

## Werk

**Titel:** Mathematische Annalen

**Ort:** Berlin

**Jahr:** 1930

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN235181684\_0102

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684\\_0102](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0102)

**LOG Id:** LOG\_0024

**LOG Titel:** Die Methode der Polarfunktionen und Konfigurationskonstanten höherer Ordnung im Gebiete der Randwertaufgaben der Potentialtheorie

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN235181684

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

# Die Methode der Polarfunktionen und Konfigurationskonstanten höherer Ordnung im Gebiete der Randwertaufgaben der Potentialtheorie<sup>1)</sup>.

Von

Ernst Richard Neumann in Marburg.

Der Nachweis für die Anwendbarkeit der Methode des arithmetischen Mittels von Carl Neumann zur Lösung der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie war bekanntlich zunächst lange Jahre hindurch auf Gebiete beschränkt, die von *konvexen* Flächen  $\sigma$  begrenzt werden<sup>2)</sup>. Bei diesem Beweise handelt es sich u. a. darum, zu zeigen, daß gewisse nach bestimmtem Verfahren sukzessive auf  $\sigma$  gebildete Funktionen  $f', f'', f''', \dots$  sich einer Konstanten nähern. Diesen Nachweis führte C. Neumann in der Weise, daß er die *Schwankungen*  $\Delta(f^{(n)})$  dieser sukzessiven Funktionen  $f^{(n)}$  betrachtete und für sie bei konvexer Fläche  $\sigma$  die Beziehung bewies:

$$(N) \quad \Delta(f^{(n)}) \leq \Delta(f^{(n-1)}) \cdot c_g, \quad \text{also} \quad \Delta(f^{(n)}) \leq \Delta \cdot c_g^n,$$

wo  $\Delta = \Delta(f)$  die Schwankung der vorgegebenen Randwertfunktion  $f$  bedeutet, und  $c_g$  eine der Fläche  $\sigma$  eigentümliche, also nur von den geometrischen Verhältnissen abhängige<sup>3)</sup> positive Konstante, die sogenannte

<sup>1)</sup> Ausführlichere Darstellung eines am 15. September 1925 auf der **Mathematiker-Tagung** in Danzig gehaltenen Vortrages. Jahresbericht der Dtsch. Math.-Vereinigung **34**, 2. Abt., S. 138–143.

<sup>2)</sup> Der Einfachheit halber werde ich mich auf *räumliche* Gebiete beschränken. — Zur Bezeichnungsweise sei bemerkt, daß Innen- und Außengebiet von  $\sigma$  mit  $\mathfrak{I}$  bzw.  $\mathfrak{A}$  bezeichnet werden, Punkte innerhalb dieser Gebiete mit  $i(i)$  bzw.  $a(a)$ , Punkte auf  $\sigma$  selber mit  $s(\hat{s})$ , oder aber sie werden, wenn nötig, je nachdem man sie als Randpunkte von  $\mathfrak{I}$  oder  $\mathfrak{A}$  ansieht, noch genauer durch die Doppelindizes  $is$  bzw.  $as$  angedeutet. — Wenn Formeln gültig sind im Gebiete  $\mathfrak{I}$  mit Einschluß der inneren Randpunkte, so sprechen wir von ihrer Gültigkeit in  $\mathfrak{I} + \sigma$  (und analog beim Außengebiet).

<sup>3)</sup> Das soll nach dem Vorgange von C. Neumann durch die *Marke*  $g$  auch äußerlich angedeutet werden — die also nichts mit den später auftretenden Randwerten  $g_s$  zu tun hat.

*Konfigurationskonstante* ist, die bei konvexen Flächen einen echtgebrochenen Wert besitzt, womit dann augenscheinlich der gewünschte Beweis für *konvexe Gebiete* im wesentlichen geführt ist<sup>4)</sup>.

Erst Poincaré gab den Anstoß zur Erweiterung des Gültigkeitsbereiches der Neumannschen Methode, indem er nach dem Vorbilde von H. A. Schwarz eigentümliche Integrale  $J_n$  (oder  $J^{(n)}$ , wie wir schreiben werden) in den Kreis seiner grundlegenden Betrachtungen zog<sup>5)</sup>, die hinüberleiteten zur Theorie der Integralgleichungen, deren man sich heute zu bedienen pflegt, um die Allgemeingültigkeit der Methode des arithmetischen Mittels zu beweisen. — Zumal hier aber Integralgleichungen mit unstetigen und unsymmetrischen Kernen auftreten, bedarf es bei diesem Wege eines ziemlich weiten Ausholens, und es dürfte daher auch heute noch ein direkter Beweis für die Konvergenz der Methode oder eine Vervollkommnung der älteren Beweise, wie diese Arbeit sie bringen will, nicht wertlos sein, zumal zu hoffen ist, daß diese Vervollkommnungen vielleicht auch wieder der Integralgleichungstheorie zugute kommen werden.

Mit Hilfe der von mir eingeführten „Polarfunktionen“ habe ich bereits früher<sup>6)</sup>, wenigstens für die eine in den Poincaréschen Betrachtungen enthaltene Tatsache, einen verhältnismäßig einfachen Beweis geliefert, nämlich (beim Innengebiet) für die Formel:

$$(P) \quad \text{abs}(W_i^{(n)} - W_i^{(n+1)}) \leq A_g \sqrt{J^{(2n-2)}},$$

in der die  $W^{(n)}$  die aufeinanderfolgenden Neumannschen Potentiale bedeuten und  $A_g$  wieder eine solche nur von den geometrischen Verhältnissen abhängige Konstante ist. — Die Bedeutung dieser Formel besteht darin, daß sie gestattet — und darin möchte ich das wesentliche Prinzip der Poincaréschen Beweismethode erblicken — *aus dem bei weitem leichter zu beweisenden Verhalten der Integrale  $J^{(n)}$  bei wachsendem Index Rückschlüsse auch auf das Verhalten der Glieder linker Hand zu ziehen*, aus denen sich die Neumannsche Reihe (Lösung für das Innengebiet) zusammensetzt.

<sup>4)</sup> Hilbert hat in seinen Vorlesungen Ende der neunziger Jahre den Beweis der Relation (N) von der Voraussetzung einer konvexen Begrenzungsfläche befreit (vgl. Math. Annalen 55, S. 4), aber immer blieben doch noch die konvexen Flächen die wichtigsten und am leichtesten zu charakterisierenden, deren Konfigurationskonstante kleiner als 1 ist, so daß die Methode im wesentlichen doch auf konvexe Gebiete beschränkt blieb.

<sup>5)</sup> La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet, Acta mathematica 20, S. 59.

<sup>6)</sup> Zwei kurze Mitteilungen findet man in den Göttinger Nachrichten 1899 (S. 291) und 1902 (S. 242). Wegen der ausführlicheren Darstellung vgl. unten die Angaben auf S. 450.

Auf dieser Grundlage (P) und ähnlichen Abschätzungen im Gebiete der Robinschen Methode aufbauend, gelang es mir dann schon früher (einfacher wie Poincaré) viele der Konvergenzeigenschaften der Neumannschen und vor allem der Robinschen Potentiale herzuleiten. Doch verzichtete ich dabei auf einen nicht unwesentlichen Vorzug des ursprünglich C. Neumannschen Verfahrens, der auch der Poincaréschen Betrachtungsweise eigen war, wenn er hier auch durch Anwendung recht fernliegender Hilfsmittel etwas teuer erkaufte erscheint. Ich folgte nämlich in meinen älteren Arbeiten die Konvergenz *aus dem Verhalten von Faktoren, welche ihrerseits noch abhängen von den vorgeschriebenen Randwerten*, nämlich der Poincaréschen Integrale (z. B. der  $J^{(n)}$ ). Dadurch kommt in die Konvergenzbetrachtungen eine gewisse Unbestimmtheit. Im Gegensatz dazu tritt z. B. bei C. Neumann von vornherein der *rein geometrische Charakter der Konvergenz* deutlich zutage, die Konvergenz wird bei ihm aus dem Verhalten eines rein geometrischen Faktors, eben der Konfigurationskonstanten  $c_g$ , erschlossen, während die gerade vorgeschriebenen Randwerte bei seiner obigen Abschätzung (N) nur in einem allen Gliedern gemeinsamen Faktor, nämlich der Schwankung  $\Delta$ , auftreten.

Ich werde nun im folgenden den Konvergenzbeweis auch für nicht-konvexe Gebiete von vornherein möglichst *geometrisch* (in diesem Sinne) führen ohne Heranziehung so fernliegender Hilfsmittel, wie sie Poincaré benutzt, lediglich durch konsequenten Ausbau meiner Methode der Polarfunktionen, und ich möchte hier nur den Grundgedanken kurz andeuten: Bei gegebener Fläche  $\sigma$  hängen die Glieder  $W_i^{(n)} - W_i^{(n+1)}$  der Neumannschen Reihe (für das Innengebiet) augenscheinlich ab von den vorgeschriebenen Randwerten  $f_s$  und sodann noch von der Lage des Aufpunktes  $i$ . Die Methode der Polarfunktionen lieferte mir nun eine Abschätzung dieser Glieder durch das *Produkt zweier Faktoren, deren einer (J) immer nur von den Randwerten, der andere ( $l_{(i)}^{(2\lambda)}$ ) nur von der Lage von  $i$  abhängt*:

$$\text{abs} (W_i^{(n+\lambda)} - W_i^{(n+\lambda+1)}) \leq \frac{1}{4\pi} \sqrt{l_{(i)}^{(2\lambda)}} \sqrt{J^{(2\kappa)}}.$$

Diese Faktoren  $l_{(i)}^{(2\lambda)}$  wären danach also etwa zu bezeichnen als *rein geometrische Funktionen*, nämlich Funktionen der Lage eines Punktes, die im übrigen nur von der vorgegebenen Fläche  $\sigma$  abhängen. — Von diesen Funktionen stellte sich nun heraus, daß sie (unter ziemlich weiten Voraussetzungen über die Fläche  $\sigma$ ) für  $\lambda \geq 1$  stetig bleiben selbst bei beliebiger Annäherung von  $i$  an  $\sigma$  („stetig in  $\mathfrak{S} + \sigma$ “), und so führte ich denn früher das Maximum von  $l_{(i)}''$  ein, das dann natürlich eine rein geometrische Konstante ist, und gelangte so (für  $\lambda = 1$  und  $\kappa = n - 1$ ) zu der obigen

Abschätzung (P), wie sie in den Poincaréschen Betrachtungen steckt. — Im folgenden werde ich nun von diesem Verfahren abweichen und gerade den Index  $\kappa$  des zweiten Faktors  $J$  festhalten, so daß also die Randwerte  $f_s$  nur in einem unveränderten Faktor (wie früher bei (N) in der Schwankung  $\Delta$ ) auftreten, und werde dann zeigen, daß *der rein geometrische Faktor*  $l_{(v)}^{(2\lambda)}$  mit wachsendem Index  $\lambda$ , und zwar gleichmäßig für alle Lagen von  $i$  in  $\mathfrak{S} + \sigma$ , gegen 0 konvergiert. Indem ich jetzt also *das Schwergewicht auf den rein geometrischen Faktor* lege, beweise ich, daß die Einzelglieder der Neumannschen Reihe zur 0 abnehmen. Aber auch der Beweis für die Konvergenz der ganzen Reihe glückt mittelst rein potentialtheoretischer Überlegungen, wobei schließlich sogar wieder eine äußerst enge Berührung mit dem ursprünglich C. Neumannschen Gedankengang mit der Konfigurationskonstanten hervortritt.

Äußerst einfach folgt aus diesen Betrachtungen dann auch die Konvergenz der *Robinschen Methode zur Lösung der zweiten Randwertaufgabe*, ja diese Methode ist bei meiner Art des Vorgehens kaum von der Neumannschen zu trennen, die Beziehungen zwischen beiden Methoden spielen im folgenden dauernd eine große Rolle. —

Wie aus dem Gesagten hervorgeht, werde ich mich im folgenden vielfach auf meine früheren Untersuchungen zu berufen haben, die in den beiden Jablonowski-Preisschriften „Studien über die Methoden von C. Neumann und G. Robin zur Lösung der beiden Randwertaufgaben der Potentialtheorie“ und „Beiträge zu einzelnen Fragen der höheren Potentialtheorie“ (bei Teubner 1905 und 1912) niedergelegt sind. Ich werde die benutzten Tatsachen aber stets kurz auseinandersetzen, so daß das Folgende auch ohne Kenntnis jener Arbeiten verständlich sein dürfte. Wegen der Beweise im einzelnen — meist handelt es sich um einfache Anwendungen der Greenschen Sätze — werde ich allerdings stets nur auf jene Arbeiten verweisen. (Ich zitiere sie kurz als „Studien“ und „Beiträge“.)

## § 1.

### Die sukzessiven Neumannschen und Robinschen Potentiale und ihre einfachsten Konvergenzeigenschaften.

Die Grundlage der Methode des arithmetischen Mittels, gleichsam die Bausteine, aus denen sich die Neumannsche Lösung der *ersten Randwertaufgabe* aufbaut, bildet eine Folge von Doppelbelegungspotentialen, zu denen man in folgender Weise gelangt: Sind auf der geschlossenen Fläche  $\sigma$ , über die wir die Voraussetzung machen, daß sie überall eine bestimmte Tangentialebene und außerdem stetige Biegung und endliche Krümmung

besitzt [Stud. S. 2], die stetigen Randwerte  $f_s$  vorgeschrieben, so ist das erste Potential  $W$  das einer Doppelbelegung vom Momente  $\frac{1}{2\pi} f$ , also

$$W_p = \frac{1}{2\pi} \int f_\sigma \frac{\partial}{\partial \nu_\sigma} \frac{1}{E_p} d\sigma \equiv \frac{1}{2\pi} \int f_\sigma (d\sigma)_p \quad \left( \begin{array}{l} p \text{ beliebiger Raumpunkt} \\ \nu \text{ innere Flächennormale} \end{array} \right),$$

wo  $(d\sigma)_p$  das bekannte C. Neumannsche Symbol, die positiv oder negativ genommene scheinbare Größe des Elementes  $d\sigma$  von  $p$  aus bedeutet. Die Werte dieses Potentials in Punkten  $s$  von  $\sigma$  selbst (bekanntlich das arithmetische Mittel der inneren und äußeren Randwerte  $W_{is}$  und  $W_{as}$ ) bezeichnen wir dann mit  $f'_s$  und bilden ein weiteres Potential  $W'$ , indem wir diese Werte  $f'_s$  an die Stelle der früheren  $f_s$  treten lassen, und fahren in dieser Weise fort. So kommen wir sukzessive zu dem folgenden Schema „Neumannscher Potentiale  $W^{(n)}$  und Flächenfunktionen  $f^{(n)}$ “:

$$(\mathfrak{N}_0) \quad \left\{ \begin{array}{ll} W_p = \frac{1}{2\pi} \int f_\sigma (d\sigma)_p, & \frac{1}{2} (W_{is} + W_{as}) \equiv \frac{1}{2\pi} \int f_\sigma (d\sigma)_s = f'_s, \\ W'_p = \frac{1}{2\pi} \int f'_\sigma (d\sigma)_p, & \frac{1}{2} (W'_{is} + W'_{as}) \equiv \frac{1}{2\pi} \int f'_\sigma (d\sigma)_s = f''_s, \\ W''_p = \frac{1}{2\pi} \int f''_\sigma (d\sigma)_p, & \frac{1}{2} (W''_{is} + W''_{as}) \equiv \frac{1}{2\pi} \int f''_\sigma (d\sigma)_s = f'''_s, \end{array} \right.$$

usw. usw.

Dann ist die (zunächst nur bei konvexer Fläche  $\sigma$  als gültig nachgewiesene) Lösung der ersten Randwertaufgabe<sup>7)</sup> für das Innen- bzw. Außengebiet dargestellt durch die beiden „Neumannschen Reihen“:

$$(\mathfrak{N}_1) \quad \begin{aligned} \Phi_i &= C + (W_i - W'_i) + (W''_i - W'''_i) + \dots, \\ \Psi_a &= C - (W_a + W'_a) - (W''_a + W'''_a) - \dots, \end{aligned}$$

wenn  $C$  eine Konstante bedeutet, der sich, wie man beweisen kann, die Funktionen  $f^{(n)}$  mit wachsendem  $n$  mehr und mehr nähern [vgl. die Einleitung].

Analog geht G. Robin bei der Lösung der zweiten Randwertaufgabe vor. An Stelle der Doppelbelegungspotentiale  $W^{(n)}$  treten Potentiale einfacher Flächenbelegungen, und die Rolle der Randwerte nehmen die normalen Ableitungen ein. Bezeichnen wir die ursprünglich (für die normalen Ableitungen) vorgegebenen Werte mit  $g_s$ , so erhalten wir das folgende Schema „Robinscher Potentiale  $V^{(n)}$  und Flächenfunktionen  $g^{(n)}$ “:

<sup>7)</sup> Wegen der näheren Definition vgl. Studien S. 18.

$$(\mathfrak{R}_0) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_p = \frac{1}{2\pi} \int g_\sigma \frac{d\sigma}{E_p}, \quad \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial v} \right)_{i_s} + \left( \frac{\partial V}{\partial v} \right)_{a_s} \right] \equiv \frac{1}{2\pi} \int g_\sigma [d\sigma]_s = g'_s, \\ V'_p = \frac{1}{2\pi} \int g'_\sigma \frac{d\sigma}{E_p}, \quad \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial V'}{\partial v} \right)_{i_s} + \left( \frac{\partial V'}{\partial v} \right)_{a_s} \right] \equiv \frac{1}{2\pi} \int g'_\sigma [d\sigma]_s = g''_s, \\ V''_p = \frac{1}{2\pi} \int g''_\sigma \frac{d\sigma}{E_p}, \quad \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial V''}{\partial v} \right)_{i_s} + \left( \frac{\partial V''}{\partial v} \right)_{a_s} \right] \equiv \frac{1}{2\pi} \int g''_\sigma [d\sigma]_s = g'''_s, \\ \text{usw.} \qquad \qquad \qquad \text{usw.} \end{array} \right.$$

wo das Symbol  $[d\sigma]_s$  in der Bedeutung von  $\frac{\partial}{\partial v_s} \frac{1}{E_s} d\sigma$  steht (während  $(d\sigma)_s = \frac{\partial}{\partial v_s} \frac{1}{E_s} d\sigma$  war!). — Die Flächenbelegungen, von denen die Potentiale  $V, V', V''$  usw. herrühren, haben dann sämtlich die gleiche Masse:

$$(\mathfrak{R}'_0) \quad \frac{1}{2\pi} \int g_\sigma^{(n)} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int g_\sigma d\sigma = m \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Die Lösungen der zweiten Randwertaufgabe sind dann (wie allerdings in voller Allgemeinheit auch erst noch zu beweisen ist) dargestellt durch die beiden „Robinschen Reihen“:

$$(\mathfrak{R}'_1) \quad \begin{array}{l} Q_i = -(V_i + V'_i) - (V''_i - V'''_i) - \dots \\ P_a = -m \frac{II_a}{2} - (V_a - V'_a) - (V''_a - V'''_a) - \dots \end{array} \quad (II = \text{Pot. d. natürl. Belegung, vgl. später}).$$

Dabei sind beim Innengebiet die Werte  $g_s$  aus bekannten Gründen der Beschränkung  $m \equiv \frac{1}{2\pi} \int g_\sigma d\sigma = 0$  unterworfen anzunehmen. —

Für diese Neumannschen und Robinschen Potentiale  $W^{(n)}$  und  $V^{(n)}$  hat nun Poincaré in Anlehnung an H. A. Schwarz merkwürdige *Integraleigenschaften* bewiesen: Kombiniert man z. B. irgend zwei Neumannsche Doppelbelegungspotentiale  $W^{(\kappa)}$  und  $W^{(\lambda)}$  in einem Integrale von der Form

$$(1) \quad [\varphi, \psi] \equiv \int \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) d\tau,$$

hinerstreckt entweder über das Innen- oder Außengebiet von  $\sigma$  oder auch über das Totalgebiet  $\mathfrak{Z} = \mathfrak{S} + \mathfrak{A}$ , so hängt der Wert eines solchen Integrals nie von den Einzelindizes  $\kappa$  und  $\lambda$  ab, sondern nur von ihrer Summe  $\kappa + \lambda$  [Stud. S. 75]. Wir setzen daher etwa

$$(2n) \quad [W^{(\kappa)}, W^{(\lambda)}] = J^{(\kappa+\lambda)}, \quad \text{oder auch ausführlicher} \quad = J^{(\kappa+\lambda)}(f),$$

um anzudeuten, daß diese Integrale  $J^{(n)}$  noch von den vorgegebenen Randwerten  $f_s$  abhängen. — Dabei sei noch bemerkt, daß die einfachen Symbole  $J^{(n)}$  stets die über das Totalgebiet  $\mathfrak{Z}$  hinerstreckten Integrale

bedeuten sollen; wo ausnahmsweise einmal Integrale nur über das Innen- oder Außengebiet auftreten, soll das durch ein- bzw. zweimalige Überstreichung des  $J$  angedeutet werden [Stud. S. 73].

Analog gilt im Gebiete der Robinschen Methode:

$$(2r) \quad [V^{(\kappa)}, V^{(\lambda)}] = L^{(\kappa+\lambda)} \quad \text{oder auch} \quad = L^{(\kappa+\lambda)}(g)$$

mit entsprechenden Festsetzungen.

Alle Größen  $J^{(n)}$  und  $L^{(n)}$  mit *geradem* Index  $n$  sind augenscheinlich (weil auch darstellbar als Integrale von Quadratsummen) *positiv*. Darüber hinaus läßt sich aber auch leicht zeigen, daß sie zwei Reihen *dauernd abnehmender Größen* bilden

$$(3) \quad \begin{aligned} (J \geq J'' \geq) J^{IV} \geq J^{VI} \geq \dots \geq 0 \\ L \geq L'' \geq L^{IV} \geq L^{VI} \geq \dots \geq 0 \end{aligned} \quad [\text{Stud. S. 78}],$$

woraus folgt, daß bei beliebigen Ausgangsfunktionen  $f$  bzw.  $g$

$$(3') \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} J^{(2\nu)} \quad \text{und} \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} L^{(2\nu)}$$

*stets existieren.*

Diese Schwarz-Poincaréschen Integraleigenschaften (2) habe ich nun früher in folgender Weise verallgemeinert: Wie wir uns oben z. B. aus den Randwerten  $f_s$  die Reihe der Potentiale  $W, W', W''$  usw. hergeleitet dachten, genau so seien jetzt aus anderen (ebenfalls stetigen) Randwerten  $\bar{f}_s$  eine neue Folge von Potentialen  $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{B}''$  usw. abgeleitet. Dann gilt auch noch für Integrale von der Form  $[\varphi, \psi]$ , deren beide Bestandteile aus den *verschiedenen* Reihen der  $W, W', W''$  usw. und der  $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}', \mathfrak{B}''$  usw. gewonnen sind, die Eigenschaft, nur von der *Summe der Indizes* der beiden Potentiale abzuhängen:

$$(4) \quad [W^{(\kappa)}, \mathfrak{B}^{(\lambda)}] = K^{(\kappa+\lambda)}(f, \bar{f}) \quad \text{und analog} \quad [V^{(\kappa)}, \mathfrak{B}^{(\lambda)}] = M^{(\kappa+\lambda)}(g, g)$$

[Stud. S. 73]. Auch gelten für diese allgemeineren Integrale ebenfalls noch gewisse einfache, im Spezialfalle  $\bar{f}_s = f_s$  (bzw.  $g_s = g_s$ ) auch schon von Poincaré bewiesene Relationen:

$$(5) \quad \overline{K}^{(n)} - \overline{\overline{K}}^{(n)} = \overline{K}^{(n+1)} + \overline{\overline{K}}^{(n+1)} \quad \text{und} \quad \overline{M}^{(n)} - \overline{\overline{M}}^{(n)} = -(\overline{M}^{(n+1)} + \overline{\overline{M}}^{(n+1)})$$

[Stud. S. 74]. — Diese verallgemeinerten Integrale  $K^{(n)}$  und  $M^{(n)}$  habe ich nun nachträglich wieder spezialisiert, allerdings nach einer ganz anderen Richtung: Ich machte die eine der beiden Randwertfunktionen,  $\bar{f}_s$  bei der Neumannschen Methode,  $g_s$  bei der Robinschen, abhängig von der Lage eines Punktes (Poles), indem ich z. B. bei innerer Lage dieses Poles ( $i$ )

$$\bar{f}_s = \varphi_{(i)s} \equiv \frac{1}{E_{(i)s}} \quad \text{bzw.} \quad g_s = \gamma_{(i)s} \equiv \frac{1}{\partial E_{(i)s}}$$

setzte. Dann werden auch alle Potentiale  $\mathfrak{B}^{(n)}(\mathfrak{B}^{(n)})$  und Flächenfunktionen  $f^{(n)}(g^{(n)})$  abhängig von der Lage dieses Poles  $i$  und mit ihnen auch die sämtlichen Integrale  $K^{(n)}$  und  $M^{(n)}$ . Wir setzen daher

$$(6) \quad K^{(n)}(f, \varphi_{(i)}) = K_{(i)}^{(n)}(f) \quad \text{bzw.} \quad M^{(n)}(g, \gamma_{(i)}) = M_{(i)}^{(n)}(g),$$

und, was diese Abhängigkeit einmal natürlich von den Randwerten  $f_s$  (bzw.  $g_s$ ) und sodann eben von der Lage von  $i$  anlangt, so stellt sich heraus, daß diese Integrale aufs engste zusammenhängen mit den ausgehend von den Werten  $f_s(g_s)$  gebildeten Potentialen  $W^{(n)}(V^{(n)})$ , es ergeben sich nämlich die fundamentalen Formeln:

$$(7i) \quad K_{(i)}^{(n)}(f) = 4\pi(W_i^{(n)} - W_i^{(n+1)}), \quad M_{(i)}^{(n)}(g) = 4\pi(V_i^{(n)} + V_i^{(n+1)})$$

[Stud. S. 89], und bei äußerer Lage des Poles ( $a$ ) ganz entsprechend:

$$(7a) \quad K_{(a)}^{(n)}(f) = -4\pi(W_a^{(n)} + W_a^{(n+1)}), \quad M_{(a)}^{(n)}(g) = -4\pi(V_a^{(n)} - V_a^{(n+1)}).$$

Für die noch von der Lage eines Poles  $o$  abhängigen, den Ausgangswerten  $\varphi_{(o)s} = \frac{1}{E_{os}}$  bzw.  $\gamma_{(o)s} = \frac{\partial \frac{1}{E_o}}{\partial v_s}$  zugehörigen Potentiale (die wir oben an die Stelle der  $\mathfrak{B}^{(n)}$  bzw.  $\mathfrak{B}^{(n)}$  treten ließen) wollen wir noch besondere Bezeichnungen einführen; ebenso für die zugehörigen Flächenfunktionen. Es gehören

$$(8) \quad \begin{aligned} \text{zu } \varphi_{(o)s} &= \frac{1}{E_{os}}: \mathbf{W}_{(o)}, \mathbf{W}'_{(o)}, \mathbf{W}''_{(o)} \text{ usw. und } \varphi'_{(o)}, \varphi''_{(o)}, \varphi'''_{(o)} \text{ usw.}, \\ \text{zu } \gamma_{(o)s} &= \frac{\partial \frac{1}{E_o}}{\partial v_s}: \mathbf{V}_{(o)}, \mathbf{V}'_{(o)}, \mathbf{V}''_{(o)} \text{ usw. und } \gamma'_{(o)}, \gamma''_{(o)}, \gamma'''_{(o)} \text{ usw.} \end{aligned}$$

Dieses sind die „Polarfunktionen“ (Polarpotentiale und polaren Flächenfunktionen) der Neumannschen bzw. Robinschen Methode, und die ihnen zugehörigen Schwarz-Poincaréschen Integrale  $J^{(n)}(\varphi_{(o)})$  bzw.  $L^{(n)}(\gamma_{(o)})$  mögen „Polarintegrale“ heißen und mit  $I_{(o)}^{(n)}$  bzw.  $\Lambda_{(o)}^{(n)}$  bezeichnet werden, so daß also nach (2):

$$(8') \quad I_{(o)}^{(\kappa+\lambda)} = [\mathbf{W}_{(o)}^{(\kappa)}, \mathbf{W}_{(o)}^{(\lambda)}] \quad \text{bzw.} \quad \Lambda_{(o)}^{(\kappa+\lambda)} = [\mathbf{V}_{(o)}^{(\kappa)}, \mathbf{V}_{(o)}^{(\lambda)}]$$

ist. Diese Integrale hängen dann von keinen irgendwie willkürlich vorgeschriebenen Randwerten ab, sondern sind, wenn eine Fläche  $\sigma$  und die Lage eines Poles  $o$  gegeben sind, durch fest vorgeschriebene Regeln definiert. Als nur von geometrischen Verhältnissen abhängige Größen kann man sie etwa als *rein geometrische Funktionen* (der Lage des Poles  $o$ ) bezeichnen.

Ausführlicher geschrieben lautet z. B. die erste der Gleichungen (7i):

$$(7') \quad 4\pi(W_i^{(\kappa+\lambda)} - W_i^{(\kappa+\lambda+1)}) = [\mathbf{W}_{(i)}^{(\lambda)}, \mathbf{W}_{(i)}^{(\kappa)}]_{\mathfrak{z}},$$

und hieraus folgt nach der Schwarzschen Ungleichung  $[\varphi, \psi]^2 \leq [\varphi, \varphi] \cdot [\psi, \psi]$  unter Benutzung der eingeführten Bezeichnungen:

$$4\pi \cdot \text{abs}(W_i^{(\kappa+\lambda)} - W_i^{(\kappa+\lambda+1)}) \leq \sqrt{[W_{(i)}^{(\lambda)}, W_{(i)}^{(\lambda)}] \cdot [W^{(\kappa)}, W^{(\kappa)}]} = \sqrt{l_{(i)}^{(2\lambda)}} \cdot \sqrt{J^{(2\kappa)}(f)},$$

und ganz entsprechende Schlüsse gestatten auch die übrigen Formeln (7), so daß wir erhalten:

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} |W_i^{(\kappa+\lambda)} - W_i^{(\kappa+\lambda+1)}| \leq \frac{1}{4\pi} \sqrt{l_{(i)}^{(2\lambda)}} \cdot \sqrt{J^{(2\kappa)}(f)}, \\ |W_a^{(\kappa+\lambda)} + W_a^{(\kappa+\lambda+1)}| \leq \frac{1}{4\pi} \sqrt{l_{(a)}^{(2\lambda)}} \cdot \sqrt{J^{(2\kappa)}(f)}, \\ |V_i^{(\kappa+\lambda)} + V_i^{(\kappa+\lambda+1)}| \leq \frac{1}{4\pi} \sqrt{\Lambda_{(i)}^{(2\lambda)}} \cdot \sqrt{L^{(2\kappa)}(g)}, \\ |V_a^{(\kappa+\lambda)} - V_a^{(\kappa+\lambda+1)}| \leq \frac{1}{4\pi} \sqrt{\Lambda_{(a)}^{(2\lambda)}} \cdot \sqrt{L^{(2\kappa)}(g)}. \end{array} \right.$$

Damit sind die schon in der Einleitung erwähnten Abschätzungen gewonnen, *Abschätzungen der Glieder der Neumannschen und Robinschen Reihen* ( $\mathfrak{R}_1$ ) und ( $\mathfrak{R}_1$ ) *durch Produkte, deren einer Faktor bei gegebener Fläche  $\sigma$  immer lediglich von dem Aufpunkt  $i$  bzw.  $a$  abhängt, der andere allein von den vorgeschriebenen Randwerten  $f_s$  (bzw.  $g_s$ ).*

In meinen Studien (Abschn. V) habe ich nun bewiesen, daß die geometrischen Funktionen  $l_{(o)}^{(2\lambda)}$  und  $\Lambda_{(o)}^{(2\lambda)}$  unter den über die Fläche  $\sigma$  gemachten Voraussetzungen für  $\lambda = 1$  (und erst recht dann auch für größere Werte von  $\lambda$ ) stetig bleiben auch bei Annäherung des Poles  $o$  an die Fläche  $\sigma$ , so daß sich für sie endliche obere Grenzen angeben lassen:

$$(10) \quad l_{(o)}'' \leq (4\pi A_g)^2 \quad \text{und} \quad \Lambda_{(o)}'' \leq (4\pi B_g)^2 \quad (o \text{ beliebig in } \mathfrak{S} + \sigma \text{ oder } \mathfrak{A} + \sigma).$$

Die Konstanten  $A_g$  und  $B_g$  hängen dann nur von den geometrischen Verhältnissen der Fläche  $\sigma$  ab. Ihre Einführung in (9) liefert (für  $\kappa = n - 1$ ) die Abschätzungen:

$$\left\{ \begin{array}{l} |W_i^{(n)} - W_i^{(n+1)}| \\ |W_a^{(n)} + W_a^{(n+1)}| \end{array} \right\} \leq A_g \sqrt{J^{(2n-2)}}, \quad \left\{ \begin{array}{l} |V_i^{(n)} + V_i^{(n+1)}| \\ |V_a^{(n)} - V_a^{(n+1)}| \end{array} \right\} \leq B_g \sqrt{L^{(2n-2)}}$$

und damit, wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, die Grundlage meiner älteren Arbeiten und den Anschluß an die Poincaréschen Methoden.

Jetzt aber wollen wir einen anderen Weg einschlagen, wobei es allerdings zweckmäßig ist, an Stelle der über das Totalgebiet  $\mathfrak{X} = \mathfrak{S} + \mathfrak{A}$  hinerstreckten Integrale ( $J, K$  bzw.  $L, M$ ) die über die Einzelgebiete  $\mathfrak{S}$  bzw.  $\mathfrak{A}$  erstreckten, durch ein- bzw. zweimalige Überstreichung gekennzeichneten Integrale in den Vordergrund zu stellen: Es ist allgemein

$$\overline{K}^{(n)} + \overline{\overline{K}}^{(n)} = K^{(n)}$$

und andererseits folgt aus (5):

$$\bar{K}^{(n)} - \bar{K}^{(n)} = \bar{K}^{(n+1)} + \bar{K}^{(n+1)} = K^{(n+1)}$$

und daher

$$\bar{K}^{(n)} = \frac{1}{2}(K^{(n)} + K^{(n+1)}) \quad \text{und} \quad \bar{K}^{(n)} = \frac{1}{2}(K^{(n)} - K^{(n+1)}).$$

Wenden wir diese Formeln nun auf den Fall an, daß die einen in den Integralen  $K$  steckenden Potentiale  $\mathfrak{B}$  [vgl. (4)] die Polarpotentiale  $\mathbf{W}_{(i)}$  bzw.  $\mathbf{W}_{(a)}$  sind, so folgt nach (7):

$$\bar{K}_{(i)}^{(n)}(f) = 2\pi(W_i^{(n)} - W_i^{(n+1)}) + 2\pi(W_i^{(n+1)} - W_i^{(n+2)}) = 2\pi(W_i^{(n)} - W_i^{(n+2)})$$

und analog:

$$\bar{K}_{(a)}^{(n)}(f) = -2\pi(W_a^{(n)} - W_a^{(n+2)})$$

oder ausführlicher:

$$(11) \quad \begin{aligned} 2\pi(W_i^{(\kappa+\lambda)} - W_i^{(\kappa+\lambda+2)}) &= [\mathbf{W}_{(i)}^{(\lambda)}, \mathbf{W}^{(\kappa)}]_{\mathfrak{B}} \\ 2\pi(W_a^{(\kappa+\lambda)} - W_a^{(\kappa+\lambda+2)}) &= -[\mathbf{W}_{(a)}^{(\lambda)}, \mathbf{W}^{(\kappa)}]_{\mathfrak{A}} \end{aligned}$$

und daraus wieder nach der Schwarzischen Ungleichung:

$$(12) \quad \begin{aligned} |W_i^{(\kappa+\lambda)} - W_i^{(\kappa+\lambda+2)}| &\leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{I_{(i)}^{(2\lambda)}} \cdot \sqrt{\bar{J}^{(2\kappa)}}(f) \\ |W_a^{(\kappa+\lambda)} - W_a^{(\kappa+\lambda+2)}| &\leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{I_{(a)}^{(2\lambda)}} \cdot \sqrt{\bar{J}^{(2\kappa)}}(f). \end{aligned}$$

Damit haben wir Formeln von derselben Art wie oben in (9) erhalten, nur daß jetzt Integrale nur über das Innengebiet  $\mathfrak{S}$  oder über das Außengebiet  $\mathfrak{A}$  auftreten. — Jetzt halten wir aber im Gegensatz zu früher  $\kappa$  fest, nämlich gleich 2 (die angenommene Stetigkeit der Randwerte  $f_s$  genügt, die Endlichkeit bereits von  $\bar{J}^{\text{IV}}$  und  $\bar{J}^{\text{IV}}$  zu verbürgen, Stud. S. 73). Dann erhalten wir Abschätzungen, in denen die Randwerte  $f_s$  nur in einem bei wachsendem Index ( $n = \kappa + 2$ ) stets gleichbleibenden Faktor enthalten sind, also Abschätzungen im wesentlichen wieder durch rein geometrische Funktionen:

$$(13) \quad \begin{aligned} |W_i^{(n)} - W_i^{(n+2)}| &\leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\bar{J}^{\text{IV}}} \cdot \sqrt{I_{(i)}^{(2n-4)}} \\ |W_a^{(n)} - W_a^{(n+2)}| &\leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\bar{J}^{\text{IV}}} \cdot \sqrt{I_{(a)}^{(2n-4)}}. \end{aligned}$$

Um nun weiterzugehen, knüpfen wir wieder an die Formeln (5) an, wenden sie aber jetzt nur auf den von Poincaré allein betrachteten Fall an, daß die beiden in jedem der Integrale  $K$  steckenden Potentiale [vgl. (4)] demselben Systeme angehören ( $f_s = f_s$ ), also an die Stelle unserer allgemeinen Integrale  $K^{(n)}(f, \bar{f})$  die spezielleren Integrale  $J^{(n)}(f)$  treten [vgl. (2)] und analog  $L^{(n)}(g)$  an Stelle von  $M^{(n)}(g, g)$ . — Dann folgt aus jenen Formeln (5) leicht:

$$\begin{aligned} 2\bar{J}^{(2\nu+1)} &= (\bar{J}^{(2\nu)} + \bar{J}^{(2\nu+2)}) - (\bar{J}^{(2\nu)} - \bar{J}^{(2\nu+2)}) \\ 2\bar{L}^{(2\nu+1)} &= -(\bar{L}^{(2\nu)} + \bar{L}^{(2\nu+2)}) + (\bar{L}^{(2\nu)} - \bar{L}^{(2\nu+2)}) \end{aligned} \quad [\text{Stud. S. 77}].$$

Diese Formeln wenden wir nun speziell auf unsere Polarpotentiale an und machen noch Gebrauch von der früher [Stud. S. 121] bewiesenen Tatsache, daß entsprechende Polarpotentiale  $\mathbf{W}_{(i)}^{(n)}$  und  $\mathbf{V}_{(i)}^{(n)}$  der Neumannschen und Robinschen Methode bei innerer Lage des Poles im ganzen Innengebiete  $\mathfrak{S}$  übereinstimmen, und daß daher auch die über das *Innengebiet* hin-erstreckten Polarintegrale  $\bar{I}_{(i)}^{(n)}$  und  $\bar{\Lambda}_{(i)}^{(n)}$  gleich sind. Dann folgt sofort:

$$(14i) \quad 2(\bar{I}_{(i)}^{(2\nu)} + \bar{I}_{(i)}^{(2\nu+2)}) = (\bar{I}_{(i)}^{(2\nu)} - \bar{I}_{(i)}^{(2\nu+2)}) + (\bar{\Lambda}_{(i)}^{(2\nu)} - \bar{\Lambda}_{(i)}^{(2\nu+2)})$$

und, da die Größen  $\bar{I}_{(i)}^{(2\nu)}$  und  $\bar{\Lambda}_{(i)}^{(2\nu)}$  als positive und mit wachsendem  $\nu$  stets abnehmende Größen sich bestimmten Grenzwerten nähern [vgl. (3)], so folgt hieraus das wichtige Resultat:

$$(15i) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \bar{I}_{(i)}^{(2\nu)} = 0,$$

und, da alle diese Einzelfunktionen  $\bar{I}_{(i)}^{(2\nu)}$ , wie schon erwähnt, innerhalb  $\mathfrak{S} + \sigma$  stetig sind, und die Abnahme gegen 0 nach (3) für jedes  $i$  *monoton* erfolgt, so ergibt sich weiter nach einem bekannten Dinischen Satze, daß diese Konvergenz auch für alle Lagen von  $i$  im Innengebiet eine *gleichmäßige* ist, ja sogar, daß die Maxima von  $\bar{I}_{(i)}^{(2\nu)}$  im Gebiete  $\mathfrak{S} + \sigma$  eine monoton zur 0 abnehmende Reihe von Größen bilden — und ganz entsprechende Überlegungen führen über die Formel

$$(14a) \quad 2(\bar{I}_{(a)}^{(2\nu)} + \bar{I}_{(a)}^{(2\nu+2)}) = (\bar{I}_{(a)}^{(2\nu)} - \bar{I}_{(a)}^{(2\nu+2)}) + (\bar{\Lambda}_{(a)}^{(2\nu)} - \bar{\Lambda}_{(a)}^{(2\nu+2)})$$

zu dem Resultate, daß auch

$$(15a) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \bar{I}_{(a)}^{(2\nu)} = 0$$

ist und zwar *gleichmäßig* im ganzen Gebiete  $\mathfrak{U} + \sigma$ .<sup>8)</sup>

<sup>8)</sup> Man braucht den Beweis zunächst nur für ein *abgeschlossenes* Gebiet zu führen, etwa wie es begrenzt wird von der Fläche  $\sigma$  und einer  $\sigma$  umschließenden Hilfsfläche  $\sigma_0$ , denn für die außerhalb  $\sigma_0$  gelegenen Punkte  $a$  ergibt sich die Richtigkeit unserer Behauptung aus der Tatsache, daß das Maximum von  $\bar{I}_{(a)}^{(2\nu)}$  im Gebiete  $\mathfrak{U}_0 + \sigma_0$  speziell auf  $\sigma_0$  anzutreffen ist. — Das folgt leicht in folgender Weise (mittelst einer Darstellung von  $\bar{I}_{(a)}^{(2\nu)}$  als Wert eines Potentials nach (11) und Anwendung bekannter Sätze über Extrema von Potentialen):

$$\bar{I}_{(a)}^{(2\nu)} = 2\pi (\mathbf{W}_{(a)a}^{(2\nu+2)} - \mathbf{W}_{(a)a}^{(2\nu)}) \leq 2\pi (\mathbf{W}_{(a)s_0}^{(2\nu+2)} - \mathbf{W}_{(a)s_0}^{(2\nu)}) \leq \sqrt{\bar{I}_{(a)}^{(2\nu)} \bar{I}_{(s_0)}^{(2\nu)}} \quad [\text{vgl. (12)}],$$

also

$$\bar{I}_{(a)}^{(2\nu)} \leq \bar{I}_{(s_0)}^{(2\nu)},$$

wenn  $a$  ein *beliebiger* Punkt *außerhalb*  $\sigma_0$  und  $s_0$  ein *geeignet* gewählter Punkt *auf*  $\sigma_0$  ist. — Q. e. d.

Nach diesen Feststellungen (15i) und (15a) liefert uns nun (13) sofort die Resultate

$$(16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (W_i^{(n)} - W_i^{(n+2)}) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (W_a^{(n)} - W_a^{(n+2)}) = 0$$

und zwar wieder *gleichmäßig* in den Gebieten  $\mathfrak{S} + \sigma$  bzw.  $\mathfrak{A} + \sigma$ .

Da aber nach dem allgemeinen auf S. 451 gegebenen Schema ( $\mathfrak{N}_0$ )  $W^{(n)} - W^{(n+2)}$  das Potential einer Doppelbelegung vom Momente  $\frac{1}{2\pi}(f^{(n)} - f^{(n+2)})$  ist, und das Moment stets die halbe Differenz der innern und äußern Randwerte des Potentials darstellt, so folgt aus (16), daß auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_s^{(n)} - f_s^{(n+2)}) = 0$$

ist, und zwar *gleichmäßig* für alle Lagen von  $s$  auf  $\sigma$ .

Nun sind aber die Werte  $f_s^{(n)} - f_s^{(n+2)}$  zugleich die inneren Randwerte des Potentials  $W_i^{(n)} - W_i^{(n+1)}$  und die (negativen) äußeren von  $W_a^{(n)} + W_a^{(n+1)}$  [vgl. Schema ( $\mathfrak{N}_0$ )], und da unter diesen Randwerten bekanntlich die größten und kleinsten *aller* Werte anzutreffen sind, so gilt also bei beliebiger Lage von  $i$  bzw.  $a$

$$(17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (W_i^{(n)} - W_i^{(n+1)}) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (W_a^{(n)} + W_a^{(n+1)}) = 0,$$

und zwar wieder *gleichmäßig in den Gebieten*  $\mathfrak{S} + \sigma$  bzw.  $\mathfrak{A} + \sigma$ .

Damit ist zunächst der Nachweis erbracht, daß wenigstens *die Glieder der Neumannschen Reihen* ( $\mathfrak{N}_1$ ) *zur 0 abnehmen* — und zwar weit einfacher und direkter als ich diesen Beweis noch in meinen Studien [S. 113] geführt habe, und vor allem erscheint erst jetzt die Konvergenz lediglich bedingt durch rein geometrische Größen und nicht mehr, wie früher, abhängig von den zufällig vorgeschriebenen Randwerten.

Wir wollen dieses bisher rein qualitative Resultat (17) nun zunächst noch benutzen, um die sich ergebenden *Abschätzungen* möglichst einfach zu gestalten: Wir wenden es auf die Polarpotentiale an und lassen Pol und Aufpunkt zusammenfallen. Dann folgt, daß bei festgehaltenem  $i$  oder  $a$  sicher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (W_{(i)i}^{(n)} - W_{(i)i}^{(n+1)}) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (W_{(a)a}^{(n)} + W_{(a)a}^{(n+1)}) = 0$$

ist. Nun ergibt sich aber durch Spezialisierung aus (7) [vgl. auch (7') und (8')]:

$$4\pi (W_{(i)i}^{(2\nu)} - W_{(i)i}^{(2\nu+1)}) = l_{(i)}^{(2\nu)} \quad \text{und} \quad -4\pi (W_{(a)a}^{(2\nu)} + W_{(a)a}^{(2\nu+1)}) = l_{(a)}^{(2\nu)}$$

[Stud. S. 125], d. h. gleich den *über den Totalraum*  $\mathfrak{T} = \mathfrak{S} + \mathfrak{A}$  *hinstreckten Polarintegralen*, also auch diese nähern sich mit wachsendem

Index der 0, und zwar, da die Abnahme monoton erfolgt [vgl. (3)], auch *gleichmäßig in allen Punkten von  $\mathfrak{S} + \sigma$  bzw.  $\mathfrak{A} + \sigma$ :*

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} l_{(i)}^{(2\nu)} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} l_{(a)}^{(2\nu)} = 0.$$

Setzen wir also immer noch den größten Wert von  $l_{(o)}^{(2\nu-4)}$  bei beliebiger Lage des Poles in  $\mathfrak{S} + \sigma$  oder  $\mathfrak{A} + \sigma$ , das

$$(18) \quad \text{Max. } l_{(o)}^{(2\nu-4)} = (4\pi \varepsilon_\nu)^2 \quad (\nu \geq 3),$$

so bilden *die  $\varepsilon_\nu$  eine Reihe rein geometrischer, d. h. allein der Fläche  $\sigma$  eigentümlicher, Konstanten, die mit wachsendem  $\nu$  monoton gegen 0 abnehmen*

$$(18') \quad \varepsilon_3 \geq \varepsilon_4 \geq \varepsilon_5 \geq \dots \rightarrow 0$$

und ihre Einführung gestattet dann, den Abschätzungen (9) (für  $\kappa = 2$ ,  $\kappa + \lambda = n$ ) die folgende Form zu geben:

$$(17') \quad \left. \begin{array}{l} \text{abs}(W_i^{(n)} - W_i^{(n+1)}) \\ \text{abs}(W_a^{(n)} + W_a^{(n+1)}) \end{array} \right\} \leq \sqrt{J^{IV}} \cdot \varepsilon_n,$$

aus der jetzt besonders deutlich der *rein geometrische Charakter der Konvergenz* dieser Glieder gegen 0 ersichtlich ist.

## § 2.

### Fortsetzung. Insbesondere über die Konvergenzeigenschaften der Robinschen Potentiale.

Zu erheblich weitergehenden Resultaten führte mich die Methode der Polarfunktionen im Gebiete der Robinschen Methode zur Lösung der zweiten Randwertaufgabe [vgl. Stud. S. 114]. Nun gilt es aber noch, unter Beibehaltung des Grundgedankens, die früher gegebenen Beweise so umzugestalten, daß auch hier der geometrische Charakter der Konvergenz deutlich hervortritt. Daher wollen wir uns zunächst nur mit den *Polarpotentialen*  $V_{(o)}^{(n)}$  der Robinschen Methode [vgl. oben (8)] als rein geometrischen Funktionen beschäftigen.

Wir wenden die im Gebiete der Robinschen Potentiale gefundenen Abschätzungen (9) zunächst auf den Fall an, daß  $\lambda = 1$  ist und die vorgeschriebenen Werte

$$g_s = \gamma_{(i)s} - \gamma_{(i)s}^{(2q)} \quad (q \text{ beliebig} = 1, 2, 3, \dots)$$

sind, wo  $i$  ein an sich beliebiger, aber zunächst immer *fest* gedachter innerer Punkt sei. Ersetzt man dann noch  $\Lambda_{(i)}''$  und  $\Lambda_{(a)}''$  durch den zu großen Wert  $(4\pi B_g)^2$  [vgl. (10)], entsprechend dem in meinen Studien

eingeschlagenen Wege, so erhält man unabhängig von der Lage von  $i$  oder  $a$ :

$$(19) \quad \left. \begin{aligned} & \text{abs} \left( \mathbf{V}_{(t) i}^{(n)} - \mathbf{V}_{(t) i}^{(n+2q)} \right) + \left( \mathbf{V}_{(t) i}^{(n+1)} - \mathbf{V}_{(t) i}^{(n+2q+1)} \right) \\ & \text{abs} \left( \left( \mathbf{V}_{(t) a}^{(n)} - \mathbf{V}_{(t) a}^{(n+2q)} \right) - \left( \mathbf{V}_{(t) a}^{(n+1)} - \mathbf{V}_{(t) a}^{(n+2q+1)} \right) \right) \end{aligned} \right\} \leq B_g \sqrt{L^{(2n-2)} (\gamma_{(t)} - \gamma_{(t)}^{(2q)})}.$$

Da aber nach dem Bildungsgesetz (2r) der Größen  $L^{(n)}$  ganz *allgemein*

$$\begin{aligned} L^{(2\nu)}(g - g^{(2q)}) &= L^{(2\nu)} - 2L^{(2\nu+2q)} + L^{(2\nu+4q)} \\ &= (L^{(2\nu)} - L^{(2\nu+2q)}) - (L^{(2\nu+2q)} - L^{(2\nu+4q)}), \end{aligned}$$

also nach (3) und (3')

$$< L^{(2\nu)} - L^{(2\nu+2q)} < L^{(2\nu)} - \lim_{\nu \rightarrow \infty} L^{(2\nu)}$$

ist, und daher *gleichmäßig für alle positiven  $q$* :

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} L^{(2\nu)}(g - g^{(2q)}) = 0,$$

so folgt aus den Abschätzungen (19), daß die Ausdrücke links gleichmäßig für alle Punkte  $i$  von  $\mathfrak{S} + \sigma$  bzw.  $a$  von  $\mathfrak{A} + \sigma$  zur 0 konvergieren. In Punkten  $s$  auf  $\sigma$  gehen demnach *beide* Ausdrücke gegen 0, und daraus folgt durch Kombination, daß auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{V}_{(t) s}^{(n)} - \mathbf{V}_{(t) s}^{(n+2q)}) = 0 \quad \text{gleichmäßig für alle } s \text{ auf } \sigma \text{ und beliebige positive } q.$$

Da aber unter diesen *Randwerten* der Potentiale  $\mathbf{V}_{(t)}^{(n)} - \mathbf{V}_{(t)}^{(n+2q)}$  die absolut größten *aller* Werte vorkommen, so folgt daraus weiter, daß *sich die Potentiale  $\mathbf{V}_{(t) p}^{(n)}$  mit geradem und ebenso die mit ungeradem Index gleichmäßig im ganzen Raum je einer Konvergenzfunktion nähern*<sup>9)</sup>. Aus diesem Sachverhalt ergibt sich dann aber, wie ich in den Studien S. 100 bis 105 gezeigt habe, daß diese beiden Funktionen zunächst *übereinstimmen*,

<sup>9)</sup> Die *Tatsache* der Konvergenz an sich folgt leicht auch so: Wenn wir beachten, daß bei innerer Lage des Poles die Polarpotentiale der Neumannschen und Robinschen Methode im ganzen Innengebiet identisch sind ( $\mathbf{W}_{(t) i}^{(n)} = \mathbf{V}_{(t) i}^{(n)}$ , Stud. S. 121), so ist nach (11) und (12) z. B. für gerades  $\kappa + \lambda = n = 2\nu$

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{V}_{(t) i}^{(n)} - \mathbf{V}_{(t) i}^{(n+2)} \right| = \left| \mathbf{W}_{(t) i}^{(n)} - \mathbf{W}_{(t) i}^{(n+2)} \right| \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \mathbf{W}_{(t)}^{(\nu)}, \mathbf{W}_{(t)}^{(\nu)} \right]_{\mathfrak{S}} \leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\overline{\mathbf{I}_{(t)}^{(2\nu)}} \overline{\mathbf{I}_{(t)}^{(2\nu)}}} \leq \frac{1}{4\pi} (\overline{\mathbf{I}_{(t)}^{(2\nu)}} + \overline{\mathbf{I}_{(t)}^{(2\nu)}}), \end{aligned}$$

und da nach (14i) auch  $\sum \overline{\mathbf{I}_{(t)}^{(2\nu)}}$  konvergiert, so folgt die Behauptung durch Anwendung dieser letzteren Formel auf die Fälle  $n, n+2, n+4$  usw. und Addition — doch ist es mir so nicht gelungen, auch die *Gleichmäßigkeit* der Konvergenz zu beweisen: der Dirichlet'sche Satz versagt hier, weil die Stetigkeit der Konvergenzwerte von  $\sum \overline{\mathbf{I}_{(t)}^{(2\nu)}}$  (d. i. nach (14i) im wesentlichen von  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \overline{\mathbf{I}_{(t)}^{(2\nu)}}$ ), wenigstens zunächst, noch nicht nachgewiesen ist.

dann aber auch, daß sie im Innengebiete  $\mathfrak{S}$  konstant sein müssen<sup>10)</sup>, doch könnte der Wert dieser Konstanten nach dem Bisherigen noch von der Wahl des Poles  $i$  abhängen. Wir setzen daher zunächst

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_{(i) i}^{(n)} = C_i.$$

Nach dem allgemeinen Reziprozitätsgesetze der Polarpotentiale:

$$V_{(i_1) i_2}^{(n)} = V_{(i_2) i_1}^{(n)} \quad [\text{Stud. S. 123}]$$

folgt aber, daß  $C_{(i_1)} = C_{(i_2)}$  ist, also dieser konstante Wert von der spezielleren Lage des (inneren) Poles unabhängig und mithin lediglich von den geometrischen Verhältnissen der Fläche  $\sigma$  abhängig sein muß. Deshalb setzen wir:

$$(20\ i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V_{(i) i}^{(n)} = 2 \Gamma_g \quad \text{gleichmäßig für alle } i \text{ in } \mathfrak{S} + \sigma \text{ bei festem } i.$$

Für das Außengebiet kann man entsprechende Betrachtungen anstellen, ja hier ist man sogar in der Lage, den Wert der zugehörigen Konvergenzkonstanten sogleich zu 0 anzugeben (weil nämlich schon alle einzelnen  $V_{(a)}^{(n)}$  als Potentiale von Belegungen mit verschwindender Gesamtmasse den Wert 0 annehmen müssen). Somit folgt

$$(20\ a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V_{(a) a}^{(n)} = 0 \quad \text{gleichmäßig für alle } a \text{ in } \mathfrak{A} + \sigma \text{ bei festem } a.$$

Nachträglich läßt sich nun auch zeigen, daß diese Konvergenzen (20 i) und (20 a) auch in  $i$  und  $a$  (!) gleichmäßig sind: Zunächst folgt aus (7) und (8') durch Spezialisierung ( $g_s = \gamma_{(i) s}$  bzw.  $g_s = \gamma_{(a) s}$ )

$$\Lambda_{(i)}^{(n)} = 4 \pi (V_{(i) i}^{(n)} + V_{(i) i}^{(n+1)}) \quad \text{und} \quad \Lambda_{(a)}^{(n)} = -4 \pi (V_{(a) a}^{(n)} - V_{(a) a}^{(n+1)}),$$

und daher weiter nach (20) für gerades  $n = 2\nu$ , zunächst bei festem  $i$  bzw.  $a$ :

$$(21) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \Lambda_{(i)}^{(2\nu)} = 16 \pi \Gamma_g \quad \text{und} \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \Lambda_{(a)}^{(2\nu)} = 0.$$

Da sich aber diese stetigen Funktionen  $\Lambda_{(i)}^{(2\nu)}$  und  $\Lambda_{(a)}^{(2\nu)}$  monoton den angegebenen stetigen Grenzfunktionen (Konstanten) nähern [vgl. (3)], so ist auch diese Konvergenz nach Dini wieder eine gleichmäßige für alle

<sup>10)</sup> Das erstere, daß nämlich jene beiden Konvergenzfunktionen gleich sind, folgt, zunächst wenigstens für das Innengebiet (und daraus dann leicht auch für den ganzen Raum), auch aus dem Hauptresultat von § 1. Denn nach (17) ist

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} (V_{(i) i}^{(2\nu)} - V_{(i) i}^{(2\nu+1)}) \equiv \lim_{\nu \rightarrow \infty} (W_{(i) i}^{(2\nu)} - W_{(i) i}^{(2\nu+1)}) = 0, \quad \text{also:} \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} V_{(i) i}^{(2\nu+1)} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} V_{(i) i}^{(2\nu)}$$

– doch zum Beweise der Konstanz kann ich vorläufig die in meinen Studien benutzten Sätze von der Konstanz des Momentes einer Doppelbelegung [vgl. daselbst S. 50–51] noch nicht entbehren.

Lagen von  $i$  bzw.  $a$ , und wir können wieder *eine monoton zur 0 abnehmende Folge von rein geometrischen Größen*  $\eta_2, \eta_3$  usw. einführen, indem wir allgemein setzen:

$$(22) \quad (4\pi\eta_\nu)^2 = \text{der größeren der Zahlen} \begin{cases} \text{Max. } (\Lambda_{(i)}^{(2\nu-2)} - 16\pi\Gamma_g) & \text{in } \mathfrak{S} + \sigma, \\ \text{Max. } \Lambda_{(a)}^{(2\nu-2)} & \text{in } \mathfrak{A} - \sigma, \end{cases}$$

so daß dann also

$$(22') \quad \eta_2 \geq \eta_3 \geq \eta_4 \geq \dots \rightarrow 0.$$

Nun enthalten aber die an (19) anknüpfenden Betrachtungen (bzw. die entsprechenden fürs Außengebiet) in Verbindung mit (21) die Abschätzungen:

$$\text{abs } (\mathbf{V}_{(i)}^{(n)} - 2\Gamma_g) \leq B_g \sqrt{\Lambda_{(i)}^{(2n-2)} - 16\pi\Gamma_g} \quad \text{und} \quad \text{abs } \mathbf{V}_{(a)}^{(n)} \leq B_g \sqrt{\Lambda_{(a)}^{(2n-2)}},$$

und daher ergeben sich die Formeln

$$(23) \quad \left. \begin{array}{l} \text{abs } (\mathbf{V}_{(i)}^{(n)} - 2\Gamma_g) \\ \text{abs } \mathbf{V}_{(a)}^{(n)} \end{array} \right\} \leq 4\pi B_g \cdot \eta_n,$$

aus denen jetzt *die Gleichmäßigkeit der in (20i) und (20a) angegebenen Konvergenzen in  $i$  und  $i$  bzw. in  $a$  und  $a$*  unmittelbar ersichtlich ist:

$$(20') \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{cases} \mathbf{V}_{(i)}^{(n)} = 2\Gamma_g & \text{gleichmäßig für alle } i \text{ und } i \text{ von } \mathfrak{S} + \sigma, \\ \mathbf{V}_{(a)}^{(n)} = 0 & \text{" " " " } a \text{ " } a \text{ " } \mathfrak{A} + \sigma. \end{cases}$$

Bevor wir dieses *Hauptresultat über die Polarpotentiale* auf die allgemeinen Potentiale der Robinschen Methode übertragen, wollen wir jetzt noch eine für das Folgende nützliche Anwendung machen: Wir bilden die Schwarz-Poincaréschen Integrale  $L^{(n)}$  [vgl. (2r)] für den Fall, daß die vorgegebenen Randwerte

$$g_s = \gamma_{(o)s} - \gamma_{(o)s}^{(q)} \quad (q = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

sind, wo  $o$  und  $o$  zwei beliebige gleichartige, d. h. beides innere oder beides äußere Punkte sind. Dann ergibt sich, da allgemein nach (2r) und (4)

$$\begin{aligned} L^{(2\nu)}(\gamma_{(o)} - \gamma_{(o)}^{(q)}) &= L^{(2\nu)}(\gamma_{(o)}) - 2M^{(2\nu+q)}(\gamma_{(o)}, \gamma_{(o)}) + L^{(2\nu+2q)}(\gamma_{(o)}) \\ &= M_{(o)}^{(2\nu)}(\gamma_{(o)}) - 2M_{(o)}^{(2\nu+q)}(\gamma_{(o)}) + M_{(o)}^{(2\nu+2q)}(\gamma_{(o)}) \end{aligned}$$

ist, mit Rücksicht auf die Formeln (7i) bzw. (7a):

$$\begin{aligned} L^{(2\nu)}(\gamma_{(i)} - \gamma_{(i)}^{(q)}) &= 4\pi \left[ (\mathbf{V}_{(i)}^{(2\nu)} + \mathbf{V}_{(i)}^{(2\nu+1)} - 4\Gamma_g) \right. \\ &\quad \left. - 2(\mathbf{V}_{(i)}^{(2\nu+q)} + \mathbf{V}_{(i)}^{(2\nu+q+1)} - 4\Gamma_g) + (\mathbf{V}_{(i)}^{(2\nu+2q)} + \mathbf{V}_{(i)}^{(2\nu+2q+1)} - 4\Gamma_g) \right] \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} L^{(2\nu)}(\gamma_{(a)} - \gamma_{(a)}^{(q)}) &= -4\pi \left[ (\mathbf{V}_{(a)}^{(2\nu)} - \mathbf{V}_{(a)}^{(2\nu+1)}) \right. \\ &\quad \left. - 2(\mathbf{V}_{(a)}^{(2\nu+q)} - \mathbf{V}_{(a)}^{(2\nu+q+1)}) + (\mathbf{V}_{(a)}^{(2\nu+2q)} - \mathbf{V}_{(a)}^{(2\nu+2q+1)}) \right], \end{aligned}$$

und daraus folgt nach (23), wenn wir bekannte Regeln über absolute Beträge anwenden:

$$(24) \quad \left. \begin{aligned} L^{(2\nu)}(\gamma_{(i)} - \gamma_{(i)}^{(q)}) \\ L^{(2\nu)}(\gamma_{(a)} - \gamma_{(a)}^{(q)}) \end{aligned} \right\} \leq 4\pi \cdot 8 \cdot 4\pi B_g \eta_{2\nu} < (4\pi)^2 \cdot 9B_g \eta_{2\nu}.$$

Die Größen links konvergieren also mit wachsendem  $\nu$  *gleichmäßig für alle Lagen von  $i$  und  $i$  in  $\mathfrak{S} + \sigma$  bzw. von  $a$  und  $a$  in  $\mathfrak{A} + \sigma$  (unabhängig von  $q$ )* gegen 0.

Nach diesen Feststellungen wenden wir uns jetzt den *allgemeinen Robinschen Potentialen*  $V, V', V''$  usw. zu, die von *beliebigen* (stetigen) Randwerten  $g_s$  ausgehend gebildet zu denken sind [vgl. das Schema ( $\mathfrak{R}_0$ )]. Wir bilden mit ihnen das Integral

$$M^{(n)}(g, \gamma_{(o)} - \gamma_{(o)}^{(q)}) = M_{(o)}^{(n)}(g) - M_{(o)}^{(n+q)}(g) \quad [\text{vgl. (4) und (6)}].$$

Dieses hat nach (7i) bzw. (7a) den Wert

$$\pm 4\pi \left( (V_o^{(n)} \pm V_o^{(n+1)}) - (V_o^{(n+q)} \pm V_o^{(n+q+1)}) \right),$$

wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem die Punkte  $o$  und  $o$  innerhalb oder außerhalb  $\sigma$  liegen. Die Schwarzsche Ungleichung  $\text{abs } M^{(n)}(g, g) \leq \sqrt{L''(g) \cdot L^{(2n-2)}(g)}$  liefert uns also unter Rücksicht auf (24) die Abschätzungen:

$$\left. \begin{aligned} \text{abs} \left( (V_i^{(n)} + V_i^{(n+1)}) - (V_i^{(n+q)} + V_i^{(n+q+1)}) \right) \\ \text{abs} \left( (V_a^{(n)} - V_a^{(n+1)}) - (V_a^{(n+q)} - V_a^{(n+q+1)}) \right) \end{aligned} \right\} \leq \sqrt{L''(g)} \cdot \sqrt{9B_g \eta_{2n-2}}.$$

Für *Randpunkte*  $s$  und  $\bar{s}$  auf  $\sigma$ , für die beide Abschätzungen gleichzeitig zutreffen, gilt daher weiter

$$(25) \quad \text{abs} (V_s^{(n)} - V_{\bar{s}}^{(n+q)}) < 3 \sqrt{B_g} \sqrt{L''(g)} \cdot \sqrt{\eta_{2n-2}},$$

und wegen des letzten Faktors [vgl. (22')] folgt daher zunächst

$$(25') \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (V_s^{(n)} - V_{\bar{s}}^{(n+q)}) = 0 \quad \text{gleichmäßig für alle } s \text{ und } \bar{s} \text{ auf } \sigma \text{ (bei beliebigem } q).$$

Nun liegen aber bei Potentialen von Belegungen der Fläche  $\sigma$  sowohl der größte wie der kleinste aller *innerhalb* oder auf  $\sigma$  vorkommenden Werte am Rande; daher überträgt sich dieses letzte Resultat (25') sofort von Randpunkten auch auf beliebige *innere* Punkte  $i$  und  $i$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (V_i^{(n)} - V_i^{(n+q)}) = 0 \quad \text{gleichmäßig für alle } i \text{ und } i \text{ (bei beliebigem } q).$$

<sup>11)</sup> An sich könnten wir unter gleichzeitiger Erhöhung des zweiten Index den ersten auf 0 herabsetzen, also  $L$  statt  $L''$  schreiben, da auch bereits das Integral  $L(g)$  stets einen bestimmten Sinn hat [Stud. S. 69 u. 73]. Wegen der Anwendungen in § 4 dürfte aber unser obiges Vorgehen den Vorzug verdienen.

Diese Formel ist aber der analytische Ausdruck für die Tatsache, daß *sich die Robinschen Potentiale  $V^{(n)}$  im ganzen Gebiete  $\mathfrak{S} + \sigma$  gleichmäßig einem konstanten Werte nähern:*

$$(26i) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V_i^{(n)} = C \quad \text{gleichmäßig in } \mathfrak{S} + \sigma.$$

Auf das *Außengebiet*  $\mathfrak{A}$  kann man aus (25') nicht ohne weiteres entsprechende Rückschlüsse ziehen. Da müssen wir uns vielmehr auf den Fall  $\mathfrak{s} = s$  (und später  $\mathfrak{a} = a$ ) beschränken. Dann allerdings können wir die Differenz  $V_s^{(n)} - V_s^{(n+q)}$  ansehen als die Randwerte des Potentials einer Flächenbelegung *von der Gesamtmasse 0* [vgl. (R'\_0) S. 452], und erst bei diesen sind wir dann wieder sicher, daß *beide* Extremwerte (in  $\mathfrak{A} + \sigma$ ) auf dem Rande  $\sigma$  liegen, und daß daher aus (25') auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (V_a^{(n)} - V_a^{(n+q)}) = 0 \quad \text{gleichmäßig für alle } a \text{ (bei beliebigem } q)$$

folgt, oder, daß *sich die Potentiale  $V^{(n)}$  gleichmäßig im ganzen Gebiete  $\mathfrak{A} + \sigma$  einer bestimmten Konvergenzfunktion nähern:*

$$(26a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} V_a^{(n)} = F_a \quad \text{gleichmäßig in } \mathfrak{A} + \sigma.$$

Von dieser in (26i) und (26a) auftretenden Konvergenzkonstanten  $C$  bzw. Konvergenzfunktion  $F_a$  (die wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz bei  $\sigma$  stetig ineinander übergehen müssen) läßt sich dann leicht beweisen [vgl. Stud. S. 105—112 u. Beitr. S. 172], daß sie von der Natur der ursprünglich vorgeschriebenen Randwerte  $g_s$  nur insofern abhängen, als sie proportional mit der Masse  $m = \frac{1}{2\pi} \int g_a d\sigma$  der Robinschen Flächenbelegungen sind:

$$(26') \quad C = m \cdot \Gamma_g, \quad F_a = m \cdot \Pi_a,$$

während der andere Faktor die schon oben eingeführte geometrische Konstante  $\Gamma_g$  bzw. eine rein geometrische, nur von der Natur der Fläche  $\sigma$  abhängige Funktion  $\Pi_a$  ist.

Durch Zusammenfassung der Formeln (25) und (26) ergibt sich dann noch bezüglich des *Grades der Annäherung*:

$$(27) \quad \left. \begin{array}{l} \text{abs}(V_i^{(n)} - m \cdot \Gamma_g) \\ \text{abs}(V_a^{(n)} - m \cdot \Pi_a) \end{array} \right\} < 3 \sqrt{B_g} \sqrt{L''(g)} \sqrt{\eta_{2n-2}},$$

und von der hier auftretenden Funktion  $\Pi_a$ , die bei  $\sigma$  stetig in  $\Gamma_g$  übergeht, läßt sich leicht noch zeigen [vgl. Stud. S. 111], daß sie alle Eigenschaften eines Potentials aufweist. — *Es nähern sich also die Potentiale  $V^{(n)}$  im ganzen Raume  $\mathfrak{S} + \mathfrak{A}$  einer Funktion, die alle Eigenschaften des elektrostatischen Potentials besitzt, d. h. des Potentials einer auf  $\sigma$  im*

Gleichgewicht befindlichen elektrischen Ladung von der Masse  $m$  — nur eben das eine, daß sich diese Funktion wirklich als Potential einer auf  $\sigma$  ausgebreiteten Belegung darstellen läßt — das ergibt sich hier vorläufig nicht.

Die Formeln (27) lassen wieder den geometrischen Charakter der Konvergenz deutlich hervortreten [vgl. (22)].

### § 3.

#### Über die natürliche Belegung einer geschlossenen Fläche.

Daß jene Konvergenzfunktion  $m \cdot \Pi_a$  nun tatsächlich das Potential einer einfachen Belegung der Fläche  $\sigma$  ist, oder, was dasselbe ist, daß sie bestimmte normale Ableitungen besitzt, oder auch: daß nicht nur die Potentiale  $V, V', V''$  usw. einer bestimmten Funktion zustreben, sondern auch die Dichtigkeiten der aufeinanderfolgenden Robinschen Belegungen, oder die Flächenfunktionen  $g, g', g''$  usw. sich einer Grenzfunktion nähern — diesen Nachweis habe ich im Anhang zu meinen „Beiträgen“ geführt (S. 172—188) —, dort zwar nur im Gebiete des logarithmischen Potentials in der Ebene, doch gelten alle Schlüsse fast unverändert auch bei räumlichen Betrachtungen. — Diesen Beweis will ich nun hier nochmals in seinen wesentlichen Zügen auseinandersetzen, ihn dabei aber sogleich wieder so modifizieren, daß der geometrische Charakter der Konvergenz deutlich erkennbar wird.

Es handelt sich also darum, aus dem Verhalten der Werte der Potentiale  $V, V', V''$  usw. selber Rückschlüsse zu ziehen auf ihre *normalen Ableitungen*. Zu diesem Zwecke bediene ich mich einer Methode, die man zutreffend etwa als die Methode der berührenden Kreise oder, hier im Raume, der berührenden Kugeln bezeichnen könnte. Um nämlich an einer Stelle  $s$  der im wesentlichen willkürlichen Fläche  $\sigma$  die normalen Ableitungen zu untersuchen, denke ich mir zwei die Fläche  $\sigma$  daselbst außen und innen berührende Kugeln konstruiert und untersuche, wie sich die radialen Ableitungen der *durch ihre Werte auf diesen Kugeln* (mittels des Poissonschen Integrales) *ausgedrückten Potentiale*  $V, V', V''$  usw. bei Annäherung an  $s$  verhalten.

Nun aber genügt bekanntlich *allein die Stetigkeit* der Potentialwerte auf  $\sigma$  *noch nicht* bei jenem Prozesse, die *Existenz* von Grenzwerten, eben der zu untersuchenden normalen Ableitungen, zu verbürgen; es müssen die Werte auf  $\sigma$  vielmehr noch *verschärften Stetigkeitsbedingungen* (ähnlich den bekannten Lipschitzschen Bedingungen) genügen. — Eine solche hinreichende Bedingung ist die folgende: Wenn es sich um die normalen Ableitungen des Potentials  $U$  einer einfachen Flächenbelegung von  $\sigma$

$$U_p = \int \kappa_\sigma \frac{d\sigma}{E_p} \quad (\kappa \text{ stetig auf } \sigma)$$

in einem Punkte  $s$  der Fläche  $\sigma$  handelt, konstruiere man um die in  $s$  errichtete Flächennormale einen kleinen Kreiszyylinder vom Radius  $r$  und betrachte die Randwerte von  $U$ , die auf der Durchdringungskurve zwischen  $\sigma$  und diesem Zylinder anzutreffen sind, als Funktion des Azimutes  $\vartheta$  der Zylindermeridianebenen und bilde unter Zugrundelegung dieser Auffassung

$$\text{das „peripherische Mittel“ } \frac{1}{2\pi} \int_{(r)} U d\vartheta.$$

Dieses wird mit abnehmendem  $r$ , da  $U$  stetig ist, gegen den Wert  $U_s$  konvergieren. Setzen wir aber voraus, daß diese Konvergenz sogar rascher als die von  $r^{\frac{3}{2}}$  gegen 0 vor sich geht, daß also eine Beziehung von der Form

$$\text{abs} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{(r)} U d\vartheta - U_s \right\} \leq A \cdot r^{\frac{3}{2}}$$

besteht<sup>12)</sup>, so sagen wir, die Randwerte von  $U$  erfüllen die „peripherische Bedingung“, und diese ist nach Liapounoff hinreichend für die Existenz der normalen Ableitungen — ja aber weiter habe ich (eben mittelst der Methode der berührenden Kugeln) bewiesen, daß sich, wenn diese Bedingung erfüllt ist, diese normalen Ableitungen abschätzen lassen durch die Schwankung  $\Delta(U)$  der Funktion  $U$ <sup>13)</sup>, allerdings nicht durchweg durch ihre erste, aber mindestens durch ihre  $\frac{1}{4}$ -te Potenz. Es gilt dann nämlich, gleichgültig ob wir die normale Ableitung außen oder innen bilden, die Abschätzung

$$(1) \quad \text{abs} \left( \frac{\partial U}{\partial \nu_s} \right) \leq a_g \Delta(U) + b_g (A + \mathfrak{M}(\kappa))^{\frac{3}{2}} \cdot (\Delta(U))^{\frac{1}{4}} \quad [\text{Beitr. S. 178 u. 181}],$$

wo das Symbol  $\mathfrak{M}$ , wie stets im folgenden den absolut größten Wert der betreffenden Funktion bedeutet. — Diese Formel bringt die an sich so einleuchtende Tatsache zum Ausdruck, daß mit zur 0 abnehmender Schwankung  $\Delta(U)$  (wenn sich also  $U$  im ganzen Raume mehr und mehr der 0 nähert), auch die normalen Ableitungen von  $U$  sich der 0 nähern.

Von dieser Formel (1) wollen wir nun die Anwendung auf die Robinschen Potentiale  $V, V', V''$  usw. machen. Dann müssen wir zunächst zusehen,

<sup>12)</sup> Es würde genügen, anstatt  $r^{\frac{3}{2}}$  zu schreiben  $r^{1+\delta}$ , wenn  $\delta$  eine beliebig kleine, aber positive Größe ist.

<sup>13)</sup> Zunächst bedeutet  $\Delta(U)$  die Schwankung in einem Gebiete, wie es von der Gesamtheit aller benutzten Kugeln erfüllt wird, doch kann man hier bei Betrachtungen im Raume auch die Schwankung im Gesamtraume darunter verstehen — während in der Ebene wegen des Verhaltens logarithmischer Potentiale im Unendlichen tatsächlich eine Beschränkung auf ein kleineres Gebiet beibehalten werden muß [vgl. Beitr. S. 183].

ob deren Randwerte die peripherische Bedingung erfüllen: Nun stellen die *Randwerte*  $V_s, V'_s, V''_s$  usw. sukzessiver Robinscher Potentiale aufeinanderfolgende Neumannsche Flächenfunktionen dar [Stud. S. 66], sind also den Funktionen  $f, f', f''$  usw. vergleichbar. Von diesen Funktionen ist aber bekannt, daß, wenn die erste nur stetig ist, die nächste bereits „regulär stetig“ ist, d. h. die verschärfte (Lipschitzsche) Stetigkeitsbedingung

$$\text{abs}(f'_{s_1} - f'_{s_2}) = d \cdot \sqrt{E_{12}}^{14)} \quad \text{mit} \quad d = \mathfrak{b}_g \mathfrak{M}(f)$$

befriedigt [Stud. S. 34], und das genügt dann, für die wieder nächstfolgende Funktion  $f''$  den Nachweis für die Erfüllung der peripherischen Bedingung zu erbringen:

$$\text{abs} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int f'' d\vartheta - f''_s \right\} \leq A \cdot \varrho^{\frac{3}{2}} \quad \text{mit} \quad A = e_g \cdot d = c_g \mathfrak{M}(f) \quad [\text{Beitr. S. 42}].$$

Wir vergleichen demnach die Randwerte von  $V^{(n)}$  unseren Werten  $f_s$ , so daß also die Randwerte von  $V^{(n+2)}$  den Werten  $f''_s$  oder den Werten  $U_s$  in unseren obigen Ausführungen entsprechen; dann folgt nach Formel (1):

$$\text{abs} \left( \frac{\partial V^{(n+2)}}{\partial \nu_s} \right) \leq \left[ a_g (\Delta(V^{(n+2)}))^{\frac{3}{2}} + \mathfrak{b}_g \left( c_g \mathfrak{M}(V^{(n)}) + \frac{\mathfrak{f}_g}{2\pi} \mathfrak{M}(g^{(n+2)}) \right)^{\frac{3}{2}} (\Delta(V^{(n+2)}))^{\frac{1}{2}} \right].$$

Da aber aus dem Bildungsgesetz der Potentiale  $V, V', V''$  usw. [vgl. (9<sub>0</sub>) S. 452] leicht Abschätzungen von der Form folgen:

$$\bullet \quad \mathfrak{M}(V^{(n+2)}) \leq C_g \cdot \mathfrak{M}(g^{(n+2)}) \leq C_g a_g^2 \mathfrak{M}(g^{(n)}),$$

und daher sicher (als Differenz zweier Werte)

$$\Delta(V^{(n+2)}) \leq 2 C_g a_g^2 \mathfrak{M}(g^{(n)})$$

ist, so ergibt sich schließlich für die normalen Ableitungen die folgende Abschätzung:

$$\text{abs} \left( \frac{\partial V^{(n+2)}}{\partial \nu_s} \right) \leq \left[ a_g (2 C_g a_g^2)^{\frac{3}{2}} + \mathfrak{b}_g \left( c_g C_g + \frac{\mathfrak{f}_g}{2\pi} a_g^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right] (\mathfrak{M}(g^{(n)}))^{\frac{3}{2}} (\Delta(V^{(n+2)}))^{\frac{1}{2}},$$

oder bei Zusammenfassung aller geometrischen Konstanten in eine neue<sup>15)</sup>:

$$(2) \quad \text{abs} \left( \frac{\partial V^{(n+2)}}{\partial \nu_s} \right) \leq \mathfrak{D}_g (\mathfrak{M}(g^{(n)}))^{\frac{3}{2}} (\Delta(V^{(n+2)}))^{\frac{1}{2}},$$

<sup>14)</sup>  $E_{12}$  ist dabei die Entfernung der Punkte  $s_1$  und  $s_2$ . — An Stelle von  $\sqrt{E_{12}} = E_{12}^{\frac{1}{2}}$  hätte man wieder eine beliebige noch niedrigere Potenz  $E_{12}^d$  verwenden können [vgl. Stud. S. 32 und oben Anmerkung <sup>12)</sup>].

<sup>15)</sup> Auf die Werte der durch die Marke gekennzeichneten geometrischen Konstanten kommt es im einzelnen überhaupt nicht an, sondern nur eben auf die Feststellung ihres rein geometrischen Charakters.

und zwar gilt diese Formel, wie schon bemerkt, in gleicher Weise für die innen wie die außen gebildete normale Ableitung, d. h. nach dem Schema ( $\mathfrak{H}_0$ ) in gleicher Weise für  $g_s^{(n+3)} - g_s^{(n+2)}$  wie für  $g_s^{(n+3)} + g_s^{(n+2)}$  und daher auch für die halbe Differenz, d. h. für  $g_s^{(n+2)}$ , und da überdies die Abschätzung noch von der Wahl des Punktes  $s$  auf  $\sigma$  unabhängig ist, bleibt sie auch noch für den absolut größten Wert von  $g_s^{(n+2)}$  gültig, so daß wir erhalten:

$$(3) \quad \mathfrak{M}^4(g^{(n+2)}) \leq \mathfrak{D}_g^4 \Delta(V^{(n+2)}) \mathfrak{M}^3(g^{(n)}).$$

Diese Beziehung zwischen den absolut größten Werten der verschiedenen Robinschen Flächenfunktionen  $g^{(n)}$  bildet nun die *Grundlage der weiteren Untersuchung*.

Zunächst folgt bezüglich des Faktors  $\Delta(V^{(n+2)})$  nach dem Schlußergebnis von § 2, daß sich diese Schwankung mehr und mehr der von  $m \cdot \Pi$ , d. i. dem Werte  $|m| \cdot \Gamma_g$  nähern muß, und zwar ergibt sich nach (27) S. 464 genauer

$$(4) \quad \begin{aligned} \Delta(V^{(n+2)}) &< |m| \cdot \Gamma_g + 6 \sqrt{B_g} \sqrt{L''(g)} \sqrt{\eta_{2n+2}} \\ &< |m| \cdot \Gamma_g + 6 \sqrt{B_g} \sqrt{L''(g)} \sqrt{\eta_2} \quad (\text{weil } \eta_{2n+2} \leq \eta_2 \text{ ist}). \end{aligned}$$

Nunmehr führen wir noch den absolut größten Wert der vorgegebenen Randwertfunktion  $g$ ,

$$\mathfrak{M}(g) = \mu$$

ein. Dann ist augenscheinlich

$$(5a) \quad |m| \leq \int \mu d\sigma = \frac{\sigma_g}{2\pi} \cdot \mu,$$

wenn  $\sigma_g$  die Größe der Fläche  $\sigma$ , ihr Areal, bedeutet. Ferner ist

$$L''(g) \equiv [V, V'']_{\mathfrak{x}} = 2 \int V_{\sigma} g_{\sigma}'' d\sigma \quad [\text{Stud. S. 73}]$$

und daraus folgt unter Benutzung schon oben eingeführter geometrischer Konstanten:

$$(5b) \quad L''(g) \leq 2 \int (C_g \cdot \mu) (q_g^2 \mu) d\sigma = 2 C_g \sigma_g q_g^2 \mu^2.$$

Diese beiden Abschätzungen (5a) und (5b) berücksichtigen wir in (4), um zu erhalten

$$\Delta(V^{(n+2)}) < \mathfrak{C}_g \cdot \mu \quad \left( \mathfrak{C}_g = \frac{\sigma_g}{2\pi} \Gamma_g + q_g \sqrt{2 C_g \sigma_g} \right),$$

und Formel (3) nimmt daher die Gestalt an:

$$(6) \quad \mathfrak{M}^4(g^{(n+2)}) < \mathfrak{F}_g \cdot \mu \mathfrak{M}^3(g^{(n)}) \quad (\mathfrak{F}_g = \mathfrak{D}_g^4 \cdot \mathfrak{C}_g).$$

Machen wir nun, um uns zunächst auf gerade Indizes zu beschränken, die Annahme, es sei einmal

$$\mathfrak{M}(g^{(2\nu)}) \geq 2 \mathfrak{F}_g \cdot \mu, \quad \text{so ist} \quad \left( \frac{\mathfrak{M}(g^{(2\nu+2)})}{\mathfrak{M}(g^{(2\nu)})} \right)^4 < \frac{\mathfrak{F}_g \cdot \mu}{2 \mathfrak{F}_g \cdot \mu} = \frac{1}{2},$$

d. h. es nehmen die Größen  $\mathfrak{M}(g^{(2^v)})$  rascher ab als die Glieder einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten  $\sqrt[4]{\frac{1}{2}}$ ; nach einer gewissen Anzahl von Schritten muß also ein  $\mathfrak{M}(g^{(2^v)}) < 2\mathfrak{F}_g \cdot \mu$  werden, und dann lehrt (6) sofort, daß auch alle folgenden Größen  $< 2\mathfrak{F}_g \cdot \mu$  bleiben. Wenn also überhaupt einige der Größen  $\mathfrak{M}(g^{(2^v)}) > 2\mathfrak{F}_g \cdot \mu$  werden, so können es nur die ersten sein, und diese nehmen dauernd ab, sind also sämtlich kleiner als die allererste, d. h. als  $\mathfrak{M}(g) = \mu$  — oder mit anderen Worten: Die Maxima der Funktionen  $g^{(n)}$  mit geradem Index liegen sämtlich unterhalb der größeren der beiden Zahlen  $2\mathfrak{F}_g \cdot \mu$  und  $\mu$ , und ebenso die Größen  $\mathfrak{M}(g^{(2^v+1)})$  unterhalb der größeren der Zahlen  $2\mathfrak{F}_g \cdot \mu$  und  $\mathfrak{M}(g) \leq \mathfrak{q}_g \cdot \mu$  — für sämtliche  $\mathfrak{M}(g^{(n)})$  gilt daher sicher

$$(7) \quad \mathfrak{M}(g^{(n)}) < \mathfrak{R}_g \mu, \quad \text{wenn} \quad \mathfrak{R}_g = 1 + \mathfrak{q}_g + 2\mathfrak{F}_g.$$

Damit ist also zunächst bewiesen, daß *sämtliche Robinschen Flächenfunktionen*  $g^{(n)}$  *unterhalb einer endlichen Grenze bleiben.*

Nunmehr wenden wir uns zu dem

Spezialfall: 
$$m = \frac{1}{2\pi} \int g_\sigma d\sigma = 0$$

und greifen in ihm zur Abschätzung von  $\Delta(V^{(n+2)})$  in (3) auf die erste Ungleichung (4) zurück. So erhalten wir

$$(3_0) \quad \mathfrak{M}^4(g^{(n+2)}) < \mathfrak{L}_g^4 6 \sqrt{B_g} \sqrt{L''(g)} \sqrt{\eta_{2n+2}} \mathfrak{M}^3(g^{(n)})$$

und weiter nach (5b) und (7):

$$\mathfrak{M}^4(g^{(2n+2)}) < 6 \mathfrak{L}_g^4 \sqrt{2B_g C_g \sigma_g \mathfrak{q}_g \mu} \cdot \mathfrak{R}_g^3 \mu^3 \sqrt{\eta_{2n+2}},$$

oder schließlich das Resultat:

$$(8_0) \quad \mathfrak{M}(g^{(n)}) < \mathfrak{L}_g \mu \sqrt[5]{\eta_{2n-2}} \quad (n \geq 2),$$

das bei Berücksichtigung der Eigenschaft (22') der geometrischen Größen  $\eta_n$  (S. 462) besagt, daß *in dem Falle*  $m = 0$  *die sämtlichen Funktionen*  $g^{(n)}$  *gleichmäßig gegen 0 konvergieren:*

$$(9_0) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_s^{(n)} = 0 \quad \text{falls} \quad m = 0 \quad \text{gleichmäßig für alle } s \text{ auf } \sigma.$$

Nach dieser Feststellung nehmen wir wieder den

allgemeinen Fall:  $m$  beliebig,

auf, betrachten als Ausgangsfunktion jetzt aber nicht  $g$  selber, sondern  $g - g^{(q)}$  ( $q$  beliebig = 1, 2, 3, ...); dann ist

$$\frac{1}{2\pi} \int (g_\sigma - g_\sigma^{(q)}) d\sigma = 0 \quad [\text{vgl. } (\mathfrak{R}_0) \text{ S. 452}],$$

und es gelten daher für die von diesen Werten aus gebildeten Robinschen Flächenfunktionen  $g^{(n)} - g^{(n+q)}$  die oben im Spezialfalle abgeleiteten Resultate. Nun ist aber nach (7)

$$\mathfrak{M}(g^{(n)} - g^{(n+q)}) \leq \mathfrak{M}(g^{(n)}) + \mathfrak{M}(g^{(n+q)}) < 2\mathfrak{R}_g \mu$$

und ferner nach (2r) und (3) S. 453:

$$L''(g - g^{(q)}) \leq L''(g - g^{(q)}) + L''(g + g^{(q)}) = 2L''(g) + 2L^{(2q+2)}(g) \leq 4L''(g).$$

Demgemäß können wir jetzt (bei  $g - g^{(q)}$  als Ausgangsfunktion) in  $(3_0)$  an Stelle der früher beim Übergang zu  $(8_0)$  als obere Grenzen von  $\mathfrak{M}(g^{(n)})$  und  $\sqrt{L''(g)}$  benutzten Werte (7) und (5b) immer genau das Doppelte einrücken, und das liefert dann, wie man leicht übersieht, anstatt  $(8_0)$  das Resultat

$$(8) \quad \mathfrak{M}(g^{(n)} - g^{(n+q)}) < 2\mathfrak{R}_g \mu \sqrt[8]{\eta_{2n-2}}$$

und hieraus folgt dann wieder, daß man durch Vergrößerung allein von  $n$  (unabhängig von  $q$ ) die Differenzen  $g_s^{(n)} - g_s^{(n+q)}$  gleichmäßig für alle Punkte  $s$  von  $\sigma$  unter jeden Kleinheitsgrad herabdrücken kann, d. h. aber: *im Falle  $m \neq 0$  nähern sich die Funktionen  $g^{(n)}$  gleichmäßig einer bestimmten Konvergenzfunktion, die wir gleich  $2\pi m \cdot \varrho$  setzen:*

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} g_s^{(n)} = 2\pi m \cdot \varrho_s \quad \text{gleichmäßig für alle } s \text{ auf } \sigma.$$

Dann folgt leicht, eben infolge der Gleichmäßigkeit der Konvergenz (durch Grenzübergang aus den Formeln  $(\mathfrak{R}'_0)$  und (26i)):

$$\int \varrho_s d\sigma = 1 \quad \text{und} \quad \int \frac{\varrho_s d\sigma}{E_i} = \Gamma_g \quad [\text{vgl. Beitr. S. 187}]$$

und damit das Resultat, daß  $\varrho$  die Dichtigkeit der sogenannten *natürlichen Belegung* ist, d. h. einer Belegung von der Gesamtmasse 1, deren Potential in  $\mathfrak{S} + \sigma$  konstant ist. — Zugleich ist damit aber *der Beweis für die Existenz der natürlichen Belegung erbracht.*

Im Endresultat lassen sich die beiden bisher gesondert behandelten Fälle  $m = 0$  und  $m \neq 0$  leicht folgendermaßen zusammenfassen:

*Die nach dem Schema  $(\mathfrak{R}_0)$  S. 452, ausgehend von beliebigen stetigen Randwerten  $g_s$  sukzessive gebildeten Robinschen Flächenfunktionen  $g, g', g''$  usw. nähern sich gleichmäßig in allen Punkten  $s$  von  $\sigma$  den Werten  $2\pi m \cdot \varrho_s$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_s^{(n)} = 2\pi m \cdot \varrho_s \quad \text{mit} \quad m = \frac{1}{2\pi} \int g_\sigma d\sigma,$$

wenn  $\varrho$  die Dichtigkeit der natürlichen Belegung der Fläche  $\sigma$  bedeutet.

Besonders hervorgehoben sei wieder der geometrische Charakter der Konvergenz. Sie wird wieder erzwungen durch das Verhalten rein

geometrischer Größen, nämlich der Zahlen  $\eta_2, \eta_3, \eta_4$  usw., während die spezielle Natur der Randwerte  $g_s$  bei den Abschätzungen (8<sub>0</sub>) und (8) nur zum Ausdruck kommt in einem sich stets gleichbleibendem Faktor, hier in  $\mu$ , dem absolut größten der Werte  $g_s$ .

## § 4.

### Konfigurationskonstanten höherer Ordnung und der schließliche Konvergenzbeweis für die Neumannschen und Robinschen Reihen.

Beschäftigten wir uns bisher mit den „Konvergenzeigenschaften“ der Neumannschen und Robinschen Flächenfunktionen und Potentiale [vgl. die Schemata ( $\mathfrak{R}_0$ ) und ( $\mathfrak{R}_0$ )], d. h. stellten wir fest, was bei wachsendem Index aus den einzelnen Funktionen (oder wenigstens einfachen Verbindungen von ihnen wie  $f_s^{(n)} - f_s^{(n+2)}$ ,  $W_i^{(n)} - W_i^{(n+1)}$ ,  $W_a^{(n)} + W_a^{(n+1)}$ ) wird, also aus den einzelnen Elementen der Neumannschen und Robinschen Reihen ( $\mathfrak{R}_1$ ) und ( $\mathfrak{R}_1$ ), so soll jetzt die Konvergenz dieser Reihen selbst untersucht werden — zunächst der Neumannschen Reihen.

Unter Benutzung der polaren Flächenfunktionen  $\gamma_{(o)}^{(n)}$  [vgl. (8) S. 454] habe ich die Neumannschen Potentiale  $W^{(n)}$  folgendermaßen darzustellen gelehrt:

$$(10) \quad W_o^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int f_\sigma \gamma_{(o)\sigma}^{(n)} d\sigma \quad [\text{Stud. S. 94}].$$

Es ist dies eine Formel, die man als Ausdruck einer Umkehr der Integrationsfolge ansehen kann: Während nach der ursprünglichen Definition durch das Schema ( $\mathfrak{R}_0$ ) die Potentiale  $W^{(n)}$   $(n+1)$ -fache Integrale sind, bei denen die Ausgangsrandwerte  $f_s$  unter dem innersten Integrale stehen, treten diese Werte hier unter einem einfachen, letzten Integrale auf, während die übrigen  $n$  Integrationen in dem anderen rein geometrischen Faktor unter diesem Integral enthalten sind.

Diese letzte Formel wenden wir nun zunächst auf den Fall an, daß der Punkt  $o$  nacheinander zwei beliebige innere Lagen ( $i$  bzw.  $i$ ) annimmt. Dann ist also (wenn wir noch  $q-1$  statt  $n$  schreiben):

$$(11i) \quad W_i^{(q-1)} - W_i^{(q-1)} = \frac{1}{2\pi} \int f_\sigma [\gamma_{(i)\sigma}^{(q-1)} - \gamma_{(i)\sigma}^{(q-1)}] d\sigma,$$

und entsprechend führt die Anwendung auf zwei äußere Punkte  $a$  und  $a$  zu der Formel

$$(11a) \quad W_a^{(q-1)} - W_a^{(q-1)} = \frac{1}{2\pi} \int f_\sigma [\gamma_{(a)\sigma}^{(q-1)} - \gamma_{(a)\sigma}^{(q-1)}] d\sigma.$$

Nun aber wollen wir von Betrachtungen im Innen- oder Außengebiet übergehen zu solchen auf der Fläche  $\sigma$  selbst. Wir lassen daher die beiden

Punkte  $i$  und  $a$  gegen einen Randpunkt  $s$  gehen und  $i$  und  $a$  gegen einen anderen  $\bar{s}$  und beachten dann einerseits, daß nach dem Schema ( $\mathfrak{R}_0$ )

$$\frac{1}{2} (W_{is}^{(q-1)} + W_{as}^{(q-1)}) = f_s^{(q)}$$

ist, und setzen andererseits zur Abkürzung:

$$(12) \quad \frac{1}{2} (\gamma_{(i\bar{s})\sigma}^{(q-1)} + \gamma_{(a\bar{s})\sigma}^{(q-1)}) = \gamma_{(\bar{s})\sigma}^{(q-1)}$$

— von  $n=2$  an bleiben die Polarfunktionen  $\gamma_{(i)}^{(n)}$  auch bei Annäherung des Poles an  $\sigma$  stetig, und auch schon für  $n=0$  oder  $1$  werden sie höchstens integrel unstetig —, dann ergibt sich durch Kombination von (11i) und (11a):

$$(11s) \quad f_s^{(q)} - f_{\bar{s}}^{(q)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma} f_{\sigma} [\gamma_{(s)\sigma}^{(q-1)} - \gamma_{(\bar{s})\sigma}^{(q-1)}] d\sigma$$

und, da sich nach dem Schlußresultat von § 3 beide Funktionen  $\gamma_{(s)}^{(q-1)}$  und  $\gamma_{(\bar{s})}^{(q-1)}$  derselben Konvergenzfunktion  $2\pi \cdot 1 \cdot \rho$  nähern [vgl. unten (12')], so ersieht man aus dieser Formel bereits, daß mit wachsendem  $q$  die Differenzen  $f_s^{(q)} - f_{\bar{s}}^{(q)}$  gegen 0 gehen werden. Es ließe sich auch leicht zeigen, daß diese Konvergenz sogar gleichmäßig für alle Lagen von  $s$  und  $\bar{s}$  auf  $\sigma$  erfolgt.

Um aber weiterzugehen, zerlegen wir jetzt die Fläche  $\sigma$  in zwei Teile  $\alpha$  und  $\beta$ , indem wir jedes Element  $d\sigma$  zum Teile  $\alpha$  oder aber  $\beta$  rechnen, je nachdem in ihm  $\gamma_{(s)}^{(q-1)}$  größer oder kleiner als  $\gamma_{(\bar{s})}^{(q-1)}$  ist. Dann folgt

$$(13) \quad f_s^{(q)} - f_{\bar{s}}^{(q)} \leq G \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha} [\gamma_{(s)\alpha}^{(q-1)} - \gamma_{(\bar{s})\alpha}^{(q-1)}] d\alpha + K \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{\beta} [\gamma_{(s)\beta}^{(q-1)} - \gamma_{(\bar{s})\beta}^{(q-1)}] d\beta,$$

wenn  $G$  und  $K$  den größten und kleinsten Wert von  $f$  bedeuten.

Nun ist nach bekanntem Gaußschen Satz

$$(14) \quad \int \gamma_{(i)\sigma} d\sigma = 4\pi \quad \text{und} \quad \int \gamma_{(a)\sigma} d\sigma = 0 \quad [\text{vgl. (8) S. 454}]$$

für beliebige Lagen von  $i$  in  $\mathfrak{S} + \sigma$  und von  $a$  in  $\mathfrak{A} + \sigma$  und also wegen der Massengleichheit aufeinanderfolgender Robinscher Flächenbelegungen [vgl. ( $\mathfrak{R}'_0$ )] auch

$$\int \gamma_{(i)\sigma}^{(q-1)} d\sigma = 4\pi, \quad \int \gamma_{(a)\sigma}^{(q-1)} d\sigma = 0,$$

und daraus folgt nach (12):

$$(12') \quad \int \gamma_{(\bar{s})\sigma}^{(q-1)} d\sigma = 2\pi \quad (\text{für alle } s \text{ auf } \sigma)$$

und demgemäß ist die Summe der in (13) auftretenden Integrale

$$\int_{\alpha} + \int_{\beta} = \int_{\sigma} [\gamma_{(s)\sigma}^{(q-1)} - \gamma_{(\bar{s})\sigma}^{(q-1)}] d\sigma = 0,$$

oder aber es folgt:

$$\int_a^\beta = - \int_\beta^\alpha = \frac{1}{2} \int_\sigma \text{abs} [\gamma_{(\bar{s})\sigma}^{(q-1)} - \gamma_{(s)\sigma}^{(q-1)}] d\sigma$$

und demnach ergibt sich aus (13) weiter:

$$(15) \quad f_s^{(q)} - f_{\bar{s}}^{(q)} \leq (G - K) \frac{1}{4\pi} \int \text{abs} [\gamma_{(s)\sigma}^{(q-1)} - \gamma_{(\bar{s})\sigma}^{(q-1)}] d\sigma.$$

Der hier neben  $G - K$  stehende Faktor ist eine außer von den geometrischen Verhältnissen lediglich von der Lage der Punkte  $s$  und  $\bar{s}$  auf  $\sigma$  abhängige Größe (die man in Analogie mit einer früher von mir angewandten Bezeichnungsweise etwa die Öffnungsfunktion  $q$ -ter Ordnung  $D^{(q)}(s, \bar{s})$  der Fläche  $\sigma$  in bezug auf die Pole  $s$  und  $\bar{s}$  nennen könnte). — Das *Maximum* dieser Größe für alle möglichen Lagen von  $s$  und  $\bar{s}$  auf  $\sigma$ , das jetzt also eine *allein von den geometrischen Verhältnissen* abhängige Zahl ist,

$$(16) \quad c_g^{(q)} = \text{Max} \left( \frac{1}{4\pi} \int \text{abs} [\gamma_{(s)\sigma}^{(q-1)} - \gamma_{(\bar{s})\sigma}^{(q-1)}] d\sigma \right) \quad (= \text{Max } D^{(q)}(s, \bar{s}))$$

heiße die „*Konfigurationskonstante  $q$ -ter Ordnung der Fläche  $\sigma$* “. Mit ihrer Hilfe kann man dann sogar die *größte* Wertdifferenz von  $f^{(q)}$ , also die Schwankung  $\Delta(f^{(q)})$  abschätzen:

$$\Delta(f^{(q)}) \leq (G - K) \cdot c_g^{(q)}.$$

Da nun aber hierbei die Ausgangsfunktion  $f$  mit der Schwankung  $\Delta(f) = G - K$  ganz beliebig (nur stetig) vorausgesetzt war, können wir sie auch ersetzen durch eine beliebige spätere Funktion  $f^{(n)}$  und erhalten so:

$$(17) \quad \Delta(f^{(n+q)}) \leq \Delta(f^{(n)}) \cdot c_g^{(q)}.$$

*Die Konfigurationskonstante  $q$ -ter Ordnung stellt also die (kleinste) obere Grenze für den Quotienten zwischen den Schwankungen einer beliebigen der Flächenfunktionen  $f, f', f''$  usw. und der  $q$ -ten folgenden dieser Funktionen dar* — gerade so wie die ursprüngliche C. Neumannsche Konfigurationskonstante  $c_g$  (erster Ordnung, also identisch mit unserem  $c_g^{(1)}$ ) die obere Grenze für den Quotienten der Schwankungen zweier *unmittelbar* aufeinanderfolgender solcher Funktionen darstellte [vgl. die Einleitung S. 447], so daß also diese Konfigurationskonstanten höherer Ordnung tatsächlich als ganz naturgemäße Verallgemeinerungen der ursprünglich von C. Neumann eingeführten Konstanten anzusehen sind.

Mit diesen höheren Konfigurationskonstanten wollen wir uns nun noch näher beschäftigen. Da  $\int [\gamma_{(s)\sigma} - \gamma_{(t)\sigma}] d\sigma = 0$  ist [vgl. (14)], so können wir die in § 3 für den „Spezialfall“ ( $m = 0$ ) angestellten Betrachtungen anwenden, wenn wir  $g = \gamma_{(s)} - \gamma_{(t)}$  setzen. Da dann allerdings  $g$  und  $g'$

bei Annäherung von  $i$  oder  $i$  an  $\sigma$  nicht mehr beschränkt bleiben, betrachten wir gleichsam als Ausgangswert erst die Werte  $g'' = \gamma''_{(i)s} - \gamma''_{(i)s}$ , so daß also, wenn wir  $\mathfrak{M}(g^{(q-1)})$  abschätzen wollen, in Formel  $(8_0)$   $n = q - 3$  zu setzen ist, und sich daher als Abschätzung

$$\mathfrak{M}(\gamma_{(i)}^{(q-1)} - \gamma_{(i)}^{(q-1)}) < \mathfrak{L}_g \bar{\mu} \sqrt[q]{\eta_{2q-8}} \quad (q \geq 5)$$

ergibt, wenn jetzt  $\bar{\mu}$  den (sicher endlichen) absolut größten Wert bedeutet, den  $\gamma''_{(i)s} - \gamma''_{(i)s}$  bei beliebigen Lagen von  $s$  auf  $\sigma$  und der Pole  $i$  und  $i$  in  $\mathfrak{S} + \sigma$  annimmt. — Eine ganz entsprechende Abschätzung erhält man für  $\mathfrak{M}(\gamma_{(a)}^{(q-1)} - \gamma_{(a)}^{(q-1)})$ , nur daß an Stelle der allein noch von den geometrischen Verhältnissen der Fläche  $\sigma$  abhängigen Zahl  $\bar{\mu}$  im allgemeinen eine andere,  $\bar{\bar{\mu}}$ , treten wird. Bezeichnen wir nun noch die größere dieser beiden Zahlen  $\bar{\mu}$  und  $\bar{\bar{\mu}}$  mit  $\mu_g$ , so erhalten wir nach (12) für alle beliebigen Lagen von  $s$  und  $\mathfrak{s}$  auf  $\sigma$  die Abschätzung

$$\mathfrak{M}(\gamma_{(s)}^{(q-1)} - \gamma_{(s)}^{(q-1)}) < \mathfrak{L}_g \mu_g \sqrt[q]{\eta_{2q-8}},$$

und mit ihrer Hilfe weiter nach (16):

$$(18) \quad c_g^{(q)} < \frac{1}{4\pi} \mathfrak{L}_g \mu_g \sigma_g \sqrt[q]{\eta_{2q-8}} \quad (q \geq 5).$$

Mit dieser Abschätzung ist also nach der Grundeigenschaft (22') der Größen  $\eta_n$  das Hauptresultat gewonnen: *die höheren Konfigurationskonstanten nehmen mit wachsender Ordnungszahl gegen 0 ab.*

Nach dieser wichtigen Feststellung wenden wir uns zu den eigentlichen Konvergenzbeweisen.

### A. Die Neumannschen Reihen.

Aus unserem letzten Resultat folgt, daß man in der Reihe der Konfigurationskonstanten  $c'_g, c''_g, c'''_g$  usw. stets nach einer gewissen Anzahl von Schritten zu einer solchen Konstanten kommt, die kleiner als 1 ist,

$$(19) \quad q \text{ existiert, so daß } c_g^{(q)} < 1.$$

Im folgenden wollen wir uns nun  $q$  stets in dieser Weise bestimmt und dann festgehalten denken (es sei etwa die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft). Dann kann man den Beweis für die Existenz der Konvergenzkonstanten  $C$  der Funktionen  $f, f', f''$  usw. sowie für die Konvergenz der Neumannschen Reihen von Potentialen im wesentlichen nach C. Neumann selbst führen<sup>16)</sup>,

<sup>16)</sup> Vgl. die Darstellung dieses Verfahrens z. B. in meiner Arbeit in Math. Annalen 55.

der die letztere Frage zurückführt auf die nach der Konvergenz der folgenden Reihen von Oberflächenfunktionen:

$$(20) \quad \begin{aligned} & (f - f') + (f'' - f''') + (f^{IV} - f^V) + \dots, \\ & (C - f) + (C - f') + (C - f'') + \dots \end{aligned}$$

Zum Beweise der (gleichmäßigen) Konvergenz dieser Reihen braucht man nämlich jetzt immer nur  $q$  Glieder zusammenzufassen, um wieder auf eine Abschätzung durch eine geometrische Reihe mit echtgebrochenen Quotienten  $c_q^{(q)}$  zu kommen, oder man kann auch sagen: Die Reihen konvergieren mindestens ebenso rasch wie eine geometrische Reihe mit dem Quotienten  $\sqrt[q]{c_q^{(q)}}$ . — Der Beweis ist so leicht zu übersehen, daß sich ein näheres Eingehen auf ihn erübrigt.

*Somit ist also der Beweis für die Anwendbarkeit der Methode des arithmetischen Mittels auf Gebiete, deren Grenzflächen nur sehr allgemeinen Bedingungen entsprechen, geführt* — ein Beweis, der schließlich in engster Anlehnung an den ursprünglichen C. Neumannschen Gedankengang mit der Konfigurationskonstanten verläuft: C. Neumann führt den Beweis nur für den Fall, daß seine Konfigurationskonstante (erster Ordnung) kleiner als 1 ist — wir haben hier bewiesen, daß, auch wenn das nicht der Fall ist, doch *sicher eine Konfigurationskonstante höherer Ordnung kleiner als 1* wird, und daß auch das genügt, die Konvergenz zu verbürgen.

Es führen diese Überlegungen dazu, die geschlossenen Flächen  $\sigma$  in verschiedene Klassen zu teilen nach der Ordnung der niedrigsten echtgebrochenen Konfigurationskonstanten, und man könnte dann etwa sagen, die Konvergenz der Methode des arithmetischen Mittels für diese verschiedenen Klassen sei von der ersten, zweiten usw. Ordnung. — Unter Benutzung dieser Ausdrucksweise ließe sich dann unser Resultat mit dem in der Einleitung erwähnten C. Neumannschen so zusammenfassen: *Für alle geschlossenen konvexen Flächen konvergiert die Methode des arithmetischen Mittels von der ersten Ordnung, aber auch für jede andere geschlossene Fläche (mit den von uns immer gemachten Einschränkungen) findet Konvergenz von einer endlichen Ordnung statt.*

## B. Die Robinschen Reihen.

Nach einem früher von mir bewiesenen und schon oben einmal erwähnten Resultate [Stud. S. 66] bilden die Oberflächenwerte  $V_s, V'_s, V''_s$  usw. der Robinschen Potentiale eine Folge aufeinanderfolgender Neumannscher Flächenfunktionen (wie  $f_s, f'_s, f''_s$  usw.), und aus der soeben allgemein bewiesenen gleichmäßigen Konvergenz der Reihen (20) folgt also auch die

der Reihen

$$(21) \quad \begin{array}{l} (V_s - V_s') + (V_s'' - V_s''') + (V_s^{IV} - V_s^V) + \dots \\ V_s + V_s' + V_s'' + V_s''' + \dots \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(falls } m=0 \text{ und damit } C = m\Gamma_g = 0; \\ \text{vgl. (26'), S. 464).} \end{array}$$

Dies sind aber im wesentlichen die Werte der Robinschen Reihen ( $\mathfrak{R}_1$ ) S. 452, gebildet in Oberflächenpunkten. Da aber bei Potentialen von Flächenbelegungen unter den Oberflächenwerten die absolut größten *aller* Werte enthalten sind, so folgt aus der Konvergenz der Reihen (21) auch sofort, daß *die Robinschen Reihen gleichmäßig im ganzen Außen- und Innengebiet konvergieren* — denn die für die Konvergenz der zweiten Reihe (21) notwendige Voraussetzung, daß

$$m \equiv \frac{1}{2\pi} \int g_\sigma d\sigma = 0$$

ist, muß bei der zweiten Randwertaufgabe für ein Innengebiet bekanntlich stets erfüllt sein.

Marburg, den 11. Februar 1929.

(Eingegangen am 15. 2. 1929.)