Über die Einheitengruppe eines endlichen Ringes[1]).

Von

Kenjiro Shoda in Berlin.

In einer früheren Arbeit[2]) habe ich den Begriff des *Strahls* eines im allgemeinen nichtkommutativen Ringes $\mathfrak{o}$ modulo einem Unterringe $\mathfrak{c}$ eingeführt. Unter dem Strahl $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{c}\}$ verstehen wir nämlich die Gesamtheit der Elemente aus $\mathfrak{o}$, die modulo $\mathfrak{c}$ dem Einheitselement E von $\mathfrak{o}$ (dessen Existenz vorausgesetzt sei) kongruent sind. Die Gesamtheit der Einheiten (d. h. die Gesamtheit der Elemente mit reziproken Elementen) aus $\mathfrak{o}$ bildet durch Multiplikation eine (eigentliche) Gruppe, die ich die Einheitengruppe oder die zugehörige Gruppe von $\mathfrak{o}$ nenne. Ist $\mathfrak{c}$ ein Ideal[3]) in $\mathfrak{o}$, so bildet der Durchschnitt des Strahls $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{c}\}$, der dann in der Form $\{\underline{\mathfrak{o} \mid \mathfrak{c}}\}$ geschrieben wird, und der zugehörigen Gruppe $\mathfrak{G}$ einen Normalteiler von $\mathfrak{G}$. Auf diese Weise entspricht einem Ideal ein Normalteiler, einem Restklassenringe eine Faktorgruppe und einer direkten Summe von Idealen ein direktes Produkt von Normalteilern.

In der vorliegenden Arbeit handelt es sich allgemeiner um Unter*ringe*, nicht Ideale. Im Fall der nilpotenten Unterringe kommen tatsächlich einfache Resultate: Der Strahl $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{c}\}$ für einen nilpotenten Unterring $\mathfrak{c}$ bildet eine Untergruppe der zugehörigen Gruppe $\mathfrak{G}$ (Satz 2).

Als Vorbereitung für die Anwendung dieses Satzes beweise ich in § 1 nach einigen Bemerkungen über maximale nilpotente Unterringe, daß der *Durchschnitt aller maximalen nilpotenten Unterringe eines Ringes das maximale nilpotente Ideal* ist, wenn man die Existenz des Einheits-

[1]) Diese Arbeit wurde in Proc. of the Imperial Academy of Japan **5**, Nr. 3, vorangezeigt.

[2]) K. Shoda, Über die Automorphismen einer endlichen Abelschen Gruppe, § 3, Math. Annalen **100** (1928), S. 674—686.

[3]) Unter einem Ideal soll im folgenden stets ein zweiseitiges Ideal verstanden werden.

elementes und das Bestehen des *Doppelkettensatzes*[4]) *für Rechtsideale* vorausetzt (Satz 1).

Ein *endlicher* Ring heißt ein p-Ring, wenn die Anzahl der Elemente eine Primzahlpotenz ist. Dann gilt der Satz, daß ein endlicher Ring stets die direkte Summe von p-Ringen ist (Satz 3). Ich betrachte daher einen p-Ring und beweise die folgenden Sätze: Der Strahl eines p-Ringes modulo einem maximalen nilpotenten Unterringe bildet eine Sylowgruppe[5]) der zugehörigen Gruppe (Satz 4). Der Strahl eines p-Ringes modulo dem maximalen nilpotenten Ideale bildet den Durchschnitt aller Sylowgruppen (Satz 6). Man kann dadurch leicht erkennen, daß einer Sylowgruppe eineindeutig ein maximaler nilpotenter Unterring entspricht. Man kann daher einige Sätze über Sylowgruppen in die Theorie der maximalen nilpotenten Unterringe eines endlichen Ringes übertragen und umgekehrt. Dadurch erhalte ich, daß *alle maximalen nilpotenten Unterringe eines endlichen Ringes miteinander konjugiert sind* (Satz 5).

Da der Automorphismenring[6]) einer endlichen Abelschen Gruppe die übliche Automorphismengruppe als seine zugehörige Gruppe enthält, so findet sich eine Anwendung unserer Sätze bei der Untersuchung der Sylowgruppen der Automorphismengruppe einer Abelschen Gruppe, deren Ordnung eine Primzahlpotenz ist, worauf ich aber jetzt nicht eingehe[7]).

§ 1.
Nilpotente Unterringe eines Ringes.

Es sei $\mathfrak{o}$ ein Ring mit Einheitselement E, $\mathfrak{n}$ ein nilpotentes Ideal in $\mathfrak{o}$ und $\mathfrak{m}'$ ein maximaler nilpotenter Unterring[8]) des Restklassenringes $\mathfrak{o}/\mathfrak{n}$, d. h. es gebe keinen nilpotenten Unterring von $\mathfrak{o}/\mathfrak{n}$, der $\mathfrak{m}'$ als einen echten Unterring enthält. Dabei soll unter einem nilpotenten Ring ein Ring $\mathfrak{w}$ verstanden werden, der der Bedingung $\mathfrak{w}^{\alpha} = 0$ für ein geeignetes α genügt. Die Gesamtheit der Elemente aus $\mathfrak{o}$, die in den Restklassen aus $\mathfrak{m}'$ enthalten sind, wird nach Herrn W. Krull[9]) mit $\mathfrak{n}^{\frown}\mathfrak{m}'$ bezeichnet.

[4]) E. Noether, Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahl- und Funktionenkörpern, Math. Annalen **96** (1926), S. 26—61.

[5]) Unter einer Sylowgruppe der zugehörigen Gruppe eines p-Ringes verstehen wir nur eine solche, deren Ordnung eine Potenz von p ist, wenn die Anzahl der Elemente des p-Ringes eine Potenz von p ist.

[6]) A. Chatelet, Les groupes abéliens finis et les modules de points entiers, Lille 1925. K. Shoda, a. a. O.

[7]) H. A. Bender, Sylow subgroups in the groups of isomorphisms of prime power abelian groups, American Journal of Mathematics **45** (1923), S. 223—250. Dort werden die Sylowgruppen ohne Benützung des Automorphismenringes untersucht.

[8]) Die Existenz des maximalen nilpotenten Unterringes sei jetzt vorausgesetzt.

[9]) W. Krull, Theorie und Anwendung der verallgemeinerten Abelschen Gruppen, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie 1926.

Hilfssatz 1. $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}^\frown \mathfrak{m}'$ *bildet einen maximalen nilpotenten Unterring von* $\mathfrak{o}$. *Umgekehrt umfaßt ein maximaler nilpotenter Unterring jedes nilpotente Ideal* $\mathfrak{n}$, *ist also von der Form* $\mathfrak{n}^\frown \mathfrak{m}'$, *wo* $\mathfrak{m}'$ *einen maximalen nilpotenten Unterring in* $\mathfrak{o}/\mathfrak{n}$ *bedeutet.*

Es ist klar, daß $\mathfrak{m}$ ein Ring ist. Ist nun $\mathfrak{n}^\alpha = 0$ und $\mathfrak{m}'^\beta = 0$, so ist $\mathfrak{m}^\beta = (\mathfrak{n}^\frown \mathfrak{m}')^\beta$ in $\mathfrak{n}$ enthalten, also ist $\mathfrak{m}^{\alpha\beta} = (\mathfrak{n}^\frown \mathfrak{m}')^{\alpha\beta} = 0$, d. h. $\mathfrak{m}$ ist ein nilpotenter Unterring. Ist $\mathfrak{m}$ in einem nilpotenten Unterringe $\mathfrak{v}$ enthalten, so ist $\mathfrak{m}'$ in $\mathfrak{v}/\mathfrak{n}$ enthalten, welches aber ein nilpotenter Unterring von $\mathfrak{o}/\mathfrak{n}$ ist. Nach der Definition von $\mathfrak{m}'$ ist also $\mathfrak{v} = \mathfrak{n}^\frown \mathfrak{m}'$, womit der erste Teil bewiesen ist. Umgekehrt umfaßt ein maximaler nilpotenter Unterring $\mathfrak{m}$ jedes nilpotente Ideal $\mathfrak{n}$. Denn die Summe $(\mathfrak{n}, \mathfrak{m})$ bildet einen Ring. Es ist ferner $(\mathfrak{n}, \mathfrak{m})^r$ für jedes r in $(\mathfrak{n}, \mathfrak{m}^r)$ enthalten, da $\mathfrak{n}$ ein Ideal ist. Sind $\mathfrak{n}^\alpha = 0$, $\mathfrak{m}^\beta = 0$, so ist also $(\mathfrak{n}, \mathfrak{m})^{\alpha\beta} = 0$, d. h. die Summe bildet einen nilpotenten Unterring. Nach der Definition von $\mathfrak{m}$ ist also $\mathfrak{n}$ in $\mathfrak{m}$ enthalten, woraus ferner der zweite Teil des Satzes folgt.

Hilfssatz 2. *Es sei* $\mathfrak{o}$ *die direkte Summe* $\mathfrak{o}_1 + \mathfrak{o}_2 + \ldots + \mathfrak{o}_t$ *von Idealen* $\mathfrak{o}_i$. *Ist* $\mathfrak{m}$ *ein maximaler nilpotenter Unterring von* $\mathfrak{o}$, *so ist* $\mathfrak{m}$ *die direkte Summe von solchen* $\mathfrak{m}_i$ *von* $\mathfrak{o}_i$. *Ist umgekehrt* $\mathfrak{m}_i$ *ein maximaler nilpotenter Unterring von* $\mathfrak{o}_i$, *so ist die direkte Summe* $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \ldots + \mathfrak{m}_t$ *ein solcher von* $\mathfrak{o}$.

Es sei $E = E_1 + E_2 + \ldots + E_t$ die entsprechende Zerlegung des Einheitselementes E, wo also E_i das Einheitselement von $\mathfrak{o}_i$ ist[10]). Es sei $\mathfrak{m}$ ein maximaler nilpotenter Unterring von $\mathfrak{o}$, der offenbar in $\mathfrak{m}E_1 + \mathfrak{m}E_2 + \ldots + \mathfrak{m}E_t$ enthalten ist. Es ist aber $\mathfrak{m}E_1 + \mathfrak{m}E_2 + \ldots + \mathfrak{m}E_t$ nilpotent, da $(\mathfrak{m}E_1 + \mathfrak{m}E_2 + \ldots + \mathfrak{m}E_t)^\alpha = (\mathfrak{m}E_1)^\alpha + (\mathfrak{m}E_2)^\alpha + \ldots + (\mathfrak{m}E_t)^\alpha$ $= \mathfrak{m}^\alpha E_1 + \mathfrak{m}^\alpha E_2 + \ldots + \mathfrak{m}^\alpha E_t = 0$ ist, falls $\mathfrak{m}^\alpha = 0$ ist. Nach der Definition von $\mathfrak{m}$ ist also $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}E_1 + \mathfrak{m}E_2 + \ldots + \mathfrak{m}E_t$. Ist nun $\mathfrak{m}E_i$ in einem nilpotenten Unterringe $\mathfrak{m}_i$ von $\mathfrak{o}_i$ enthalten, so ist $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \ldots + \mathfrak{m}_t$ enthalten, der nilpotent ist, da $(\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \ldots + \mathfrak{m}_t)^\varkappa = \mathfrak{m}_1^\varkappa + \mathfrak{m}_2^\varkappa + \ldots + \mathfrak{m}_t^\varkappa$ ist. Daher ist $\mathfrak{m}E_i$ nach der Definition von $\mathfrak{m}$ ein maximaler nilpotenter Unterring von $\mathfrak{o}_i$. Ist umgekehrt $\mathfrak{m}_i$ ein maximaler nilpotenter Unterring von $\mathfrak{o}_i$, so ist $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \ldots + \mathfrak{m}_t$ ein solcher von $\mathfrak{o}$. Denn ist $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \ldots + \mathfrak{m}_t$ in einem (maximalen) nilpotenten Unterring $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{o}$ enthalten, so ist $\mathfrak{m}_i$ in $\mathfrak{m}E_i$ enthalten, also ist nach der Definition von $\mathfrak{m}_i$ ferner $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}E_i$ und $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \ldots + \mathfrak{m}_t$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 3. *Ist* $\mathfrak{m}$ *ein nilpotenter Unterring von* $\mathfrak{o}$, *der der Bedingung* $\mathfrak{m}F = F\mathfrak{m}$ *für eine Einheit* F *aus* $\mathfrak{o}$ *genügt, so ist* $F + M$ *für jedes* M *aus* $\mathfrak{m}$ *eine Einheit.*

---

[10]) Fräulein E. Noether machte mich auf einen Fehler des ursprunglichen Beweises aufmerksam und gab mir diesen Beweis von Hilfssatz 2 an.

Es ist nämlich, falls $\mathfrak{m}^{2^\sigma} = 0$ ist, $(F+M)(F-M_1)(F^2+M_2)\ldots(F^{2^{\sigma-1}}+M_\sigma) = F^{2^\sigma} + M M_1 M_2 \ldots M_{\sigma-1} = F^{2^\sigma}$, wobei M_i durch $M M_1 M_2 \ldots M_{i-1} F^{2^{i-1}} = F^{2^{i-1}} M_i$ in $\mathfrak{m}^{2^i}$ bestimmt werden soll. Denn aus $\mathfrak{m} F = F \mathfrak{m}$ folgt auch $\mathfrak{m}^\lambda F^u = F^u \mathfrak{m}^\lambda$. Setzt man im Beweis $M_i = M^{2^{i-1}}$ für jedes i, so erhält man als einen speziellen Fall[11])

Hilfssatz 4. *Ist M ein nilpotentes Element, F eine mit M vertauschbare Einheit aus einem Ring, so ist $F+M$ eine Einheit.*

Wir setzen nun das Bestehen des *Doppelkettensatzes für Rechtsideale* in $\mathfrak{o}$ voraus. D. h. (*Teilerkettensatz*): Jede Kette von Rechtsidealen, bei der jedes Rechtsideal ein echter Oberring des vorangehenden ist, bricht im Endlichen ab. (*Vielfachenkettensatz*): Jede Kette von Rechtsidealen, bei der jedes Rechtsideal ein echter Unterring des vorangehenden ist, bricht im Endlichen ab.

Nach Herrn E. Artin[12]) kann man daraus die Existenz des maximalen nilpotenten Ideals schließen, welches alle nilpotenten Rechts- und Linksideale umfaßt. Der Restklassenring nach dem maximalen nilpotenten Ideal ist aber die direkte Summe von einfachen Ringen. Es sei $\mathfrak{n}$ das maximale nilpotente Ideal von $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}/\mathfrak{n}$ die direkte Summe $\mathfrak{o}_1 + \mathfrak{o}_2 + \ldots + \mathfrak{o}_t$ von einfachen Ringen $\mathfrak{o}_i$. Ist $\mathfrak{m}_i$ ein maximaler nilpotenter Unterring von $\mathfrak{o}_i$, so ist $\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \ldots + \mathfrak{m}_t$ nach Hilfssatz 2 ein solcher von $\mathfrak{o}/\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}^\frown \mathfrak{m}'$ nach Hilfssatz 1 ein solcher von $\mathfrak{o}$ (und jeder maximale nilpotente Unterring von $\mathfrak{o}$ entsteht so).

Wir betrachten daher einen einfachen Ring, der nach einem Maclagan Wedderburnschen Satz[13]) mit einem vollständigen Matrizenringe $\mathfrak{a}$ vom Grade etwa n in einem (im allgemeinen nichtkommutativen) Körper K isomorph ist, d. h. es ist $\mathfrak{a} = \sum_{i,j} \mathsf{K} E_{ij}$, wo $E_{ij} E_{kl} = 0$ für $j \neq k$ und $= E_{il}$ für $j = k$, und E_{ij} mit jedem Elemente aus K vertauschbar ist. Ein maximaler nilpotenter Unterring $\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{a}$ wird durch $\mathfrak{b} = \sum_{i<j} \mathsf{K} E_{ij}$ gegeben. Es ist klar, daß $\mathfrak{b}$ ein nilpotenter Unterring von $\mathfrak{a}$ ist. Ist P ein Element eines $\mathfrak{b}$ enthaltenden nilpotenten Unterringes $\mathfrak{c}$, so hat $\mathfrak{c}$ ein Element von der Gestalt $\sum_{i \geqq j} c_{ij} E_{ij}$, welches aber auch nilpotent sein muß. Also ist

---

[11]) Ist in den Hilfssätzen 3, 4 F ein Nullteiler, so ist $F+M$ ein Nullteiler, was gleichzeitig bewiesen ist. Ist F ein mit M vertauschbares nilpotentes Element, so ist $F+M$ wieder nilpotent. Denn aus $F^\alpha = 0$ und $M^\beta = 0$ folgt $(F+M)^{\alpha+\beta} = 0$.

[12]) E. Artin, Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen, § 1, Abhandlungen aus dem Math. Seminar zu Hamburg **5** (1927), S. 251—260.

[13]) Maclagan Wedderburn, On hypercomplex numbers, Proceedings of the London Math. Soc. **6** (1908). L. E. Dickson, Algebren und ihre Zahlentheorie, herausgegeben von A. Speiser, Zurich 1927, S. 120, 121. Das Bestehen dieses Satzes für den Ring mit Doppelkettensatz fur Rechtsideale wurde von Herrn E. Artin a. a. O. Satz 11 bewiesen.

$c_{11} = c_{22} = \dots = c_{nn} = 0$. Daher sind die Diagonalkoeffizienten[14]) von P gleich Null. Da P ein nilpotentes Element ist, so ist nach Hilfssatz 4 stets $cE + P$ eine Einheit, wo c ein von Null verschiedenes Element aus K bedeutet. Ist ein Koeffizient p_{i1} von P von Null verschieden, so setze man $c = p_{i1}$. Es gibt dann ein Element B aus $\mathfrak{b}$, so daß die i-te Zeile von $p_{i1}E + P + B$ und daher von $(p_{i1}E + P + B)\,X$ für jedes Element X aus $\mathfrak{a}$ mit der ersten Zeile derselben identisch ist. Also ist $(p_{i1}E + P + B)\,X$ für jedes X von E verschieden, d. h. $p_{i1}E + P + B$ ist keine Einheit. Dabei ist aber $P + B$ in $\mathfrak{c}$ enthalten, also gegen Hilfssatz 4 nilpotent. Also ist p_{i1} für jedes i gleich Null. Analog kann man behaupten, daß p_{ij} für jedes $i \geqq j$ gleich Null ist. Daher ist $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b}$ ein maximaler nilpotenter Unterring von $\mathfrak{a}$. Einen maximalen nilpotenten $\mathfrak{m}$ eines allgemeinen Ringes $\mathfrak{o}$ kann man nun nach der obigen Bemerkung leicht konstruieren.

Ein anderer maximaler nilpotenter Unterring von $\mathfrak{a}$ wird durch $\mathfrak{d} = \sum\limits_{i>j} \mathsf{K} E_{ij}$ gegeben. Der Durchschnitt $[\mathfrak{b}, \mathfrak{d}]$ hat offenbar kein von Null verschiedenes Element. Nach Hilfssatz 2 erhält man

Hilfssatz 5. *Der Durchschnitt aller maximalen nilpotenten Unterringe eines halbeinfachen Ringes besitzt kein von Null verschiedenes Element.*

Nach diesem Hilfssatz erhält man weiter den folgenden allgemeinen Satz, der als ein Struktursatz des Ringes interessant ist:

Satz 1. *Der Durchschnitt aller maximalen nilpotenten Unterringe eines Ringes ist das maximale nilpotente Ideal des Ringes, wenn man die Existenz des Einheitselementes und das Bestehen des Doppelkettensatzes für Rechtsideale voraussetzt.*

Es sei nämlich $\mathfrak{n}$ das maximale nilpotente Ideal eines Ringes $\mathfrak{o}$. Man bilde nun den Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{n}$, der bekanntlich halbeinfach ist. Der Durchschnitt aller maximalen nilpotenten Unterringe von $\mathfrak{o}/\mathfrak{n}$ ist nach Hilfssatz 5 ein Nullring. Daher folgt Satz 1 aus Hilfssatz 1 unmittelbar.

Es sei $\mathfrak{r}$ ein Unterring von $\mathfrak{o}$. Die Gesamtheit der Elemente P aus $\mathfrak{o}$ derart, daß $P\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}P$ in $\mathfrak{r}$ enthalten ist, bildet einen Ring, den wir den *Normalisator* von $\mathfrak{r}$ nennen.

Ist $\mathfrak{p}$ der Normalisator eines maximalen nilpotenten Unterringes $\mathfrak{m}$, so besteht $\mathfrak{m}$ aus der Gesamtheit der nilpotenten Elemente aus $\mathfrak{p}$. Denn ist P bzw. M ein nilpotentes Element aus $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{m}$, so ist das Produkt PM bzw. MP in $\mathfrak{m}$ enthalten. Der durch P und $\mathfrak{m}$ erzeugte Ring $\mathfrak{t}$ be-

[14]) Wir gebrauchen hier der Einfachheit halber die Ausdrucksweise der Matrizentheorie.

steht aus den Elementen $f(P)P+M$, wo $f(P)$ ein Polynom von P mit ganzen rationalen Koeffizienten bedeutet. Das Produkt von r Elementen aus $\mathfrak{t}$ hat dann die Gestalt $g(P)P^r+M$, also ist $\mathfrak{t}^\alpha$ in $\mathfrak{m}$ enthalten, falls $P^\alpha=0$, woraus folgt, daß $\mathfrak{t}$ nilpotent ist. Nach der Definition von $\mathfrak{m}$ ist also $\mathfrak{m}=\mathfrak{t}$ und P in $\mathfrak{m}$ enthalten, was zu beweisen war.

Daraus folgt nach dem Maclagan Wedderburnschen Satz

Hilfssatz 6. *Der Restklassenring $\mathfrak{p}/\mathfrak{m}$ ist die direkte Summe von Körpern, wenn der Doppelkettensatz für Rechtsideale in $\mathfrak{p}$ besteht.*

Ist ein Element P aus $\mathfrak{o}$ mit $\mathfrak{m}$ vertauschbar, d. h. $P\mathfrak{m}=\mathfrak{m}P$, und $\mathfrak{m}$ maximaler nilpotenter Unterring, *so ist P im Normalisator $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{m}$ enthalten.* Denn es ist $(P\mathfrak{m})^\alpha=(\mathfrak{m}P)^\alpha=\mathfrak{m}^\alpha P^\alpha=0$, falls $\mathfrak{m}^\alpha=0$ ist, d. h. PM und MP für jedes M aus $\mathfrak{m}$ sind nilpotent. Jedes Element des durch $P\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{m}$ erzeugten Ringes $\mathfrak{s}$ hat die Gestalt $P^\lambda M_0+P^{\lambda-1}M_1+\ldots+M_\lambda$, wo M_i ein Element aus $\mathfrak{m}$ bedeutet. Die Koeffizienten von P^i im Produkt von r Elementen aus $\mathfrak{s}$ sind wegen $P\mathfrak{m}=\mathfrak{m}P$ in $\mathfrak{m}^r$ enthalten, da aus $P\mathfrak{m}=\mathfrak{m}P$ auch $P^i\mathfrak{m}=\mathfrak{m}P^i$ folgt. Daher ist $\mathfrak{s}^\alpha=0$. Nach der Definition von $\mathfrak{m}$ ist also $P\mathfrak{m}=\mathfrak{m}P$ in $\mathfrak{m}$ enthalten.

Um den Normalisator des oben konstruierten maximalen nilpotenten Unterringes eines Ringes zu bestimmen, beweisen wir

Hilfssatz 7. *Ist $\mathfrak{n}$ ein Ideal in $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{m}'$ ein Unterring von $\mathfrak{o}/\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{p}'$ der Normalisator von $\mathfrak{m}'$, so ist $\mathfrak{n}^\frown\mathfrak{p}'$ der Normalisator von $\mathfrak{n}^\frown\mathfrak{m}'$.*

Der Ring $\mathfrak{n}^\frown\mathfrak{m}'$ ist offenbar ein Ideal in $\mathfrak{n}^\frown\mathfrak{p}'$, da $\mathfrak{n}$ ein Ideal in $\mathfrak{o}$ ist. Ist $\mathfrak{n}^\frown\mathfrak{m}'$ ein Ideal in $\mathfrak{v}$, so ist $\mathfrak{m}'$ ein Ideal in $\mathfrak{v}/\mathfrak{n}$, also ist $\mathfrak{v}/\mathfrak{n}$ in $\mathfrak{p}'$ und daher $\mathfrak{v}$ in $\mathfrak{n}^\frown\mathfrak{p}'$ enthalten.

Klar ist nun

Hilfssatz 8. *Ist $\mathfrak{o}$ die direkte Summe $\mathfrak{o}_1+\mathfrak{o}_2+\ldots+\mathfrak{o}_t$ von Idealen $\mathfrak{o}_i$, $\mathfrak{m}_i$ ein Unterring von $\mathfrak{o}_i$ und $\mathfrak{p}_i$ der Normalisator von $\mathfrak{m}_i$ in $\mathfrak{o}_i$, so ist $\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2+\ldots+\mathfrak{p}_t$ der Normalisator von $\mathfrak{m}=\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2+\ldots+\mathfrak{m}_t$.*

Es sei wie früher $\mathfrak{n}$ das maximale nilpotente Ideal in $\mathfrak{o}$, $\mathfrak{o}/\mathfrak{n}$ die direkte Summe $\mathfrak{o}_1+\mathfrak{o}_2+\ldots+\mathfrak{o}_t$ von einfachen Ringen $\mathfrak{o}_i$, $\mathfrak{m}_i$ ein maximaler nilpotenter Unterring von $\mathfrak{o}_i$. Ist $\mathfrak{p}_i$ der Normalisator von $\mathfrak{m}_i$ in $\mathfrak{o}_i$, so ist $\mathfrak{p}'=\mathfrak{p}_1+\mathfrak{p}_2+\ldots+\mathfrak{p}_t$ der von $\mathfrak{m}'=\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2+\ldots+\mathfrak{m}_t$ und $\mathfrak{p}=\mathfrak{n}^\frown\mathfrak{p}'$ der von $\mathfrak{m}=\mathfrak{n}^\frown\mathfrak{m}'$. Daher betrachten wir wieder — wie es genügend ist — den einfachen Ring $\mathfrak{a}$. Der Normalisator des maximalen nilpotenten Unterringes $\mathfrak{b}=\sum\limits_{i<j}\mathsf{K}E_{ij}$ von $\mathfrak{a}$ ist — wie man leicht sehen kann — gleich $\mathfrak{f}=\sum\limits_{i\leqq j}\mathsf{K}E_{ij}$.

Hilfssatz 9. *Die zugehörige Gruppe $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{f}$ besteht aus den Elementen aus $\mathfrak{f}$ derart, daß der Koeffizient von E_{ii} für jedes i von Null verschieden ist.*

Denn ein Element F aus $\mathfrak{f}$ läßt sich durch $F = (\sum f_{ii} E_{ii})(E + \sum_{i<j} f_{ij} E_{ij})$ darstellen. Da der zweite Faktor nach Hilfssatz 4 stets eine Einheit ist, so ist F dann und nur dann eine Einheit, wenn der erste Faktor eine Einheit ist, woraus die Behauptung folgt.

Hilfssatz 10. *Die Gesamtheit der mit einem maximalen nilpotenten Unterringe $\mathfrak{m}$ vertauschbaren Einheiten bildet die zugehörige Gruppe (Einheitengruppe) des Normalisators $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{m}$, wenn man das Bestehen des Vielfachenkettensatzes für Rechtsideale in $\mathfrak{m}$ voraussetzt.*

Ist nämlich P eine in $\mathfrak{p}$ enthaltene Einheit von $\mathfrak{o}$, so ist $P\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{m}$ enthalten. Ferner ist $P^i\mathfrak{m}$ in $P^{i-1}\mathfrak{m}$ enthalten. Es ist aber $P^i\mathfrak{m}$ ein Rechtsideal in $\mathfrak{m}$. Denn $P^i\mathfrak{m}\mathfrak{m}$ ist in $P^i\mathfrak{m}$ enthalten. Daher ist nach der Voraussetzung $P^\alpha\mathfrak{m} = P^{\alpha-1}\mathfrak{m}$ für ein geeignetes α, woraus aber $P\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ folgt, da $P^{\alpha-1}$ eine Einheit ist. Aus $P\mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ folgt auch $\mathfrak{m} = P^{-1}\mathfrak{m}$ und daß $P^{-1}\mathfrak{m}P$ in $\mathfrak{m}$ enthalten ist. Also ist $\mathfrak{m}$ in $P\mathfrak{m}P^{-1}$ enthalten, und nach der Definition von $\mathfrak{m}$ ist $\mathfrak{m} = P\mathfrak{m}P^{-1}$ oder $P\mathfrak{m} = \mathfrak{m}P = \mathfrak{m}$, da $P\mathfrak{m}P^{-1}$ auch nilpotent ist. Damit ist Hilfssatz 10 bewiesen, da jedes mit $\mathfrak{m}$ vertauschbare Element nach oben in $\mathfrak{p}$ enthalten ist.

§ 2.

Sylowgruppen der Einheitengruppe eines endlichen Ringes.

Für einen Ring $\mathfrak{o}$ mit Einheitselement E gilt unabhängig vom Doppelkettensatz

Satz 2. *Der Strahl $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{m}\}$ modulo einem nilpotenten Unterringe $\mathfrak{m}$ bildet eine Untergruppe der zugehörigen Gruppe (Einheitengruppe) $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{o}$.*[15])

Jedes Produkt zweier Elemente aus $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{m}\}$ ist offenbar in $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{m}\}$ enthalten. Nach dem Beweis von Hilfssatz 4, wobei jetzt F gleich dem Einheitselement E ist, bildet $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{m}\}$ ferner eine (eigentliche) Gruppe, da dabei $(E - M), (E + M^2), \ldots, (E + M^{2^{\sigma-1}})$ in $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{m}\}$ enthalten sind; also ist jedes Element des Strahles $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{m}\}$ eine Einheit, deren reziprokes Element auch in $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{m}\}$ enthalten ist.

Wir betrachten nun einen endlichen Ring mit Einheitselement E. Ein endlicher Ring heiße ein p-Ring, wenn die Anzahl der Elemente des Ringes eine Primzahlpotenz ist.

Satz 3. *Ein endlicher Ring ist stets die direkte Summe von p-Ringen.*

Ein endlicher Ring $\mathfrak{o}$ läßt sich als eine additiv geschriebene Abelsche Gruppe bekanntlich in die direkte Summe $\mathfrak{o} = \mathfrak{o}_1 + \mathfrak{o}_2 + \ldots + \mathfrak{o}_m$ zerlegen,

[15]) Ist der Ring endlich, so ist diese Untergruppe auflösbar. Zum Beweis vgl. K. Shoda, a. a. O., Beweis des Satzes 8.

wo die Anzahlen der Elemente aus $\mathfrak{o}_i$ teilerfremde Primzahlpotenzen $p_i^{e_i}$ sind. Dann besteht $\mathfrak{o}_i$ aus der Gesamtheit der Elemente P_i aus $\mathfrak{o}$, die der Bedingung $p_i^{e_i} P_i = 0$ genügen. Also bildet $\mathfrak{o}_i$ einen Ring. Wir haben also nur zu zeigen, daß $P_i P_j = 0$ ist, falls P_i bzw. P_j in $\mathfrak{o}_i$ bzw. $\mathfrak{o}_j$, $i \neq j$, enthalten ist. Es ist $p_i^{e_i} P_i P_j = p_j^{e_j} P_i P_j = 0$. Da p_i und p_j teilerfremd sind, so muß nach dem Distributivgesetz $P_i P_j = 0$ sein.

Wir betrachten nun einen ~~einfachen~~ p-Ring $\mathfrak{a}$. Der Ring $\mathfrak{a}$ ist dann mit einem vollständigen Matrizenringe vom Grade etwa n in einem Galoisschen Felde isomorph, da ein endlicher Körper stets nach einem Maclagan Wedderburnschen Satz[16]) kommutativ ist. Es sei p^m die Anzahl der Elemente in dem Galoisschen Felde, so ist die Anzahl der Elemente aus $\mathfrak{a}$ gleich p^{mn^2}.

Die Ordnung der zugehörigen Gruppe $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{a}$ ist dann gleich

$$(p^{mn}-1)(p^{mn}-p^m)\dots(p^{mn}-p^{m(n-1)})$$
$$= p^{\frac{mn(n-1)}{2}}(p^{mn}-1)(p^{m(n-1)}-1)\dots(p^m-1).^{17)}$$

Die Ordnung der Sylowgruppe von $\mathfrak{A}$ ist also gleich der Anzahl der Elemente des in § 1 konstruierten maximalen nilpotenten Unterringes $\mathfrak{b}$ in $\mathfrak{a}$.

Es sei nun $\mathfrak{n}$ das maximale nilpotente Ideal eines allgemeinen p-Ringes $\mathfrak{o}$, und zwar die Anzahl der Elemente aus $\mathfrak{n}$ gleich p^λ. Ist der Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{n}$ die direkte Summe $\mathfrak{o}_1 + \mathfrak{o}_2 + \dots + \mathfrak{o}_t$, wo $\mathfrak{o}_i$ mit dem vollständigen Matrizenringe des Grades n_i in einem Galoisschen Felde mit p^{m_i} Elementen isomorph ist, so ist die Anzahl der Elemente aus $\mathfrak{o}$ gleich $p^{\lambda + \sum_{i=1}^{t} m_i n_i^2}$ und die Ordnung der zugehörigen Gruppe $\mathfrak{G}$ gleich

$$p^{\lambda + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t} m_i n_i (n_i - 1)} \prod_{i=1}^{t} (p^{m_i n_i}-1)(p^{m_i(n_i-1)}-1)\dots(p^{m_i}-1),$$

da bei der Strahlbildung dem Restklassenring $\mathfrak{o}/\mathfrak{n} = \mathfrak{o}_1 + \mathfrak{o}_2 + \dots + \mathfrak{o}_t$ die Faktorgruppe $\mathfrak{G}/\mathfrak{N} = \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2 \times \dots \times \mathfrak{G}_t$ entspricht, wo $\mathfrak{N}$ gleich dem Strahl $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{n}\}$ und $\mathfrak{G}_i$ mit der zugehörigen Gruppe von $\mathfrak{o}_i$ isomorph ist[18]).

Satz 4. *Der Strahl $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{m}\}$ eines p-Ringes $\mathfrak{o}$ modulo einem maximalen nilpotenten Unterringe $\mathfrak{m}$ ist eine Sylowgruppe der zugehörigen Gruppe (Einheitengruppe) von $\mathfrak{o}$.*

---

[16]) Maclagan Wedderburn, A theorem on finite algebra, Transactions of the American Math. Soc. 6; L. E. Dickson, On finite algebra, Göttinger Nachr. 1905; E. Artin, Über einen Satz von Herrn J. H. Maclagan Wedderburn, Abhandlungen aus dem Math. Seminar zu Hamburg 5 (1927), S. 245–250.

[17]) L. E. Dickson, Linear groups with an exposition of the Galois field theory, Leipzig 1901, S. 77.

[18]) Vgl. den Anfang der Einleitung und Hilfssatz 3.

Die Richtigkeit dieses Satzes für den in § 1 konstruierten maximalen nilpotenten Unterring $\mathfrak{m}$ eines p-Ringes $\mathfrak{o}$ erkennt man leicht, wenn man die Ordnung der Sylowgruppe und die Anzahl der Elemente des maximalen nilpotenten Unterringes vergleicht (siehe oben), da nach Satz 2 der Strahl modulo einem nilpotenten Unterringe nur aus Einheiten besteht und eine Gruppe bildet. Ist $\mathfrak{m}^*$ irgendein maximaler nilpotenter Unterring von $\mathfrak{o}$, so ist die Ordnung der Gruppe $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{m}^*\}$ eine Potenz von p, und daher ist $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{m}^*\}$ in einer Sylowgruppe enthalten, die sich aber durch eine Einheit P aus $\mathfrak{o}$ in der Form $P^{-1}\{\mathfrak{o}, \mathfrak{m}\}P = \{\mathfrak{o}, P^{-1}\mathfrak{m}P\}$ darstellt[19]). Also ist $\mathfrak{m}^*$ in $P^{-1}\mathfrak{m}P$ enthalten, und nach der Definition von $\mathfrak{m}^*$ ist daher $\mathfrak{m}^* = P^{-1}\mathfrak{m}P$, da $P^{-1}\mathfrak{m}P$ wieder ein nilpotenter Unterring ist. Also ist $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{m}^*\} = P^{-1}\{\mathfrak{o}, \mathfrak{m}\}P$ eine Sylowgruppe der zugehörigen Gruppe $\mathfrak{G}$.

Gleichzeitig bewiesen ist der folgende Satz für einen p-Ring.

Satz 5. *Alle maximalen nilpotenten Unterringe eines endlichen Ringes sind miteinander konjugiert.*

Nach Satz 3 ist nämlich ein endlicher Ring $\mathfrak{o}$ die direkte Summe $\mathfrak{o}_1 + \mathfrak{o}_2 + \dots + \mathfrak{o}_m$ von p-Ringen $\mathfrak{o}_i$. Ist $\mathfrak{m}$ ein maximaler nilpotenter Unterring von $\mathfrak{o}$, so ist nach Hilfssatz 2 also $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \dots + \mathfrak{m}_m$, wo $\mathfrak{m}_i$ ein maximaler nilpotenter Unterring von $\mathfrak{o}_i$ ist. Ist $\mathfrak{m}^* = \mathfrak{m}_1^* + \mathfrak{m}_2^* + \dots + \mathfrak{m}_m^*$ ein anderer maximaler nilpotenter Unterring von $\mathfrak{o}$, so gibt es nach oben Einheiten P_i in $\mathfrak{o}_i$, so daß $P_i^{-1}\mathfrak{m}_i P_i = \mathfrak{m}_i^*$ ist. Setzt man $P = P_1 + P_2 + \dots + P_m$, so ist $P^{-1} = P_1^{-1} + P_2^{-1} + \dots + P_m^{-1}$ und $P^{-1}\mathfrak{m}P = \mathfrak{m}^*$, womit der Satz bewiesen ist.

Man kann also jeder Sylowgruppe der zugehörigen Gruppe $\mathfrak{G}$ eines p-Ringes $\mathfrak{o}$ eineindeutig durch Strahlbildung einen maximalen nilpotenten Unterring von $\mathfrak{o}$ zuordnen.

Aus Satz 4 folgt nach Satz 1

Satz 6. *Der Strahl* $\{\mathfrak{o} \,|\, \mathfrak{n}\}$ *eines p-Ringes* $\mathfrak{o}$ *modulo dem maximalen nilpotenten Ideal* $\mathfrak{n}$ *ist der Durchschnitt aller Sylowgruppen der zugehörigen Gruppe (Einheitengruppe).*

Man kann nun einige Sätze über Sylowgruppen in die Theorie der maximalen nilpotenten Unterringe eines endlichen Ringes übertragen.

Zusatz 1. *Der Durchschnitt aller Sylowgruppen der zugehörigen Gruppe eines p-Ringes ist ein Normalteiler der zugehörigen Gruppe.*

Denn der Strahl $\{\mathfrak{o} \,|\, \mathfrak{n}\}$ bildet einen Normalteiler von $\mathfrak{G}$, wenn $\mathfrak{n}$ ein nilpotentes Ideal in $\mathfrak{o}$ ist.

---

[19]) Vgl. etwa A. Speiser, Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung, Berlin 1927, 2. Aufl., S. 66.

Zusatz 2. *Die im Normalisator eines maximalen nilpotenten Unterringes* $\mathfrak{m}$ *eines* p*-Ringes enthaltenen Einheiten bilden den Normalisator der Sylowgruppe* $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{m}\}$ *der zugehörigen Gruppe.*

Dieser Satz folgt aus Hilfssatz 10 unmittelbar, da ein Element aus $\mathfrak{o}$ dann und nur dann mit $\{\mathfrak{o}, \mathfrak{m}\}$ vertauschbar ist, wenn es mit $\mathfrak{m}$ vertauschbar ist.

Zusatz 3. *Die Anzahl der maximalen nilpotenten Unterringe eines* p*-Ringes ist gleich der Anzahl der Sylowgruppen der zugehörigen Gruppe und wird durch* $\prod_{i=1}^{t}(p^{m_i n_i}-1)(p^{m_i(n_i-1)}-1)\ldots(p^{m_i}-1)/(p^{m_i}-1)^{n_i}$ *gegeben.*

Denn diese Anzahl ist gleich dem Index des Normalisators einer Sylowgruppe in der zugehörigen Gruppe. Die Ordnung des Normalisators $\mathfrak{P}$ einer Sylowgruppe $\mathfrak{M} = \{\mathfrak{o}, \mathfrak{m}\}$ ist gleich $p^{\lambda + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t} m_i n_i (n_i - 1)} \prod_{i=1}^{t} (p^{m_i}-1)^{n_i}$. Denn $\mathfrak{P}/\mathfrak{N} = \mathfrak{P}_1 \times \mathfrak{P}_2 \times \ldots \times \mathfrak{P}_t$, wo $\mathfrak{N}$ gleich dem Strahl $\{\underline{\mathfrak{o}|\mathfrak{n}}\}$ und $\mathfrak{P}_i$ der Normalisator der Sylowgruppe $\mathfrak{M}_i = \{\mathfrak{o}_i, \mathfrak{m}_i\}$ von $\mathfrak{G}_i$ ist. Die Ordnung von $\mathfrak{P}_i$ ist aber nach Hilfssatz 9 gleich $p^{\frac{1}{2} m_i n_i (n_i-1)}(p^{m_i}-1)^{n_i}$. Vergleicht man die Ordnung von $\mathfrak{P}$ mit der von $\mathfrak{G}$, so erkennt man die Richtigkeit von Zusatz 3.

Nach Satz 3 folgt aus Zusatz 3

Zusatz 4. *Die Anzahl der maximalen nilpotenten Unterringe eines endlichen Ringes ist kongruent* 1 *modulo* $(p_1, p_2, \ldots, p_s)$, *wobei die Anzahl der Elemente des Ringes aus* p_i *zusammengesetzt ist.*

D. h. die Anzahl stellt sich in der Form $1 + \sum_{i=1}^{s} r_i p_i$ dar.

(Eingegangen am 6. 2. 1929.)