Topologische Begründung des Kalküls der abzählenden Geometrie.

Von

Bartel L. van der Waerden in Groningen (Niederlande).

§ 1.

Einleitung.

Eines der Pariser Probleme Hilberts[1]) lautet: „Eine strenge Begründung des Schubertschen Abzählungskalküls".

In früheren Arbeiten[2]) habe ich gesucht darzutun, daß das Kernproblem der abzählenden Geometrie besteht in der Aufstellung einer brauchbaren Definition der „Multiplizitäten" oder der Vielfachheiten, mit denen die Lösungen eines algebraisch-geometrischen Problems gezählt werden müssen, damit das „Prinzip der Erhaltung der Anzahl" für diese Lösungen bei jeder Spezialisierung der Daten des Problems gelte. In der Arbeit W_1 habe ich gezeigt, daß man bei jedem Problem, dessen Gleichungen homogen in den Unbekannten und rational in einigen Parametern sind, die Lösungen für jede spezielle Parameterzahl in einer und nur einer Weise mit solchen Vielfachheiten versehen kann, daß Anzahl und algebraische Eigenschaften der Lösungen bei diesen Parameterspezialisierungen erhalten bleiben, und daß bei allgemeiner Parameterwahl die Multiplizitäten gleich 1 sind. Damit war eine implizite Definition der Multiplizitäten gegeben, aber noch kein brauchbares Mittel, diese in vorliegenden Fällen (außer den allereinfachsten) wirklich zu bestimmen. Eine besondere Schwierigkeit bei der Anwendung war noch, daß mit der Möglichkeit von „Lösungen mit der

---

[1]) D. Hilbert, Mathematische Probleme, Gött. Nachr. 1900, S. 253.

[2]) B. L. v. d. Waerden, Diss. Amsterdam 1926. Der Multiplizitätsbegriff der algebraischen Geometrie, Math. Annalen **97** (1927), S. 756 (*zitiert* W_1). Eine Verallgemeinerung des Bézoutschen Theorems, Math. Annalen **99** (1928), S. 497 (*zitiert* W_2). On Hilbert's function etc., Proc. Kon. Ak. Amsterdam **31** (1928), S. 749.

Multiplizität Null“, also von Lösungen, die bei spezieller Parameterwahl vorhanden sind, aber denen im allgemeinen Fall nichts entspricht, gerechnet werden mußte.

Die für den Schubertschen „Bedingungskalkül“ [3]) wichtigen Fälle sind die, wo es sich darum handelt, die Anzahl der gemeinsamen Elemente von zwei oder mehr algebraischen Varietäten [4]) in einer festen singularitätenfreien Mannigfaltigkeit (z. B. im komplexen projektiven Raum) zu bestimmen. Für den Fall einer Kurve V_1 und einer Hyperfläche V_{n-1} im projektiven R_n sind die Bestimmungen der Vielfachheiten durch explizite Formeln und die Berechnung der Gesamtzahl sowohl auf funktionentheoretischem als auf idealtheoretischem Wege gelungen [5]). Beide Bestimmungsweisen scheiterten jedoch gänzlich im allgemeineren Fall der Schnittpunkte einer V_r und V_{n-r} im projektiven R_n [6]). Die oben dargestellte implizite Multiplizitätsdefinition führte aber in diesen Fällen noch zum Ziel [7]). Dadurch nämlich, daß die Varietäten V_r und V_s mittels einer projektiven Transformation mit unbestimmten Koeffizienten in allgemeine Lage zueinander gebracht wurden, war das Schnittpunktsproblem abhängig gemacht von den Transformationsparametern, und die obige Definition der Multiplizität wurde anwendbar. Es gelang durch eine äußerst mühevolle Analyse, für spezielle Werte der Parameter („ausgeartete Transformation“) Anzahl und Multiplizitäten der Schnittpunkte algebraisch zu bestimmen, wobei sich das erwartete Ergebnis: Summe der Multiplizitäten = Produkt der Gradzahlen ergab, welches Ergebnis sich dann vermöge der „Erhaltung der Anzahl“ auf die allgemeine Lage sowie auf alle überhaupt möglichen Spezialisierungen übertrug.

Soweit sie reichte, hatte die algebraische Methode eine größere Allgemeinheit als jede analytische, da sie auf beliebige abstrakte Geometrien (die zu abstrakten Körpern gehören) anwendbar war. Aber bei der Übertragung der Methode auf Varietäten von Geraden u. dgl. stieß die Durchführung der Beweise auf immer wachsende Schwierigkeiten, und für solche Gebilde, die nicht wie der projektive Raum eine transitive Gruppe von Transformationen in sich gestatten, ist die Übertragung der obigen Multiplizitätsdefinition ganz ausgeschlossen.

---

[3]) H. Schubert, Kalkül der abzählenden Geometrie, Leipzig 1879.

[4]) Da das Wort *Mannigfaltigkeit* in dieser Arbeit, dem topologischen Sprachgebrauch entsprechend, für *singularitätenfreie* Räume reserviert bleibt, werde ich für die durch algebraische Gleichungen definierten Punktmengen das französische Wort „*Varietäten*“ gebrauchen.

[5]) Für Literatur siehe W_2, Einleitung.

[6]) W_2, Einleitung und § 11.

[7]) W_2.

Auch die analytischen Methoden [Zeuthen[8]), Halphen[9]) u. a.] erreichen nur bestimmte Fälle.

Aber die Topologie besitzt einen Multiplizitätsbegriff: den Begriff des Index eines Schnittpunktes von zwei Komplexen[10]), der schon von Lefschetz[11]) mit Erfolg auf die Theorie der algebraischen Flächen sowie auf Korrespondenzen auf algebraischen Kurven angewandt wurde. Soll dieser Indexbegriff, angewandt auf algebraische Varietäten im komplexen Gebiet, sich als Multiplizitätsbegriff für die abzählende Geometrie eignen, so muß er die folgenden drei Eigenschaften besitzen:

1. Die Summe der Indizes soll dem „Prinzip der Erhaltung der Anzahl" bei stetigen Änderungen der schneidenden Varietäten genügen.

2. Die Indizes sollen für einfache Schnittpunkte (d. h. wenn die Tangentialräume der schneidenden Varietäten nur einen Punkt gemein haben) alle den Wert 1 haben.

3. Sie sollen keine negativen Werte annehmen.

Die erste Eigenschaft des topologischen Indexbegriffs folgt fast unmittelbar aus seiner Definition durch simpliziale Approximationen. Die zweite Eigenschaft wurde allgemein für analytische Varietäten von Lefschetz[12]) bewiesen. Und über die dritte Eigenschaft hinaus läßt sich sogar zeigen, daß die Indizes bei analytischen (also insbesondere algebraischen) Varietäten immer *positiv* sind, wodurch also zugleich das unangenehme Vorkommnis der „Multiplizität Null" ausgeschlossen wird. Dieser Satz über analytische Varietäten im komplexen Gebiet ist das Hauptergebnis dieser Arbeit. Aus den Eigenschaften 1. bis 3. folgt dann unschwer die Übereinstimmung des topologischen mit dem algebraischen Multiplizitätsbegriff für den projektiven Raum.

Die Topologie leistet aber noch mehr als die Ermöglichung einer brauchbaren Multiplizitätsdefinition. Sie verschafft zugleich eine Fülle von Mitteln, die Indexsumme aller Schnittpunkte oder „Schnittpunktszahl", deren Bestimmung das Ziel aller abzählenden Methoden ist, in einfacher Weise zu bestimmen, indem sie zeigt, daß diese Indexsumme nur von den

---

[8]) H. G. Zeuthen, Abzählende Methoden (Leipzig 1914); Enzyklopädie III, 3.

[9]) Halphen, Comptes Rendus (4. Sept. 1876).

[10]) S. Lefschetz, Trans. Am. Math. Soc. 28 (1926), S. 1 (*zitiert* L_1).

[11]) S. Lefschetz, L'analysis situs et la géométrie algébrique, Paris 1924.

[12]) loc. cit. [11]), S. 19. Lefschetz schließt aus den Eigenschaften 1., 2. auf die (zur Positivität verschärfte) Eigenschaft 3. mit der Begründung, man könne durch eine kleine Verschiebung immer die unter 2. vorausgesetzte Situation herstellen. Die Begründung scheint in dieser Form ungenügend, denn bei der Verschiebung könnten ja Schnittpunkte in Wegfall kommen. Erst die genauere Betrachtung von § 5 wird lehren, daß dieses tatsächlich nicht vorkommen kann.

Homologieklassen der zum Schnitt gebrachten Varietäten abhängt, und indem sie für die Bestimmung der Homologieklassen den ganzen Apparat der „kombinatorischen Topologie“ zur Verfügung stellt. Zum Beispiel reduziert sich der algebraisch so mühevoll bewiesene Satz, daß im projektiven Raum die Schnittpunktsanzahl einer V_r und einer V_{n-r} gleich dem Produkt der Grädzahlen ist, von topologischem Gesichtspunkt auf die beiden leicht zu beweisenden Tatsachen, daß eine V_r (deren topologische Dimensionszahl im Komplexen gleich $2r$ ist) homolog dem g-fachen eines linearen L_r ist, wo g der Grad ist, und daß die Schnittpunktszahl zweier linearer Räume L_r und L_{n-r} gleich 1 ist.

Allgemein ergibt jede Homologierelation zwischen algebraischen Varietäten eine symbolische Gleichung im Schubertschen Sinn, und man darf diese Gleichungen unbeschränkt addieren und multiplizieren, wie es im Schubertschen Kalkül geschieht. Aus der Existenz einer endlichen Basis für die Homologien in jeder geschlossenen Mannigfaltigkeit ergibt sich weiter allgemein die Lösbarkeit der Schubertschen „Charakteristikenprobleme“.

Durch vollständige Angabe aller benutzten topologischen, analytischen und algebraischen Definitionen und Zusammenstellung der wichtigsten Sätze hoffe ich, die Schwierigkeit, die darin besteht, daß eine gewisse Vertrautheit sowohl mit topologischen als auch mit abzählenden Methoden beim Leser notwendig vorausgesetzt werden mußte, zu einem Minimum reduziert zu haben. Der sachverständige Leser muß dafür einige Ausführungen über bekannte Tatsachen mit in den Kauf nehmen. Die Kenntnis der zitierten Arbeiten W_1 und W_2 ist für das Verständnis dieser Arbeit nicht erforderlich. Einige topologische Hilfsbetrachtungen fast trivialer Natur sind, um den Gedankengang nicht zu unterbrechen, in zwei Anhängen vereinigt.

Anwendungen der hier zu entwickelnden Methoden auf konkrete abzählende Probleme hoffe ich später zu geben.

§ 2.

Komplexe im euklidischen Raum.

In diesem Paragraphen sollen, um allen Zweifel beim Gebrauch von Worten mit schwankender Bedeutung auszuschließen, die nötigen topologischen Grundbegriffe ganz kurz zusammengestellt werden. Für genauere Erörterungen sei auf die Lehrbücher verwiesen[13]).

---

[13]) Etwa: O. Veblen, The Cambridge Colloquium Lectures, Cambridge (Mass.) 1922. Oder Hadamards Note zu J. Tannery, Introduction à la théorie des fonctions II, zu ergänzen durch J. W. Alexanders Proof of the Invariance of certain Numbers, Proc. Am. Math. Soc. **16** (1915), p. 148.

Ein *geradliniger k-dimensionaler Komplex* ist aus endlichvielen k-dimensionalen euklidischen Simplizes aufgebaut. Ein stetiges Bild eines geradlinigen k-dimensionalen Komplexes im euklidischen R^n (mit ganz beliebigen Singularitäten) heißt *Komplex* schlechthin und wird mit K^k bezeichnet. Der leere Komplex heißt *Null*. Ist von Rand, von Orientierung, Unterteilung oder Addition von Komplexen die Rede, so ist damit immer gemeint, daß man die genannten Operationen zunächst an den Urbildern vornimmt und dann auf das Bild überträgt. *Orientierung eines Simplex* (im Urbild) geschieht dadurch, daß man einer bestimmten Reihenfolge der Ecken und allen geraden Permutationen davon ein Vorzeichen $\varepsilon = \pm 1$, allen ungeraden Permutationen das entgegengesetzte Vorzeichen $-\varepsilon$ zuordnet. *Orientierung eines Komplexes* K^k geschieht durch (beliebige) Orientierung aller seiner k-dimensionalen Simplizes. Bei der *Addition von Komplexen* wird jedes Simplex, welches in der Summe zweimal mit entgegengesetzter Orientierung vorkommt, diese beiden Male weggelassen. Mit jeder Orientierung eines Simplex ist nach einer bestimmten Vorschrift eine bestimmte Orientierung seines Randes verknüpft. Wie diese Vorschrift lautet, ist gleichgültig; nur muß sie so eingerichtet werden, daß der orientierte Rand des orientierten Randes gleich Null wird. Unter dem Rand $R(K^k)$ eines orientierten Komplexes K^k ist zu verstehen die Summe der orientierten $(k-1)$-dimensionalen Ränder der Simplizes von K^k. Zwei Komplexe K_1^r, K_2^r heißen *homolog zueinander im Gebiet* U (Gebiet heißt in dieser Arbeit eine beliebige offene Menge des R^n), wenn es einen K^{r+1} in U gibt derart, daß $K_1^r = K_2 + R(K^{r+1})$ ist. Zeichen für Homologie: $K_1^r \sim K_2^r$.

Komplexe mit Rand Null heißen *Zyklen.*

Eine (geradlinige) *δ-Approximation* eines Komplexes K^s entsteht dadurch, daß man, von einer hinreichend feinen Simplexeinteilung des Urbildes von K^s ausgehend, die den Bildpunkt K^s definierenden Abbildungsfunktionen durch solche ersetzt, die in jedem Simplex des Urbildes (Rand eingeschlossen) linear sind, derart, daß jeder Bildpunkt nach dieser Approximation zu seiner ursprünglichen Lage eine Entfernung $< \delta$ hat, und daß solche Simplizes, die eine Seite gemein haben, auch nach der Approximation die entsprechende Seite gemein haben.

Verbindet man jeden Punkt von K^s geradlinig mit dem entsprechenden Punkt des approximierenden Komplexes K_1^s, so erhält man einen „Verbindungskomplex" K_v^{s+1} in der δ-Umgebung von K^s und ebenso einen Randverbindungskomplex K_v^s in der δ-Umgebung des Randes $R(K^s)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$R(K_v^{s+1}) = K^s - K_1^s - K_v^s,$$

$$R(K_v^s) = R(K^s) - R(K_1^s),$$

$$K_v^s = 0, \text{ wenn } R(K^s) \text{ Null oder geradlinig ist.}$$

Eine bestimmte Reihenfolge $x_1, \ldots, x_n$ der Cartesischen Koordinaten des R^n induziert eine bestimmte Orientierung aller n-dimensionalen geradlinigen Simplizes dieses Raumes (oder, wie wir auch sagen wollen, eine *Orientierung des Raumes* R^n), nämlich diejenige, wobei einer bestimmten Reihenfolge der Ecken $x^0, \ldots, x^n$ eines solchen Simplex als Vorzeichen zugeordnet wird das Vorzeichen der Determinante

$$|1\, x_1^\nu, \ldots, x_n^\nu| \quad \text{oder} \quad |x_1^\nu - x_1^0, \ldots, x_n^\nu - x_n^0|.$$

§ 3.

Schnitte von Komplexen im euklidischen R^n.

Der Begriff des Schnittkomplexes zweier Komplexe ist in der hier gebrauchten Form vor allem von Lefschetz (L_1) entwickelt worden. Eine Übersicht über die benötigten Begriffsbildungen folgt in diesem Paragraphen.

Sind zwei (geradlinige) Simplizes X^r und X^s im R^n gegeben, so kann man durch beliebig kleine Verrückungen der Ecken eine *„allgemeine Lage“* der Simplizes zueinander erzwingen, welche darin bestehen soll, daß die Räume R^r, R^s, in denen sie liegen, einen linearen Raum R^k von genau $k = r + s - n$ Dimensionen gemein haben (bzw. zueinander fremd sind für $r + s - n < 0$), und daß in diesem Schnittraum die beiden Simplizes entweder fremd sind oder innere Punkte gemein haben. Im letzten Fall haben sie ein konvexes Polyeder P^k von der Dimension k gemein, das wir irgendwie in Simplizes eingeteilt denken.

Orientieren wir die Räume R^n, R^r, R^s (oder den Raum R^n und die Simplizes X^r, X^s), so ist dadurch eine Orientierung eines jeden Simplex von P^k mitbestimmt nach folgender *Vorschrift*: Man ergänze die Ecken $x^0, \ldots, x^k$ eines Simplex von P^k durch Punkte $y^1, \ldots, y^{r-k}$ zu einem Eckpunktssystem eines Simplex von R^r; dessen Vorzeichen in der Orientierung von R^r sei ε_1. Ebenso ergänzen wir $x^0, \ldots, x^k$ mit $z^1, \ldots, z^{s-k}$ in R^s und bestimmen das Vorzeichen ε_2. Dann bilden die $n+1$ Punkte $x^0, \ldots, x^k$, $y^1, \ldots, y^{r-k}$, $z^1, \ldots, z^{s-k}$ die Ecken eines Simplex in R^n. Das zugehörige Vorzeichen in der Orientierung von R^n sei ε_3. Nunmehr ordnen wir der Eckenfolge der $x^0, \ldots, x^k$ das Vorzeichen

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3$$

zu. Dadurch sind alle Simplizes von P^k und mithin auch P^k selbst orientiert.

Man nennt das so orientierte P^k den *orientierten Schnittkomplex* der Simplizes X^r und X^s und schreibt

$$P^k = X^r \cdot X^s.$$

Ist P^k leer, so schreibt man

$$X^r \cdot X^s = 0\,.$$

Für zwei beliebige geradlinige Komplexe K^r, K^s definieren wir nun, falls alle Simplizes von K^r (sowie ihre Seiten) zu denen von K^s die oben präzisierte „allgemeine Lage" haben, den *orientierten Schnittkomplex* $K^r \cdot K^s$ als die Summe der orientierten Schnitte der Simplizes von K^r mit denen von K^s.

Die wichtigsten Rechnungsregeln für orientierte Schnitte sind:

(1a) $$K^s \cdot K^r = (-1)^{(n-r)(n-s)} K^r \cdot K^s;$$

(1b) $$-K^r \cdot K^s = (-K^r) \cdot K^s = K^r \cdot (-K^s);$$

(1c) $$K^r \cdot (K^s \cdot K^t) = (K^r \cdot K^s) \cdot K^t;$$

(2) $$R(K^r \cdot K^s) = K^r \cdot R(K^s) + (-1)^{n-s} R(K^r) \cdot K^s$$

und die gewöhnlichen Distributivgesetze. Die ersten drei sind ziemlich trivialer Natur; die letzte ist die Zauberformel, die alle Existenz-, Invarianz- und Deformationssätze für Schnittpunktszahlen, Abbildungsgrade usw. in sich enthält.

Aus (2) folgt sofort:

In jedem Gebiet[14]*, das alle gemeinsamen Punkte von* K^r *und* K^s *enthält, gilt die Homologie*:

(3) $$K^r \cdot R(K^s) \sim (-1)^{n-s-1} R(K^r) \cdot K^s\,.$$

Ist speziell $R(K^r)$ zu K^s punktfremd, so wird die rechte Seite Null. Ersetzt man noch s durch $s+1$ und setzt man $R(K^{s+1}) = K_1^s - K_2^s$, so folgt:

Ist $K_1^s \sim K_2^s$ *in einem Gebiet, das zum Rand von* K^r *fremd ist, so ist in diesem Gebiet auch*

(4) $$K^r \cdot K_1^s \sim K^r \cdot K_2^s\,.$$

Sind nun zwei beliebige (nicht notwendig geradlinige) orientierte Komplexe K^r, K^s gegeben, und ist K^r zum Rand von K^s und K^s zum Rand von K^r fremd, ist weiter $\delta \leqq$ dem Minimum der halben Abstände von K^r zum Rand von K^s und von K^s zum Rand von K^r, und δ-approximiert man K^r und K^s derart durch geradlinige Komplexe K_1^r und K_1^s, daß die Simplizes von K^r zu denen von K^s allgemeine Lage haben, so wird der orientierte Schnittkomplex $K_1^r \cdot K_1^s$ als ein *approximativer Schnittkomplex von* K^r *und* K^s bezeichnet.

---

[14]) Gebiet heißt hier eine jede offene Menge des Raumes R^n.

Inwieweit dieser approximative Schnittkomplex von der Wahl der Approximation unabhängig ist, lehrt der folgende Satz:

Ist U eine beliebige offene Umgebung der Menge aller gemeinsamen Punkte von K^r und K^s, die keine Randpunkte von K^r oder K^s enthält, und ist die Approximationsschranke $\delta \leqq$ dem Minimum der halben Abstände des außerhalb U gelegenen Teils von K^r zu K^s und des außerhalb U gelegenen Teils von K^s zu K^r, so liegt der ganze approximative Schnittkomplex $K_1^{n-r-s} = K_1^r \cdot K_1^s$ innerhalb U, und je zwei zu verschiedenen Approximationen gehörige Schnittkomplexe sind innerhalb U homolog. (In dem Extremfall, wo U den ganzen Raum mit Ausnahme der Randpunkte von K^r und K^s ausfüllt, ist die im Satz gegebene Schranke für δ dieselbe wie oben, sonst möglicherweise kleiner.)

Da der Satz mit dieser genauen Schrankenangabe nicht bei Lefschetz steht, führe ich den Beweis an: Man bilde die verbindenden Komplexe von K^s mit K_1^s und K_2^s, deren Differenz ein verbindender Komplex von K_1^s mit K_2^s ist. Wenn dieser Komplex nicht geradlinig ist, mache man ihn geradlinig durch eine Approximation, ohne die schon von vornherein geradlinigen Simplizes von K_1^s und K_2^s zu verrücken und ohne die δ-Umgebung von K^s zu verlassen. Der so konstruierte Komplex K_v^{s+1} hat (bei passender Wahl der Approximation) allgemeine Lage zu K_1^r und hat als Rand

$$R\,(K_v^{s+1}) = K_1^s - K_2^s - K_v^s\,,$$

wobei K_v^s in der δ-Umgebung von $R\,(K^s)$ liegt. Aus (3), angewandt auf K_1^r und K_v^{s+1}, findet man wegen $R\,(K^r) \cdot K_v^{s+1} = 0$:

$$K_1^r \cdot (K_1^s - K_2^s + K_v^s) \sim 0 \quad (\text{in } U),$$

oder wegen $K_1^r \cdot K_v^s = 0$:

$$K_1^r \cdot K_1^s \sim K_1^r \cdot K_2^s\,,$$

q. e. d.

Auf Grund der bewiesenen Eindeutigkeit bis auf Homologie bezeichnet man den approximativen Schnittkomplex $K_1^r \cdot K_1^s$ einfach mit $K^r \cdot K^s$. Mit dieser Bezeichnung gelten auch für beliebige (nicht notwendig geradlinige) Komplexe die Gleichungen (1), (3), (4) unter denselben Voraussetzungen, während (2) im betrachteten Fall nur besagt, daß $K^r \cdot K^s$ ein Zykel ist.

Wichtig ist insbesondere der Fall $r + s = n$, wo der Schnittkomplex aus endlichvielen Punkten besteht. Die eindeutige Bestimmtheit bis auf Homologie in U besagt in diesem Fall, daß bei jeder Zerlegung von U in getrennte Teilgebiete U' die algebraische Summe der Vorzeichen der Schnittpunkte in jedem Gebiet U' (kurz: die *Schnittpunktszahl in U'*) unabhängig von der Approximation ist. Auch die *Gesamtschnittpunktszahl* oder Schnittpunktszahl in U ist durch K^r und K^s allein eindeutig bestimmt: sie wird mit $\chi(K^r, K^s)$ oder einfach mit $(K^r \cdot K^s)$ bezeichnet. Ist speziell P ein isolierter Punkt des Durchschnitts von K^r und K^s, und wählt man für ein U' eine beliebig kleine Umgebung von P, deren abgeschlossene Hülle keine weiteren Schnittpunkte enthält, so heißt die Schnittpunktszahl in U' der *Index* des Schnittpunktes P. Er kann (wie alle Schnittpunktszahlen) positiv, negativ oder Null sein. Sind alle Schnittpunkte isoliert, so ist die Indexsumme die Gesamtschnittpunktszahl.

Ist insbesondere $r = 0$, $s = n$, K^0 ein Punkt P mit positiver Orientierung, so geht die Definition des Index von P als Schnittpunkt von K^n und K^0 in die des *Abbildungsgrades* der Abbildung des Urbildkomplexes im Raum R^n im Punkt P über[15]); dieser ist eindeutig definiert, sobald P kein Randpunkt von K^n ist. Die Grundeigenschaften des Abbildungsgrades sind aus den Formeln (3), (4) abzulesen. Eine weitere Eigenschaft wird im folgenden oft gebraucht: *Der Grad einer eineindeutigen Abbildung ist* ± 1. Das folgt aus der leicht zu beweisenden Tatsache, daß der Grad der aus der Abbildung und ihrer Inversen zusammengesetzten identischen Abbildung einerseits gleich dem Produkt der beiden Abbildungsgrade, andererseits gleich $+1$ sein muß. Die Abbildungen vom Grade $+1$ sind die, welche „die Orientierung erhalten“.

Nach Lefschetz[16]) sind die Schnittpunktszahlen und Schnittkomplexe (bis auf Homologie) invariant bei topologischen Abbildungen dieses Gebietes mit Abbildungsgrad $+1$ (bei den anderen vom Grade -1 kehren die Schnittpunktszahlen ihr Vorzeichen um).

§ 4.

Schnittpunkte von differenzierbaren Komplexen.

Wir haben gesehen, daß eine Orientierung eines geradlinigen Simplex X^n des Raumes R^n dadurch festgelegt werden kann, daß man den Koordinaten eine bestimmte Reihenfolge zuerkennt. Dasselbe gilt nun, wenn im Simplex X^n nicht schiefwinklige, sondern beliebige (krummlinige) Koordinaten $u_1, \ldots, u_n$ eingeführt werden derart, daß das Simplex ein topologisches Bild eines Bereiches im u-Raum wird. Da nämlich der Abbildungsgrad einer eineindeutigen Abbildung stets ± 1 ist, so kann man (nach erfolgter Orientierung des u-Raums durch Wahl einer Reihenfolge $u_1, \ldots, u_n$) die Orientierung des Simplex in einer und nur einer Weise so wählen, daß der Grad der Abbildung des Simplex auf den u-Raum gleich $+1$ wird.

---

[15]) L. E. J. Brouwer, Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen 71 (1911), S. 97–115.

[16]) L_1 S. 21–26.

Ein Komplex K^r in R^n heißt (stückweise) *differenzierbar,* wenn für jedes Simplex des Urbildes Koordinaten $u_1, \ldots, u_r$ so eingeführt werden können, daß die Koordinaten des Bildpunktes $x_1, \ldots, x_r$ im Innern eines jeden Simplex differenzierbare, am Rande stetige Funktionen von $u_1, \ldots, u_r$ sind. Durch Wahl einer bestimmten Reihenfolge der Parameter u_j für jedes einzelne Simplex wird K^r orientiert; diese Orientierung ist noch ganz allgemein, da man sie durch Ersetzung eines u_j durch $-u_j$ für jedes einzelne Simplex in die entgegengesetzte überführen kann.

Ist P ein isolierter Schnittpunkt der beiden differenzierbaren Komplexe K^r, K^s $(r+s=n)$, ist weiter in beiden Komplexen P das Bild je eines einzelnen inneren Punktes eines Simplex mit Koordinaten $u_1, \ldots, u_r$ bzw. $v_1, \ldots, v_s$, ist schließlich an dieser Stelle die Determinante

$$D = \left| \frac{\partial x_j}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial x_j}{\partial u_r}, \frac{\partial x_j}{\partial v_1}, \ldots, \frac{\partial x_j}{\partial v_s} \right| \neq 0,$$

so hat P als Schnittpunkt von K^r und K^s den Index $\varepsilon = \pm 1 = \operatorname{sign} D$.[17])

Beweis. Die x können linear so transformiert werden, daß die Determinante (im Punkt P) in der Hauptdiagonale lauter Einsen und überall sonst Nullen hat. Dabei kehrt sich die Orientierung des Raumes R^n, also auch der Index von P als Schnittpunkt, um oder nicht, je nachdem D positiv oder negativ war (§ 1). Auf Grund der Differenzierbarkeit der Funktionen $x(u)$ hat der Abstand des durch sie dargestellten Punktes vom Punkt $(u_1, \ldots, u_r, 0, \ldots, 0)$ für $|u_1| \leqq h, \ldots, |u_r| \leqq h$ die Größenordnung $o(h)$, mithin ist er bei passender Wahl von h kleiner als $\frac{h}{4}$. Ebenso haben die Punkte $x(v)$ von K^s von den Punkten $(0, \ldots, 0, v_1, \ldots, v_s)$ für $|v_j| \leqq h$ Entfernungen $< \frac{h}{4}$. Setzt man $\frac{h}{4} = \delta$, so kann man eine δ-Approximation der beiden durch $|u_j| \leqq h$, $|v_j| \leqq h$ gegebenen Ausschnitte von K^r und K^s dadurch bestimmen, daß man die Punkte x durch $(u_1, \ldots, u_r, 0, \ldots, 0)$ bzw. $(0, \ldots, 0, v_1, \ldots, v_s)$ ersetzt. Der Rand eines jeden dieser approximierenden Komplexausschnitte hat vom anderen eine Entfernung h, also hatte vor der Approximation der Rand eines jeden Ausschnittes vom anderen Ausschnitt eine Entfernung $> h - 2\delta = 2\delta$. Für die Bestimmung des Index von P als Schnittpunkt von K^r und K^s genügt es, sich auf die betrachteten Ausschnitte von K^r und K^s zu beschränken; für diese ist auf Grund der Randabstände eine δ-Approximation erlaubt (vgl. die Definition des Index in § 3); mithin hat man, um den Index von P zu bestimmen, nur das Vorzeichen von P als Schnitt-

[17]) Entsprechendes gilt für isolierte Schnittpunkte von drei oder mehr differenzierbaren Komplexen.

punkt der beiden geradlinigen Komplexe

$$'K^r:\quad (x_1, \ldots, x_n) = (u_1, \ldots, u_r, 0, \ldots, 0) \qquad (|u_j| \leqq h),$$

$$'K^s:\quad (x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0, v_1, \ldots, v_s) \qquad (|v_j| \leqq h)$$

zu bestimmen; dieses ist aber, wie man durch eine einfache Wahl zweier kleinen Simplizes in $'K^r$ und $'K^s$ und Kombination der Ecken zu einem Simplex in R^n erkennt, gleich $+1$. Damit ist alles bewiesen.

§ 5.

Schnittpunkte von analytischen Komplexen.

Für die Untersuchung der analytischen Komplexe brauchen wir zunächst einige funktionentheoretische Begriffe und Sätze.

Wenn für alle Wertsysteme der komplexen Variablen $z_1, \ldots, z_n$ in der Umgebung einer Stelle z^0 endlichviele Wertsysteme $w_1, \ldots, w_m$ so definiert sind, daß die symmetrischen Funktionen dieser k Wertsysteme reguläre analytische Funktionen der z sind, also die w selbst Wurzeln von algebraischen Gleichungen mit analytisch von den z abhängigen Koeffizienten, so folgt daraus bekanntlich, daß zu jedem passend gewählten Wertsystem z in dieser Umgebung die w in k eindeutige analytische „Funktionszweige“ zerfallen. Nimmt man nun außerdem an, daß man in beliebig kleinen Umgebungen der Ausgangsstelle aus einem dieser Funktionszweige alle anderen durch analytische Fortsetzung erhalten kann (oder daß das durch die w definierte „analytische Gebilde“ nicht „zerfällt“), so soll das durch einen dieser Funktionenzweige gegebene System $w_1, \ldots, w_m$ ein *System von m mehrdeutigen analytischen Funktionen in der Umgebung der Stelle z^0* heißen. Die eindeutigen analytischen Funktionen der w und z bilden dann einen *Funktionenkörper*. Die eindeutigen analytischen Zweige aller Funktionen w sind in der betrachteten Umgebung überall regulär bis auf einem „Verzweigungsgebilde“ von höchstens $2n-2$ Dimensionen im n-dimensionalen Raum der $z_1, \ldots, z_n$.

Irgend r von den Funktionen $w_1, \ldots, w_m$ heißen *analytisch-unabhängig*, wenn keine als analytische Funktion der übrigen ausgedrückt werden kann. Unter je m Funktionen w_i, die nicht alle konstant sind, sind immer eine Anzahl analytisch-unabhängiger zu finden, von denen die übrigen analytisch abhängen. Ein Kriterium für die analytische Abhängigkeit von n analytischen Funktionen von n Variablen ist das identische Verschwinden der Funktionaldeterminante.

Es gilt weiter der folgende „Umkehrsatz“: *Ist w eine mehrdeutige analytische Funktion von $z_1, \ldots, z_n$ in der Umgebung einer Stelle z^0 in einem Funktionenkörper und ist $\frac{\partial w}{\partial z_1}$ nicht identisch Null, so können um-*

gekehrt z_1 *und daher weiter alle Funktionen des Körpers auch als mehrdeutige analytische Funktionen von* $w, z_2, \ldots, z_n$ *in einer Umgebung der Stelle* $w^0, z_2^0, \ldots$ *aufgefaßt werden.* (Ist dagegen $\frac{\partial w}{\partial z_1} = 0$, so ist w eine Funktion von $z_2, \ldots, z_n$ allein).

Durch wiederholte Anwendung folgt der „Austauschsatz“: *Sind* $w_1, \ldots, w_m$ *analytisch-unabhängige analytische Funktionen von* $z_1, \ldots, z_n$ *in einem Funktionenkörper, so gibt es unter den* z_j m *Größen, die gegen die* w *ausgetauscht werden können, derart, daß alle Funktionen des Körpers als analytische Funktionen der* w *und der übrigbleibenden* z *aufgefaßt werden können.*

Ist insbesondere $m = n$, so folgt, daß alle z_j mehrdeutige analytische Funktionen der w in der Umgebung der Stelle w^0 werden.

n komplexe Veränderliche $z_j = x_j + i y_j$ können als komplexe Koordinaten in einem R^{2n} aufgefaßt werden. Für die reellen Koordinaten x_j, y_j setzen wir ein für allemal die Reihenfolge

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$$

fest, wodurch nach § 2 eine bestimmte Orientierung des Raumes R^{2n} gegeben ist.

Ein Komplex K^{2r} im R^{2r}, der aus eineindeutig stetigen Bildern von geradlinigen (2)-dimensionalen Simplizes aufgebaut ist, heißt ein *analytischer Komplex von* r *komplexen Dimensionen*, wenn die Umgebung einer beliebigen Stelle von K^{2r} (Randstellen ausgenommen) sich aus endlichvielen „analytischen Zweigen“ zusammensetzt, auf denen jeweils die Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$ als mehrdeutige analytische Funktionen von r unter ihnen, etwa von $z_1, \ldots, z_r$, aufgefaßt werden können.

Diese Struktur der Umgebungen einer Stelle besitzen nicht nur die algebraischen Varietäten, sondern nach O. Blumenthal[18]) überhaupt alle durch analytische Gleichungen definierbaren Punktmengen. Sollen diese unter unsere Definition fallen, so müssen sie außerdem Komplexe, im obigen Sinn, sein, d. h. mit endlichvielen eineindeutig stetigen Bildern von Simplizes triangulierbar sein. Diese Bedingung kann man dadurch erfüllen, daß man sich auf einen beschränkten Bereich $|z_j| \leqq M$ beschränkt, in dem die definierenden Gleichungen des untersuchten Gebildes überall regulär sind (vgl. Anhang 1). Richtet man die Triangulation so ein, daß die Verzweigungsgebilde der analytischen Funktionen z_j immer aus höchstens $(2r-2)$-dimensionalen Seiten der zur Triangulation benutzten Simplizes bestehen, so kann man in den einzelnen Simplizes die unabhängigen

[18]) O. Blumenthal, Zum Eliminationsproblem bei analytischen Funktionen mehrerer Veränderlicher, Math. Annalen **57** (1903), S. 356.

$z_1, \ldots, z_r$ als Koordinaten benutzen. Die übrigen Raumkoordinaten sind dann im Innern dieser Simplizes differenzierbare Funktionen dieser $2r$ Parameter, mithin:

Ein analytischer Komplex von r komplexen Dimensionen ist ein differenzierbarer Komplex von 2 r Dimensionen.

Statt der speziellen Parameter $z_1, \ldots, z_r$ benutzen wir im folgenden beliebige komplexe Parameter $w_1, \ldots, w_r$, von denen die Koordinaten $z_1, \ldots, z_n$ im Innern eines Simplex regulär-analytisch abhängen. Setzt man $w_j = u_j + i v_j$, so ist durch die zu Anfang dieses Paragraphen gemachten Voraussetzungen über die Reihenfolge der Real- und Imaginärteile eine bestimmte Orientierung aller Simplizes des Komplexes K^{2r} festgelegt, unabhängig von der Reihenfolge der w.

Beim Übergang zu anderen Koordinaten $W_1, \ldots, W_r$, die von den w umkehrbar-analytisch abhängen, ist $\frac{\partial(W_1, \ldots, W_r)}{\partial(w_1, \ldots, w_r)} \neq 0$. Wir wollen, nach Aufspaltung in Real- und Imaginärteil $W_j = U_j + i V_j$, die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(U_1, V_1, \ldots, U_r, V_r)}{\partial(u_1, v_1, \ldots, u_r, v_r)}$ berechnen. Sie ändert ihren Wert nicht, wenn wir in Zähler und Nenner formal Linearkombinationen $W = U + iV$, $\overline{W} = U - iV$ einführen. Also hat man

$$\frac{\partial(U_1, V_1, \ldots, U_r, V_r)}{\partial(u_1, v_1, \ldots, u_r, v_r)} = \frac{\partial(W_1, \overline{W}_1, \ldots, W_r, \overline{W}_r)}{\partial(w_1, \overline{w}_1, \ldots, w_r, \overline{w}_r)}$$

$$= \frac{\partial(W_1, \ldots, W_r)}{\partial(w_1, \ldots, w_r)} \cdot \frac{\partial(\overline{W}_1, \ldots, \overline{W}_r)}{\partial(\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_r)} = \left|\frac{\partial(W_1, \ldots, W_r)}{\partial(w_1, \ldots, w_r)}\right|^2 > 0.$$

Daraus folgt, daß die oben festgesetzte Orientierung sich bei Übergang zu den Parametern W nicht ändert.

Die Parameter in zwei längs einer $(2r-1)$-dimensionalen Seite aneinanderstoßenden Simplizes von K^{2r} hängen auf dieser Seite durch eine analytische Transformation miteinander zusammen, denn die Singularitäten der Parameterdarstellung liegen alle auf den höchstens $(2r-2)$-dimensionalen Seiten. Die Orientierungen in diesen anstoßenden Simplizes stimmen also überein, d. h. *der analytische Komplex K^{2r} ist orientierbar.*

Die Randpunkte analytischer Komplexe, wo die analytische Darstellung eventuell aufhören kann, mögen ein für allemal von der Untersuchung ausgeschlossen werden.

Nunmehr seien zwei analytische Komplexe K^{2r}, K^{2s} $(r + s = n)$ in der Umgebung eines isolierten (inneren) Schnittpunktes P gegeben durch Parameterfunktionen $z_j(w_1, \ldots, w_r)$ bzw. $z_j^*(w_1^*, \ldots, w_s^*)$. Im einfachsten Fall, daß P ein innerer Punkt eines Simplex von K^{2r} und eines Simplex von K^{2s} ist, und die komplexe Funktionaldeterminante $\left| \frac{\partial z_j}{\partial w_1}, \ldots, \frac{\partial z_j}{\partial w_r}, \right.$

$\left.\frac{\partial z_j^*}{\partial w_1^*}, \ldots, \frac{\partial z_j^*}{\partial w_s^*}\right|$ in $P \neq 0$ ist, findet man durch dieselbe Rechnung wie oben für die reelle Determinante D von § 4 einen positiven Wert; *mithin hat in diesem Fall der Schnittpunktsindex den Wert* $+1$.

Wir wollen nun für einen beliebigen isolierten Schnittpunkt beweisen, daß der Schnittpunktsindex positiv sein muß, und zwar wollen wir durch eine kleine Parallelverschiebung den Fall auf den vorigen zurückführen.

Wir setzen zunächst $t_j = z_j - z_j^*$, und wollen zeigen, daß die n Funktionen t_j der n Veränderlichen w, w^* analytisch-unabhängig sind. Wären sie es nicht, und wären etwa nur $t_1, \ldots, t_m$ $(m < n)$ analytisch-unabhängig, so könnte man nach dem Austauschsatz $n - m$ von den Größen w und w^* so auswählen, daß alle z, z^*, w, w^* als mehrdeutige analytische Funktionen von $t_1, \ldots, t_m$ und den $n - m$ übriggebliebenen w, w^* aufgefaßt werden können. Läßt man nun, von den zum Schnittpunkt gehörigen Nullwerten dieser neuen Variablen ausgehend, ein w oder w^* sich stetig ändern, während man $t_1, \ldots, t_m$ konstant gleich Null läßt (man kann sich dabei ganz beliebig für irgendeinen Zweig der mehrdeutigen Funktionen z, z^*, w, w^* entscheiden), so bleiben auch die übrigen t_j, die ja analytisch von $t_1, \ldots, t_m$ abhängen, konstant gleich Null, also $z_j = z_j^*$ $(j = 1, \ldots, n)$, mithin hat man es fortwährend mit einem Schnittpunkt zu tun, während doch ein w oder w^* variabel ist, entgegen der Voraussetzung, wir hätten es mit einem isolierten Schnittpunkt zu tun.

Also sind die t_j analytisch unabhängig. Daraus folgt erstens, daß ihre Funktionaldeterminante $D = \frac{\partial (t_1, \ldots, t_n)}{\partial (w_1, \ldots, w_s^*)}$ nicht identisch verschwindet, und zweitens, daß die w, w^* und z, z^* als endlichvieldeutige analytische Funktionen der t_j in der Umgebung der Null aufgefaßt werden können. Zu jeder Stelle t in dieser Umgebung gehören endlichviele Stellenpaare z, z^* mit $z_j - z_j^* = t_j$, und bei passend gewählten t (nämlich überall bis auf einem Gebilde von höchstens $2n - 2$ Dimensionen) sind an allen diesen Stellen die Funktionen $z(w)$, $z^*(w^*)$ unverzweigt und die Funktionaldeterminante D nicht Null.

Geometrisch bedeutet das: Wenn man einen der beiden gegebenen Komplexe, etwa K^{2r}, um beliebig wenig parallel verschiebt, indem man den Punkt z_j durch $z_j - t_j$ ersetzt, so hat der verschobene Komplex K^{2r} mit dem durch $z^*(w^*)$ gegebenen K^{2s} endlichviele Punkte in der Umgebung der betreffenden Stelle gemein, und bei passender Wahl der t_j sind alle diese Stellen innere Punkte der Simplizes von K^{2r} und K^{2s}, während die Funktionaldeterminante

$$D = \frac{\partial (z_1 - z_1^*, \ldots, z_n - z_n^*)}{\partial (w_1, \ldots, w_r, \ldots, w_s^*)} = (-1)^s \cdot \left| \frac{\partial z_j}{\partial w_1}, \ldots, \frac{\partial z_j}{\partial w_r}, \frac{\partial z_j^*}{\partial w_1^*}, \ldots, \frac{\partial z_j^*}{\partial w_s^*} \right|$$

an diesen Stellen nicht verschwindet.

Daraus folgt nach dem früheren, daß diese endlichvielen Schnittpunkte der verschobenen Komplexe die Indizes $+1$ haben. *Somit hat der ursprüngliche isolierte Schnittpunkt einen positiven Index, gleich der Anzahl der Schnittpunkte nach der Verschiebung.*

Der obige Beweis ist, bis auf die Ersetzung der algebraischen Abhängigkeiten durch analytische und einer kleinen Vereinfachung dadurch, daß eine Verschiebung statt einer projektiven Transformation benutzt wurde, wesentlich derselbe wie der Beweis für die Positivität der Schnittpunktsmultiplizitäten in W_2, § 9. Zugleich stellt er die Ausführung der Lefschetzschen Beweisandeutung (Fußnote [12])) dar. Er ist mühelos auf Schnittpunkte von mehr als zwei Komplexe auszudehnen.

§ 6.

Die Beziehung zum algebraischen Multiplizitätsbegriff.

Dieser Paragraph ist im logischen Zusammenhang dieser Arbeit entbehrlich und dient bloß dazu, den Anschluß der jetzigen Untersuchung an die frühere W_2 herzustellen.

Die durch algebraische Gleichungen definierten Punktmengen oder *algebraischen Varietäten* im komplexen projektiven Raum sind triangulierbare Komplexe (vgl. Anhang 1), die in irreduzible Bestandteile von verschiedener Dimension zerfallen, welche in der Umgebung einer jeden Stelle analytisch sind. Wir bezeichnen sie mit V_r oder V^{2r}, wenn r die algebraische oder komplexe Dimension und daher $2r$ die reelle Dimensionszahl ist. Orientierung nach der Vorschrift von § 5.

Die *algebraische Multiplizität* eines Schnittpunktes P zweier algebraischen Varietäten V_r, V_s $(r+s=n)$ kann folgendermaßen definiert werden (vgl. W_2, § 8): Man bringe zunächst die beiden Varietäten in „allgemeine Lage" zueinander, indem man die eine, etwa V_r, einer projektiven Transformation mit unbestimmten Koeffizienten unterzieht. Die Schnittpunkte der transformierten Varietäten (jeder einmal gezählt) ergeben, wenn man nachher die Transformationsmatrix zur Einheitsmatrix spezialisiert, durch „relationstreue Spezialisierung" ebenso viele (gleiche oder verschiedene) Schnittpunkte der untransformierten Varietäten, und die Zahl, die angibt, wie oft dabei ein jeder Schnittpunkt entsteht, ist die „Multiplizität" dieses Schnittpunkts. Dabei wird unter einer „relationstreuen Spezialisierung" eine solche verstanden, wobei alle durch homogene Gleichungen ausgedrückten algebraischen Relationen, die zwischen den Schnittpunkten und den Transformationskoeffizienten bestehen, erhalten bleiben (vgl. W_1, § 3).

Wählt man die uneigentliche Ebene des Raumes so, daß weder vor noch nach der Transformation Schnittpunkte in ihr liegen (das geht, wenn, wie wir annehmen wollen, nur endlichviele Schnittpunkte vorhanden sind), so kann man diese uneigentliche Ebene ganz weglassen, d. h. sich auf den euklidischen Raum beschränken, und die homogenen Gleichungen, die in der Definition der Relationstreue vorkamen, durch inhomogene ersetzen. Weiter kann man die Matrix mit unbestimmten Koeffizienten ersetzen durch eine von der Einheitsmatrix beliebig wenig verschiedene Matrix, deren Elemente algebraisch-unabhängige Transzendente sind (unabhängig auch von den Koeffizienten der definierenden Gleichungen der gegebenen Varietäten); für die algebraischen Eigenschaften der Schnittpunkte macht das offenbar nichts aus. Schließlich kann man die relationstreue Spezialisierung durch einen Grenzübergang ersetzen, denn bei einem solchen bleiben tatsächlich alle durch algebraische Gleichungen ausdrückbaren Relationen erhalten.

Bei einem Grenzübergang bleiben aber auch alle topologischen Schnittpunktszahlen im Sinne von § 3 [19]) erhalten, denn diese Anzahlen waren durch eine Approximation definiert, welche natürlich für alle diejenigen transformierten Varietäten, welche sich von der gegebenen um hinreichend wenig unterscheiden, gültig bleibt. Also ist die Schnittpunktsanzahl in der Umgebung einer Stelle P dieselbe für eine der approximierenden V_r mit der festen V_s wie für die gegebene V_r mit derselben V_s.

Wie wir wissen, können wir in beliebiger Nähe von V_r parallel-verschobene V_r finden, für die alle Schnittpunktsindizes mit V_s gleich Eins werden. Die Matrix einer solchen Parallelverschiebung (als projektive Transformation aufgefaßt) sei B, und eine Matrix mit unabhängigen transzendenten Koeffizienten, die sich von B sehr wenig unterscheidet, sei A. Wir können dann den Grenzübergang, der unsere relationstreue Spezialisierung liefern soll, so ausführen, daß wir zuerst A zu B, dann B zur Einheitsmatrix E konvergieren lassen. Würden beim ersten Grenzübergang $A \to B$ mehrere Schnittpunkte zu einem konvergieren, so würde der Index dieses einen Grenzpunktes größer als Eins werden, was unmöglich ist. Also konvergieren bei $A \to B$ alle Schnittpunkte wieder zu getrennten Schnittpunkten. Beim Übergang $B \to E$ rücken einige Schnittpunkte in P zusammen; ihre Anzahl ist erstens gleich dem Index von P (da die Indexsumme in der Umgebung erhalten bleibt), zweitens gleich der algebraischen Multiplizität (da es sich um eine relationstreue Spezialisierung handelt). Damit ist bewiesen:

Die algebraische Multiplizität eines Schnittpunktes zweier algebraischen Mannigfaltigkeiten, die nur endlichviele Schnittpunkte besitzen, ist gleich dem topologischen Index.

---

[19]) Um diese Definition anwenden zu können, beschränke man sich jeweils auf einen ganz im Endlichen gelegenen Teil der Komplexe V_r bzw. V_s.

Die in W_2, § 9, auf algebraischem Wege bewiesene Tatsache, daß die Multiplizität eines jeden isolierten Schnittpunktes stets größer als Null ist, ergibt sich jetzt als Spezialfall des allgemeineren Ergebnisses von § 5 für analytische Komplexe.

§ 7.

Ausdehnung auf allgemeinere Mannigfaltigkeiten.

Unter einer *topologischen Mannigfaltigkeit* wird verstanden ein zusammenhängender topologischer Raum, in dem eine Umgebung eines jeden Punktes topologisch auf eine offene Menge eines euklidischen Parameterraums abbildbar ist. Ist der Raum kompakt (etwa ein Komplex), so spricht man von einer *geschlossenen Mannigfaltigkeit.* An jeder Stelle, wo zwei verschiedene euklidisch-abbildbare Umgebungen sich teilweise überdecken, hängen die beiden Parameterdarstellungen durch eine eineindeutige Parametertransformation mit Abbildungsgrad ± 1 miteinander zusammen. Können die Orientierungen der euklidischen Parameterräume so gewählt werden, daß diese Abbildungsgrade alle gleich $+1$ werden, so heißt die Mannigfaltigkeit *orientierbar*. Sind die genannten Parametertransformationen beiderseits differenzierbar, so spricht man von einer *differenzierbaren Mannigfaltigkeit*; auf ihr kann man in naheliegender Weise differenzierbare und nicht-differenzierbare Komplexe unterscheiden. Sind die Parametertransformationen sogar (nach Zusammenfassung je zweier reeller Parameter x, y zu einem komplexen $x + iy$) analytisch, so spricht man von einer (komplexen) *analytischen Mannigfaltigkeit* (vgl. die Weylsche Definition einer Riemannschen Fläche); eine solche ist von selbst orientierbar, da der Abbildungsgrad einer analytischen Abbildung im komplexen Gebiet stets positiv ist (§ 5).

Es sei M^n eine orientierbare und orientierte topologische Mannigfaltigkeit. Wir betrachten zwei Komplexe K^r, K^s $(r + s = n)$ in M^n, bei denen der Rand von K^r zu K^s und der Rand von K^s zu K^r fremd ist. Der *Index* eines isolierten Schnittpunkts P von K^r und K^s wird definiert, indem die Umgebung von P vermöge einer der Parameterdarstellungen von M^n auf eine offene Menge des euklidischen R^n abgebildet wird und dort der Index im Sinne von § 2 bestimmt wird. Diese Indexdefinition ist invariant gegenüber Parametertransformationen mit Abbildungsgrad $+1$. Sind alle Schnittpunkte von K^r und K^s isoliert, so heißt die Indexsumme die *Schnittpunktszahl* von K^r und K^s.

Zur Definition der Schnittpunktszahlen und Schnittkomplexe bei nichtisolierten Schnittpunkten und für $r + s > n$ braucht man simpliziale Approximationen, die nicht nur für die Umgebung einer Stelle, sondern in der ganzen Mannigfaltigkeit sinnvoll bleiben, und zwar braucht man verschiedene Approximationen für K^r und K^s derart, daß eine Zelle der Approximation von K^r mit einer Zelle der Approximation von K^s immer einen Schnittkomplex von der richtigen Dimension $r+s-n$ hat. Die Möglichkeit einer solchen Approximation ist bis heute nur bewiesen für *„Mannigfaltigkeiten im kombinatorischen Sinn“*, die derart in Simplizes eingeteilt werden können, daß die Simplizes um einen Punkt sich so aneinanderschließen wie Simplizes im euklidischen Raum, die eine Umgebung einer gemeinsamen Ecke ganz ausfüllen. Wir können dafür auf die schon mehrfach genannte Lefschetzsche Arbeit (L_1) verweisen. Für allgemeinere Mannigfaltigkeiten steht der Beweis noch aus (sogar wenn sie triangulierbar sind); wir setzen daher einstweilen voraus, daß wir es mit Mannigfaltigkeiten im kombinatorischen Sinn zu tun haben[20]).

Die Formeln (1), (3), (4) von § 3 können für beliebige Komplexe genau so bewiesen werden wie für den euklidischen Raum. Auch die Invarianz bei topologischen Abbildungen vom Grade $+1$ hat Lefschetz bewiesen; daraus folgt insbesondere die Übereinstimmung des mit diesen Methoden definierten Indexbegriffs mit dem vorhin durch direkte Übertragung aus dem euklidischen Raum definierten Indexbegriff im Fall eines isolierten Schnittpunkts.

Für analytische Komplexe in einer analytischen Mannigfaltigkeit sind, wenn man alle Orientierungen gemäß der Verabredung in § 5 *normiert, die Indizes isolierter Schnittpunkte stets positiv*[21]). Das folgt unmittelbar aus dem Satz von § 5.

Da außerdem die Dimensionen analytischer Komplexe gerade sind, gilt im kommutativen Gesetz (1a) für sie stets das $+$-Zeichen.

---

[20]) Zusatz bei der Korrektur. Inzwischen ist die Dissertation von E. R. van Kampen („Die kombinatorische Topologie und die Dualitätssätze“, Leiden 1929) erschienen, in der die erwähnte Lücke ausgefüllt ist. Dort werden nämlich die Schnittpunktszahlen definiert und ihre Eigenschaften bewiesen für triangulierbare „Mannigfaltigkeiten“ in einem sehr allgemeinen Sinn, unter die unter anderem alle oben definierten „topologischen Mannigfaltigkeiten“ fallen, soweit sie triangulierbar sind. Für die algebraische Anwendung reicht das völlig hin, denn alle algebraischen Mannigfaltigkeiten sind triangulierbar (Anhang 1).

[21]) Bei nichtisolierten Schnittpunkten können aber die Schnittpunktszahlen sehr wohl negativ sein, wie das folgende Beispiel zeigt: Durch einen Kegelschnitt K im komplexen projektiven R_3 werde eine singularitätenfreie Fläche 5. Ordnung F gelegt. Die Ebene des Kegelschnittes schneidet die Fläche außerdem in einer kubischen Kurve C. Die Schnittpunktszahl von K mit jedem ebenen Schnitt von F auf F, also insbesondere mit $K+C$, ist $+2$, die von K mit C aber $+6$, also bleibt für die Schnittpunktszahl von K mit K nur -4 übrig.

Ist die Mannigfaltigkeit, in der wir uns befinden, der komplexe projektive Raum oder allgemeiner eine (singularitätenfreie) allgemeine Varietät V_n, [22]) so sind alle in dieser Mannigfaltigkeit liegenden algebraischen Varietäten $V_r = V^{2r}$ erstens *triangulierbar* (vgl. Anhang 1), zweitens *orientierbar* (wie alle analytischen Komplexe) und drittens *unberandet* (weil die algebraischen Funktionen von r komplexen Variablen keine Singularitätengebilde von mehr als $2r-2$ Dimensionen haben, mithin ein $(2r-1)$-dimensionaler Rand nicht auftreten kann), also *Zyklen.*

Für isolierte Schnittpunkte algebraischer V_r und V_s in einer Mannigfaltigkeit V_n $(r+s=n)$ ist noch keine allgemein anwendbare algebraische Multiplizitätsdefinition bekannt. Wir definieren daher (in Analogie zum projektiven Raum) als *Schnittpunktsmultiplizität* den topologischen Index des betreffenden Schnittpunktes.

Die Indexsumme genügt dem „Prinzip der Erhaltung der Anzahl", nicht nur bei stetigen Änderungen der schneidenden Varietäten, sondern sogar bei Ersetzung einer V_r durch einen dazu homologen Zykel. Nennt man zwei Zyklen *homolog mit erlaubter Division* (Zeichen $\approx$), wenn ein ganzzahliges Vielfaches ihrer Differenz homolog Null ist, so ist sofort einzusehen, daß man auch einen Zykel C^k durch einen anderen $D^k \approx C^k$ ersetzen kann, ohne seine Schnittpunktszahl mit irgendeinem Zykel der komplementären Dimension zu ändern. Denn eine Schnittpunktszahl, von der ein Vielfaches Null ist, ist selbst Null.

Jetzt sei allgemeiner $r+s \geqq n$. Die Durchschnittsmenge V einer V_r und einer V_s ist eine algebraische Varietät, von der wir annehmen wollen, sie habe nicht mehr als $k=r+s-n$ komplexe Dimensionen. Der approximative Schnittkomplex S^{2k} von V_r und V_s kann in einer beliebig dünnen Umgebung von V gewählt werden. Legt man nun eine Triangulation des Raumes zugrunde, bei der V aus Seiten der Triangulation besteht, und approximiert man S^{2k} mit dieser Triangulation, so wird, wenn S^{2k} in einer genügend kleinen Umgebung von V liegt, der approximierende Zykel S_1^{2k} in V liegen, d. h. aus Zellen der höchsten Dimension $2k$ von V bestehen. Sind $V', V'', \ldots$ die $2k$-dimensionalen irreduziblen Bestandteile von V, so folgt:

$$V_r \cdot V_s = S^{2k} \sim S_1^{2k} = \mu' V' + \mu'' V'' + \cdots. \tag{5}$$

Die Größen $\mu', \mu'', \ldots$ nennen wir die *Multiplizitäten* der Schnittbestandteile $V', V'', \ldots$.[23])

---

[22]) Der untere Index n soll die algebraische oder analytische Dimensionszahl darstellen; die topologische Dimensionszahl ist doppelt so groß und wird als oberer Index benutzt.

[23]) Algebraisch kann man auch diese Multiplizitäten noch definieren im Fall des projektiven Raums, indem man die Varietäten V_r, V_s, V mit einem allgemeinen linearen Raum L_{n-k} schneidet und dort die Schnittpunktsmultiplizitäten bestimmt.

Bemerkung. Wenn ein irreduzibler Bestandteil von V eine Dimension $< 2k$ haben sollte, so kann er in (5) rechts nicht vorkommen. Man zeigt aber leicht, daß es solche Bestandteile gar nicht geben kann. Wäre nämlich P ein Punkt eines solchen, der nicht zugleich zu einem der $2k$-dimensionalen Bestandteile $V', V'', \ldots$ gehört, so würde man V_r, V_s und V mit einem V_{n-k} durch P schneiden können, der in P einen isolierten Schnittpunkt mit V hätte. Die Schnittpunktszahl von $V_r \cdot V_s \cdot V_{n-k}$ in einer Umgebung von P müßte nach § 5 positiv sein, andererseits aber sich nicht ändern, wenn man für $V_r \cdot V_s$ die Approximation $\mu' V' + \mu'' V'' + \ldots$ einsetzt, also (da P nicht zu $\mu' V' + \ldots$ gehört) Null sein, was ein Widerspruch ist. Die hiermit bewiesene Tatsache, daß ein Schnittgebilde von analytischen Varietäten von r und s komplexen Dimensionen keine Komponenten von weniger als $k = r + s - n$ komplexen Dimensionen besitzen kann, ist eine Verallgemeinerung einer von Blumenthal[24]) bewiesenen Behauptung, die sich auf den Fall $s = n - 1$, $k = r - 1$ bezieht.

Hat die Durchschnittsvarietät V mehr als k komplexe Dimensionen, so versagt die Darstellung (5) von $V_r \cdot V_s$ als Summe von algebraischen Varietäten und man bleibt auf die approximativen Schnittkomplexe angewiesen[25]).

§ 8.

Der Schubertsche Kalkül.

Dem Schubertschen Bedingungskalkül[26]) liegt immer eine feste singularitätenfreie algebraische Varietät $M^{2n} = M_n$ zugrunde. Die Elemente von M_n können irgendwelche geometrische Gebilde sein (etwa alle Geraden des Raumes), aber wir verlangen, daß man M_n auch als Varietät von Punkten in einem mehrdimensionalen projektiven Raum auffassen kann. Wir verlangen außerdem, daß M^{2n} eine topologische Mannigfaltigkeit ist, in welcher Schnittkomplexe durch simpliziale Approximationen definiert werden können (§ 7).

Schubert verwendet Symbole für algebraische Bedingungen, die den Punkten von M_n aufgelegt werden: eine k-fache Bedingung ist eine solche, die eine algebraische Varietät V_{n-k} in M_n definiert, deren Punkte eben dieser Bedingung genügen. Es ist bequem, für diese Bedingung dasselbe Symbol zu benutzen wie für die Varietät V_{n-k} selber.

---

24) O. Blumenthal, loc. cit. [18]).

25) Man kann beweisen, daß man auch in diesem Fall noch $V_r \cdot V_s$ als Summe oder Differenz von algebraischen Varietäten darstellen kann. Für unsere Zwecke ist das aber nicht nötig.

26) H. Schubert, Kalkül der abzählenden Geometrie, Leipzig 1879.

Eine „symbolische Gleichung“ zwischen Symbolen von k-fachen Bedingungen $U, V, \ldots$, etwa:

$$U \doteq V + \frac{1}{2} W \quad (6)$$ [27]

bedeutet nach Schubert die Aussage, daß für *jede* algebraische V_k der M_n die Anzahlen der Punkte von V_k, welche jeweils den Bedingungen U, V, W genügen, in derselben linearen Relation zueinander stehen wie die Symbole U, V, W in (6). Dabei sind natürlich die „Anzahlen“ zu Indexsummen, also zu Schnittpunktszahlen χ zu präzisieren. In unseren Bezeichnungen würde die symbolische Gleichung (6) also heißen, daß für jede algebraische V_k in M_n die Gleichung

$$\chi(U, V_k) = \chi(V, V_k) + \frac{1}{2}(W, V_k) \quad (7)$$

besteht. Es ist dabei bequem, die Gleichung (7) zu verlangen nicht nur für alle algebraischen V_k, sondern auch für die k-dimensionalen approximativen Schnittkomplexe von algebraischen Varietäten höherer Dimension [28].

In der Form (7) hat die Gleichung (6) einen ganz präzisen Sinn, der außerdem unabhängig davon ist, ob die Varietäten U und V_k, V und V_k usw. wirklich nur endlichviele Schnittpunkte haben.

Wir lassen mit Schubert in Ausdrücken wie (7) fortan die χ und die Klammer weg, verwenden also ein und dasselbe Symbol für den nulldimensionalen Komplex $U \cdot V_k$ und für die Anzahl (genauer: Summe der Vorzeichen) seiner Punkte.

Klar ist, daß man symbolische Gleichungen addieren, subtrahieren und mit rationalen Zahlen multiplizieren darf. Man darf aber auch alle Glieder mit dem Symbol einer Bedingung H multiplizieren (multiplizieren in der topologischen Bedeutung von Schnittbildung, welche in der Tat die richtige Präzisierung der Schubertschen Multiplikation von Bedingungen darstellt).

Ist nämlich H eine h-fache Bedingung, mit der man die Gleichung (6) zu multiplizieren wünscht, so kann man zunächst $h + k \geqq n$ annehmen, da sonst alle Produkte $U \cdot H$ usw. Null werden. Die Behauptung

$$U \cdot H \doteq V \cdot H + \frac{1}{2} W \cdot H$$

bedeutet nun, daß für jede algebraische V_{h+k} gilt

$$U \cdot H \cdot V_{h+k} = V \cdot H \cdot V_{h+k} + \frac{1}{2} W \cdot H \cdot V_{h+k}.$$

[27] Schubert schreibt $=$, wo hier $\doteq$ steht.

[28] Nach dem in Fußnote [25] angeführten Satz macht es keinen wirklichen Unterschied, ob man dies verlangt oder nicht.

Auf Grund des Assoziativgesetzes (1c) erhält man aber dieselbe Gleichung, wenn man in (7) speziell $V_k = H \cdot V_{h+k}$ setzt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Man darf also auch symbolische Gleichungen miteinander multiplizieren. Für die Multiplikation gelten nach (1) die Assoziativ- und Kommutativgesetze. Damit ist der formale Teil des Bedingungskalküls exakt gerechtfertigt.

Wichtig für die Anwendungen ist insbesondere, daß *jede Homologie mit erlaubter Division zwischen algebraischen Varietäten zu einer symbolischen Gleichung im Schubertschen Sinne Anlaß gibt.* Ist nämlich $U \approx V$, so ist nach § 7 für jede V_k:

$$U \cdot V_k = V \cdot V_k,$$

mithin

$$U \doteq V.$$

Ob auch die Umkehrung gilt, ist mir nicht bekannt, aber ohne viel Interesse, denn man findet in praxi aus Stetigkeitsbetrachtungen immer zunächst Homologien, aus denen man dann sofort symbolische Gleichungen folgern kann.

Das *Charakteristikenproblem* für eine Mannigfaltigkeit M_n lautet in der Schubertschen Fassung: Es ist eine Basis $V^{(1)}, \ldots, V^{(m)}$ für die k-fachen Bedingungen aufzustellen derart, daß jede k-fache Bedingung V symbolisch gleich einer Linearkombination der Basiselemente wird:

$$V \doteq \lambda_1 V^{(1)} + \ldots + \lambda_m V^{(m)}. \tag{8}$$

Die Lösung des Charakteristikenproblems konnte bis jetzt immer nur von Fall zu Fall gegeben werden. Die topologische Methode liefert zum erstenmal einen allgemeinen Beweis für die Existenz einer Basis. Denn es gibt in jeder triangulierbaren M^{2n} eine endliche Basis für die Klassen homologer Zyklen, also um so mehr eine Basis für die Homologieklassen mit erlaubter Division. Sucht man nun aus den letzteren Klassen diejenigen aus, die algebraische Varietäten enthalten, so haben diese wiederum eine endliche Basis. Die so erhaltene Basis in bezug auf die Relation $\approx$ ist um so mehr eine Basis für die Relation $\doteq$.

Die Anzahlen der nötigen Basiselemente für die Dimensionen k und $n-k$ sind gleich, und die Matrix der Schnittpunktszahlen ist regulär. Denn sonst würde es eine Linearkombination der Basiselemente für die Dimension k oder $n-k$ geben, welche mit jeder algebraischen Varietät von der komplementären Dimension die Schnittpunktszahl Null hätte, also symbolisch gleich Null wäre; damit wäre aber ein Basiselement überflüssig. — Folglich kann man die Basis für die Dimensionen k und $n-k$ auch so wählen, daß die Matrix eine Einheitsmatrix wird. Die Koeffizienten in (8) lassen sich dann deuten als Schnittpunktszahlen von V mit den Basiselementen der komplementären Dimension $n - k$.

Die wirkliche Aufstellung einer Homologiebasis ist in vielen Fällen nicht schwer. Hat man einmal die Basis für die Dimensionen k und $n - k$, sowie die Schnittpunktszahlen für die Basiselemente gefunden, so ist man im Stande, für je zwei (als Linearkombinationen der Basiselemente geschriebene) Varietäten V_k und V_{n-k} die Schnittpunktszahlen auszurechnen.

Für den Fall des projektiven Raumes soll das im nächsten Paragraphen ausgeführt werden.

§ 9.

Anwendung auf den projektiven Raum.

Im Anhang 2 wird bewiesen, daß die linearen Räume L_j eine Homologiebasis für alle Dimensionen im komplexen projektiven Raum $P_n = P^{2n}$ bilden. Führen wir mit Schubert für die einfache lineare Bedingung L_{n-1} das Symbol p ein, so stellt die Potenz p^h den L_{n-h} dar. Jede Varietät V_r ist homolog einem Vielfachen von L_r, also haben wir:

$$V_r \doteq \alpha \cdot p^{n-r}. \tag{9}$$

Daß hier α den Grad von V_r (d. h. die Schnittpunktszahl mit einem L_{n-r}) darstellt, sieht man sofort, indem man die Gleichung (9) mit p^r multipliziert.

Ist für eine V_{n-r} ebenso

$$V_{n-r} \doteq \beta \cdot p^r, \tag{10}$$

so erhält man durch Multiplikation von (9) mit (10) sofort den „*verallgemeinerten Bézoutschen Satz*“:

$$V_r \cdot V_{n-r} = \alpha \beta. \tag{11}$$

Sind allgemeiner V_r und V_s mit $r + s \geqq n$ gegeben, und sind α und β wie vorhin die Gradzahlen, so erhält man ebenso:

$$V_r \cdot V_s \doteq \alpha \beta \cdot p^{2n-r-s},$$

d. h. der approximative Schnittkomplex von V^r und V^s hat als Grad das Produkt der Gradzahlen von V^r und V^s. Hat der wirkliche Durchschnitt von V^r und V^s die richtige Dimension $k = r + s - n$, und zerfällt er in irreduzible Komponenten $V', V'', \ldots$ von den Gradzahlen $g', g'', \ldots$ und Multiplizitäten $\mu', \mu'', \ldots$, so hat man

$$V_r \cdot V_s = \mu' V' + \mu'' V'' + \ldots = \mu' g' p^{n-k} + \mu'' g'' p^{n-k} + \ldots,$$

mithin

$$\mu' g' + \mu'' g'' + \ldots = \alpha \cdot \beta. \tag{12}$$

Anhang 1.

Triangulierbarkeit der algebraischen Gebilde.

Satz. *Sind in einem beschränkten Teil (Simplex oder konvexen Polyeder) des reellen euklidischen R^n endlichviele algebraische Varietäten oder algebraisch-begrenzte Teilbereiche von algebraischen Varietäten gegeben, so gibt es eine Unterteilung dieses Raumteils derart, daß alle gegebenen algebraischen Varietäten aus Seiten der Zellen der Unterteilung bestehen.*

Beweis. Induktion nach n. (Für $n = 0$ ist nichts zu beweisen.)

Die Gleichungen der gegebenen Varietäten sind, eventuell nach einer linearen Koordinatentransformation, so zu schreiben, daß sie regulär in x_n sind (d. h. daß die höchste Potenz von x_n einen konstanten Koeffizienten $\neq 0$ hat). Die Projektionen dieser Varietäten (soweit ihre Dimension n ist) und ihrer Randgebilde auf den Raum $x_n = 0$ sind algebraische Gebilde von derselben Art, und zu jedem Punkt der Projektion gehören endlichviele Originalpunkte, algebraische Funktionen der Projektion. Wir verzeichnen im Raum $x_n = 0$ auch alle Verzweigungsgebilde dieser algebraischen Funktionen (wo zwei Wurzeln x_n zusammenrücken), wobei diejenigen Teilgebilde, wo noch mehr Wurzeln zusammenrücken als sonst auf dem Verzweigungsgebilde, noch besonders verzeichnet werden. Auf die Gesamtheit der so erhaltenen algebraischen Gebilde des Raumes $x_n = 0$ wird die Induktionsvoraussetzung angewandt. Über jeder Zelle oder Seite der damit erhaltenen Unterteilung des betreffenden Teils des Raumes $x_n = 0$ liegt eine zylindrische Punktmenge des R^n, und auf jeder erzeugenden Geraden ($x_1 =$ konst., ..., $x_{n-1} =$ konst.) eines solchen Zylinders sind endlichviele zu den gegebenen algebraischen Varietäten gehörige x_n-Werte ausgezeichnet, welche die erzeugende Gerade also in endlichviele Strecken teilen. Ändert sich die erzeugende Gerade, so ändern sich diese Teilpunkte stetig, und es fallen nie (außer am Rande der Zelle) zwei Teilpunkte zusammen. Jede dieser Strecken durchläuft also eine Zelle des R^n. Damit ist die verlangte Zelleneinteilung des R^n konstruiert.

Durch eine baryzentrische Unterteilung erhält man, wenn man das wünscht, aus der Zelleneinteilung eine Triangulation oder Simplexeinteilung.

Mutatis mutandis läßt sich das alles auf analytische Varietäten übertragen. Wichtiger für uns ist aber die *Übertragung auf algebraische Varietäten im komplexen projektiven Raum.*

Es gibt, wenn man die komplexen Koordinaten $z_0, \ldots, z_n$ durch $\sum z_j \bar{z}_j = 1$ normiert, die folgende (bekannte) eineindeutige Abbildung des komplexen projektiven Raumes auf eine ganz im Endlichen liegende algebraische Varietät im reellen euklidischen Raum von n^2 Dimensionen:

$$z_j \bar{z}_k = x_{jk} + i\, y_{jk} \qquad (x_{jk} = x_{kj},\ y_{jk} = -y_{kj}).\ ^{29)}$$

Bei dieser Abbildung gehen natürlich algebraische Varietäten von r komplexen Dimensionen in reelle algebraische Varietäten von $2r$ Dimensionen über. Der vorige Satz liefert daher die Möglichkeit einer Triangulation des komplexen projektiven Raumes, wobei beliebig vorgegebene algebraische Varietäten in ihm mit trianguliert werden können.

Anhang 2.

Die Topologie des reellen und des komplexen projektiven Raumes.

Zelleneinteilung. Die bequemste Zelleneinteilung des *reellen projektiven Raums* (homogene Koordinaten $z_0, \ldots, z_n$) erhält man so: Eine Zelle hat die Gleichungen

$$|z_1| \leqq |z_0|, \ldots, |z_n| \leqq |z_0|,$$

und die übrigen erhält man daraus durch Permutation der z_j. Verwandelt man einige der Ungleichungen in Gleichungen, so erhält man die Seiten der verschiedenen Dimensionen. Alle diese Zellen sind homöomorph Parallelotopen des euklidischen Raumes (man kann ja z. B. für alle Punkte der oben angeschriebenen Zelle die Größen $\frac{z_1}{z_0}, \ldots, \frac{z_n}{z_0}$ als inhomogene Koordinaten benutzen).

Im *komplexen projektiven Raum* hat man den obigen Ungleichungen noch andere von der Form $0 \leqq \arg\left(\frac{z_j}{z_0}\right) \leqq \pi$ für einige j, $\pi \leqq \arg\left(\frac{z_j}{z_0}\right) \leqq 2\pi$ für die übrigen j aus der Reihe $1, \ldots, n$ hinzuzufügen. Die Zellen werden topologische Produkte von Halbkreisen und Strecken. Bildet man eine baryzentrische Unterteilung, so sind alle Simplizes um einen Punkt so angeordnet wie Simplizes um einen Punkt im euklidischen Raum, wie man durch eine passende Abbildung leicht feststellt; der Raum ist mithin eine Mannigfaltigkeit im kombinatorischen Sinn[30]).

Die *Orientierbarkeit* des komplexen projektiven Raums wird genau so bewiesen wie die Orientierbarkeit aller algebraischen Varietäten im § 7:

---

[29]) Vgl. G. Mannoury, Surfaces-images, Nieuw Archief von Wiskunde (2) 4 (1898), p. 112.

[30]) Die etwas langwierige Verifikation dieser Behauptungen wird überflüssig gemacht durch die in Fußnote [20]) erwähnten neueren Untersuchungen. Denen zufolge genügt es ja, erstens nachzuweisen, daß es eine Triangulation überhaupt gibt, was in Anhang 1 schon geschah, und zweitens zu zeigen, daß der komplexe projektive Raum eine Mannigfaltigkeit im topologischen Sinn (vgl. § 7) ist. Letzteres ist klar, denn eine Umgebung eines jeden Punktes ist einem euklidischen Raum homöomorph: man kann für $z_0 \neq 0$ ja die Real- und Imaginärteile von $\frac{z_1}{z_0}, \ldots, \frac{z_n}{z_0}$ als Parameter benutzen.

Für einen Raumteil $|z_j| \leqq |z_0|$ $(j=1, \ldots, n)$ kann man $\frac{z_1}{z_0}, \ldots, \frac{z_n}{z_0}$ als komplexe Parameter benutzen und den Raumteil entsprechend orientieren. Der Übergang zu einem angrenzenden Raumteil, wo etwa $\frac{z_0}{z_1}, \frac{z_2}{z_1}, \ldots, \frac{z_n}{z_1}$ als Parameter benutzt werden, vollzieht sich dann durch eine analytische Parametertransformation, und diese erhält die Orientierung.

Der reelle projektive Raum ist bekanntlich nur für die ungeraden Dimensionszahlen orientierbar.

Die Aufstellung einer *Homologiebasis* kann für den komplexen und den reellen Fall gemeinsam geschehen. Wir nehmen etwa den komplexen $P_n = P^{2n}$. Eine Basis für die Zyklen der Dimension $2n$ bildet natürlich der Raum P^{2n} selbst (im reellen Fall der Raum P^n, falls er orientierbar ist, also für ungerades n). Jeder Zykel C^k $(k < 2n)$ kann zunächst so deformiert werden, daß er den Punkt $(1, 0, \ldots, 0)$ nicht enthält. Deformiert man ihn jetzt weiter, indem man jeden Punkt $(x_0, \ldots, x_n)$ von C^k durch $(\lambda x_0, x_1, \ldots, x_n)$ ersetzt und die reelle Zahl λ von 1 nach 0 gehen läßt, so wird C^k schließlich ganz in den Unterraum $z=0$ geschoben. Nimmt man nun als Induktionsvoraussetzung für den P_{n-1} an, daß in ihm eine Homologiebasis für alle Dimensionen durch die linearen Unterräume $L_j = L^{2j}$ $(j = 0, \ldots, n-1)$ gebildet wird, so folgt, daß unser Zykel Z^k für ungerades k homolog Null, für gerades $k = 2j$ homolog einem Vielfachen eines L_j im Unterraum $x_0 = 0$ ist. Damit ist die Induktionsvoraussetzung auch für den P_n bewiesen. Für P_0 ist sie trivial, mithin:

Im komplexen $P_n = P^{2n}$ bilden die linearen Unterräume $L_j = L^{2j}$ (inklusive P_n selbst) eine Homologiebasis für alle Dimensionen.

Daß die L_j sowie ihre Vielfache nicht homolog Null sind, sieht man daraus, daß die Schnittpunktszahl $L_j \cdot L_{n-j}$ den Wert 1 hat.

Im reellen projektiven P_n kommen die L_j als Zyklen nur für ungerades j in Betracht, da sie für gerades j ja nicht orientierbar sind; sie sind, doppelt gezählt, Rand eines L_{j+1}, mithin

$$2\,L_j \sim 0\,.$$

Daß die L_j $(j = 2n+1)$ selbst nicht homolog Null und sogar nicht homolog Null modulo 2 sind, sieht man daraus, daß die „Schnittpunktszahl mod 2“ von L_j und L_{n-j} (mod 2 ist auch L_{n-j} ein Zykel) den Wert 1 hat.

Der Grenzübergang $\lambda \to 0$, der hier zur Bestimmung der Homologiebasis führte, entspricht der „ausgearteten Transformation“ von W_2, § 7. Was aber algebraisch sehr kompliziert durchzuführen war, wird topologisch äußerst einfach.

(Eingegangen am 23. 2. 1929.)