Über den Aufbau des Nullideals in ganz abgeschlossenen Ringen mit Teilerkettensatz[1]).

Von

Wolfgang Krull in Erlangen.

Im folgenden wird gezeigt, daß in einem ganz abgeschlossenen Ring mit Teilerkettensatz die Struktur des Nullideals keineswegs willkürlich vorgeschrieben werden kann, sondern daß bei einem derartigen Ring — von einem trivialen Ausnahmefall abgesehen — unter den isolierten Primärkomponenten[2]) des Nullideals stets Primideale vorkommen müssen. Insbesondere ergibt sich, daß ein ganz abgeschlossener Ring mit Teilerkettensatz, in dem das Nullideal Durchschnitt seiner isolierten Primärkomponenten ist, stets dargestellt werden kann als direkte Summe von endlich vielen speziellen ganz abgeschlossenen Ringen, die entweder Integritätsbereiche

---

[1]) Die vorliegende Note stellt eine Ergänzung zweier kürzlich erschienenen Arbeiten von B. L. van der Waerden dar:

B. L. van der Waerden, Zur Produktzerlegung der Ideale in ganz abgeschlossenen Ringen, Math. Annalen **101** (1929), zitiert mit „W. I".

B. L. van der Waerden: Zur Idealtheorie der ganz abgeschlossenen Ringe, ebenda, zitiert mit „W. II".

Vgl. ferner: F. C. Schmidt, Primidealzerlegung für die Hauptideale eines Integritätsbereichs, Sitzungsber. d. Münchner Akademie 1929, wo ohne Beweis der folgende Satz angegeben ist:

In einem beliebigen Integritätsbereich J läßt sich dann und nur dann jedes Hauptideal eindeutig als Produkt von Primidealpotenzen darstellen, wenn 1. J ganz abgeschlossen ist, und wenn 2. in J jede mit einem Hauptideal beginnende Quotientenkette nur endlich viel verschiedene Glieder besitzt.

(Die zweite Bedingung ist wesentlich schwächer als der in der vorliegenden Note und in W. I u. W. II vorausgesetzte Noethersche Teilerkettensatz.)

[2]) Im folgenden benützen wir für die isolierten Komponenten eines Ideals die Definition, die van der Waerden in § 2 der Arbeit: Eine Verallgemeinerung des Bézontschen Theorems [Math. Annalen **99** (1928)], gegeben hat. Vgl. auch den Beginn von § 1 des Textes, wo die zum Verständnis unserer Untersuchungen notwendigen Tatsachen über isolierte Komponentenideale kurz zusammengestellt sind.

sind (d. h. außer 0 selbst keine Nullteiler enthalten) oder nur aus Nullteilern und Einheiten bestehen.

Auf Grund dieser Tatsache können die „Multiplikationsringe", in denen aus der Teilbarkeit von $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ stets die Existenz einer Produktdarstellung $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}$ folgt, idealtheoretisch erschöpfend charakterisiert werden. Schließlich wird noch durch ein Beispiel gezeigt, daß es ganz abgeschlossene Ringe mit Teilerkettensatz gibt, in denen das Nullideal nicht Durchschnitt seiner isolierten Primärkomponenten ist, für die also eine direkte Summenzerlegung der oben angegebenen Art nicht existiert.

§ 1.

Ein Satz über quasiumkehrbare Primideale.

Es sei $\mathfrak{R}$ ein — vorerst nicht notwendig ganz abgeschlossener — Ring mit Einheitselement ε, in dem der Teilerkettensatz gilt; $\mathfrak{o}$ bedeute das Einheits-, $\mathfrak{n}$ das Nullideal. $\mathfrak{K}$ sei der zu $\mathfrak{R}$ gehörige Quotientenring, also der (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmte kleinste Erweiterungsring von $\mathfrak{R}$, in dem jeder Nichtnullteiler von $\mathfrak{R}$ Einheit ist, d. h. ein hinsichtlich ε reziprokes Element besitzt. Die *isolierten Komponenten* eines Ideals $\mathfrak{m}$ definieren wir in üblicher Weise, also z. B. im Anschluß an van der Waerden: Ist S irgendein Elementesystem aus $\mathfrak{R}$, das gleichzeitig mit zwei Elementen stets auch deren Produkt enthält, so soll unter der durch S erzeugten isolierten Komponente $\mathfrak{m}_S$ von $\mathfrak{m}$ das Ideal verstanden werden, das alle und nur die Elemente aus $\mathfrak{R}$ enthält, deren Produkt mit einem jeweils geeignet gewählten Element aus S zu $\mathfrak{m}$ gehört. — Wegen der Gültigkeit des Teilerkettensatzes in $\mathfrak{R}$ kann man zu $\mathfrak{m}_S$ ein Element s aus S stets derart bestimmen, daß das Produkt von $\mathfrak{m}_S$ mit dem Hauptideal (s) Vielfaches von $\mathfrak{m}$ wird. — Ist $\mathfrak{m}_S$ Primärideal, so nennen wir $\mathfrak{m}_S$ eine *isolierte Primärkomponente* von $\mathfrak{m}$. Das zu einer isolierten Primärkomponente gehörige Primideal ist *höchstes Primideal* von $\mathfrak{m}$, d. h. es ist zwar selbst Teiler von $\mathfrak{m}$, besitzt aber kein echtes Primidealvielfaches mit der gleichen Eigenschaft. Umgekehrt gehört zu einem höchsten Primideal von $\mathfrak{m}$ stets eine bestimmte isolierte Primärkomponente.

Ein Ideal $\mathfrak{a}$ aus $\mathfrak{R}$, das mindestens einen Nichtnullteiler enthält, soll *regulär* heißen. Wegen der Gültigkeit des Teilerkettensatzes ist $\mathfrak{a}$ dann und nur dann regulär, wenn $\mathfrak{a}$ zum Nullideal prim ist, wenn also kein von $\mathfrak{n}$ verschiedenes Ideal $\mathfrak{m}$ existiert, das der Gleichung $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ genügt[3]). Wir werden von dieser Tatsache öfters Gebrauch machen.

---

[3]) Vgl. § 1 S. 5 der Arbeit: Krull, Primidealketten in allgemeinen Ringbereichen, Sitzungsber. d. Heidelberger Akademie, Math.-Naturw. Klasse, 1928, 3. Abhandl., zitiert mit K. I.

Ist $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{o}$ ein beliebiges reguläres Primideal aus $\mathfrak{R}$, so verstehen wir unter dem gebrochenen Ideal $\mathfrak{o} : \mathfrak{p}$ in üblicher Weise die Gesamtheit derjenigen Elemente aus dem Quotientenring $\mathfrak{K}$, deren Produkte mit den Elementen von $\mathfrak{p}$ sämtlich zu $\mathfrak{R}$ gehören. Ist $\mathfrak{p} \cdot (\mathfrak{o} : \mathfrak{p}) = \mathfrak{o}$, so heißt $\mathfrak{p}$ *umkehrbar*, stellt allgemeiner $\mathfrak{p} \cdot (\mathfrak{o} : \mathfrak{p})$ irgendeinen echten Teiler von $\mathfrak{p}$ dar, so bezeichnen wir $\mathfrak{p}$ als *quasiumkehrbar*. Es gilt nun

Satz 1. *Ist das reguläre Primideal $\mathfrak{p}$ aus $\mathfrak{R}$ quasiumkehrbar, so gibt es in $\mathfrak{R}$ nur ein einziges echtes Primidealvielfaches $\mathfrak{p}_n$ von $\mathfrak{p}$ und es stellt dabei $\mathfrak{p}_n$ eine isolierte Primärkomponente des Nullideals dar.*

Das System $S_{\mathfrak{p}}$ aller durch $\mathfrak{p}$ unteilbarer Elemente aus $\mathfrak{R}$ enthält gleichzeitig mit a und b stets auch $a \cdot b$, $S_{\mathfrak{p}}$ erzeugt daher eine isolierte Komponente $\mathfrak{n}_{\mathfrak{p}}$ des Nullideals. Da nach einer oben gemachten Bemerkung zu $\mathfrak{n}_{\mathfrak{p}}$ ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Hauptideal (s) existiert, das der Gleichung $\mathfrak{n}_{\mathfrak{p}} \cdot (s) = \mathfrak{n}$ genügt, ist $\mathfrak{n}_{\mathfrak{p}}$ durch jedes Primidealvielfache von $\mathfrak{p}$ teilbar. Andrerseits folgt aus früher von mir angestellten Untersuchungen: Bedeutet $\mathfrak{p}^{(\nu)}$ die durch $S_{\mathfrak{p}}$ erzeugte zu $\mathfrak{p}$ gehörige isolierte Primärkomponente von $\mathfrak{p}^{\nu}$, so ist der Durchschnitt der sämtlichen Ideale $\mathfrak{p}^{(\nu)}$ gerade gleich $\mathfrak{n}_{\mathfrak{p}}$.[4]) Zum Beweise von Satz 1 brauchen wir daher nur zu zeigen:

Jedes echte Primidealvielfache $\mathfrak{p}_n$ von $\mathfrak{p}$ ist durch alle $\mathfrak{p}^{(\nu)}$ teilbar.

In der Tat, zunächst ist nach Voraussetzung $\mathfrak{p}_n$ Vielfaches von $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^{(1)}$. Wir nehmen nun an, es sei $\mathfrak{p}_n$ durch $\mathfrak{p}^{(\nu)}$ teilbar und erschließen daraus die Teilbarkeit von $\mathfrak{p}_n$ durch $\mathfrak{p}^{(\nu+1)}$ auf folgende Weise[5]): $\mathfrak{p}_n \cdot (\mathfrak{o} : \mathfrak{p})$ ist ein (ganzes) Ideal aus $\mathfrak{R}$, und es ist $(\mathfrak{p}_n \cdot (\mathfrak{o} : \mathfrak{p})) \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_n \cdot ((\mathfrak{o} : \mathfrak{p}) \cdot \mathfrak{p})$ durch $\mathfrak{p}_n$ teilbar. Da nach Voraussetzung $\mathfrak{p}_n$ echtes Vielfaches von $\mathfrak{p}$ ist, ergibt sich daraus die Teilbarkeit von $\mathfrak{p}_n \cdot (\mathfrak{o} : \mathfrak{p})$ durch $\mathfrak{p}_n$, es stellt daher $\mathfrak{p}_n \cdot (\mathfrak{o} : \mathfrak{p}) \cdot \mathfrak{p}$ ein Vielfaches von $\mathfrak{p}_n \cdot \mathfrak{p}$ dar. Beachten wir nun, daß $\mathfrak{p}_n \cdot \mathfrak{p}$ durch das zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideal $\mathfrak{p}^{(\nu+1)}$ teilbar, $(\mathfrak{o} : \mathfrak{p}) \cdot \mathfrak{p}$ dagegen durch $\mathfrak{p}$ unteilbar ist, so folgt aus dem zuletzt gewonnenen Ergebnis die Teilbarkeit von $\mathfrak{p}_n$ durch $\mathfrak{p}^{(\nu+1)}$. Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{p}_n$ gemeinsames Vielfaches von sämtlichen $\mathfrak{p}^{(\nu)}$ sein muß, der Beweis von Satz 1 ist beendet.

---

[4]) K. I. § 2. Dort habe ich nämlich einerseits beim Beweise von Satz 3 gezeigt: „Der Durchschnitt $\mathfrak{m}$ aller $\mathfrak{p}^{(\nu)}$ genügt der Gleichung $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{m}$“ und andrerseits beim Beweise von Satz 2 das Ergebnis gewonnen: „Ist $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{m}$, so gibt es sicher ein durch $\mathfrak{p}$ unteilbares Hauptideal (s), das der Gleichung $\mathfrak{m} \cdot (s) = \mathfrak{n}$ genügt.“ Daraus ergibt sich die Teilbarkeit von $\mathfrak{m}$ durch $\mathfrak{n}_{\mathfrak{p}}$, und da umgekehrt $\mathfrak{n}_{\mathfrak{p}}$ ebenso wie durch jedes Primidealvielfache von $\mathfrak{p}$ auch durch jedes zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideal teilbar ist, muß $\mathfrak{n}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}$ sein. Daß übrigens die $\mathfrak{p}^{(\nu)}$ wirklich zu $\mathfrak{p}$ gehörige Primärideale darstellen, folgt aus dem Umstand, daß einerseits jeder Primidealteiler von $\mathfrak{p}^{(\nu)}$ Teiler von $\mathfrak{p}$ sein muß, und daß andrerseits wegen der Art der Erzeugung von $\mathfrak{p}^{(\nu)}$ aus $a \cdot b \equiv 0\,(\mathfrak{p}^{(\nu)})$; $b \not\equiv 0\,(\mathfrak{p})$ stets $a \equiv 0\,(\mathfrak{p}^{(\nu)})$ folgt.

[5]) Auf die folgenden Schlüsse, die den Beweis wesentlich abkürzen, machte mich Herr van der Waerden aufmerksam.

§ 2.

Anwendung von Satz 1 auf ganz abgeschlossene Ringe.

Wir wenden jetzt Satz 1 auf den Fall an, daß $\mathfrak{R}$ im Quotientenring $\mathfrak{K}$ ganz abgeschlossen ist. Existiert hier in $\mathfrak{R}$ ein Element a, das weder Einheit noch Nullteiler ist, so gibt es in $\mathfrak{R}$ nach v. d. Waerden[6]) mindestens ein quasiumkehrbares Primideal, es ist nämlich z. B. jedes zum Hauptideal (a) gehörige Primideal quasiumkehrbar. Die Anwendung von Satz 1 liefert daher:

Satz 2. *In einem ganz abgeschlossenen Ring, in dem der Teilerkettensatz gilt, ist entweder jeder Nichtnullteiler Einheit, oder es ist mindestens eine isolierte Primärkomponente des Nullideals Primideal.*

Spezialisieren wir Satz 2 auf den Fall eines „primären" Ringes $\mathfrak{R}$, in dem das Nullideal Primärideal ist, also nur ein einziges zugehöriges Primideal besitzt, so erhalten wir:

Satz 3. *Ein primärer ganz abgeschlossener Ring $\mathfrak{R}$, in dem der Teilerkettensatz gilt, ist entweder ein Integritätsbereich oder es gibt in $\mathfrak{R}$ nur Nullteiler und Einheiten.*

Auf Satz 3 läßt sich schließlich noch der Fall zurückführen, daß in $\mathfrak{R}$ das Nullideal den Durchschnitt von endlich vielen, gegenseitig primen Primäridealen $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_s$, also den Durchschnitt seiner isolierten Primärkomponenten darstellt. Verstehen wir hier unter $\mathfrak{q}_i^*$ das Ideal $\mathfrak{q}_i \cdot \mathfrak{K}$ aus $\mathfrak{K}$, so sind die $\mathfrak{q}_i^*$ paarweise teilerfremd, weil ja unter unserer Voraussetzung der gr. g. T. von $\mathfrak{q}_i$ und $\mathfrak{q}_k$ in $\mathfrak{R}$ für $i \neq k$ stets einen Nichtnullteiler enthält, der in $\mathfrak{K}$ Einheit wird. Da außerdem in $\mathfrak{K}$ der Durchschnitt der Ideale $\mathfrak{q}_i^*$ gleich dem Nullideal ist, gilt nach bekannten Sätzen[7]) für $\mathfrak{K}$ eine direkte Summenzerlegung $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \ldots + \mathfrak{K}_s$, wobei der Ring $\mathfrak{K}_i$ aus den Elementen des Ideals $\mathfrak{q}^{(i)*} = \prod\limits_{k \neq i} \mathfrak{q}_k^*$ besteht und zu $\mathfrak{K} \mid \mathfrak{q}_i^*$ isomorph ist. Bedeutet ε_i das Einheitselement aus $\mathfrak{K}_i$, so ist ε_i wegen $\varepsilon_i^2 - \varepsilon_i = 0$ von $\mathfrak{R}$ ganz abhängig und mithin schon im Durchschnitt von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{K}_i = \mathfrak{q}_i^*$, d. h. im Durchschnitt der Ideale $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{i-1}, \mathfrak{q}_{i+1}, \ldots, \mathfrak{q}_s$ enthalten. Daraus folgt angesichts der Gleichung $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_s$, daß bereits in $\mathfrak{R}$ die Ideale $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_s$ paarweise teilerfremd sind.

Der direkten Summendarstellung $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \ldots + \mathfrak{K}_s$ entspricht daher eine direkte Summendarstellung $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \ldots + \mathfrak{R}_s$, $\mathfrak{R}_i = \prod\limits_{k \neq i} \mathfrak{q}_k = \mathfrak{q}^{(i)}$. Dabei stellt offenbar $\mathfrak{K}_i$ gerade den zu $\mathfrak{R}_i$ gehörigen Quotientenring dar,

---

[6]) W. II: Beweis des Satzes v. S. 309.

[7]) Was die Theorie der eindeutigen additiven Zerlegung angeht, so vgl. z. B. die Zusammenstellung in § 3 der Arbeit: E. Noether, Der Diskriminantensatz fur die Ordnungen eines algebraischen Zahl- oder Funktionenkörpers, Journ. f. Math. **157** (1926).

und es ist $\mathfrak{N}_i$ gleich dem Durchschnitt von $\mathfrak{K}_i$ und $\mathfrak{R}$. Hängt nun α_i aus $\mathfrak{K}_i$ von $\mathfrak{R}_i$ ganz ab, so hängt es erst recht von $\mathfrak{R}$ ganz ab, es gehört also zu $\mathfrak{R}$ und damit auch zu $\mathfrak{R}_i$, d. h.: Die Ringe $\mathfrak{R}_i$ sind ganz abgeschlossen. Da jeder $\mathfrak{R}_i$ wegen seiner Isomorphie zu $\mathfrak{R} \mid \mathfrak{q}_i$ primär ist, können wir Satz 3 anwenden und wir erhalten:

Satz 4. *Genügt der ganz abgeschlossene Ring $\mathfrak{R}$ dem Teilerkettensatz, und ist in $\mathfrak{R}$ das Nullideal Durchschnitt seiner isolierten Primärkomponenten, so ist $\mathfrak{R}$ die direkte Summe von endlich vielen primären ganz abgeschlossenen Ringen, die entweder Integritätsbereiche sind oder nur Nullteiler und Einheiten enthalten.*

Wir zeigen jetzt durch ein Beispiel, daß nicht alle ganz abgeschlossenen Ringe mit Teilerkettensatz unter den in Satz 4 erledigten Spezialfall gehören, d. h. wir beweisen: *Es gibt ganz abgeschlossene Ringe, die dem Teilerkettensatz genügen und in denen das Nullideal von dem Durchschnitt seiner isolierten Primärkomponenten verschieden ist.*

Es sei K ein beliebiger Körper, $\mathfrak{S} = K[x, y]$ sei der Ring aller Polynome in x und y mit Koeffizienten aus K, $\mathfrak{R}$ sei das Restklassensystem von $\mathfrak{S}$ nach dem Ideal (x^2, xy). Dann genügt $\mathfrak{R}$ dem Teilerkettensatz, und es ist das Nullideal von $\mathfrak{R}$ von dem Durchschnitt seiner isolierten Primärkomponenten verschieden, weil es dieselbe Struktur besitzt wie das Ideal (x^2, xy) aus $\mathfrak{S}$, das (x) als einzige isolierte Primärkomponente hat.

Schließlich ist $\mathfrak{R}$ ganz abgeschlossen.

In der Tat, es seien $\bar{p}, \bar{q}, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ beliebige Elemente aus $\mathfrak{R}$, $\bar{q}$ insbesondere Nichtnullteiler, und es hänge $\bar{\alpha} = \frac{\bar{p}}{\bar{q}}$ vermöge der Gleichung $\bar{\alpha}^n + \bar{a}_1 \bar{\alpha}^{n-1} + \ldots + \bar{a}_n = 0$, d. h. vermöge $\bar{p}^n + \bar{a}_1 \bar{p}^{n-1} \bar{q} + \ldots + \bar{a}_n \bar{q}^n = 0$ von $\mathfrak{R}$ ganz ab. Verstehen wir dann unter $p(x, y) = a \cdot x + \varphi(y)$ bzw. $q(x, y) = b \cdot x + \psi(y)$ einen Vertreter der Restklasse $\bar{p}$ bzw. $\bar{q}$, so folgt in $\mathfrak{S}$ aus der für $\bar{p}$ und $\bar{q}$ gültigen Gleichung eine Kongruenz: $\varphi^n(y) + a_1(y)\varphi^{n-1}(y) \cdot \psi(y) + \ldots + a_n(y)\psi^n(y) \equiv 0 \; ((x))$, die uns zeigt, daß $\varphi(y)$ durch $\psi(y)$ in $\mathfrak{S}$ teilbar sein muß, $\varphi(y) = \psi(y) \cdot \chi(y)$. Da ferner $\bar{q}$ in $\mathfrak{R}$ Nichtnullteiler ist, muß $q(x, y) = b \cdot x + \psi(y)$ durch das Ideal (x, y) unteilbar, d. h. es muß $\psi(y)$ modulo y einem von 0 verschiedenen Element aus K kongruent sein. Es gibt daher in K sicher eine Lösung d der Kongruenz $d \cdot \psi(y) + b \cdot \chi(y) \equiv a \; ((y))$. Setzt man nun $r(x, y) = d \cdot x + \chi(y)$, so wird $q(x, y) \cdot r(x, y) \equiv p(x, y) \; ((x^2, xy))$, d. h. es genügt die durch $r(x, y)$ definierte Restklasse $\bar{r}$ aus $\mathfrak{R}$ der Gleichung $\bar{p} = \bar{q} \cdot \bar{r}$, $\frac{\bar{p}}{\bar{q}} = \bar{r}$ gehört zu $\mathfrak{R}$. Wir haben also aus der Tatsache, daß $\bar{\alpha}$ von $\mathfrak{R}$ ganz abhängt, die Zugehörigkeit von $\bar{\alpha}$ zu $\mathfrak{R}$ erschlossen.

Da $\bar{p}$ ein ganz beliebiges Element, $\bar{q}$ einen ganz beliebigen Nichtnullteiler aus $\mathfrak{R}$ bedeutete, ist damit die ganze Abgeschlossenheit von $\mathfrak{R}$ bewiesen, und es ist gezeigt, daß $\mathfrak{R}$ wirklich ein Beispiel der von uns gewünschten Art darstellt.

§ 3.

Über Multiplikationsringe [8]).

Ein Ring $\mathfrak{R}$, in dem der Teilerkettensatz gilt, soll *Multiplikationsring* heißen, wenn in $\mathfrak{R}$ aus der Teilbarkeit von $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ stets die Gültigkeit einer Gleichung $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}$ folgt. Für Multiplikationsringe gelten zunächst folgende Hilfssätze:

Hilfssatz 1. *In einem Multiplikationsring läßt sich jedes reguläre Ideal als Produkt von Potenzen teilerfremder Primideale darstellen* [9]).

Hilfssatz 2. *Besitzt in einem Multiplikationsring das nichtreguläre Ideal* $\mathfrak{a}$ *einen gleichfalls nichtregulären echten Teiler* $\mathfrak{b}$, *so läßt sich* $\mathfrak{a}$ *als Produkt echter Teiler darstellen* [10]).

Den Hilfssatz 1 beweist man ohne Schwierigkeit auf Grund der Definition des Multiplikationsringes und der Tatsache, daß in einem Ring mit Teilerkettensatz aus $\mathfrak{a} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}$ regulär, stets $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}$ folgt. Um Hilfssatz 2 zu beweisen, schließen wir so: Aus der Teilbarkeit von $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{b}$ folgt die Gültigkeit einer Gleichung $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{c}$; bedeutet ferner $\mathfrak{d}$ irgendein wegen der Nichtregularität von $\mathfrak{b}$ sicher existierendes, von $\mathfrak{n}$ verschiedenes Ideal, das der Gleichung $\mathfrak{b} \cdot \mathfrak{d} = \mathfrak{n}$ genügt, so dürfen wir $\mathfrak{c}$ als Teiler von $\mathfrak{d}$ annehmen. Unter dieser Voraussetzung aber wird $\mathfrak{c}$ echter Teiler von $\mathfrak{a}$; wäre nämlich $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}$, so wäre $\mathfrak{a}$ Teiler von $\mathfrak{d}$, und daraus folgte $\mathfrak{d} = \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{e} \cdot \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cdot \mathfrak{d} = \mathfrak{n}$.

Aus Hilfssatz 1 ergibt sich nach einem van der Waerdenschen Satz [11]) die ganze Abgeschlossenheit der Multiplikationsringe. Hilfssatz 2 zeigt, daß in einem Multiplikationsring zwei nichtreguläre Primideale stets gegenseitig prim sind. Wir können daher Satz 4 anwenden, und wir erhalten:

---

[8]) Die in § 3 über Multiplikationsringe abgeleiteten Sätze habe ich schon früher bewiesen, und zwar in den beiden Noten:

Die verschiedenen Arten der Hauptidealringe, Sitzungsber. d. Heidelberger Akademie, Math.-naturw. Klasse, 1924, 6. Abhandl.; zitiert mit K. II.

Beiträge zur Algebra 3: Über Multiplikationsringe, Sitzungsber. d. Heidelberger Akademie, Math.-naturw. Klasse, 1925, 5. Abhandl.; zitiert mit K. III.

Im Text handelt es sich vor allem um die Einordnung der Multiplikationsringe in die allgemeine Theorie der ganz abgeschlossenen Ringe.

[9]) Vgl. K. II § 2, K. III S. 15.

[10]) Vgl. K. II § 3, Satz 3.

[11]) Vgl. W. II S. 310.

Satz 5. *Ein beliebiger Ring $\mathfrak{R}$ ist dann und nur dann Multiplikationsring, wenn er sich darstellen läßt als direkte Summe von endlich vielen speziellen Multiplikationsringen, die entweder Integritätsbereiche sind, oder primär sind und nur Nullteiler und Einheiten enthalten.*

(Man beachte, daß offenbar jeder direkte Summand eines Multiplikationsringes selbst wieder Multiplikationsring ist!) — Ein Integritätsbereich mit Multiplikationsringeigenschaft besitzt offenbar, wie aus Hilfssatz 1 zu ersehen, vom Standpunkt der Idealtheorie aus dieselbe Struktur wie der Integritätsbereich aller ganzen Zahlen eines endlichen algebraischen Zahlkörpers. Ein primärer Multiplikationsring dagegen, in dem nur Nullteiler und Einheiten auftreten, ist ein *„spezieller zerlegbarer Ring"*, d. h. er besitzt die idealtheoretische Struktur des Restklassensystems nach einer Primzahlpotenz [12]). Bedeutet nämlich $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{n}$ das nichtreguläre Primideal eines derartigen Multiplikationsringes, π ein durch $\mathfrak{p}$, aber nicht durch $\mathfrak{p}^2$ teilbares Element, so gilt eine Gleichung $\pi^\nu = 0$, und es muß $\mathfrak{p} = (\pi)$ sein, weil das Ideal (π) das Produkt von $\mathfrak{p}$ mit einem sicher durch $\mathfrak{p}$ unteilbaren Faktor darstellen muß. Man erkennt nun ohne weiteres, daß jedes Ringelement auf die Form $\alpha = \pi^s \cdot \delta$ gebracht werden kann, wobei δ Einheit und der Exponent s für $\alpha \neq 0$ eindeutig bestimmt ist. Damit ist die Behauptung über die Struktur eines primären Multiplikationsringes bewiesen, wir sehen somit, daß durch Satz 5 das Studium eines beliebigen Multiplikationsringes auf die Untersuchung von wohlbekannten Ringtypen zurückgeführt wird.

---

[12]) Vgl. K. II S. 15, K. III S. 16 f.

(Eingegangen am 30. 1. 1929.)