

Werk

Titel: Mathematische Annalen

Ort: Berlin

Jahr: 1930

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN235181684_0102

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0102

LOG Id: LOG_0022

LOG Titel: Bemerkung über die konformen Abbildungen konvexer Bereiche

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Bemerkung über die konformen Abbildungen konvexer Gebiete.

Von

Tibor Radó¹⁾ in Szeged, z. Z. München.

Die Funktion $w = f(z)$ bilde das Innere des Einheitskreises $|z| < 1$ konform auf ein *konvexes* Gebiet G der w -Ebene ab. Nach Study²⁾ werden dann auch die konzentrischen Kreisflächen $|z| < r < 1$ auf konvexe Gebiete abgebildet. Ich möchte in dieser Note einen sehr elementaren Beweis dieses schönen Satzes mitteilen, wobei derselbe als unmittelbare Folgerung des Schwarzschen Lemmas erscheint³⁾.

Beim Beweise dürfen wir offenbar

$$(1) \quad f(0) = 0$$

voraussetzen. Wir bezeichnen die Kreisscheibe $|z| < r < 1$ mit K_r , ihr Bildgebiet mit G_r , und wir wählen in G_r irgend zwei verschiedene Punkte w_1, w_2 . Zu zeigen ist, daß jeder auf der Verbindungsstrecke von w_1 und w_2 gelegene Punkt w_0 ebenfalls in G_r enthalten ist; falls wir die inverse Funktion von $f(z)$ mit $F(w)$ bezeichnen, so ist diese Behauptung der Ungleichung

$$(2) \quad |F(w_0)| < r$$

gleichwertig, die ja eben die Tatsache ausdrückt, daß der Urbildpunkt von w_0 in K_r liegt⁴⁾.

¹⁾ International Research Fellow.

²⁾ Study, *Konforme Abbildung einfach-zusammenhängender Bereiche*, S. 110 ff., B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1913.

³⁾ Für den üblichen Beweis vgl. etwa die Darstellung bei Carathéodory, *Sur la représentation conforme des polygones convexes*, *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* 37 (1913), S. 1—10.

⁴⁾ Um vom Urbildpunkte von w_0 sprechen zu können, muß w_0 in G liegen; dies ist aber gewiß der Fall, denn G ist konvex, und w_0 liegt auf der Verbindungsstrecke von zwei Punkten von G .

Der Punkt w_0 kann, weil er auf der Verbindungsstrecke von w_1 und w_2 liegt, in der Form

$$(3) \quad w_0 = t w_1 + (1 - t) w_2, \quad t \text{ reell und } 0 < t < 1$$

dargestellt werden. Es seien z_1 und z_2 die Urbildpunkte von w_1 und w_2 , wobei die Bezeichnung so gewählt werde, daß $|z_1| \leq |z_2|$ ausfällt. Dann sind z_1 und z_2 zwei verschiedene Punkte in K_r , und es ist gewiß $z_2 \neq 0$, weil sonst $z_1 = 0 = z_2$ wäre. Wir haben also:

$$(4) \quad |z_1| \leq |z_2| < r, \quad z_2 \neq 0.$$

Wir bilden nun die, wegen (4) für $|z| < 1$ reguläre, Funktion

$$(5) \quad \varphi(z) = t f\left(\frac{z_1}{z_2} z\right) + (1 - t) f(z).$$

In der w -Ebene dargestellt, fallen die Punkte $f\left(\frac{z_1}{z_2} z\right)$ und $f(z)$ in G , $\varphi(z)$ ist aber, wegen $0 < t < 1$, ein Punkt auf der Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte, also ebenfalls ein Punkt in G , da G konvex ist. Wir dürfen also $\varphi(z)$ in die inverse Funktion $F(w)$ einsetzen und erhalten eine für $|z| < 1$ reguläre Funktion

$$(6) \quad \psi(z) = F(\varphi(z)),$$

die wegen (1) und (5) für $z = 0$ verschwindet und für $|z| < 1$ dem absoluten Betrage nach kleiner als Eins ist, weil nämlich F nur solche Werte annimmt, die absolut < 1 sind. Es erfüllt also $\psi(z)$ die Voraussetzungen des Schwarzschen Lemmas und wir haben daher

$$|\psi(z)| \leq |z| \quad \text{für } |z| < 1.$$

Setzen wir hier $z = z_2$, so ergibt sich, da $|z_2| < r$ und, wegen (6), (5) und (3), $\psi(z_2) = F(w_0)$ ist, gerade die zu beweisende Ungleichung (2)⁵⁾.

⁵⁾ Herrn Carathéodory habe ich für freundliche Ratschläge zur endgültigen Darstellung dieses Beweises zu danken.