Über die Existenz von Repräsentantenbereichen in der Theorie der Abbildung durch Paare von Funktionen zweier komplexen Veränderlichen.

Von

Stefan Bergmann in Berlin.

In Analogie zu dem Abbildungssatz der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen hat Poincaré das folgende Problem [1]) gestellt: Es sind zwei einfach zusammenhängende Bereiche $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*$ des P_4 [2]) gegeben; es ist zu entscheiden, ob es ein Funktionenpaar

$$(1) \qquad X^*(X, Z), \quad Z^*(X, Z)$$

von zwei komplexen Veränderlichen gibt, das $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}^*$ abbildet [3]). Poincaré zeigte, daß eine solche Abbildung nicht stets möglich ist. Reinhardt [4]) hat nachher mit ganz anderen Mitteln bewiesen, daß im allgemeinen eine Abbildung von zwei Kreisbereichen aufeinander nicht möglich ist [5]).

Unter der Voraussetzung, daß die Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}^*$ möglich ist, wurde in der Arbeit: „Über unendliche Hermitesche Formen, die zu einem Bereiche gehören, nebst Anwendungen auf Fragen der Abbildung durch Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen" [6]) folgendes gezeigt: Man kann die Koeffizienten der Funktionenelemente des Abbildungspaares

---

[1]) H. Poincaré, Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme, Rendiconti di Circolo Matematico di Palermo **23** (1907).

[2]) Mit P_n werden wir den n-dimensionalen Raum bezeichnen.

[3]) Darunter versteht man folgendes: Während X, Z alle inneren Punkte von $\mathfrak{B}$ durchläuft, durchläuft X^*, Z^* alle inneren Punkte von $\mathfrak{B}^*$.

[4]) K. Reinhardt, Über Abbildungen durch analytische Funktionen zweier Veränderlichen, Math. Annalen **83** (1921), S. 211–255.

[5]) Weitere wertvolle Beiträge zur Theorie stammen von Behnke, Blaschke, Carathéodory und Kritikos.

[6]) Math. Zeitschr. **29** (1929), S. 641–677. Wir werden diese Arbeit im folgenden als Arbeit H zitieren.

in einfacher Weise durch die Werte (im Koordinatenanfangspunkte) der Orthogonalfunktionen $\Omega_s(X, Z)$ und $\varphi_s(X^*, Z^*)$ und deren Ableitungen ausdrücken [7]. $\Omega_s(X, Z)$ und $\varphi_s(X^*, Z^*)$ sind die zu $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}^*$ gehörigen vollständigen Systeme von Orthogonalfunktionen [8]. Dadurch erhält man — zumindest im Prinzip — eine Methode, um zu entscheiden, ob eine Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}^*$ möglich ist oder nicht.

Ein anderer Weg, ein solches Kriterium zu gewinnen, ist der folgende: Faßt man die Gesamtheit derjenigen Bereiche, die durch (in bezug auf den Punkt $0, 0$) normierte Abbildungen [9] auseinander hervorgehen, zu einer Klasse zusammen, so entsteht das Problem:

1. in einer Klasse einen ausgezeichneten Repräsentantenbereich $\mathfrak{A}$ auszusondern [10], und

2. ein Verfahren anzugeben, welches das Abbildungspaar von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{A}$ zu berechnen erlaubt.

Behandelt man zunächst das zweite Problem, so ist diese Frage mit der Aufgabe identisch, in der Klasse ein normiertes Kovariantenpaar [11] $v(X, Z)$, $w(X, Z)$ zu bestimmen [12].

---

[7]) Man macht dabei die Voraussetzung, daß der Koordinatenanfangspunkt ein innerer Punkt von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*$ ist.

[8]) Unter einem zu $\mathfrak{B}$ gehörigen Orthogonalfunktionensystem versteht man ein Funktionensystem, das die Orthogonalrelation $\underset{\mathfrak{B}}{\iiiint} \Omega_s(X, Z)\, \overline{\Omega_k(X, Z)}\, d\omega = \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \begin{pmatrix} s = k \\ s \neq k \end{pmatrix}$ befriedigt. Unter $\underset{\mathfrak{B}}{\iiiint}$ wird stes ein u n e i g e n t l i c h e s Integral $\lim\limits_{n \to \infty} \underset{\mathfrak{B}_n}{\iiiint}$ verstanden, wobei $\mathfrak{B}_n$ eine Folge ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegener Bereiche, die gegen $\mathfrak{B}$ konvergieren, ist.

[9]) Ein Funktionenpaar V, W heißt in bezug auf den Punkt $0, 0$ normiert, falls

$$V(0,0) = 0, \qquad \left[\frac{\partial V(X, Z)}{\partial X}\right]_{\substack{X=0 \\ Z=0}} = 1, \qquad \left[\frac{\partial V(X, Z)}{\partial Z}\right]_{\substack{X=0 \\ Z=0}} = 0,$$

$$W(0,0) = 0, \qquad \left[\frac{\partial W(X, Z)}{\partial X}\right]_{\substack{X=0 \\ Z=0}} = 0, \qquad \left[\frac{\partial W(X, Z)}{\partial Z}\right]_{\substack{X=0 \\ Z=0}} = 1$$

ist.

[10]) Es darf selbstverständlich in einer Klasse nur ein Bereich $\mathfrak{A}$ existieren.

[11]) Darunter wird folgendes verstanden: Bedeuten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^{**}$ zwei Bereiche derselben Klasse; X, Z bzw. X^{**}, Z^{**} die sich entsprechenden (d. h. bei der Abbildung ineinander übergehenden) Punkte von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^{**}$; $v(X, Z)$, $w(X, Z)$ das zu $\mathfrak{B}$, $v^{**}(X^{**}, Z^{**})$, $w^{**}(X^{**}, Z^{**})$ das zu $\mathfrak{B}^{**}$ gehörige Paar, so soll

$$v(X, Z) = v^{**}(X^{**}, Z^{**}), \qquad w(X, Z) = w^{**}(X^{**}, Z^{**})$$

sein.

[12]) Bei $v(X, Z)$ und $w(X, Z)$ sind in $\mathfrak{B}$ nur außerordentliche singuläre Stellen zugelassen. Die Funktionaldeterminante $\dfrac{\partial(v, w)}{\partial(X, Z)}$ darf nicht identisch verschwinden.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit besteht darin, zu zeigen, daß man mit Hilfe des vollständigen Orthogonalfunktionensystems $\Omega_s(X, Z)$, das zu $\mathfrak{B}$ gehört, ein derartiges Kovariantenpaar bestimmen kann; wie im § 1 gezeigt wird, *bildet*

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
v(X, Z) &= -c\,\frac{\begin{vmatrix} \sum \Omega_s(X,Z)\,\overline{\Omega}_s & \sum \Omega_s(X,Z)\,\overline{\Omega}'_{sX} & \sum \Omega_s(X,Z)\,\overline{\Omega}'_{sZ} \\ \sum \Omega_s\,\overline{\Omega}_s & \sum \Omega_s\,\overline{\Omega}'_{sX} & \sum \Omega_s\,\overline{\Omega}'_{sZ} \\ \sum \Omega'_{sZ}\,\overline{\Omega}_s & \sum \Omega'_{sZ}\,\overline{\Omega}'_{sX} & \sum \Omega'_{sZ}\,\overline{\Omega}'_{sZ} \end{vmatrix}}{\sum \Omega_s(X,Z)\,\overline{\Omega}_s} \\
w(X, Z) &= c\,\frac{\begin{vmatrix} \sum \Omega_s(X,Z)\,\overline{\Omega}_s & \sum \Omega_s(X,Z)\,\overline{\Omega}'_{sX} & \sum \Omega_s(X,Z)\,\overline{\Omega}'_{sZ} \\ \sum \Omega_s\,\overline{\Omega}_s & \sum \Omega_s\,\overline{\Omega}'_{sX} & \sum \Omega_s\,\overline{\Omega}'_{sZ} \\ \sum \Omega'_{sX}\,\overline{\Omega}_s & \sum \Omega'_{sX}\,\overline{\Omega}'_{sX} & \sum \Omega'_{sX}\,\overline{\Omega}'_{sZ} \end{vmatrix}}{\sum \Omega_s(X,Z)\,\overline{\Omega}_s}
\end{aligned}
$$

ein derartiges Kovariantenpaar. Es bedeuten darin:

$$
(3)\qquad \Omega_s \equiv \Omega_s(0,0), \qquad \Omega'_{sX} \equiv \left[\frac{\partial \Omega_s(X,Z)}{\partial X}\right]_{\substack{X=0\\Z=0}}, \qquad \Omega'_{sZ} \equiv \left[\frac{\partial \Omega_s(X,Z)}{\partial Z}\right]_{\substack{X=0\\Z=0}},
$$

c eine Konstante und

$$
(4)\qquad \sum \equiv \sum_{s=1}^{s=\infty}.
$$

Um die Möglichkeit einer Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}^*$ festzustellen, bildet man das zu $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}^*$ gehörige Kovariantenpaar v, w bzw. v^*, w^*. Durch ein solches wird $\mathfrak{B}$ auf den Repräsentantenbereich seiner Klasse, den Bereich $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}^*$ auf $\mathfrak{A}^*$ abgebildet. *Eine Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}^*$ ist dann und nur dann möglich, wenn $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}^*$ übereinstimmt.*

Im § 2 wird auf die Frage der Bildung eines vollständigen Orthogonalfunktionensystems zu einem Bereiche eingegangen. In der Arbeit: „Zwei Sätze über Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen" wurde mit Hilfe des Auswahlprinzips die Existenz eines vollständigen Orthogonalfunktionensystems zu jedem Bereich $\mathfrak{B}$ bewiesen. Da es aber wünschenswert erscheint, ein konstruktives Verfahren zur Herstellung von vollständigen Systemen anzugeben, wird im § 2 für eine Reihe von einfach zusammenhängenden Bereichen (die mit $\mathfrak{R}$ bezeichnet werden) der Approximationssatz bewiesen: *Man kann jede im abgeschlossenen Bereiche $\mathfrak{R}$ reguläre Funktion gleichmäßig in jedem ganz im Innern von $\mathfrak{R}$ gelegenen Teilbereiche $\mathfrak{R}'$ durch Polynome approximieren*[13]).

Eine ausführliche Definition der Bereiche $\mathfrak{R}$ befindet sich im Text auf S. 443. Aus dem Approximationssatz folgt (genau wie im Falle einer

[13]) Es ist eine Verallgemeinerung des bekannten Rungeschen Satzes: C. Runge, Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen, Acta Mathematica 6 (1884), S. 229.

komplexen Veränderlichen), daß das durch Orthogonalisierung von

$$(5) \qquad 1, X, Z, X^2, XZ, Z^2, \ldots$$

erzeugte System in $\mathfrak{R}$ vollständig ist.

Bei dieser Gelegenheit benutzen wir eine Integraldarstellung der Funktion in $\mathfrak{R}$. Diese Darstellung erlaubt zu ersehen, daß es gewisse Gebiete $\mathfrak{R}^*$ gibt, die eine ausgezeichnete zweidimensionale Berandungsfläche $\mathfrak{C}$ besitzen: An keiner Stelle der (dreidimensionalen) Berandung kann der Absolutwert $|f(X, Z)|$ einer in $\mathfrak{R}^*$ regulären Funktion größer sein als das Maximum von $|f(X, Z)|$ *auf* $\mathfrak{C}$.

Es läßt sich daraus für diese Gebiete ein Analogon des Schwarzschen Lemma erschließen.

§ 1.

Über die Repräsentanten von Klassen von Bereichen.

Es läßt sich bekanntlich durch ein normiertes Funktionenpaar nicht jeder Bereich $\mathfrak{B}$ auf einen anderen $\mathfrak{B}^*$ abbilden. Die Gesamtheit derjenigen Bereiche, die durch (in bezug auf einen festen Punkt) normierte Funktionenpaare ineinander überführbar sind, fassen wir zu einer Klasse zusammen.

Wie in der Einleitung erwähnt wurde, besteht unsere Aufgabe darin, einen ausgezeichneten Repräsentanten in einer Klasse auszusondern und ein Verfahren anzugeben, zu einem Bereich dasjenige Funktionenpaar zu finden, welches die Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf den Repräsentantenbereich leistet.

Wir beschränken unsere Untersuchung auf die einfach zusammenhängenden[14]), ganz im Endlichen gelegenen, von endlich vielen regulären dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten berandeten schlichten Bereiche $\mathfrak{B}$, die den Punkt $0, 0$ im Innern enthalten. Wir führen gewisse Matrizen ein und werden uns der üblichen Symbole des Matrizenkalküls bedienen.

Es sei

$$(1) \quad \mathfrak{a}(X, Z) \equiv \begin{pmatrix} \sum \Omega_s(X, Z)\,\overline{\Omega}_s & \sum \Omega_s(X, Z)\,\overline{\Omega}'_{sX} & \sum \Omega_s(X, Z)\,\overline{\Omega}'_{sZ} \\ \sum \Omega_s\,\overline{\Omega}_s & \sum \Omega_s\,\overline{\Omega}'_{sX} & \sum \Omega_s\,\overline{\Omega}'_{sZ} \\ \sum \Omega'_{sX}\,\overline{\Omega}_s & \sum \Omega'_{sX}\,\overline{\Omega}'_{sX} & \sum \Omega'_{sX}\,\overline{\Omega}'_{sZ} \\ \sum \Omega'_{sZ}\,\overline{\Omega}_s & \sum \Omega'_{sZ}\,\overline{\Omega}'_{sX} & \sum \Omega'_{sZ}\,\overline{\Omega}'_{sZ} \end{pmatrix}$$

[14]) Unter einem einfach zusammenhängenden Bereich wird hier stets ein zusammenhängender Bereich verstanden, in dem jede ein-, zwei- oder dreidimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit, die ganz in dessen Innerem liegt, sich in dem Bereich stetig auf einen Punkt zusammenziehen läßt.

eine Matrix, worin $\Omega_s(X, Z)$ $[s = 1, 2, 3, \ldots]$ das **vollständige Orthogonalfunktionensystem** zu $\mathfrak{B}$ bedeutet; es gelten ferner die Abkürzungen (3) und (4) der Einleitung und die Abkürzungen

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(0,0), \tag{2}$$

$$\mathsf{K}(X, Z; a, b) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(X, Z)\, \overline{\Omega_s(a, b)}. \tag{3}$$

Die **unteren Indizes** bei den Matrizen sollen die fehlenden Kolonnen und Zeilen angeben, wobei die römischen Zahlen sich auf die fehlenden Kolonnen, die arabischen auf die fehlenden Zeilen beziehen. Nebeneinander und untereinander stehende deutsche Buchstaben, z. B. $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$; $\begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{b}' \\ \mathfrak{b} & \mathfrak{a} \end{pmatrix}$, bedeuten, daß die entsprechenden Matrizen formal nebeneinander bzw. untereinander aufgeschrieben sind. Der Strich über einer Größe bedeutet den Übergang zu der konjugiert Komplexen.

Es gilt nun der

Satz. *Die Funktionen*

$$\begin{aligned} v(X, Z) &= -\frac{|\mathfrak{a}_3(X, Z)|}{\mathsf{K}(X, Z; 0, 0)} \frac{\mathsf{K}(0, 0; 0, 0)}{|\mathfrak{a}_1|} \\ w(X, Z) &= \frac{|\mathfrak{a}_4(X, Z)|}{\mathsf{K}(X, Z; 0, 0)} \frac{\mathsf{K}(0, 0; 0, 0)}{|\mathfrak{a}_1|} \end{aligned} \tag{4}$$

bilden ein normiertes Kovariantenpaar (vgl. Fußnote [11]), S. 431).

Der durch (4) *erzeugte Bildbereich von* $\mathfrak{B}$ *hat die Eigenschaft, daß er allein durch die Bereichklasse* (zu der $\mathfrak{B}$ gehört) *bestimmt ist.*

Diesen Bereich können wir somit als den Repräsentantenbereich der betreffenden Klasse verwenden.

Wir werden diese Repräsentantenbereiche im folgenden mit $\mathfrak{A}$ bezeichnen. (Die Repräsentantenbereiche brauchen natürlich im allgemeinen nicht schlicht zu sein.)

Beweis des Satzes. In der Arbeit H wurde gezeigt, daß es zu $\mathfrak{B}$ **eine und nur eine** in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion $u(X, Z)$ gibt, die, an Stelle von t eingesetzt, dem Integral

$$\iiiint_{\mathfrak{B}} t(X, Z)\, \overline{t(X, Z)}\, d\omega \tag{5}$$

einen Minimalwert erteilt, wobei zum Vergleich alle in $\mathfrak{B}$ regulären Funktionen mit der Nebenbedingung

$$t(0,0) = 1 \tag{6}$$

herangezogen werden. $d\omega$ bedeutet dabei das (vierdimensionale) Volumenelement.

$u(X, Z)$ wurde als die Minimalfunktion bezeichnet. $u(X, Z)$ ist bekanntlich

$$u(X, Z) = \frac{\mathsf{K}(X, Z; 0, 0)}{\mathsf{K}(0, 0; 0, 0)}.$$

Wir wollen zeigen, daß eine andere, ähnliche Variationsaufgabe eine und nur eine Lösung besitzt: Es soll eine Funktion $u^{(1)}(X, Z)$ gesucht sein, die ebenfalls dem Integral (5) den Minimalwert erteilt, wobei jetzt anstatt (6) die Nebenbedingungen

$$(7) \qquad t(0,0) = 0, \quad \left[\frac{\partial t(X,Z)}{\partial X}\right]_{\substack{X=0\\Z=0}} = 1, \quad \left[\frac{\partial t(X,Z)}{\partial Z}\right]_{\substack{X=0\\Z=0}} = 0$$

gelten sollen.

Es ist

$$(8) \qquad u^{(1)}(X, Z) = -\frac{|\mathfrak{b}, \mathfrak{a}(X, Z)|}{|\mathfrak{a}_1|},$$

wo $\mathfrak{b}$ die Matrix $\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ bedeutet.

Den Beweis dieser Behauptung führen wir Schritt für Schritt dem entsprechenden Beweis (S. 649—657) in der Arbeit H gleich. Wir betrachten die folgende (endliche) Extremumaufgabe:

Wir wollen in dem Ausdruck

$$(9) \qquad U_p(X, Z) = \sum_{s=1}^{s=p} A_s \Omega_s(X, Z)$$

die Konstanten A_s so bestimmen, daß derselbe, an Stelle von t in das Integral (5) eingesetzt, (5) zu einem Minimum macht, wobei zur Konkurrenz nur Ausdrücke von der Form (9), die die Nebenbedingungen (7) befriedigen, zugelassen werden. Bezeichnet man mit $\mathfrak{a}^{(p)}(X, Z)$ die Matrix (1), wobei jetzt die Summationen $\sum$, im Gegensatz zum früheren, $\sum\limits_{s=1}^{s=p}$ bedeuten, so ist die Lösung dieser Aufgabe $u_p^{(1)}$ (wie die formale Rechnung zeigt)

$$(10) \qquad u_p^{(1)}(X, Z) = -\frac{|\mathfrak{b}, \mathfrak{a}^{(p)}(X, Z)|}{|\mathfrak{a}_1^{(p)}|}$$

gleich, und der Wert des Minimums $\lambda_1^{(p)}$

$$(11) \qquad \lambda_1^{(p)} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & \mathfrak{b}_1' \\ \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{a}_1^{(p)} \end{vmatrix}}{|\mathfrak{a}_1^{(p)}|} = \frac{|\mathfrak{a}_{\text{II}\,13}^{(p)}|}{|\mathfrak{a}_1^{(p)}|},$$

wo $\mathfrak{b}_1'$ üblicherweise die Transponierte zu $\mathfrak{b}_1$ bedeutet.

Wir wollen nun zeigen:

1. Es existiert

$$u^{(1)}(X, Z) = \lim_{p\to\infty} u_p^{(1)}(X, Z). \tag{12}$$

Die Konvergenz der einzelnen in der Matrix (1) auftretenden Summen $\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s(X, Z)\,\overline{\Omega}_s$, $\sum_{s=1}^{s=\infty} \Omega_s\,\overline{\Omega}'_{sX}, \ldots$ folgt aus der Endlichkeit und der gleichmäßigen Konvergenz des Kernes $\sum_{s=1}^{s=\infty} |\Omega_s(a, b)|^2$ (vgl. Satz I und II der Arbeit H). $u^{(1)}(X, Z)$ stellt in jedem ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegenen Teilbereiche $\mathfrak{B}_m$ eine reguläre Funktion dar.

2. Es gibt keine Funktion $h^{(1)}(X, Z)$, die die Nebenbedingungen (7) erfüllt und dem Integral (5) einen kleineren Wert als $\lambda_1 = \lim_{p\to\infty} \lambda_1^{(p)} = \frac{|\mathfrak{a}_{\mathrm{II}\,13}|}{|\mathfrak{a}_1|}$ erteilt: Denn aus der Vollständigkeit des Systems $\Omega_s(X, Z)$ folgt, daß man zu jedem ε ein p bestimmen kann, derart, daß

$$\iiiint_{\mathfrak{B}} h^{(1)}(X, Z)\,\overline{h^{(1)}(X, Z)}\,d\omega - \sum_{s=1}^{s=p} \left| \iiiint_{\mathfrak{B}} h^{(1)}(X, Z)\,\overline{\Omega_s(X, Z)}\,d\omega \right|^2 \leqq \varepsilon \tag{13}$$

wird. Bezeichnet man mit $h_p^{(1)}(X, Z)$

$$h_p^{(1)}(X, Z) \equiv \sum_{s=1}^{s=p} \Omega_s(X, Z) \iiiint_{\mathfrak{B}} h^{(1)}(X, Z)\,\overline{\Omega_s(X, Z)}\,d\omega, \tag{14}$$

so ist nach dem Hilfssatz 1 der Arbeit H (S. 649)

$$\begin{aligned}
&[h_p^{(1)}(X, Z)]_{\substack{X=0\\Z=0}} - [h^{(1)}(X, Z)]_{\substack{X=0\\Z=0}} = \varepsilon' && |\varepsilon'| \leqq \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\pi^2 \gamma_{ab}^4}},\\
&\left[\frac{\partial h_p^{(1)}(X, Z)}{\partial X}\right]_{\substack{X=0\\Z=0}} - \left[\frac{\partial h^{(1)}(X, Z)}{\partial X}\right]_{\substack{X=0\\Z=0}} = \varepsilon'_X && |\varepsilon'_X| \leqq \sqrt{\frac{6\varepsilon}{\pi^2 \gamma_{ab}^6}},\\
&\left[\frac{\partial h_p^{(1)}(X, Z)}{\partial Z}\right]_{\substack{X=0\\Z=0}} - \left[\frac{\partial h^{(1)}(X, Z)}{\partial Z}\right]_{\substack{X=0\\Z=0}} = \varepsilon'_Z && |\varepsilon'_Z| \leqq \sqrt{\frac{6\varepsilon}{\pi^2 \gamma_{ab}^6}}.
\end{aligned} \tag{15}$$

Berechnet man den Minimalwert M_p von (5), den ein Ausdruck von der Form (9) unter den Nebenbedingungen

$$t(X, Z)_{\substack{X=0\\Z=0}} = \varepsilon', \qquad \left[\frac{\partial t(X, Z)}{\partial X}\right]_{\substack{X=0\\Z=0}} = 1 + \varepsilon'_X, \qquad \left[\frac{\partial t(X, Z)}{\partial Z}\right]_{\substack{X=0\\Z=0}} = \varepsilon'_Z \tag{16}$$

erteilt, so erhält man

$$M_p = - \frac{\begin{vmatrix} 0 & \bar{\mathfrak{e}} \\ \mathfrak{e}' & \mathfrak{a}_1^{(p)} \end{vmatrix}}{|\mathfrak{a}_1^{(p)}|}, \tag{17}$$

wobei $\mathfrak{e}$ die Matrix

$$\mathfrak{e} = \{\varepsilon', 1 + \varepsilon'_X, \varepsilon'_Z\}$$

und $\mathfrak{e}'$ die dazu Transponierte $\begin{Bmatrix} \varepsilon' \\ 1 + \varepsilon'_X \\ \varepsilon'_Z \end{Bmatrix}$ bedeutet. Es ist somit

$$(18) \qquad \iiiint\limits_{\mathfrak{B}} h^{(1)}(X, Z)\, \overline{h^{(1)}(X, Z)}\, d\omega \geqq - \lim_{p \to \infty} \frac{\begin{vmatrix} 0 & \bar{\mathfrak{e}} \\ \mathfrak{e}' & \mathfrak{a}_1^{(p)} \end{vmatrix}}{|\mathfrak{a}_1^{(p)}|}.$$

Da man $\varepsilon', \varepsilon'_X, \varepsilon'_Z$ beliebig klein machen kann, folgt, daß:

$$(19) \qquad \iiiint\limits_{\mathfrak{B}} h^{(1)}(X, Z)\, \overline{h^{(1)}(X, Z)}\, d\omega \geqq - \frac{\begin{vmatrix} 0 & \mathfrak{b}'_1 \\ \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{a}_1 \end{vmatrix}}{|\mathfrak{a}_1|}$$

ist, w. z. b. w.

3. Es ist

$$(20) \qquad \iiiint\limits_{\mathfrak{B}} u^{(1)}(X, Z)\, \overline{u^{(1)}(X, Z)}\, d\omega = - \frac{\begin{vmatrix} 0 & \mathfrak{b}'_1 \\ \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{a}_1 \end{vmatrix}}{|\mathfrak{a}_1|}.$$

Denn in jedem (ganz im Innern von $\mathfrak{B}$ gelegenen) Teilbereiche $\mathfrak{B}_m$ ist bei genügend großem p

$$\left| |u^{(1)}(X, Z)|^2 - \left| \sum_{s=1}^{s=p} \Omega_s(X, Z) \frac{\begin{vmatrix} \mathfrak{l}_s \\ \mathfrak{a}_{13} \end{vmatrix}}{|\mathfrak{a}_1|} \right|^2 \right| \leqq \varepsilon,$$

wo $\mathfrak{l}_s$ die Matrix $\{\bar{\Omega}_s, \bar{\Omega}'_{sX}, \bar{\Omega}'_{sZ}\}$ bedeutet, und

$$(21) \qquad \begin{aligned} \iiiint\limits_{\mathfrak{B}_m} |u^{(1)}(X, Z)|^2\, d\omega &\leqq \iiiint\limits_{\mathfrak{B}_m} \left| \sum_{s=1}^{s=p} \Omega_s(X, Z) \frac{\begin{vmatrix} \mathfrak{l}_s \\ \mathfrak{a}_{13} \end{vmatrix}}{|\mathfrak{a}_1|} \right|^2 d\omega + \varepsilon\,(\text{Volumen von } \mathfrak{B}_m) \leqq \\ &\leqq \iiiint\limits_{\mathfrak{B}} \left| \sum_{s=1}^{s=p} \Omega_s(X, Z) \frac{\begin{vmatrix} \mathfrak{l}_s \\ \mathfrak{a}_{13} \end{vmatrix}}{|\mathfrak{a}_1|} \right|^2 d\omega + \varepsilon\,(\text{Volumen von } \mathfrak{B}) = \\ &= \sum_{s=1}^{s=p} \frac{\left|\begin{vmatrix} \mathfrak{l}_s \\ \mathfrak{a}_{13} \end{vmatrix}\right|^2}{||\mathfrak{a}_1||^2} + \varepsilon\,(\text{Volumen von } \mathfrak{B}) \leqq \frac{\sum_{s=1}^{s=\infty} \left|\begin{vmatrix} \mathfrak{l}_s \\ \mathfrak{a}_{13} \end{vmatrix}\right|^2}{||\mathfrak{a}_1||^2} + \varepsilon\,(\text{Volumen von } \mathfrak{B}) = \\ &= - \frac{\begin{vmatrix} 0 & \mathfrak{b}'_1 \\ \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{a}_1 \end{vmatrix}}{|\mathfrak{a}_1|} + \varepsilon\,(\text{Volumen von } \mathfrak{B}). \end{aligned}$$

Da man ε beliebig klein machen kann, folgt (20).

4. Da das System $\Omega_s(X, Z)$ in $\mathfrak{B}$ vollständig ist, ist für $u^{(1)}(X, Z)$ die Vollständigkeitsrelation erfüllt.

5. Es soll nunmehr der **Eindeutigkeitsbeweis der Lösung** der Variationsaufgabe geführt werden. Sei $G(X, Z)$ eine Funktion, die den Nebenbedingungen (7) genügt und für die

$$\iiiint\limits_{\mathfrak{B}} G(X, Z)\,\overline{G(X, Z)}\, d\omega = \frac{|\mathfrak{a}_{\mathrm{II}\,13}|}{|\mathfrak{a}_1|} \tag{22}$$

ist. Wir werden zeigen, daß

$$G(X, Z) = -\frac{|\mathfrak{b}, \mathfrak{a}(X, Z)|}{|\mathfrak{a}_1|} \tag{23}$$

sein muß. Wir führen noch die folgenden Abkürzungen ein:

$$\begin{gathered}\mathfrak{d}(X, Z) \equiv \left\{\sum \Omega''_{sX^2}(X, Z)\,\overline{\Omega_s},\quad \sum \Omega''_{sX^2}(X, Z)\,\overline{\Omega}'_{sX},\quad \sum \Omega''_{sX^2}(X, Z)\,\overline{\Omega}'_{sZ}\right\},\\ \mathfrak{d} \equiv \mathfrak{d}(0, 0),\quad \Omega''_{sX^2}(X, Z) \equiv \frac{\partial^2 \Omega_s(X, Z)}{\partial X^2},\quad \Omega''_{sX^2} \equiv \left[\Omega''_{sX^2}(X, Z)\right]_{\substack{X=0\\ Z=0}},\\ \sum \equiv \sum_{s=1}^{s=\infty}.\end{gathered} \tag{24}$$

Da $\Omega_s(X, Z)$ in $\mathfrak{B}$ vollständig ist, folgt, daß man zu jedem ε ein p derart finden kann, daß

$$\begin{gathered}\iiiint\limits_{\mathfrak{B}} G(X, Z)\,\overline{G(X, Z)}\, d\omega - \sum_{s=1}^{s=p} |g_s|^2 \leqq \varepsilon,\\ g_s = \iiiint\limits_{\mathfrak{B}} G(X, Z)\,\overline{\Omega_s(X, Z)}\, d\omega.\end{gathered} \tag{25}$$

Betrachten wir nun die Funktion

$$G_p = \sum_{s=1}^{s=p} g_s\, \Omega_s(X, Z). \tag{26}$$

Nach dem Hilfssatz I der Arbeit H folgt, daß G_p die Nebenbedingungen (16) erfüllt. Man kann ferner die zweite Ableitung von G_p im Koordinatenanfangspunkte in der Form

$$\left[\frac{\partial^2 G_p(X, Z)}{\partial X^2}\right]_{\substack{X=0\\ Z=0}} = \sum_{s=1}^{s=p} g_s \left[\frac{\partial^2 \Omega_s(X, Z)}{\partial X^2}\right]_{\substack{X=0\\ Z=0}} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & \mathfrak{d}^{(p)} \\ \mathfrak{e}' & \mathfrak{a}_1^{(p)} \end{vmatrix}}{|\mathfrak{a}_1^{(p)}|} + R_p^{(2,0)} \equiv N_p + R_p^{(2,0)} \tag{27}$$

darstellen. Wir wollen zeigen, daß

$$\lim_{p \to \infty} R_p^{(2,0)} = 0 \tag{28}$$

ist. Um dies einzusehen, betrachten wir das Minimum des Integrals (5), wobei an Stelle von t ein Ausdruck von der Form (9) zu nehmen ist, der sowohl die Nebenbedingungen (16) wie auch die Bedingung

$$\left[\frac{\partial^2 \left(\sum_{s=1}^{s=p} A_s\, \Omega_s(X, Z)\right)}{\partial X^2}\right]_{\substack{X=0\\ Z=0}} = N_p + R_p^{(2,0)} \tag{29}$$

erfüllen soll. Wie eine formale Rechnung zeigt, hat dieses Minimum den Wert

$$
(30)\qquad \frac{\begin{vmatrix} 0 & \bar{\mathfrak{e}} & \overline{N_p} \\ \mathfrak{e}' & \mathfrak{a}_1^{(p)} & \overline{\mathfrak{b}^{(p)\prime}} \\ N_p & \mathfrak{b}^{(p)} & \sum\limits_{s=1}^{s=p} \Omega''_{s X^2}\, \overline{\Omega''_{s X^2}} \end{vmatrix} + \left| R_p^{(2,0)} \right|^2 \left| \mathfrak{a}_1^{(p)} \right|}{\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_1^{(p)} & \overline{\mathfrak{b}^{(p)\prime}} \\ \mathfrak{b}^{(p)} & \sum\limits_{s=1}^{s=p} \Omega''_{s X^2}\, \overline{\Omega''_{s X^2}} \end{vmatrix}} = S_1^{(p)} + \left| R_p^{(2,0)} \right|^2 S_2^{(p)}.
$$

Da $G_p(X, Z)$ eine zulässige Konkurrenzfunktion ist, gilt:

$$
(31)\qquad \sum_{s=1}^{s=p} |g_s|^2 \geqq S_1^{(p)} + \left| R_p^{(2,0)} \right|^2 S_2^{(p)}.
$$

Geht nun p gegen ∞, so ist (wie eine formale Rechnung zeigt)

$$
(32)\qquad \operatorname*{limes}_{p\to\infty} S_1^{(p)} = -\operatorname*{limes}_{p\to\infty} \frac{\begin{vmatrix} 0 & \mathfrak{b}_1' \\ \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{a}_1^{(p)} \end{vmatrix}}{\left| \mathfrak{a}_1^{(p)} \right|} = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & \mathfrak{b}_1' \\ \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{a}_1 \end{vmatrix}}{|\mathfrak{a}_1|}.
$$

$S_2^{(p)}$ konvergiert gegen eine positive, von 0 verschiedene Zahl: Suchen wir nämlich das Minimum von (5) bei den Nebenbedingungen

$$
(33)\quad t(0,0) = 0,\ \left[\frac{\partial t(X,Z)}{\partial X}\right]_{\substack{X=0\\Z=0}} = 0,\ \left[\frac{\partial t(X,Z)}{\partial Z}\right]_{\substack{X=0\\Z=0}} = 0,\ \left[\frac{\partial^2 t(X,Z)}{\partial X^2}\right]_{\substack{X=0\\Z=0}} = 1,
$$

so erhalten wir $\operatorname*{limes}_{p\to\infty} S_2^{(p)}$ als den Wert des offenbar positiven Minimums. (Nach dem Hilfssatz I der Arbeit H muß nämlich $\operatorname*{limes}_{p\to\infty} S_2^{(p)} \geqq \frac{12}{\pi^2 \gamma_{00}^8}$ sein, wo γ_{00} den Abstand des Punktes 0,0 von der Berandung bedeutet.) Da nach (22) und (25)

$$
\operatorname*{limes}_{p\to\infty} \sum_{s=1}^{s=p} |g_s|^2 = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & \mathfrak{b}_1' \\ \mathfrak{b}_1 & \mathfrak{a}_1 \end{vmatrix}}{|\mathfrak{a}_1|}
$$

und $\operatorname*{limes}_{p\to\infty} S_2^{(p)}$ größer als 0 ist, so folgt aus (30) und (32), daß

$$
(28)\qquad \operatorname*{limes}_{p\to\infty} R_p^{(2,0)} = 0
$$

ist, w. z. b. w.

Genau auf dieselbe Weise läßt sich für jedes ν, μ zeigen, daß

$$
(34)\qquad \operatorname*{limes}_{p\to\infty} \left[\frac{\partial^{\nu+\mu} G_p(X,Z)}{\partial X^\nu \partial Z^\mu}\right]_{\substack{X=0\\Z=0}} = -\operatorname*{limes}_{p\to\infty} \left[\frac{\partial^{\nu+\mu}}{\partial X^\nu \partial Z^\mu}\left(\frac{|\mathfrak{b}, \mathfrak{a}^{(p)}(X,Z)|}{\left|\mathfrak{a}_1^{(p)}\right|}\right)\right]_{\substack{X=0\\Z=0}}
$$

wird. Nach dem Satz II der Arbeit H und Punkt 1 dieses Beweises konvergieren in der Umgebung des Punktes 0, 0

$$(35)\qquad \sum_{s=1}^{s=p} g_s \Omega_s(X, Z) \quad \text{gegen} \quad G(X, Z)$$

$$(36)\qquad -\frac{|\mathfrak{b}, \mathfrak{a}^{(p)}(X, Z)|}{|\mathfrak{a}_1^{(p)}|} \quad \text{gegen} \quad -\frac{|\mathfrak{b}, \mathfrak{a}(X, Z)|}{|\mathfrak{a}_1|}.$$

Nach (34) konvergieren ferner in der Umgebung des Punktes 0, 0 alle Ableitungen von $\sum_{s=1}^{s=p} g_s \Omega_s(X, Z)$ gegen die entsprechenden Ableitungen von

$$-\frac{|\mathfrak{b}, \mathfrak{a}^{(p)}(X, Z)|}{|\mathfrak{a}_1^{(p)}|}.$$

Da $u^{(1)}(X, Z)$ und $G(X, Z)$ in der Umgebung des Punktes 0, 0 regulär analytisch sind, folgt daraus (23), w. z. b. w.

Auf gleichem Wege wie die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung $u^{(1)}(X, Z)$ bewiesen wurde, läßt sich zeigen, daß auch die folgende Variationsaufgabe eine und nur eine Lösung besitzt: Es ist diejenige Funktion gesucht, die (5) den Minimalwert erteilt, wobei als Nebenbedingungen die Relationen

$$(37)\qquad t(0,0)=0, \quad \left[\frac{\partial t(X, Z)}{\partial X}\right]_{\substack{X=0\\Z=0}}=0, \quad \left[\frac{\partial t(X, Z)}{\partial Z}\right]_{\substack{X=0\\Z=0}}=1$$

zu nehmen sind. Die Lösung dieser zweiten Aufgabe sei mit $u^{(2)}(X, Z)$ bezeichnet.

Wir gehen nunmehr zu dem zweiten Schritt des Beweises über: Seien $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*$ zwei Bereiche des XZ- bzw. X^*Z^*-Raumes, die zu derselben Klasse gehören, d. h. es gebe ein normiertes Funktionenpaar $X^*(X, Z)$, $Z^*(X, Z)$ das $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}^*$ abbildet.

Verpflanzt man die Minimalfunktion $u(X, Z)$ in den X^*Z^*-Raum und multipliziert man mit der Funktionaldeterminante $\left(\text{d. h. bildet man } u[X(X^*, Z^*), Z(X^*, Z^*)]\frac{\partial(X, Z)}{\partial(X^*, Z^*)}\right)$, so ist dieser Ausdruck der Minimalfunktion $u^*(X^*, Z^*)$ von $\mathfrak{B}^*$ gleich. Denn:

1. Das Funktionselement um den Koordinatenanfangspunkt von

$$\begin{aligned} &u[X(X^*, Z^*), Z(X^*, Z^*)]\frac{\partial(X, Z)}{\partial(X^*, Z^*)} \\ &\equiv (1+\alpha_{10}X^*+\alpha_{01}Z^*+\dots)(1+\beta_{10}X^*+\beta_{01}Z^*+\dots) \\ &\equiv 1+A_{10}X^*+A_{01}Z^*+\dots \end{aligned}$$

hat an der Stelle $X=0$, $Z=0$ den Wert 1.

2. Die Funktion $u[X(X^*, Z^*), Z(X^*, Z^*)] \frac{\partial(X,Z)}{\partial(X^*,Z^*)}$ erteilt dem Integral $\iiiint\limits_{\mathfrak{B}^*} |t(X^*, Z^*)|^2 d\omega_{X^* Z^*}$ den Minimalwert $\lambda^* = \lambda$ [15]). Denn es ist:

$$(38) \quad \iiiint\limits_{\mathfrak{B}^*} \left| u[X(X^*, Z^*), Z(X^*, Z^*)] \frac{\partial(X,Z)}{\partial(X^*,Z^*)} \right|^2 d\omega_{X^* Z^*} = \iiiint\limits_{\mathfrak{B}} |u(X,Z)|^2 d\omega_{XZ}.$$

Nach dem Satz III der Arbeit H gibt es zu jedem Bereich nur **eine** Minimalfunktion $u^*(X^* Z^*)$. Mit anderen Worten: es ist

$$(39) \qquad \frac{u[X(X^*, Z^*), Z(X^*, Z^*)]}{u^*(X^*, Z^*)} \frac{\partial(X,Z)}{\partial(X^*,Z^*)} = 1.$$

Das Funktionselement von

$$(40) \qquad u^{(1)}[X(X^*, Z^*), Z(X^*, Z^*)] \frac{\partial(X,Z)}{\partial(X^*,Z^*)}$$
$$\equiv [X^* + \alpha'_{20} X^{*2} + \alpha'_{11} X^* Z^* + \ldots][1 + \beta_{10} X^* + \beta_{01} Z^* + \ldots]$$
$$= [X^* + B_{20} X^{*2} + B_{11} X^* Z^* + \ldots]$$

um den Punkt $X^* = 0$, $Z^* = 0$ befriedigt die Nebenbedingungen (7). Auf Grund der früher bewiesenen Eindeutigkeit der Lösung der entsprechenden Variationsaufgabe gibt es eine und nur eine Funktion $u^{(1)*}(X^*, Z^*)$, die dem Integral (5) unter den Nebenbedingungen (7) den Minimalwert erteilt. Auf gleiche Weise wie früher schließen wir, daß

$$(41) \qquad \frac{u^{(1)}[X(X^*, Z^*), Z(X^*, Z^*)]}{u^{(1)*}(X^*, Z^*)} \frac{\partial(X,Z)}{\partial(X^*,Z^*)} = 1$$

ist. Aus (39) und (41) folgt, daß für **zwei Bereiche derselben Klasse** $\mathfrak{B}$ **und** $\mathfrak{B}^*$

$$(42) \qquad \frac{u^{(1)*}[X^*, Z^*]}{u^*[X^*, Z^*]} = \frac{u^{(1)}[X(X^*, Z^*), Z(X^*, Z^*)]}{u[X(X^*, Z^*), Z(X^*, Z^*)]} = \frac{u^{(1)}(X,Z)}{u(X,Z)}$$

ist. Bezeichnen wir mit $v^*(X^*, Z^*)$ den in (42) links stehenden, mit $v(X,Z)$ den rechts stehenden Ausdruck, so ist $v(X,Z)$ eine Kovariante, d. h. es ist

$$(42^*) \qquad v(X,Z) = v^*(X^*, Z^*).$$

Eine zweite Kovariante erhalten wir in $w(X,Z) = \frac{u^{(2)}(X,Z)}{u(X,Z)}$.

$v(X,Z)$ und $w(X,Z)$ bilden ein normiertes Funktionenpaar. Die Funktionaldeterminante $\frac{\partial(v,w)}{\partial(X,Z)}$ ist bestimmt nicht identisch Null. Wir haben somit eine Abbildung auf einen Bereich gewonnen, der von der Wahl des Ausgangsgebietes $\mathfrak{B}$ unabhängig ist. Durch v und w wird somit der Bereich $\mathfrak{B}$ auf den Repräsentantenbereich $\mathfrak{A}$ abgebildet.

---

[15]) λ ist eine Invariante für alle Bereiche, die zu derselben Klasse gehören.

Ein Repräsentantenbereich $\mathfrak{A}$ ist dadurch ausgezeichnet, daß das durch (4) gegebene, zu $\mathfrak{A}$ gehörige Funktionenpaar sich auf $v = X$, $w = Z$ reduziert.

Korollar. *Ein Reinhardtscher Kreisbereich ist ein Repräsentantenbereich,* was man z. B. durch die unmittelbare Ausrechnung der durch (4) gegebenen Funktionen ersehen kann.

Gehört somit der Reinhardtsche Kreisbereich $\mathfrak{K}$ zur Klasse, so wird (4) das Abbildungsfunktionenpaar liefern, das $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{K}$ abbildet. Die Gestalt von $\mathfrak{K}$ können wir in diesem Falle mit Hilfe der im § 2 der Arbeit H angegebenen Formel feststellen.

§ 2.

Über die Approximation der Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen durch Polynome.

In der Arbeit „Zwei Sätze über Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen" wurde mit Hilfe des Auswahlprinzips die Existenz eines vollständigen Orthogonalfunktionensystems zu jedem zusammenhängenden Bereich $\mathfrak{B}$ nachgewiesen. Es entsteht das Problem, zu einem gegebenen Bereich ein konstruktives Verfahren anzugeben, um ein derartiges System zu bilden.

Ein naturgemäßer Weg dazu besteht im Falle der einfach zusammenhängenden Bereiche darin, daß man den Rungeschen Satz über die Approximation von analytischen Funktionen durch Polynome[16]) auf den Fall von zwei komplexen Veränderlichen überträgt. Aus diesem Satz folgt dann mühelos die Tatsache, daß das durch die Orthogonalisierung von

$$1, X, Z, X^2, XZ, Z^2, \dots \tag{1}$$

erzeugte System in dem betreffenden Bereiche vollständig ist.

Herr Almar hat in seiner Dissertation „Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions de deux variables complexes"[17]) diesen Satz für gewisse Klassen von Bereichen nachgewiesen[18]) und die (unbewiesene)

[16]) C. Runge, Zur Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen, Acta Mathematica 6 (1884), S. 229.

[17]) Arkiv för matematik, astronomi och fysik 17 (1922/23), Nr. 7, S. 1–70.

[18]) Herr Almar stützt sich dabei auf eine Verallgemeinerung der Mittag-Lefflerschen Darstellung einer Funktion: Ist $\sum_{(nm)=0}^{(nm)=\infty} c_{nm} X^n Z^m$ das Funktionselement der Funktion $f(X, Z)$ um den Koordinatenanfangspunkt, so läßt sich — wie Herr Almar zeigt — $f(X, Z)$ in gewissen Bereichen in der Form

$$\operatorname*{limes}_{\alpha \to 0} \sum_{(nm)=0}^{(nm)=\infty} \frac{c_{nm}}{\Gamma[1 + \alpha(m + n)]} X^n Z^m$$

darstellen.

Vermutung ausgesprochen, daß dieser Satz in Gebieten, die Herr Almar als quasikonvex bezeichnet, richtig ist.

Im folgenden soll ein Beweis des verallgemeinerten Rungeschen Satzes geführt werden, der eine Integraldarstellung der Funktion benutzt und der dem Rungeschen Beweis nachgebildet ist. Der Beweis bezieht sich ebenfalls nur auf gewisse Klassen von Bereichen. (Darunter befinden sich auch Bereiche, die von dem Almarschen Beweis nicht erfaßt wurden.)

Die Integraldarstellung (6) der Funktion, die in gewissen (weiter näher definierten) Gebieten gilt, erlaubt aus dem Verlauf der Funktion auf gewissen (zweidimensionalen) Flächen auf den Wertevorrat der Funktion in dem (vierdimensionalen) Gebiete zu schließen. Anschließend an den Beweis werden wir aus dieser Integraldarstellung einige einfache Folgerungen ziehen.

Wir führen den Beweis für den einfachsten Fall durch, doch läßt sich — wie in der Fußnote [19]) hingewiesen wird — derselbe bedeutend verallgemeinern.

Seien uns zwei analytische Ebenen etwa die Ebene

$$Z = \text{konst.} = c_1 \tag{2}$$

und

$$X + mZ = \text{konst.} = c_2 \tag{3}$$

gegeben. Seien ferner B und B' zwei ebene, einfach zusammenhängende, konvexe Bereiche, die von den regulären Kurven C bzw. C' berandet sind. B liege in der Ebene (2), B' in (3). Es bedeute $x^{(i)}, c_1$ den laufenden Punkt von B; $x^{(b)}, c_1$ von C; $(c_2 - mz^{(i)}), z^{(i)}$ von B'; $(c_2 - mz^{(b)}), z^{(b)}$ von C'. $\mathfrak{P}$ bedeute einen Bereich des P_4, dessen Inneres aus der Gesamtheit aller Punkte X, Z besteht, die die Relationen

$$X + mZ = x^{(i)} + mc_2, \tag{4}$$

$$Z = z^{(i)} \tag{4*}$$

befriedigen. $\mathfrak{C}$ bedeute eine (zweidimensionale) Fläche, die aus der Gesamtheit aller Punkte X, Z besteht, die die Gleichungen

$$X + mZ = x^{(b)} + mc_2, \tag{5}$$

$$Z = z^{(b)} \tag{5*}$$

befriedigen. Wir verstehen unter $\mathfrak{R}$ einen solchen einfach zusammenhängenden Teilbereich von $\mathfrak{P}$, dessen (dreidimensionale) Berandungsmannigfaltigkeit $\mathfrak{C}$ enthält. Es gilt nun der

Satz. *Eine im abgeschlossenen Bereiche $\mathfrak{R}$ reguläre Funktion $f(X,Z)$ läßt sich in jedem ganz im Innern von R gelegenen Teilbereiche $\mathfrak{R}'$ von $\mathfrak{R}$ gleichmäßig durch Polynome approximieren.*

Beweis. Nach Poincaré können wir $f(X, Z)$ in $\mathfrak{P}$ in der Form

$$f(X, Z) = -\frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{\mathfrak{C}} \frac{f(x, z)\, d\tau}{[Z-z][(X-x)+m(Z-z)]} \tag{6}$$

darstellen[19]). $d\tau$ bedeutet darin $\frac{\partial(x, z)}{\partial(N, M)}\, dN\, dM$, wobei $x = x(N, M)$, $z = z(N, M)$ die Parameterdarstellung der Fläche $\mathfrak{C}$ ist.

Wir ersetzen in (6) das Integral durch eine endliche Summe

$$\sum_k\sum \frac{f(x_k, z_k)\, \Delta_k}{[Z-z_k][(X-x_k)+m(Z-z_k)]}. \tag{7}$$

Man kann bei einer genügend feinen Unterteilung der Fläche $\mathfrak{C}$ erreichen, daß der Unterschied zwischen (6) und (7) gleichmäßig in jedem ganz im Innern von $\mathfrak{P}$ gelegenen Teilbereich $\mathfrak{P}'$ kleiner als eine vorgegebene kleine Zahl ε wird.

Wir gehen nunmehr dazu über, den einzelnen Summanden

$$\frac{f(x_k, z_k)\, \Delta_k}{[Z-z_k][(X-x_k)+m(Z-z_k)]}$$

durch ein Polynom (in X, Z) in $\mathfrak{P}'$ zu approximieren.

1. Wir wollen zunächst uns überlegen, daß $(X-x_k)+m(Z-z_k)$ (wo x_k, z_k ein Punkt von $\mathfrak{C}$ ist) nirgends im Innern von $\mathfrak{P}$ verschwindet. Jeder

---

[19]) Vgl. etwa Picard und Simart, Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes, Paris 1897, I. Bd., III. Kap., § 5, S. 55.

Die Formel (6) ist ein Spezialfall der Darstellungen

$$f(X, Z) = -\frac{1}{4\pi^2}\left[\frac{\partial R(X,Z)}{\partial Z}\frac{\partial Q(X,Z)}{\partial X} - \frac{\partial R(X,Z)}{\partial X}\frac{\partial Q(X,Z)}{\partial Z}\right]\iint\limits_{\mathfrak{C}} \frac{f(x,z)\, d\tau}{Q[(X-x),(Z-z)]\, R[(X-x),(\ldots} \tag{6*}$$

wo Q und P Polynome sind, die im Koordinatenanfangspunkt eine gewöhnliche Nullstelle haben und sonst nirgends im Gebiete verschwinden, bzw. von

$$f(X, Z) = -\frac{1}{4\pi^2}\sqrt{(A''_{XZ})^2 - A''_{X^2}A''_{Z^2}}\iint\limits_{\mathfrak{C}} \frac{f(x, z)\, d\tau}{A[(X-x),(Z-z)]}, \tag{6**}$$

wo A ein Polynom zweiten Grades ist.

Mit Hilfe der Darstellungen (6*) und (6**) läßt sich der Rungesche Satz für eine weitere Reihe von Gebieten beweisen.

Die Schwierigkeit, die in diesem Beweis auftritt, besteht eigentlich im folgenden: Es ist im allgemeinen nicht möglich zu entscheiden, ob auf der Berandung eines vorgegebenen Bereiches $\mathfrak{B}$ eine Fläche $\mathfrak{C}$ existiert, zu der sich ein Polynomenpaar Q und R konstruieren läßt, mit dessen Hilfe man jede in $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion in der Form (6*) darstellen kann, und wo die im Nenner stehenden Polynome für kein $(X, Z) = (x^{(i)}, z^{(i)})$ verschwinden.

Die Konvexität und die Regularität von C und C' sind bei diesen Überlegungen nicht wesentlich.

Punkt von $\mathfrak{C}$ genügt den Gleichungen (5) und (5*). Die Ebene $(X - x_k) + m(Z - z_k) = 0$ kann man ebenfalls in der Form

(8) $$X + mZ = x^{(b)} + mc_2$$

schreiben. Da zwei parallele Ebenen im Endlichen keinen gemeinsamen Punkt haben können, so hat keine der Ebenen (8) einen gemeinsamen Punkt mit der Ebene (4), also keinen Punkt, der im Innern von $\mathfrak{P}$ liegt. Ebenso zeigen wir, daß $Z - z_k$ nirgends in $\mathfrak{P}'$ verschwindet.

2. Wir wollen nunmehr $\frac{1}{m(Z - z_k) + (X - x_k)}$ durch ein Polynom approximieren. Wir legen durch den Punkt $x = mz_k + x_k - mc_2$ eine Tangente an B. Durch jeden Punkt dieser Tangente legen wir eine analytische Ebene

(9) $$X + mZ = \text{konst.}$$

Die Gesamtheit dieser Ebenen liefert einen dreidimensionalen Raum, den wir mit T bezeichnen. Eine ähnliche Überlegung wie die unter 1. durchgeführte, zeigt, daß T keinen gemeinsamen Punkt mit dem Teilbereich $\mathfrak{P}'$ hat. Im Punkte x_k, z_k errichten wir zu T eine Normale und legen eine Hyperkugel, die T in x_k, z_k tangiert und deren Mittelpunkt somit auf der Normalen liegt. Der Radius dieser Hyperkugel soll endlich sein, jedoch so groß, daß $\mathfrak{P}'$ ganz im Innern dieser Hyperkugel liegt. Da

(10) $$\frac{1}{(X - x_k) + m(Z - z_k)}$$

im Innern dieser Hyperkugel regulär ist, läßt sich (10) in der Hyperkugel in eine Potenzreihe entwickeln[20]). Nehmen wir einen genügend langen Abschnitt der Reihe, so wird der Unterschied zwischen dem Abschnitt und (10) gleichmäßig in $\mathfrak{P}'$ kleiner wie eine vorgegebene Größe ε. Wir haben also (10) durch ein Polynom approximiert; ebenso läßt sich $\frac{1}{Z - z_k}$ in $\mathfrak{P}'$ approximieren, woraus ohne Mühe unser Satz folgt[19]).

Es sollen einige weitere Folgerungen aus der Darstellung (6) gezogen werden, wobei wir uns auf den Fall $m = 0$ beschränken.

Der Absolutwert jeder in $\mathfrak{R}$ (somit in $\mathfrak{P}$) regulären Funktion $f(X, Z)$ wird an keiner Stelle in $\mathfrak{R}$ größer als das Maximum von $|f(X, Z)|$ auf $\mathfrak{C}$. Denn: benutzt man die auf der Seite 443 eingeführten Bezeichnungen, so ist nach den Sätzen der (ebenen) Funktionentheorie:

$$|f(x^{(i)}, z^{(i)})| \leqq \text{Max. von } |f(x^{(b)}, z^{(i)})| \leqq \text{Max. von } |f(x^{(b)}, z^{(b)}|.$$

[20]) Vgl. dazu F. Hartogs, Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlicher, insbesondere über die Darstellung derselben durch Reihen, welche nach Potenzen einer Veränderlichen fortschreiten. Math. Annalen 62 (1905), S. 9 oder W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II, I. Lieferung, B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1924, S. 181.

Hat die Berandung von $\mathfrak{P}$ nur die Fläche $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{R}$ gemeinsam, so wird $|f(X, Z)|$ — $\left[\text{sobald weder } \frac{\partial f}{\partial X} \text{ noch } \frac{\partial f}{\partial Z} \text{ identisch verschwinden}\right]$ an jeder Stelle in $\mathfrak{R}$ kleiner als das Maximum von $|f(X, Z)|$ auf $\mathfrak{C}$ sein. Wir werden solche Bereiche mit $\mathfrak{R}^*$, die Fläche $\mathfrak{C}$ als die Maximumfläche von $\mathfrak{R}^*$ bezeichnen.

Durch eine Abbildung von $\mathfrak{R}^*$ durch ein Paar von Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen gelangen wir zu einem neuen Bereich, der ebenfalls eine Maximumfläche besitzt.

Werden zwei einfach zusammenhängende Bereiche, die Maximumflächen besitzen, aufeinander abgebildet, so geht die Maximumfläche des einen Bereiches in die Maximumfläche des anderen über.

Es läßt sich in üblicher Weise für die Bereiche $\mathfrak{R}$ (wie auch für die durch die analytische Abbildung aus ihnen erzeugte) das Schwarzsche Lemma erschließen:

Seien $f(X, Z)$ und $\varphi(X, Z)$ zwei in $\mathfrak{R}$ reguläre Funktionen, es sei ferner $\frac{f(X, Z)}{\varphi(X, Z)}$ in $\mathfrak{R}$ ebenfalls regulär.

Sei M das Maximum von $|f(X, Z)|$, μ das Minimum von $|\varphi(X, Z)|$ auf $\mathfrak{C}$. Es ist dann in jedem Punkte von $\mathfrak{R}$:

(11) $$|f(X, Z)| \leqq \frac{\mathsf{M}}{\mu} |\varphi(X, Z)|.$$

(Eingegangen am 10. 1. 1929.)