Bemerkung über die konformen Abbildungen konvexer Gebiete.

Von

Tibor Radó[1]) in Szeged, z. Z. München.

Die Funktion $w = f(z)$ bilde das Innere des Einheitskreises $|z| < 1$ konform auf ein *konvexes* Gebiet G der w-Ebene ab. Nach Study[2]) werden dann auch die konzentrischen Kreisflächen $|z| < r < 1$ auf konvexe Gebiete abgebildet. Ich möchte in dieser Note einen sehr elementaren Beweis dieses schönen Satzes mitteilen, wobei derselbe als unmittelbare Folgerung des Schwarzschen Lemmas erscheint[3]).

Beim Beweise dürfen wir offenbar

$$f(0) = 0 \tag{1}$$

voraussetzen. Wir bezeichnen die Kreisscheibe $|z| < r < 1$ mit K_r, ihr Bildgebiet mit G_r, und wir wählen in G_r irgend zwei verschiedene Punkte w_1, w_2. Zu zeigen ist, daß jeder auf der Verbindungsstrecke von w_1 und w_2 gelegene Punkt w_0 ebenfalls in G_r enthalten ist; falls wir die inverse Funktion von $f(z)$ mit $F(w)$ bezeichnen, so ist diese Behauptung der Ungleichung

$$|F(w_0)| < r \tag{2}$$

gleichwertig, die ja eben die Tatsache ausdrückt, daß der Urbildpunkt von w_0 in K_r liegt[4]).

---

[1]) International Research Fellow.

[2]) Study, Konforme Abbildung einfach-zusammenhängender Bereiche, S. 110 ff., B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1913.

[3]) Für den üblichen Beweis vgl. etwa die Darstellung bei Carathéodory, Sur la représentation conforme des polygones convexes, Annales de la Société scientifique de Bruxelles **37** (1913), S. 1—10.

[4]) Um vom Urbildpunkte von w_0 sprechen zu können, muß w_0 in G liegen; dies ist aber gewiß der Fall, denn G ist konvex, und w_0 liegt auf der Verbindungsstrecke von zwei Punkten von G.

Der Punkt w_0 kann, weil er auf der Verbindungsstrecke von w_1 und w_2 liegt, in der Form

$$w_0 = t w_1 + (1-t) w_2, \qquad t \text{ reell und } 0 < t < 1 \tag{3}$$

dargestellt werden. Es seien z_1 und z_2 die Urbildpunkte von w_1 und w_2, wobei die Bezeichnung so gewählt werde, daß $|z_1| \leqq |z_2|$ ausfällt. Dann sind z_1 und z_2 zwei verschiedene Punkte in K_r, und es ist gewiß $z_2 \neq 0$, weil sonst $z_1 = 0 = z_2$ wäre. Wir haben also:

$$|z_1| \leqq |z_2| < r, \qquad z_2 \neq 0. \tag{4}$$

Wir bilden nun die, wegen (4) für $|z| < 1$ reguläre, Funktion

$$\varphi(z) = t f\left(\frac{z_1}{z_2} z\right) + (1-t) f(z). \tag{5}$$

In der w-Ebene dargestellt, fallen die Punkte $f\left(\frac{z_1}{z_2} z\right)$ und $f(z)$ in G, $\varphi(z)$ ist aber, wegen $0 < t < 1$, ein Punkt auf der Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte, also ebenfalls ein Punkt in G, da G konvex ist. Wir dürfen also $\varphi(z)$ in die inverse Funktion $F(w)$ einsetzen und erhalten eine für $|z| < 1$ reguläre Funktion

$$\psi(z) = F(\varphi(z)), \tag{6}$$

die wegen (1) und (5) für $z = 0$ verschwindet und für $|z| < 1$ dem absoluten Betrage nach kleiner als Eins ist, weil nämlich F nur solche Werte annimmt, die absolut < 1 sind. Es erfüllt also $\psi(z)$ die Voraussetzungen des Schwarzschen Lemmas und wir haben daher

$$|\psi(z)| \leqq |z| \quad \text{für} \quad |z| < 1.$$

Setzen wir hier $z = z_2$, so ergibt sich, da $|z_2| < r$ und, wegen (6), (5) und (3), $\psi(z_2) = F(w_0)$ ist, gerade die zu beweisende Ungleichung (2) [5].

---

[5]) Herrn Carathéodory habe ich für freundliche Ratschläge zur endgültigen Darstellung dieses Beweises zu danken.

(Eingegangen am 24. 7. 1929.)