Über den sogenannten Produktsatz der Dimensionstheorie.

Von

Witold Hurewicz in Amsterdam.

---

1. Sind $A_1, A_2, \ldots, A_n$ irgendwelche topologische Räume und bedeutet a_i einen beliebigen Punkt von A_i, so nennt man die Menge aller Komplexe $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, nachdem dieselbe in bekannter Weise mit Umgebungen versehen ist, das *topologische Produkt*[1]) (oder kürzer den Produktraum) der n Räume A_i. Wir verwenden hierfür die Bezeichnung

$$[A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n].$$

In diesem Sinne ist also der Euklidische Zahlenraum R_n das topologische Produkt aus n Strecken.

Sind (wie wir es im folgenden stets voraussetzen wollen) die Räume $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *metrische* Räume, so kann ihr Produktraum ebenfalls metrisiert werden, indem als Abstand zweier Punkte $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $(a_1', a_2', \ldots, a_n')$ etwa die Zahl

$$\text{(a)} \qquad \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\overline{a_i, a_i'}\right)^2}$$

definiert wird, wo $(\overline{a_i, a_i'})$ den Abstand zwischen den Punkten a_i und a_i' in A_i bedeutet.

Bemerken wir noch, daß das topologische Produkt aus (endlich) kompakten Räumen immer selbst kompakt ist.

2. Bezüglich der Eigenschaften des Produktraumes in ihrer Abhängigkeit von den Eigenschaften der Faktorenräume liegen bis jetzt nur sehr wenige Ergebnisse vor. Die wichtigste Frage dieses Problemkreises betrifft die *Dimension* des Produktraumes.

Naheliegend ist die Vermutung — sie wurde von Menger als der *Produktsatz der Dimensionstheorie* bezeichnet —, daß die Dimension des

---

[1]) Vgl. Tietze, Math. Annalen **88**, S. 298 (das topologische Produkt wird von Tietze auch für unendlich viele Faktoren definiert).

Produktraumes immer aus den Dimensionen der Faktoren durch Addition entsteht:

$$\dim [A_1 \times A_2] = \dim A_1 + \dim A_2 .$$

Da die Ungleichung: $\dim [A_1 \times A_2] \leq \dim A_1 + \dim A_2$ schon mit den einfachsten Mitteln bewiesen werden kann[2]), reduziert sich der wesentliche Inhalt des Produktsatzes auf die Behauptung:

$$\dim [A_1 \times A_2] \geqq \dim A_1 + \dim A_2 .$$

Ein Spezialfall des Produktsatzes (und zwar, von dem trivialen Fall der nulldimensionalen Faktoren abgesehen, der einzige Spezialfall, der bis jetzt erledigt wurde) ist der Brouwersche „Rechtfertigungssatz des Dimensionsbegriffes“[3]), welcher besagt, daß der R_n (das topologische Produkt aus n Strecken) die Dimension n hat.

Wenn der Produktsatz richtig ist, dann muß offenbar die folgende Aussage gelten: Das Produkt von n Räumen, deren jeder eine positive Dimension besitzt, ist mindestens n-dimensional. Im folgenden soll diese Behauptung unter Beschränkung auf metrische kompakte Räume bewiesen werden. Da jeder kompakte metrische Raum von einer positiven Dimension bekanntlich ein Teilkontinuum enthält[4]), können wir den ausgesprochenen Satz auch in die folgende Gestalt bringen:

(A) *Das Produkt von n kompakten (metrischen) Kontinua ist mindestens n-dimensional.*

Daraus folgt insbesondere, daß das Produkt von n eindimensionalen kompakten Räumen genau n-dimensional ist, was eine Verallgemeinerung des oben erwähnten Brouwerschen Theorems ist. Auf jenes Theorem wird die Behauptung (A) letzten Endes auch zurückgeführt.

3. Der Beweis des Theorems (A) erfordert einige vorbereitende Betrachtungen. Wir knüpfen an den bekannten dimensionstheoretischen Satz von Menger und Urysohn an:

I. Ist der kompakte Raum R höchstens $(n-1)$-dimensional, so kann zu jeder positiven Zahl ε ein System aus endlich vielen abgeschlossenen Teilmengen von R angegeben werden, die 1. in ihrer Gesamtheit den ganzen Raum R ausfüllen, die 2. durchwegs von Durchmessern $< \varepsilon$ sind und die 3. zu je $n+1$ fremd sind[5]).

---

[2]) Vgl. Menger, Dimensionstheorie (1928), S. 246.

[3]) Brouwer, Journ. f. Math. **142**, S. 148; vgl. Menger, a. a. O. S. 244; ferner s. unten [10]).

[4]) Vgl. Menger, a. a. O. S. 213.

[5]) Vgl. Menger, a. a. O. S. 155 ff. Nach Urysohn gilt auch die Umkehrung des Theorems (wegen des Beweises siehe etwa Menger, a. a. O. S. 174 ff.).

Ein System von abgeschlossenen Mengen, das nur der Bedingung 1 genügt, heißt eine *Überdeckung* des Raumes R; ist überdies noch die Bedingung 2 erfüllt, so sprechen wir von einer *ε-Überdeckung*. Von einer Überdeckung, welche die Bedingung 3 befriedigt, sagen wir im Anschluß an Urysohn, sie sei von einer *Ordnung* $\leqq n$, wobei also, genauer gesprochen, unter der Ordnung einer Überdeckung die größte natürliche Zahl m verstanden wird, für die es Punkte gibt, die m Mengen der Überdeckung gemeinsam sind.

Dem angeführten Satz zufolge ist das Nicht-Vorhandensein von ε-Überdeckungen von einer Ordnung $\leqq n$ bei genügend kleinem ε eine hinreichende Bedingung dafür, daß der kompakte Raum R mindestens n-dimensional sei. Um aus diesem *negativen* Kriterium ein *positives*[5a]) herzuleiten, führen wir die folgende Begriffsbildung ein:

Sind zwei Überdeckungen U und V desselben Raumes R gegeben, wobei jede Menge des Systems V entweder mit einer Menge des Systems U identisch ist, oder Summe von einigen Mengen des Systems U ist, so nennen wir V eine aus der Überdeckung U *abgeleitete Überdeckung*.

Wir formulieren nun den Satz:

II. *Damit der kompakte Raum R eine Dimension $\geqq n$ habe, ist hinreichend, daß es eine Zahl $\eta > 0$ von der folgenden Eigenschaft gebe: Zu jedem noch so kleinen positiven ε existiert eine ε-Überdeckung U_ε derart, daß sämtliche aus ihr abgeleitete η-Überdeckungen eine Ordnung $> n$ haben*[6])[7]).

Nehmen wir zum Beweis an, der Raum R, für den wir die Bedingung des Satzes als erfüllt voraussetzen, sei höchstens $(n-1)$-dimensional; dann gibt es nach Satz I eine η-Überdeckung von einer Ordnung $\leqq n$; diese Überdeckung möge aus den Mengen

$$A_1, A_2, \ldots, A_m$$

bestehen, die nach Annahme zu je $n+1$ fremd sind. Wir können eine positive Zahl ε bestimmen, derart, daß die Mengen $U(A_i, \varepsilon)$ (darunter wird üblicherweise die Menge aller Punkte verstanden, deren Abstand von der abgeschlossenen Menge A_i kleiner ist als ε) gleichfalls zu je $n+1$

[5a]) Vgl. in diesem Zusammenhange die Stellungnahme Alexandroffs (Göttinger Nachrichten, Juli 1928, S. 26), nach dessen Ansicht „alle bis jetzt bekannten Eigenschaften der *mindestens* n-dimensionalen Mengen nicht nur der Form, sondern auch dem Inhalt nach einen ausgesprochen negativen Charakter haben".

[6]) Die Bedingung ist auch notwendig, wie in trivialer Weise aus dem sub [5]) zitierten Urysohnschen Satze hervorgeht.

[7]) Die Tatsache, daß die Voraussetzungen von Satz I und von Satz II äquivalent sind, wurde implizite von Lebesgue verwendet; vgl. Fund. Math. 2, S. 257.

fremd sind; dabei wählen wir ε so klein, daß die Durchmesser der $U(A_i, \varepsilon)$ unterhalb η verbleiben.

Sei jetzt U_ε eine gemäß der Bedingung des zu beweisenden Satzes gewählte ε-Überdeckung von R, und sei B_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ die Summe aller derjenigen Mengen des Systems U_ε, welche mit A_i gemeinsame Punkte haben. Es ist dann

$$(') \qquad A_i \subset B_i \subset U(A_i, \varepsilon).$$

Die m Mengen B_i bilden eine aus U_ε abgeleitete Überdeckung von R, und aus den Beziehungen (′) geht hervor, daß dies eine η-Überdeckung ist und daß ihre Ordnung $\leq n$ ist, was im Widerspruch steht mit der Wahl der Überdeckung U_ε. Es ist somit gezeigt, daß R mindestens n-dimensional ist.

4. Wir erinnern jetzt an die folgende einfache Eigenschaft der kompakten Kontinua:

Ist C ein kompaktes Kontinuum und ε eine beliebige positive Zahl, so kann eine endliche Folge von abgeschlossenen Teilmengen von C

$$(\mathrm{X}) \qquad M_1, M_2, \ldots, M_k$$

angegeben werden, so daß 1. die Mengen M_i eine ε-Überdeckung von C bilden und daß 2. je zwei aufeinanderfolgende Mengen M_i und M_{i+1} mindestens einen gemeinsamen Punkt haben.

Aus der Kompaktheit von C folgt nämlich zunächst die Existenz einer ε-Überdeckung, und aus dem Zusammenhang von C ergibt sich sodann, daß die Mengen dieser Überdeckung in der Weise angeordnet werden können (wobei sie auch mehrfach gezählt werden dürfen), daß die Bedingung 2. realisiert wird[8]).

Wir fügen diesem Satz die folgende Bemerkung hinzu: Sind p und q zwei beliebig gegebene Punkte von C, so kann die Folge (X) immer so gewählt werden, daß die erste Menge M_1 den Punkt p und die letzte M_k den Punkt q enthalte. Nehmen wir nämlich an, p komme in M_1 nicht vor, und sei $i > 1$ der erste Index, für den $p \subset M_i$, dann ersetzen wir die Folge (X) durch die Folge:

$$M_i, M_{i-1}, \ldots, M_2, M_1, M_2, \ldots, M_i, \ldots, M_k.$$

Durch eine analoge Modifikation erreicht man, daß der Punkt q der letzten Menge der Folge angehört.

5. Nun sind wir mit Hilfsmitteln genügend ausgerüstet, um an den Beweis des im § 2 formulierten Theorems (A) herangehen zu können.

Es seien also

$$C_1, C_2, \ldots, C_n$$

[8]) Siehe etwa v. Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie, S. 100.

n kompakte Kontinua. Wir haben zu zeigen, daß

$$\dim [C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_n] \geqq n$$

ist.

Bezeichnen wir mit η den kleinsten unter den Durchmessern der n Kontinua C_i (es ist natürlich $\eta > 0$) und wählen in jedem C_i ein für allemal je zwei Punkte a_i und b_i, deren Abstand nicht kleiner ist als η.

Sei ε eine willkürliche positive Zahl, die wir im folgenden festhalten wollen. In jedem C_i bestimmen wir eine endliche Folge von abgeschlossenen Teilen:

$$\text{(v)} \qquad M_1^i, M_2^i, \ldots, M_k^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

welche eine ε-Überdeckung von C_i bilden und so angeordnet sind, daß je zwei aufeinanderfolgende einen gemeinsamen Punkt haben und daß a_i in M_1^i und b_i in M_k^i liegt. Die Anzahl k der Mengen haben wir als dieselbe für alle C_i angenommen, was natürlich zulässig ist, da wir die Anzahl der Mengen in der Folge (v) durch mehrfache Zählung beliebig vergrößern können.

Betrachten wir jetzt den Produktraum:

$$P = [C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_n]$$

und denken wir uns denselben metrisiert nach der Formel (a) in § 1. Die Mengen

$$\text{(v)} \qquad M_{i_1 i_2 \ldots i_n} = [M_{i_1}^1 \times M_{i_2}^2 \times \ldots \times M_{i_n}^n] \quad (i_1, i_2, \ldots, i_n = 1, 2, \ldots, k)$$

bilden eine Überdeckung von P, und ihre Durchmesser sind kleiner als $\varepsilon \sqrt{n}$ (also mit ε beliebig klein). Wir wollen zeigen, daß die so hergestellte Überdeckung von P in Bezug auf die Zahl η die im Satz II von § 3 angegebene Eigenschaft besitzt.

6. Wir greifen aus dem System (v) eine Anzahl r von Mengen heraus:

$$\text{(w)} \qquad M_{i_1^1 i_2^1 \ldots i_n^1}, M_{i_1^2 i_2^2 \ldots i_n^2}, \ldots, M_{i_1^r i_2^r \ldots i_n^r},$$

und fragen: unter welchen Bedingungen haben diese r Mengen einen gemeinsamen Punkt? Nennen wir zur Abkürzung zwei n-Tupel natürlicher Zahlen $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ und $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ *benachbart*, wenn jede der Differenzen $i_m - j_m$ $(m = 1, 2, \ldots, n)$ entweder $= 0$ oder $= 1$ ist. Dann gilt: Damit die Mengen (w) einen gemeinsamen Punkt haben, ist *hinreichend*, daß je zwei von den r Komplexen

$$(i_1^m, i_2^m, \ldots, i_n^m) \qquad (m = 1, 2, \ldots, r)$$

benachbart seien.

Ist nämlich diese Voraussetzung erfüllt, so gibt es bei festem $l \leqq n$ unter den r Indizes

$$i_l^1, i_l^2, \ldots, i_l^r$$

höchstens zwei verschiedene, die sich dann um eine Einheit unterscheiden. Das System der Teilmengen

$$M_{i_l^1}^l, M_{i_l^2}^l, \ldots, M_{i_l^r}^l$$

von C_l reduziert sich demnach entweder auf eine einzige Menge oder auf zwei *nicht-fremde* Mengen. Jedenfalls gibt es also (für $l = 1, 2, \ldots, n$) in C_l einen Punkt — wir nennen ihn p_l —, so daß für $k = 1, 2, \ldots, r$ $p_l < M_{i_l^k}^l$. Der Punkt $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ von P gehört dann, wie leicht ersichtlich, jedem der Produkte

$$M_{i_1^m i_2^m \ldots i_n^m} = [M_{i_1^m}^1 \times M_{i_2^m}^2 \times \ldots \times M_{i_n^m}^n] \qquad (m = 1, 2, \ldots, r)$$

an.

7. Der weitere Gedankengang besteht darin, daß wir das System der Mengen $M_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ hinsichtlich der Inzidenzbeziehungen zwischen diesen Mengen mit einem System von Intervallen des R_n vergleichen, dessen Eigenschaften uns wohlbekannt sind.

Sei W das Einheitsintervall des Koordinatenraumes R_n:

$$0 \leqq x_m \leqq 1 \qquad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

Wir teilen W in k^n Würfel $W_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ $(i_1 \ldots i_n = 1, 2, \ldots, k)$ von der Kantenlänge $\frac{1}{k}$ ein; $W_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ ist durch die Koordinatenungleichungen:

$$\frac{i_m - 1}{k} \leqq x_m \leqq \frac{i_m}{k} \qquad (m = 1, 2, \ldots, n)$$

definiert. Eine elementargeometrische Betrachtung lehrt, daß r Würfel $(r \leqq k^n)$

$$\text{(ww)} \qquad W_{i_1^1 i_2^1 \ldots i_n^1}, W_{i_1^2 i_2^2 \ldots i_n^2}, \ldots, W_{i_1^r i_2^r \ldots i_n^r}$$

dann und nur dann einen gemeinsamen Punkt haben, wenn die entsprechenden r Indizeskomplexe zu je zwei benachbart sind. Die Bemerkung des vorigen Paragraphen können wir daher in die Gestalt bringen:

Wenn die r Würfel (ww) einen gemeinsamen Punkt haben, so auch die r Mengen (w).

8. Nunmehr bilden wir aus der Überdeckung (v) von P eine abgeleitete η-Überdeckung[8a]):

$$S_1, S_2, \ldots, S_m,$$

[8a]) η bedeutet dabei, wie im § 5, den größten unter den Durchmessern der C_i.

wo also S_i Summe ist von einigen Mengen $M_{i_1 \dots i_n}$ (bzw. mit einer dieser Mengen identisch); indem wir die *entsprechenden* (d. h. mit denselben Indizes versehenen) Würfel $W_{i_1 \dots i_n}$ in Würfelsummen Z_i vereinigen, erhalten wir eine Überdeckung

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_m$$

von W. Wir beweisen die folgende Eigenschaft der letzteren Überdeckung:

Keiner der Würfelkomplexe Z_i besitzt Punkte auf gegenüberliegenden $(n-1)$-dimensionalen Seiten von W.

Angenommen nämlich, einer der genannten Würfelkomplexe, etwa Z_i, berühre ein Paar von gegenüberliegenden Seiten von W; der Einfachheit halber wollen wir voraussetzen, dies seien die Seiten $x_1 = 0$ und $x_1 = 1$. Unter den Würfeln, aus denen Z_i zusammengesetzt ist, kommen dann zwei

$$W_{i_1 i_2 \dots i_n}, \quad W_{j_1 j_2 \dots j_n}$$

vor mit

$$i_1 = 1, \quad j_1 = k.$$

Betrachten wir die entsprechenden Produktmengen

$$(') \qquad \begin{aligned} M_{1, i_2, \dots, i_n} &= [M_1^1 \times M_{i_2}^2 \times \dots \times M_{i_n}^n], \\ M_{k, j_2, \dots, j_n} &= [M_k^1 \times M_{j_2}^2 \times \dots \times M_{j_n}^n], \end{aligned}$$

welche beide Teilmengen von S_i sind, und erinnern wir uns, daß es im Kontinuum C_1 zwei Punkte (nämlich die im § 5 verwendeten Punkte a_1 und b_1) mit einem Abstand $\geqq \eta$ gibt, deren ersterer in M_1^1, und deren zweiter in M_k^1 enthalten ist. Daraus geht hervor, daß man im Produktraum P zwei Punkte bestimmen kann, die resp. in den Mengen (′) (also beide in S_i) gelegen sind und einen Abstand $\geqq \eta$ voneinander haben[9]). Dann ist also der Durchmesser von S_i nicht kleiner als η im Widerspruch mit der anfangs gemachten Voraussetzung, die Überdeckung $\{S_i\}$ sei eine η-Überdeckung.

Aus der bewiesenen „Randeigenschaft" der Mengen Z_i folgt nach einem fundamentalen Satze von Lebesgue und Brouwer[10]), daß es in W mindestens

---

[9]) Ist nämlich q_i ein beliebig gewählter Punkt von C_i, so haben die Punkte $(a_1, q_{i_2}, q_{i_3}, \dots, q_{i_n})$ und $(b_1, q_{j_2}, q_{j_3}, \dots, q_{j_n})$ des Produktraumes P die erwähnte Eigenschaft.

[10]) Vgl. Lebesgue, Math. Annalen **70**, S. 166 und Fund. Math. **2**, S. 257. Das erste Mal wurde das Theorem von Brouwer (Journ. f. Math. **142**, S. 149) bewiesen. Es bildet die Grundlage für den oben erwähnten Brouwerschen Rechtfertigungssatz des Dimensionsbegriffes, so daß also in der vorliegenden Arbeit, wie bereits oben hervorgehoben, der Nachweis der n-Dimensionalität von P im wesentlichen auf die bekannte Tatsache, daß R n-dimensional ist, zurückgeführt wird. Einfache Beweise des Lebesgue-Brouwerschen Theorems finden sich bei Sperner (Hamburger Berichte **6**, S. 265) und bei mir (Math. Annalen **101** (1929), S. 210).

einen Punkt gibt, der $n+1$ der Komplexe Z_i gemeinsam ist, daß m. a. W. $n+1$ Würfel

$$W_{i_1^1 i_2^1 \ldots i_n^1},\ W_{i_1^2 i_2^2 \ldots i_n^2},\ \ldots,\ W_{i_1^{n+1} i_2^{n+1} \ldots i_n^{n+1}}$$

existieren, die einen gemeinsamen Punkt besitzen, und dabei der Reihe nach $n+1$ verschiedenen Komplexen Z_i angehören. Gehen wir zu den entsprechenden Teilmengen von P

$$M_{i_1^1 i_2^1 \ldots i_n^1},\ M_{i_1^2 i_2^2 \ldots i_n^2},\ \ldots,\ M_{i_1^{n+1} i_2^{n+1} \ldots i_n^{n+1}}$$

über, so haben auch diese Mengen nach § 6 einen gemeinsamen Punkt und sind vermöge der Korrespondenz zwischen den S_i und den Z_i der Reihe nach in $n+1$ verschiedenen Mengen S_i enthalten. Somit gibt es Punkte von P, die $n+1$ der Mengen S_i gemeinsam sind, d. h. die Ordnung der Überdeckung $\{S_i\}$ ist mindestens $n+1$. Da $\{S_i\}$ eine beliebige aus der $\varepsilon\sqrt{n}$-Überdeckung $\{M_{i_1 \ldots i_n}\}$ abgeleitete η-Überdeckung war, so ist nach Satz II in § 3 der Raum P mindestens n-dimensional. Das am Anfang der Arbeit ausgesprochene Theorem ist somit bewiesen[11]).

[11]) Es ist zu vermuten, daß das Produkt von n Kontinua nicht nur n-dimensional, sondern sogar *n-stufig zusammenhängend* sein muß. (Wegen des letzten Begriffes vgl. Menger a. a. O., S. 214 ff.)

(Eingegangen am 18. 10. 1928.)