsbedingungen von (45) lauten dann

$$(X_i' X_j') = c_{ij}^{\cdot\cdot\, k} X_k', \tag{46}$$

$$(A_i A_j) = c_{ij}^{\cdot\cdot\, k} A_k, \tag{47}$$

wo die $c_{ij}{}^k$ weder Funktionen der x noch der ξ sein können. Wir erinnern nur an diesen Gedankengang, weil (47) uns unter Berücksichtigung von (27) unmittelbar die $c_{ij}^{\cdot\cdot\, k}$ liefert, ausgedrückt in den schon auf S. 251 berechneten A_i^ν und A_λ^k:

$$\boxed{c_{ij}^{\cdot\cdot\, k} = -2 A_{[i}^\mu A_{j]}^\lambda \partial_\mu A_\lambda^k}. \tag{48}$$

In derselben Weise berechnet man

$$\boxed{\bar{c}_{IJ}^{\cdot\cdot\, K} = -2 A_{[I}^\mu A_{J]}^\lambda \partial_\mu A_\lambda^K}. \tag{49}$$

Wir berechnen nun zunächst die Parameter $\overset{+}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu}$ und $\overset{-}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu}$ der $(+)$- bzw. $(-)$-Übertragung. Da A Einheitsaffinor ist, ist

(50) $$0 = \overset{+}{\nabla}_{\mu} A^{\nu}_{i} = \partial_{\mu} A^{\nu}_{i} + \overset{+}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu} A^{\lambda}_{i},$$

so daß

(51) $$\boxed{\overset{+}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu} = A^{\nu}_{i}\, \partial_{\mu} A^{i}_{\lambda}}$$

und unter Berücksichtigung von (48)

(52) $$\overset{+}{\Gamma}{}^{\nu}_{[\lambda\mu]} = \frac{1}{2} c_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}.$$

In derselben Weise läßt sich zeigen, daß

(53) $$\boxed{\overset{-}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu} = A^{\nu}_{I}\, \partial_{\mu} A^{I}_{\lambda}}$$

und

(54) $$\overset{-}{\Gamma}{}^{\nu}_{[\lambda\mu]} = \frac{1}{2} \bar{c}_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}.$$

Es seien jetzt e^{ν} und s^{ν} zwei beliebige $(+)$-konstante Vektorfelder. Wir wollen den Vektor berechnen, der entsteht, wenn e^{ν} in $\underset{0}{\xi}$ $(-)$-äquipollent verschoben wird über $s^{\nu}dt$. Sind S und T die zu $s^{\nu}dt$ und $e^{\nu}dt$ gehörigen infinitesimalen Transformationen, so korrespondiert der gesuchte Vektor also mit STS^{-1}. Nun ist

(55) $$Sx^{z} = x^{z} + s^{j} X_{j} x^{z} dt + \frac{1}{2} s^{i} s^{j} X_{i} X_{j} x^{z} dt^{2} + \ldots$$

STx^{k} (nicht TSx^{k}! Vgl. die Bemerkung am Schluß des § I 1, S. 245) wird gebildet, indem in diesem Ausdruck T auf x^{k} angewandt wird und $STS^{-1}x^{k}$ entsteht ebenso, indem in dem zuletzt erhaltenen Ausdruck S^{-1} auf x^{k} angewandt wird. Schließlich ergibt sich

(56) $$STS^{-1}x^{z} = x^{z} + e^{j} X_{j} x^{z} dt + \frac{1}{2} e^{i} e^{j} X_{i} X_{j} x^{z} dt^{2} + \\ + e^{i} s^{j} (X_{i} X_{j} - X_{j} X_{i})\, x^{z} dt^{2} + \ldots,$$

und diese infinitesimale Transformation stimmt also bis auf Größen dritter und höherer Ordnung überein mit der zum Vektor

(57) $$e^{k} + e^{i} s^{j} c_{ij}^{\cdot\cdot k}\, dt$$

gehörigen. Der Vektor e^{ν} in $\underset{0}{\xi}$ geht also bei $(-)$-äquipollenter Verschiebung über $s^{\nu}dt$ in $e^{\nu} + e^{\lambda} s^{\mu} c_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} dt$ über. Da derselbe Vektor bei $(+)$-äquipollenter Verschiebung in e^{ν} übergeht, ist

(58) $$0 = \overset{+}{\delta} e^{\nu} = \overset{-}{\delta} e^{\nu} + c_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} e^{\lambda} s^{\mu} dt,$$

woraus folgt, da e^ν und s^ν beliebig gewählt sind,

$$\overset{+}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu} = \overset{-}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu} + c_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} \tag{59}$$

und unter Berücksichtigung von (52) und (54)

$$c_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = -\bar{c}_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = 2\overset{+}{\Gamma}{}^{\nu}_{[\lambda\mu]} = -2\overset{-}{\Gamma}{}^{\nu}_{[\lambda\mu]}. \tag{60}$$

Außerdem ergibt sich, daß zu beiden Übertragungen dieselbe *symmetrische* Übertragung gehört, die wir die 0-Übertragung nennen wollen und deren Parameter mit $\overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu}$ bezeichnet werden mögen:

$$\overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu} = \overset{+}{\Gamma}{}^{\nu}_{(\lambda\mu)} = \overset{-}{\Gamma}{}^{\nu}_{(\lambda\mu)}. \tag{61}$$

Ein bei dieser Übertragung invariantes Feld soll (0)-*konstant* heißen.

Eine unmittelbare Folge der Identität von c und $\bar{c}$ ist, daß c sowohl (+)- als (—)-konstant ist:

$$\boxed{\overset{+}{\nabla}_\omega c_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = \overset{-}{\nabla}_\omega c_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} = 0}. \tag{62}$$

Außerdem folgt aus der Gleichheit der Bestimmungszahlen in bezug auf alle Systeme $\binom{k}{i}$ und $\binom{K}{I}$, *daß die* $\binom{k}{i}$*-Bestimmungszahlen von* c *bei allen Transformationen der adjungierten Gruppe invariant sind.*

Die drei Übertragungen lassen sich natürlich auch in bezug auf die Systeme $\binom{k}{i}$ bzw. $\binom{K}{I}$ festlegen [8]). Nennt man die zugehörigen Parameter λ^k_{ij} bzw. Λ^K_{IJ} mit den oberen Indizes 0, + und —, so berechnet sich leicht

$$\begin{aligned} &\overset{+}{\lambda}{}^k_{ij} = 0 & &\overset{+}{\Lambda}{}^K_{IJ} = c_{IJ}^{\cdot\cdot K} \\ &\overset{0}{\lambda}{}^k_{ij} = -\frac{1}{2} c_{ij}^{\cdot\cdot k} & &\overset{0}{\Lambda}{}^K_{IJ} = \frac{1}{2} c_{IJ}^{\cdot\cdot K} \\ &\overset{-}{\lambda}{}^k_{ij} = -c_{ij}^{\cdot\cdot k} & &\overset{-}{\Lambda}{}^K_{IJ} = 0, \end{aligned} \tag{63}$$

so daß z. B.

$$\begin{aligned} \overset{+}{\delta} v^k &= dv^k \\ \overset{0}{\delta} v^k &= dv^k - \frac{1}{2} c_{ij}^{\cdot\cdot k} v^i (d\xi)^j \\ \overset{-}{\delta} v^k &= dv^k - c_{ij}^{\cdot\cdot k} v^i (d\xi)^j. \end{aligned} \tag{64}$$

---

[8]) Für die Festlegung von Übertragungen mit Hilfe von nichtholonomen Bezugssystemen vergleiche man die Arbeit des Verfassers Über nichtholonome Übertragungen in einer L_n, Math. Zeitschr. **30** (1928), S. 1—24, § 2.

§ 5.

Kanonische Parameter und Reihenentwicklungen.

Die endlichen Transformationen der durch die infinitesimale Transformation $e^i X_i$ erzeugten eingliedrigen Untergruppe lauten bekanntlich

(65) $$'x^z = x^z + \frac{1}{1!} e^i X_i x^z t + \frac{1}{2!} e^i e^j X_i X_j x^z t^2 + \ldots$$

oder, wenn wir $e^i t$ durch ε^i ersetzen,

(66) $$'x^z = x^z + \frac{1}{1!} \varepsilon^i X_i x^z + \frac{1}{2!} \varepsilon^i \varepsilon^j X_i X_j x^z + \ldots.$$

Bei veränderlichen ε stellen diese Gleichungen *sämtliche* Transformationen des Gruppenkeims dar, die ε lassen sich also als neue Parameter, sogenannte *kanonische Parameter*, einführen. *Da im Ricci-Kalkül aber die Art der Indizes das Bezugssystem angibt* und z. B. die v^k nun einmal die Bestimmungszahlen in bezug auf das System $\binom{k}{i}$ sind, muß für die kanonischen Parameter eine neue Art von Indizes eingeführt werden. Wir verwenden *gothische* Indizes und schreiben für das zu den kanonischen Parametern gehörige System $\binom{\mathfrak{k}}{\mathfrak{i}}$, das nur in $\underset{0}{\xi}$ mit dem System $\binom{k}{i}$ zusammenfällt, $\underset{\mathfrak{i}}{e}^{\mathfrak{k}}$, $\overset{\mathfrak{k}}{e}_{\mathfrak{i}}$, $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k} = 1', \ldots, n'$. Nur für die ε selbst und ihre Differentiale soll *neben* $\varepsilon^{\mathfrak{k}}$ und $d\varepsilon^{\mathfrak{k}}$ auch ε^k und $d\varepsilon^k$ zugelassen bleiben, da die Bestimmungszahlen des Linienelements in bezug auf $\binom{k}{i}$ doch $(d\varepsilon)^k$ geschrieben werden und Verwirrung also ausgeschlossen ist.

Da

(67) $$\underset{\mathfrak{i}}{e}^k = \underset{\mathfrak{i}}{e}^{\mathfrak{l}} A^k_{\mathfrak{l}}; \quad \overset{\mathfrak{k}}{e}_i = \overset{\mathfrak{k}}{e}_{\mathfrak{l}} A^{\mathfrak{l}}_i,$$

sind die Systeme $\binom{\mathfrak{k}}{\mathfrak{i}}$ bekannt, wenn es gelingt, die $A^k_{\mathfrak{i}}$ und $A^{\mathfrak{k}}_i$ als Funktionen der ξ zu bestimmen. Dies geschieht am einfachsten mit Hilfe der von F. Schur gegebenen Reihenentwicklungen [9]. Wir verwenden die Gleichung (48) in einer Form, die zuerst von Maurer angegeben wurde,

(68) $$\partial_\mu A^k_\lambda - \partial_\lambda A^k_\mu = c_{\lambda\,\mu}^{\cdot\,\cdot\,k} \text{ [10]}.$$

Die Gleichung

(69) $$\varepsilon^k = e^k t$$

[9]) Math. Ann. **38** (1891), S. 263—286.

[10]) Münch. Ber. **18** (1888), S. 117.

stellt bei konstanten e^k eine Kurve durch $\underset{0}{\xi}$ dar, die das Abbild der durch $e^k\,dt$ erzeugten eingliedrigen Gruppe ist. Differentiation ergibt

$$d\varepsilon^k = e^k\,dt, \tag{70}$$

woraus u. a. hervorgeht, daß die Kurve eine geodätische Linie durch $\underset{0}{\xi}$ ist. Dieser Linie entlang bleibt also nicht nur die $\binom{\mathfrak{k}}{\mathfrak{i}}$-Bestimmungszahl, sondern auch die $\binom{k}{i}$-Bestimmungszahl des Linienelementes konstant:

$$e^{\mathfrak{k}}\,dt = \varepsilon_j^{\;\mathfrak{k}}\,e^j\,dt, \tag{71}$$ [10a]

so daß

$$\varepsilon_j^{\;\mathfrak{i}}\,A_{\mathfrak{i}}^{k}\,e^j\,dt = e^k\,dt; \tag{72}$$

oder

$$A_{\mathfrak{i}}^{k}\,\varepsilon^{\mathfrak{i}} = \varepsilon_{\mathfrak{i}}^{\;k}\,\varepsilon^{\mathfrak{i}}. \tag{73}$$

Differentiation der letzten Gleichung ergibt, unter Berücksichtigung der Maurerschen Gleichung (68), die für beliebige Parameter ξ, also auch für die kanonischen Parameter ε gilt,

$$\boxed{\frac{dA_{\mathfrak{i}}^{k}}{dt} + \frac{1}{t}\left(A_{\mathfrak{i}}^{k} - \varepsilon_{\mathfrak{i}}^{\;k}\right) = -\,E_j^{\cdot k}\,A_{\mathfrak{i}}^{j}}, \tag{74}$$

wo abkürzend gesetzt ist

$$\boxed{E_i^{\cdot k} = -\,c_{ij}^{\cdot\cdot k}\,e^j}. \tag{75}$$

(74) ist der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} + \frac{1}{t}\left(x - \underset{0}{x}\right) = \alpha x \tag{76}$$

mit der Lösung

$$x = \underset{0}{x}\left(1 + \frac{1}{2!}\alpha t + \frac{1}{3!}\alpha^2 t^2 + \ldots\right) = \underset{0}{x}\,\frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha t} \tag{77}$$

analog. Ihre Lösung wird gegeben durch die analoge Reihe

$$A_{\mathfrak{i}}^{k} = \varepsilon_{\mathfrak{i}}^{\;j}\left(A_j^{k} - \frac{1}{2!}E_j^{\cdot k} + \frac{1}{3!}E_j^{\cdot l}\,E_l^{\cdot k}\,t^2 - \ldots\right), \tag{78}$$

deren Konvergenz für den Fall, daß die absoluten Werte der $c_{ij}^{\cdot\cdot k}$ unterhalb einer festen Grenze liegen, bewiesen werden kann. In derselben Weise

[10a]) Das erweiterte Kroneckersche Symbol ε bedeutet 1 oder 0, je nachdem die beiden Indizes ein jeder in seiner eigenen Zeichenreihe korrespondierende Stellen einnehmen oder nicht.

ergibt sich für $A_i^{\mathfrak{k}}$

$$A_i^{\mathfrak{k}} = \varepsilon_j^{\mathfrak{k}}(A_i^j - \lambda_1 E_i^{\cdot j} t + \lambda_2 E_i^{\cdot l} E_l^{\cdot j} t^2 - \ldots) \tag{79}$$
$$\lambda_q = (-1)^q \frac{B_q}{q!},$$

wo die B_q die Bernoullischen Zahlen sind. Abkürzend schreiben wir

$$\boxed{A_{\mathfrak{i}}^k = \varepsilon_{\mathfrak{i}}^j \left(\frac{e^{-Et} - A}{-Et}\right)_j^k; \quad A_i^{\mathfrak{k}} = \varepsilon_j^{\mathfrak{k}} \left(\frac{-Et}{e^{-Et} - A}\right)_i^j}. \tag{80}$$

Für $A_{\mathfrak{i}}^K$ und $A_I^{\mathfrak{k}}$ ergeben sich ähnliche Ausdrücke, die $\bar{E}_J^{\ K} = -\bar{c}_{IJ}^{\ \cdot K} e^I$ enthalten. Da aber infolge der Identität von c und $-\bar{c}$ auch E und $-\bar{E}$ identisch sind, folgt

$$\boxed{A_{\mathfrak{i}}^K = \varepsilon_{\mathfrak{i}}^J \left(\frac{e^{Et} - A}{Et}\right)_J^K; \quad A_I^{\mathfrak{k}} = \varepsilon_J^{\mathfrak{k}} \left(\frac{Et}{e^{Et} - A}\right)_I^J}. \tag{81}$$

Aus (80) und (81) läßt sich eine Reihenentwicklung für $C_i^{\cdot k}$ ableiten

$$\begin{aligned} C_i^{\cdot k} &= C_i^{\cdot J} A_J^k = C_i^{\cdot J} A_{\mathfrak{i}}^k A_J^{\mathfrak{i}} = (e^{-Et})_i^k \\ &= A_i^k - E_i^{\cdot k} t + \frac{1}{2!} E_i^{\cdot j} E_j^{\cdot k} t^2 - \ldots, \end{aligned} \tag{82}$$

die sich auf anderem Wege auch aus den Differentialgleichungen der adjungierten Gruppe ergeben wird.

Um die ξ als Funktionen der ε zu berechnen, schreiben wir (70) in der Form

$$\frac{d\xi^\nu}{dt} = e^\nu = A_i^\nu(\xi)\, e^i \tag{83}$$

und differenzieren fortgesetzt nach t, wobei die e^i Konstanten sind. Für ξ^ν ergibt sich dann die Reihenentwicklung

$$\boxed{\xi^\nu = \underset{0}{\xi^\nu} + A_i^\nu(\underset{0}{\xi})\, \varepsilon^i + \frac{1}{2}(A_j^\mu \partial_\mu A_i^\nu)(\underset{0}{\xi})\, \varepsilon^i \varepsilon^j + \ldots}. \tag{84}$$

Veblen und Thomas[11]) gaben eine Reihenentwicklung für die Punkte einer geodätischen Linie durch $\underset{0}{\xi}$ in einer allgemeinen A_r, ausgehend von der Differentialgleichung der geodätischen Linien

$$\frac{d^2\xi^\nu}{dt^2} + \overset{0}{\Gamma}{}^\nu_{\lambda\mu} \frac{d\xi^\lambda}{dt} \frac{d\xi^\mu}{dt} = 0. \tag{85}$$

Durch fortgesetzte Differentiation dieser Gleichung ergibt sich für eine

[11]) The geometry of paths, Trans. Amer. Math. Soc. 25 (1923), p. 551—600, p. 560.

geodätische Linie durch $\underset{0}{\xi}$, deren Richtung in $\underset{0}{\xi}$ durch $\left(\frac{d\xi^\nu}{dt}\right)_0 = \underset{0}{e}^\nu$ festgelegt ist,

$$(86)\quad \boxed{\xi^\nu = \underset{0}{\xi}^\nu + \underset{0}{e}^\nu t - \frac{1}{2!} A^{\nu}_{\lambda\mu}(\underset{0}{\xi})\,\underset{0}{e}^\lambda \underset{0}{e}^\mu t^2 - \frac{1}{3!} A^{\nu}_{\lambda\mu\omega}(\underset{0}{\xi})\,\underset{0}{e}^\lambda \underset{0}{e}^\mu \underset{0}{e}^\omega t^3 - \dots},$$

in welchen Gleichungen die Koeffizienten A durch folgende Rekursionsformel gegeben sind:

$$(87)\quad A^{\nu}_{\lambda_1\dots\lambda_{p+1}} = \left(\frac{\partial}{\partial \xi^{\lambda_{p+1}}} A^{\nu}_{\lambda_1\dots\lambda_p} - p\, A^{\nu}_{\alpha(\lambda_1\dots\lambda_{p-1}} A^{\alpha}_{\lambda_p\lambda_{p+1})}\right);\quad A^{\nu}_{\lambda\mu} = \overset{0}{\Gamma}{}^{\nu}_{\lambda\mu}.$$

Läßt man das $\binom{k}{i}$-System in $\underset{0}{\xi}$ mit dem $\binom{\nu}{\lambda}$-System zusammenfallen, so wird $\underset{0}{e}^\nu t = \varepsilon^\nu$, und mit Hilfe von (61) und (51) läßt sich die Identität der beiden Reihen (84) und (86) Glied für Glied nachweisen. Die kanonischen Parameter sind identisch mit den *Normalkoordinaten* $\underset{0}{e}^\nu t$ von Veblen und Thomas, die für den speziellen Fall, daß die A_r in eine Riemannsche Mannigfaltigkeit übergeht, mit den Riemannschen Normalkoordinaten zusammenfallen.

§ 6.

Verschiedene Deutungen des ersten Teiles des dritten Fundamentaltheorems.

Da die Gleichung (13) die invariante Form hat, gilt sie in bezug auf jedes Bezugssystem, also auch in bezug auf das System $\binom{\nu}{\lambda}$

$$(88)\quad \boxed{c_{[\omega\mu}^{\cdot\;\cdot\;\alpha}\, c_{\lambda]\alpha}^{\cdot\;\cdot\;\nu} = 0}.$$

In dieser Form leitet sie sich aber unmittelbar ab aus der $(+)$- und $(-)$-Konstanz von c (vgl. (62)), denn infolge (59) ist

$$(89)\quad \overset{+}{\nabla}_\omega c_{\lambda\mu}^{\cdot\;\cdot\;\nu} = \overset{-}{\nabla}_\omega c_{\lambda\mu}^{\cdot\;\cdot\;\nu} + 3\, c_{[\omega\mu}^{\cdot\;\cdot\;\alpha}\, c_{\lambda]\alpha}^{\cdot\;\cdot\;\nu}.$$

Da aber infolge (59) und (61)

$$(90)\quad \overset{0}{\nabla}_\omega c_{\lambda\mu}^{\cdot\;\cdot\;\nu} = \overset{-}{\nabla}_\omega c_{\lambda\mu}^{\cdot\;\cdot\;\nu} + \frac{3}{2}\, c_{[\omega\mu}^{\cdot\;\cdot\;\alpha}\, c_{\lambda]\alpha}^{\cdot\;\cdot\;\nu},$$

folgt, daß auch die (0)-Ableitung von $c_{\lambda\mu}^{\cdot\;\cdot\;\nu}$ verschwindet:

$$(91)\quad \boxed{\overset{0}{\nabla}_\omega c_{\lambda\mu}^{\cdot\;\cdot\;\nu} = 0}.$$

Die Größe c ist also sowohl $(+)$- als $(-)$- als (0)-konstant.

Berechnet man die Krümmungsgrößen der (+)- und der (−)-Übertragung, so folgt

$$\overset{+}{R}_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} - \overset{-}{R}_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = -3\, c_{[\omega\mu}^{\cdot\cdot\alpha}\, c_{\lambda]\alpha}^{\cdot\cdot\nu} = 0. \tag{92}$$

Da aber beide Übertragungen integrabel sind, verschwindet sowohl $\overset{+}{R}$ als $\overset{-}{R}$ und es ergibt sich also auch aus diesem Grunde (88). Ferner findet man für die Krümmungsgröße der nicht integrablen aber symmetrischen (0)-Übertragung

$$\boxed{\overset{0}{R}_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = \frac{1}{4}\, c_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\alpha}\, c_{\alpha\lambda}^{\cdot\cdot\nu}} \tag{93}$$

und (88) ist also schließlich auch noch identisch mit der für jede symmetrische Übertragung gültigen sogenannten zweiten Identität $\overset{0}{R}_{[\omega\mu\lambda]}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0$. [12])

III. Die adjungierte Gruppe.

§ 1.

Transformation der infinitesimalen und der endlichen Transformationen.

Aus (57) folgt für die mit $s^i X_i$ korrespondierende infinitesimale Transformation der adjungierten Gruppe

$$d\,e^k = e^i s^j c_{ij}^{\cdot\cdot k}\, dt. \tag{94}$$

Ist also f eine Funktion der e^k, so ist

$$df = s^j E_j f, \tag{95}$$

wo (vgl. (75))

$$E_j = e^i c_{ij}^{\cdot\cdot k} \frac{\partial}{\partial e^k} = E_j^{\cdot k} \frac{\partial}{\partial e^k} \tag{96}$$

das Symbol einer infinitesimalen Transformation ist. Diese infinitesimale Transformation erzeugt eine eingliedrige Gruppe, deren endliche Transformationen erhalten werden durch Lösung der aus (94) entstehenden Differentialgleichung

$$\frac{d'e^k}{dt} = {}'e^i s^j c_{ij}^{\cdot\cdot k} = -{}'e^i S_j^{\cdot k}; \qquad S_j^k = s^i c_{ij}^{\cdot\cdot k} \tag{97}$$

mit den Integrationsbedingungen $t = 0$, ${}'e^k = e^k$. Die Lösung von (97) lautet

$${}'e^k = e^j \left(e^{-St}\right)_j^k = e^j \left(A_j^k - S_j^{\cdot k} t + \frac{1}{2!} S_j^{\cdot l} S_l^{\cdot k} t^2 - \ldots\right). \tag{98}$$

Nun ist aber anderseits (vgl. (41))

$${}'e^k = e^j C_j^{\cdot k}(\xi), \tag{99}$$

---

[12]) Vgl. R. K., S. 88.

wo für ξ der Wert zu setzen ist, der mit $\varepsilon^i = s^i t$ korrespondiert, und wir haben in (98) also auf anderem Wege die Reihenentwicklung (82) für $C_{i}^{\cdot k}$ zurückgefunden. Aus (99) folgt ferner

$$'\varepsilon^k = \varepsilon^j C_{j}^{\cdot k} \tag{100}$$

und C vermittelt also bei Verwendung von *kanonischen* Parametern auch die Transformation der *endlichen* Transformationen der Gruppe.

§ 2.
Geometrische Deutung in E_r und X_r.

Die kanonischen Parameter ε^k können gedeutet werden als kartesische Koordinaten einer E_r oder als Normalkoordinaten der Gruppenmannigfaltigkeit in bezug auf $\underset{0}{\xi}$ und auf die symmetrische (0)-Übertragung. Bei der ersten Deutung ist die adjungierte Gruppe eine Gruppe von linearen homogenen Transformationen der E_r, die $\underset{0}{\xi}$ invariant lassen. Bekanntlich stellt jede Gerade durch $\underset{0}{\xi}$ eine eingliedrige Untergruppe dar, jede E_m durch $\underset{0}{\xi}$ aber dann und nur dann eine m-gliedrige Untergruppe, wenn sie bei allen Transformationen der adjungierten Gruppe, deren Bildpunkt in dieser E_m liegt, invariant ist, und dann und nur dann eine m-gliedrige invariante Untergruppe, wenn sie bei allen Transformationen der adjungierten Gruppe invariant ist.

Vermöge (96) ist jeder infinitesimalen Transformation der Gruppe eine infinitesimale Transformation der adjungierten Gruppe zugeordnet, oder, was dasselbe ist, vermöge (75) jedem Vektor e in E_r eine Matrix E in E_r. Schreiben wir mit Weyl kleine Buchstaben für die Vektoren, die korrespondierenden großen Buchstaben für die in dieser Weise zugeordneten Matrizen, St für den Vektor, der durch Anwendung von S auf t entsteht und (s, t) für den Vektor $s^i t^j c_{ij}^{\cdot\cdot k}$, so folgt aus (75)

$$St = -Ts = (s, t). \tag{101}$$

Wird ferner (S, T) geschrieben für $ST - TS$, und ist

$$(s, t) = u, \tag{102}$$

so folgt

$$(S, T) = U. \tag{103}$$

Die Gleichung (101) läßt sich folgendermaßen aussprechen:

Der Punkt t der E_r erleidet bei Anwendung der mit dem Punkte s korrespondierenden infinitesimalen Transformation der Gruppe eine infinitesimale Verschiebung $(s, t)\,dt$.

Zur Deutung in X_r sei zunächst bemerkt, daß die eingliedrigen Untergruppen und somit die Geraden durch $\underset{0}{\xi}$ in E_r sich abbilden auf geodätische Linien durch $\underset{0}{\xi}$, daß aber *andere* Geraden in E_r sich im allgemeinen *nicht* auf geodätische Linien der X_r abbilden und daß der gewöhnliche Parallelismus in der E_r nichts mit den beiden Parallelismen in der X_r zu tun hat und sogar überhaupt keine für die Gruppe interessante Bedeutung besitzt. Zur Deutung in X_r betrachten wir die infinitesimalen Transformationen $\underset{a}{t}^k X_k$ $(a, \ldots, g = 1, \ldots, m)$ einer m-gliedrigen Untergruppe. Jedes der m Vektorfelder $\underset{a}{t}^\nu$ ist $(+)$-konstant

$$\overset{+}{\delta}\underset{a}{t}^\nu = 0 \tag{104}$$

und bildet eine Kongruenz von geodätischen Linien. Aus (104) und (52) folgt

$$\underset{a}{t}^\mu \partial_\mu \underset{b}{t}^\nu - \underset{b}{t}^\mu \partial_\mu \underset{a}{t}^\nu = - \underset{a}{t}^\mu c_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} \underset{b}{t}^\lambda, \tag{105}$$

und da die infinitesimalen Transformationen eine Gruppe bilden, liegt der Vektor rechts in dieser Gleichung in der durch die $\underset{a}{t}^\nu$ bestimmten m-Richtung. Die Gleichungen

$$\underset{a}{t}^\mu \partial_\mu f = 0 \tag{106}$$

bilden also ein vollständiges System, oder, was dasselbe ist, die erwähnte m-Richtung ist X_m-bildend. Die Untergruppe bildet sich ab in der X_m durch $\underset{0}{\xi}$.

Jede X_m enthält m Kongruenzen von ∞^{m-1} geodätischen Linien der X_r in den Richtungen der $\underset{a}{t}^\nu$. Da sich aber die infinitesimalen Transformationen der Untergruppe in jeder Richtung der X_m wählen lassen, enthält jede X_m geodätische Linien der X_r durch jeden ihrer Punkte in jeder ihrer Richtungen. Die X_m sind also *geodätisch.* Verschieben wir in irgend einem Punkte P der X_m durch $\underset{0}{\xi}$ einen in P mit $\underset{a}{t}^\nu$ zusammenfallenden Vektor $\underset{a}{\overset{*}{t}}{}^\nu$ $(+)$- bzw. $(-)$-parallel längs $d\xi^\nu = \underset{b}{t}^\nu dt$, so ist

$$d\underset{a}{\overset{*}{t}}{}^\nu = d\underset{a}{t}^\nu \quad \text{bzw.} \quad d\underset{a}{\overset{*}{t}}{}^\nu = d\underset{a}{t}^\nu + c_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} \underset{a}{t}^\lambda \underset{b}{t}^\mu dt \tag{107}$$

und $\underset{a}{\overset{*}{t}}{}^\nu$ bleibt also bei beiden Verschiebungen innerhalb der X_m.

Ist umgekehrt in X_r eine X_m durch $\underset{0}{\xi}$ gegeben, die den aufgezählten Bedingungen genügt, so kann man in $\underset{0}{\xi}$ m Vektoren $\underset{a}{t}^\nu$ definieren, die die m-Richtung von X_m bestimmen. Bei $(+)$-paralleler Verschiebung entstehen daraus m $(+)$-konstante Felder $\underset{a}{t}^{\nu}$, und der Voraussetzung nach bestimmen diese Vektoren in jedem Punkte der X_m die m-Richtung der X_m. Da nun aber die X_m geodätisch ist, liegt $\underset{a}{t}^{\mu} \overset{0}{\nabla}_{\mu} \underset{b}{t}^{\nu}$ stets in einer Richtung der X_m und infolgedessen ist

$$(108) \qquad \underset{a}{t}^{\mu} \overset{0}{\nabla}_{\mu} \underset{b}{t}^{\nu} - \underset{b}{t}^{\mu} \overset{0}{\nabla}_{\mu} \underset{a}{t}^{\nu} = - \underset{a}{t}^{\mu} c_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} \underset{b}{t}^{\lambda}$$

ein Vektor in einer Richtung der X_m. Die infinitesimalen Transformationen $\underset{a}{t}^{k} X_k$ bilden also eine Gruppe. Wir haben also den Satz[13]) erhalten:

Die X_m, die erzeugt wird durch die zu einer m-Richtung in $\underset{0}{\xi}$ gehörigen geodätischen Linien der X_r, stellt dann und nur dann eine Untergruppe dar, wenn sie

1. *geodätisch ist und*

2. *jede ihrer Richtungen in jedem Punkte sowohl durch $(+)$-parallele als durch $(-)$-parallele Verschiebung in einer zur X_m gehörigen Richtung stets in eine zur X_m gehörige Richtung übergeht.*

Es ist zu beachten, daß es nicht hinreicht, daß die X_m geodätisch ist. Denn dadurch wird nur sichergestellt, daß eine Richtung bei (0)-paralleler Verschiebung Richtung der X_m bleibt, und es kann sich demnach der Fall ereignen, daß bei $(+)$- oder $(-)$-paralleler Verschiebung die Richtung aus der X_m heraustritt. Man kann den Unterschied auch folgendermaßen charakterisieren:

Eine geodätische X_m ist in sich (0)-parallel, stellt sie aber eine Untergruppe dar, so ist sie auch in sich $(+)$- und $(-)$-parallel.

Wir wenden uns jetzt zu dem Fall einer invarianten Untergruppe. Um über die Abbildung in X_r Aufschluß zu erhalten, bilden wir m Felder $\underset{a}{\bar{t}}^{\nu}$, die in $\underset{0}{\xi}$ mit den $\underset{a}{t}^{\nu}$ zusammenfallen, aber $(-)$-konstant sind. Sodann ist in $\underset{0}{\xi}$

$$(109) \qquad \overset{+}{\delta} \underset{a}{\bar{t}}^{\nu} = \overset{-}{\delta} \underset{a}{\bar{t}}^{\nu} + c_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} \underset{a}{\bar{t}}^{\lambda} d\xi^{\mu} = c_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} \underset{a}{\bar{t}}^{\lambda} d\xi^{\mu} = c_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu} \underset{a}{t}^{\lambda} d\xi^{\mu}.$$

Der Fall, daß $d\xi^{\nu}$ in der X_m liegt, ist oben schon erörtert. Ist $d\xi^{\nu}$ allgemein gewählt, so folgt aus (109), daß $\overset{+}{\delta} \underset{a}{\bar{t}}^{\nu}$ dann und nur dann für jede Wahl von $d\xi^{\nu}$ in der X_m liegt, wenn die $\underset{a}{t}^{k} X_k$ eine invariante Untergruppe bilden. *Eine invariante Untergruppe ist also dadurch charakterisiert, daß die zur X_m der Gruppe $(+)$-parallelen und $(-)$-parallelen X_m sich decken.*

---

[13]) C & S I, S. 813.

Folgende Tabelle erleichtere die Übersicht:

	Lineare Schar von infinitesimalen Transformationen	Untergruppe	Invariante Untergruppe
In E_r:	E_m	E_m, invariant bei allen Transformationen der korrespondierenden Untergruppe der adjungierten Gruppe	E_m invariant bei allen Transformationen der adjungierten Gruppe
In X_r:	In $\underset{0}{\xi}$ geodätische X_m	In sich (+)- und (−)-parallele geodätische X_m	In sich (+)- und (−)-parallele geodätische X_m, zu der jede (+)-parallele X_m auch (−)-parallel ist

§ 3.

Invarianten und Komitanten der adjungierten Gruppe.

Wir erinnern kurz daran, daß die adjungierte Gruppe r-gliedrig ist, wenn der i-Rang[14]) von $c_{ij}^{\cdot\cdot k}$ gleich r ist und daß infolge (96) stets

$$(E_i, E_j) = c_{ij}^{\cdot\cdot k} E_k \tag{110}$$

ist, so daß in diesem Falle die Gruppe und ihre Adjungierte gleichzusammengesetzt sind. Ist dagegen der i-Rang von $c_{ij}^{\cdot\cdot k}$ gleich $q < r$, so gibt es gerade $r - q$ unabhängige *ausgezeichnete* infinitesimale Transformationen, das sind Transformationen, deren Klammerausdrücke mit sämtlichen anderen verschwinden.

Komitante einer Größe soll jede Größe heißen, deren Bestimmungszahlen sich in vom Bezugssystem unabhängiger Weise aus den Bestimmungszahlen der ersten Größe berechnen lassen. Im oben erwähnten Falle $q < r$ gibt es z. B. $r - q$ kontravariante Vektoren, die mit $c_{ij}^{\cdot\cdot k}$ über i überschoben Null erzeugen. Diese bilden eine E_{r-q} und ein kontravarianter $(r-q)$-Vektor in dieser E_{r-q} ist bis auf einen Zahlenfaktor eine Komitante von $c_{ij}^{\cdot\cdot k}$.

Komitante einer Gruppe von linearen homogenen Transformationen heißt jede Größe, deren Bestimmungszahlen sich nicht ändern, wenn das Bezugssystem den Transformationen der Gruppe unterworfen wird. Es ist also sowohl c als auch jede Komitante dieser Größe eine Komitante der

---

[14]) Gibt es gerade m linear unabhängige Vektoren $\underset{a}{w}^{\nu}$ $(a = 1, \ldots, m)$, so daß $\underset{a}{w}^{\lambda_1} v_{\lambda_1 \ldots \lambda_p} = 0$ ist, so sagen wir, daß der λ_1-*Rang* von $v_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$ gleich $r - m$ ist. Die Gesamtheit der ∞^{r-m} kovarianten Vektoren, deren Überschiebung mit den w Null ist, bilden das λ_1-*Gebiet* von $v_{\lambda_1 \ldots \lambda_p}$.

adjungierten Gruppe, da ja, wie wir gesehen haben (S. 258), die Bestimmungszahlen $c_{ij}^{\cdot\cdot k}$ bei dieser Gruppe invariant sind. Da aber die adjungierte Gruppe vermöge (96) durch die $c_{ij}^{\cdot\cdot k}$ vollständig festgelegt ist, sind damit *alle* Komitanten erschöpft:

Die Komitanten der adjungierten Gruppe sind die Komitanten der Größe c.

Ferner gilt der Satz:

Wird eine Komitante oder eine Größe, die bis auf einen Zahlenfaktor Komitante der adjungierten Gruppe ist, in beliebiger Weise invariant verknüpft mit beliebig vielen Faktoren e^ν, *so entsteht bei Nullsetzen ein bei der adjungierten Gruppe invariantes Gleichungssystem.*

In der Tat, schreiben wir für die erwähnte Verknüpfung symbolisch $\{v, e, e, \ldots\}$, so ist

$$\{v, e, e, \ldots\} = 0, \tag{111}$$

und daraus entsteht bei einer Transformation der adjungierten Gruppe

$$\{v, {}'e, {}'e, \ldots\} = 0, \tag{112}$$

wo der Akzent angeben soll, daß die Bestimmungszahlen in bezug auf $\binom{K}{I}$ einzusetzen sind an Stelle der Bestimmungszahlen in bezug auf $\binom{k}{i}$. Da aber v nach Voraussetzung in bezug auf beide Systeme proportionale Bestimmungszahlen hat, ist (112) gleichwertig mit

$$\{{}'v, {}'e, {}'e, \ldots\} = 0, \tag{113}$$

w. z. b. w.

Ist die Komitante kovariant p-ten Grades und besteht die Verknüpfung aus einer Überschiebung mit p Faktoren e, so entsteht eine *Invariante*. Jede Invariante ist bekanntlich Lösung des Systems

$$e^i c_{ij}^{\cdot\cdot k} \frac{\partial f}{\partial e^k} = E_j^{\cdot k} \frac{\partial f}{\partial e^k} = 0, \tag{114}$$

und es gibt also sicher wenigstens eine Invariante, da $e^j E_j^{\cdot k} = 0$ ist und der Rang von E infolgedessen $\leqq r - 1$ ist.

Ist das entstehende Gleichungssystem linear in e^k, so ist dasselbe entweder inkonsistent oder es stellt eine bei der adjungierten Gruppe invariante ebene Mannigfaltigkeit in E_r dar, d. h. also eine *invariante Untergruppe.* Umgekehrt ist ein kontravarianter m-Vektor in der E_m einer invarianten Untergruppe bis auf einen Zahlenfaktor eine Komitante von c.

§ 5.

Die wichtigsten Komitanten und invarianten Untergruppen.

c selbst gibt Anlaß zur Bildung von zwei invarianten Untergruppen. Das Gebiet des Index i bestimmt das *Zentrum*

$$e^i c_{ij}^{\cdot\cdot k} = 0, \tag{115}$$

die Gruppe aller infinitesimalen Transformationen, deren Klammerfaktoren mit jeder beliebigen infinitesimalen Transformation der Gruppe verschwinden. Das Zentrum verschwindet nur, wenn der i-Rang von $c_{ij}^{\cdot\cdot k}$ gleich r ist, also wenn die Gruppe mit ihrer adjungierten Gruppe gleichzusammengesetzt ist (S. 267).

Das Gebiet des Index k bestimmt die *erste Ableitung*, definiert durch die Gleichung

$$c_{i_1 j_1}^{\cdot\cdot\,[k_1} \dots c_{i_q j_q}^{\cdot\cdot\,k_q} e^{k]} = 0 \qquad (q = k\text{-Rang von } c_{ij}^{\cdot\cdot k}). \tag{116}$$

Diese Gruppe ist q-gliedrig und enthält alle infinitesimalen Transformationen, die sich als Klammerausdruck schreiben lassen, sie verschwindet also bei einer Abelschen Gruppe. Wird ein Vektor v^k in ξ dem Rande des Flächenelementes $f^{lj} d\sigma$ entlang (0)-parallel verschoben, so ist die Differenz zwischen Anfangs- und Endstellung bekanntlich

$$d v^k = f^{lj} R_{lji}^{\cdot\cdot\cdot k} v^i d\sigma = f^{lj} c_{lj}^{\cdot\cdot m} c_{mi}^{\cdot\cdot k} v^i d\sigma. \tag{117}$$

Die infinitesimalen Transformationen, die die infinitesimale Umgebung eines Punktes erfährt, wenn f alle möglichen Stellungen einnimmt, sind also gegeben durch die Gleichung

$$d v^k = e^m v^i c_{mi}^{\cdot\cdot k} dt, \tag{118}$$

wo e^m die ganze erste Ableitung der Gruppe durchläuft. Da die Gleichung (117) in jedem Punkte der X_r gilt und die $c_{ij}^{\cdot\cdot k}$ Konstanten sind, wird beim (0)-parallel Durchlaufen einer *endlichen* Schlinge die infinitesimale Umgebung in ξ eine *endliche* Transformation der ersten Ableitung erleiden. Die zu allen endlichen Schlingen gehörige Gruppe heißt nach Cartan die *Holonomiegruppe*[15]) der (0)-Übertragung, und es hat sich also herausgestellt, daß diese Holonomiegruppe mit der ersten Ableitung der adjungierten Gruppe identisch ist[15a]).

---

[15]) Les groupes d'holonomie des espaces généralisés, Acta Math. 28 (1925), p. 1–42.
[15a]) C. G. S. 77.

Aus c bilden wir jetzt die folgende Größenreihe:

$$
\begin{aligned}
g_i &= c_{ji}^{\cdot\cdot j}, \\
g_{ij} &= c_{ki}^{\cdot\cdot l}\, c_{lj}^{\cdot\cdot k}, \\
g_{ijk} &= g_{hi}^{\cdot\cdot l}\, g_{lj}^{\cdot\cdot m}\, g_{mk}^{\cdot\cdot h}, \\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{119}
$$

von der jedes Glied bei zyklischen Vertauschungen der Indizes invariant ist, z. B.

$$g_{ijk} = g_{jki} = g_{kij}. \tag{120}$$

Zu g_i gehört die $(r-1)$-gliedrige invariante Untergruppe

$$g_i e^i = 0. \tag{121}$$

In E_r nimmt sie die E_{r-1} in der $(r-1)$-Richtung von g_i ein. Da $g_i e^i$ eine Invariante ist, folgt aus (114)

$$c_{ij}^{\cdot\cdot k}\, g_i = 0, \tag{122}$$

eine Gleichung, die sich übrigens auch unmittelbar aus (119) und (13) ableiten läßt. Sie bringt zum Ausdruck, daß die erste Ableitung in der Gruppe von g_i enthalten ist. Auch folgt aus (122), daß das Feld des Vektors g_i wirbelfrei ist:

$$\overset{0}{\nabla}_{[\mu}\, g_{\lambda]} = \overset{+}{\nabla}_{[\mu}\, g_{\lambda]} + \frac{1}{2}\, c_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}\, g_\nu = 0. \tag{123}$$

Außerdem folgt noch aus (122), daß

$$R_{\omega\mu\lambda}^{\cdot\cdot\cdot\lambda} = c_{\omega\mu}^{\cdot\cdot\alpha}\, c_{\alpha\lambda}^{\cdot\cdot\lambda} = 0, \tag{124}$$

und diese Gleichung bringt bekanntlich zum Ausdruck, daß die (0)-Übertragung inhaltstreu ist[16]). Die beiden anderen Übertragungen sind ebenfalls inhaltstreu, da sie integrabel sind[17]). Wir zeigen, daß die Beziehungen zwischen den drei Verschiebungen eines Inhalts gerade von dem Vektor g_λ abhängen. Betrachten wir dazu einen kontravarianten n-Vektor, der in der X_r über dx^ν das eine Mal $(+)$-äquipollent, das andere Mal (0)-äquipollent verschoben wird. Dann ist

$$0 = dv^{\nu_1 \ldots \nu_n} + \overset{+}{\Gamma}{}_{\lambda\mu}^{\lambda}\, v^{\nu_1 \ldots \nu_n}\, dx^\mu \tag{125}$$

bzw.

$$0 = dv^{\nu_1 \ldots \nu_n} + \overset{0}{\Gamma}{}_{\lambda\mu}^{\lambda}\, v^{\nu_1 \ldots \nu_n}\, dx^\mu, \tag{126}$$

---

[16]) R. K. S. 89.

[17]) Hurwitz, Göttinger Nachrichten 1897, S. 71, verwendet zur Invariantenbildung Volumenintegrale, deren Existenz auf der Inhaltstreue der $(-)$-Übertragung beruht.

und die Differenz der Endwerte beträgt also

$$(\overset{+}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\lambda u} - \overset{0}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\lambda \mu})\, v^{\nu_1 \ldots \nu_n} dx^u = \frac{1}{2}\, g_\mu\, dx^\mu\, v^{\nu_1 \ldots \nu_n}. \tag{127}$$

Nur im Falle, wo g_μ verschwindet, sind also die Verschiebungen eines Inhalts bei den drei Übertragungen gleich[18]).

Die erste merkwürdige Eigenschaft von g_{ij} ist, daß $c_{ij}^{\cdot\cdot l} g_{lk}$ ein *Trivektor*[19]) ist, wie sich leicht aus (119) und (13) ergibt. Die invariante Untergruppe dieses Trivektors

$$c_{ij}^{\cdot\cdot l}\, g_{lk}\, e^k = 0 \tag{128}$$

enthält offenbar die invariante Untergruppe von g_{ij}

$$g_{ij}\, e^j = 0\,. \tag{129}$$

Cartan hat bewiesen[20]), daß die invariante Untergruppe des Trivektors $c_{ij}^{\cdot\cdot l} g_{lk}$ alle integrablen invarianten Untergruppen enthält. Daraus folgt der Satz, daß eine Gruppe dann und nur dann integrabel ist, wenn der Trivektor $c_{ij}^{\cdot\cdot l} g_{lk}$ verschwindet.

Die zweite ist, daß die Gruppe dann und nur dann halbeinfach ist, wenn der Rang von g_{ij} gleich r ist[21]). Da dann auch der i-Rang und der k-Rang von $c_{ij}^{\cdot\cdot k}$ gleich r sein müssen, verschwindet g_i und die erste Ableitung fällt mit der Gruppe zusammen. Da auch die (0)-Ableitung von g_{ij} verschwindet, geht die Geometrie der (0)-Übertragung in eine Riemannsche Geometrie über. Aus (119) folgt

$$K_{\mu\lambda} = \frac{1}{4}\, g_{\mu\lambda}, \tag{130}$$

und es liegt also eine Einsteinsche Geometrie besonderer Art vor, in welcher die Ableitung der Krümmungsgröße verschwindet. Die E_r geht über in eine R_r, und die adjungierte Gruppe wird eine Gruppe von orthogonalen Transformationen. Da sich jetzt nicht nur c_{ijk} aus $c_{ij}^{\cdot\cdot k}$, sondern auch $c_{ij}^{\cdot\cdot k}$ aus dem Trivektor c_{ijk} berechnen läßt, ist die Klassifizierung der halbeinfachen Gruppen gleichbedeutend geworden mit der algebraischen Aufgabe, die Trivektoren in R_n zu klassifizieren, die der Bedingung

$$g^{ij}\, c_{i[kl}\, c_{m]jh} = 0 \tag{131}$$

genügen.

Die Größe g_{ijk} zerfällt infolge der zyklischen Invarianz in einen symmetrischen und einen alternierenden Teil:

$$g_{ijk} = g_{(ijk)} + g_{[ijk]}. \tag{132}$$

---

[18]) C. G. S. 69.

[19]) C & S I, S. 810.

[20]) Cartan, Thèse 1894, p. 109.

[21]) Cartan, Thèse 1894, p. 52.

Aus (13) folgt, daß der alternierende Teil der Hälfte des oben erwähnten Trivektors gleich ist

$$2 g_{[ijk]} = c_{ij}^{\cdot\cdot l} g_{lk}. \tag{133}$$

Notwendige und hinreichende Bedingung für das Integrabelsein einer Gruppe ist also auch, daß $g_{[ijk]}$ verschwindet[22]). Für eine halbeinfache Gruppe verschwindet $g_{(ijk)}$ und wird $2 g_{ijk}$ gleich c_{ijk}. Der alternierende Teil der Größe g_{ijkl} verschwindet infolge der zyklischen Invarianz. Für den Fall einer halbeinfachen Gruppe steht g_{ijkl} in Beziehung zur Krümmungsgröße, es ist

$$g_{ijkl} - g_{ijlk} = K_{ijkl} \tag{134}$$

und

$$g_{ijkl} = g_{(ijkl)} + \frac{1}{3} K_{ijkl} + \frac{1}{3} K_{lijk}. \tag{135}$$

Aus (135) folgt, daß $g_{ijkl} - g_{(ijkl)}$ die erste Größe der von Veblen und T. Y. Thomas[23]) aufgestellten Reihe der „normal tensors" ist. Diese Größenreihe entsteht bekanntlich, wenn man die kanonischen Parameter als Urvariablen wählt und dann die $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ in einer Reihe nach ε entwickelt. Die höheren Glieder der Reihe (119) kamen bisher nicht zur Anwendung.

---

[22]) Cartan, Thèse 1894, p. 47.

[23]) The Geometry of paths, Trans. Amer. Math. Soc. **25** (1923), p. 551–608.

(Eingegangen am 28. 10. 1928.)