SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Mathematische Annalen
Ort: Berlin
Jahr: 1930
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN235181684_0102
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0102

LOG Id: LOG_0025
LOG Titel: La formule de H. Bruns et la théorie des figures planétaires
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

La formule de H. Bruns et la théorie des figures planétaires.

Von

R. Wavre in Genf.

1. La formule de Bruns.

Considérons une masse fluide dont les différentes particules s'attirent suivant la loi de Newton, en équilibre relatif dans sa rotation autour d'un axe. Soient: ω la vitesse angulaire, ϱ la densité, p la pression, U le potentiel newtonien, oz l'axe de rotation et ox, oy, oz un trièdre trirectangle. L'hydrodynamique fournit les trois équations suivantes, comme on le sait,

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial x}+\omega^2 x,\qquad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial y}+\omega^2 y,\qquad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{1}$$

Jointes à la condition supplémentaire que la densité croisse de la surface vers le centre de l'astre, elles expriment la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait équilibre relatif.

Les équations (1) impliquent une relation de la forme

$$\varrho = f(p). \tag{2}$$

Soient Φ le potentiel du champ de la pesanteur, Q celui de la force centrifuge:

$$\Phi=\int\frac{1}{\varrho}\frac{dp}{d\varrho}\,d\varrho, \tag{3}$$

$$Q=\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2). \tag{4}$$

Les trois équations (1) se résument par la relation entre les potentiels

$$\Phi = U + Q. \tag{5}$$

Si ∇ représente le symbole de Laplace, l'équation (5) implique la relation suivante

$$\nabla\Phi=\nabla U+\nabla Q. \tag{6}$$

La formule de Poisson et l'expression (4) de Q montrent que l'équation (6) peut s'écrire

$$\nabla \Phi = 2\omega^2 - 4\pi i \varrho \tag{6'}$$

où i représente la constante de l'attraction universelle. Soient g l'intensité de la pesanteur et α, β, γ les cosinus directeurs de la direction du fil à plomb par rapport aux axes x, y, z. On a, comme on sait,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = g\alpha, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = g\beta, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = g\gamma \tag{7}$$

et, on le vérifie facilement,

$$\nabla \Phi = \frac{dg}{dn}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + g\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right)$$

dn désignant un élément de normale à la surface $\Phi =$ constante dirigé vers le bas.

Or, on démontre par la géométrie la relation suivante:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z} = -c$$

où c désigne le double de la courbure moyenne de la surface précédente au point x, y, z considéré. Les rayons principaux doivent être comptés positivement vers l'intérieur.

La relation (6′) s'écrit donc sous la forme élégante

$$\frac{dg}{dn} - cg = 2\omega^2 - 4\pi i \varrho. \tag{8}$$

Cette formule a déjà été donnée par Heinrich Bruns dans son livre «*Figur der Erde*» en 1878. Elle n'a été reproduite ni dans le traité d'Helmert, ni dans celui de Tisserand, ni même dans l'encyclopédie. M. Pizetti[1]) est le seul auteur qui la mentionne à notre connaissance. Cette formule n'est pas assez connue et nous allons voir, dans la suite, quel parti on peut en tirer. Les surfaces à ϱ constant sont à Φ constant et la formule de Bruns montre qu'une mesure de l'accroissement de g suivant la verticale équivaut à une mesure de la courbure moyenne de la surface d'égale densité passant au point où l'on opère.

Je l'ai étendue à des mouvements plus généraux que l'équilibre relatif[2]) et M. Dive[3]) l'a généralisée au cas d'une rotation permanente quelconque.

---

[1]) P. Pizetti, Principii della teoria delle figure dei pianeti, Pisa 1913.

[2]) Sur la rotation permanente des planètes, Archives des Sciences physiques et naturelles, Genève 1928.

[3]) Comptes rendus des Séances de la Société de physique de Genève **45**, No. 11 928.

2. Les figures planétaires.

Nous appellerons *stratification* la répartition au point de vue strictement géométrique des surfaces d'égale densité et *densité transformée* l'expression

$$f = 2\omega^2 - 4\pi i \varrho. \tag{9}$$

Les surfaces d'égale densité seront caractérisées par un paramètre t. Les quantités ϱ, f, Φ ne dépendent que de t. Quoique les lignes de forces du champ de la pesanteur forment une multiplicité dépendant de deux paramètres, pour simplifier nos formules, nous les représenterons par un seul θ. La valeur $\theta = 0$ représentera une ligne de force particulière. Un d représentera une différentielle relative à un déplacement sur une ligne de force θ et enfin une parenthèse affectée de l'indice θ ou des indices $\theta', \theta'', \ldots$ signifiera que la quantité entre parenthèses doit être prise le long des lignes $\theta, \theta', \theta'', \ldots$.

Posons: $\frac{dn}{dt} = N(t, \theta)$ et puisque g dérive du potentiel Φ on aura sur une même surface t

$$(gN)_{\theta'} = (gN)_{\theta''}.$$

Dérivons par rapport à t les deux membres de cette équation et tenons compte de la formule de Bruns, on trouvera, après une réduction simple,

$$-\frac{f(t)}{(g)_0} = \frac{(B)_{\theta'} - (B)_{\theta''}}{(A)_{\theta'} - (A)_{\theta''}} \tag{10}$$

où l'on a posé, L désignant le logarithme népérien,

$$A = N^2 \quad \text{et} \quad B = cN + \frac{d}{dt} LN.$$

Si θ, θ', θ'' représentent trois lignes de forces distinctes, on devra avoir

$$\frac{(B)_{\theta'} - (B)_{\theta''}}{(A)_{\theta'} - (A)_{\theta''}} = \frac{(B)_{\theta'} - (B)_{\theta}}{(A)_{\theta'} - (A)_{\theta}}. \tag{11}$$

Cette équation est d'ordre purement géométrique[4]); c'est une condition nécessaire imposée à la stratification.

En vertu d'un important théorème de M. Lichtenstein[5]), les surfaces d'égale densité doivent admettre un même plan de symétrie perpendiculaire à l'axe. Supposons, en plus, que ces surfaces soient de révolution. Soient $a(t)$ et $b(t)$ le rayon polaire et le rayon équatorial de la surface t, $c_P(t)$ et $c_E(t)$ le double de la courbure moyenne de la surface t au pôle

---

[4]) Voir: Commentarii Mathematici Helvetici **1**, p. 3, 1929.

[5]) Math. Zeitschr. **28** (1928), p. 635.

et à l'équateur, et enfin g_P la pesanteur sur l'axe polaire. L'équation (10) peut s'écrire sous la forme

$$(12) \qquad \frac{4\pi i \varrho(t) - 2\omega^2}{g_P(t)} = \frac{c_E b' - c_P a' + \frac{a''}{a'} - \frac{b''}{b'}}{b'^2 - a'^2}.$$

Les accents représentent ici des dérivées par rapport à t. Cette relation est rigoureuse et générale. Supposons maintenant que la stratification soit formée d'ellipsoïdes concentriques et que t représente le rayon polaire de ces ellipsoïdes.

Posons $\varepsilon = b - a$. Pour des ellipsoïdes peu aplatis les courbures sont:

$$(13) \qquad c_E = \frac{2}{t}, \qquad c_P = \frac{2}{t}\left(1 - 2\frac{\varepsilon}{t}\right)$$

et l'équation (12) s'écrit pour une telle stratification

$$(14) \qquad \frac{4\pi i \varrho(t) - 2\omega^2}{g_P(t)} = \frac{1}{t} + \frac{2}{t^2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}.$$

Si ω^2 est très petit, ε, ε', ε'' le sont aussi; on peut négliger ω^2 dans le premier membre et calculer $g_P(t)$ dans l'hypothèse d'une stratification sphérique. Si $D(t)$ désigne la densité moyenne de la matière intérieure à la couche t on trouve facilement

$$(15) \qquad \frac{4\pi i \varrho(t)}{g_P(t)} = -\frac{3}{t} - \frac{D'}{D}$$

et l'équation (14) s'écrit sous la forme suivante:

$$(16) \qquad \frac{2}{t} + \frac{D'}{D} = \frac{2}{t^2}\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} - \frac{1}{2}\frac{\varepsilon''}{\varepsilon'}.$$

Enfin, en introduisant l'aplatissement $e = \frac{\varepsilon}{t} = \frac{b-a}{a}$ on trouve, après un calcul tout élémentaire, l'*équation de Clairaut* qui lie l'aplatissement des couches à la densité moyenne:

$$(17) \qquad e'' D + 2e' D + \frac{2}{t} e D' + \frac{6}{t} e' D = 0.$$

Représentons maintenant par c_ϱ le double de la courbure moyenne des surfaces à ϱ constant, et soit c_U la même quantité pour les surfaces à U constant, surfaces équipotentielles pour le champ de Newton.

Sur l'axe polaire, la formule de Bruns nous donne:

$$\frac{dg}{dt} + c_\varrho g = 4\pi i \varrho - 2\omega^2$$

et l'équation de Poisson s'écrit au même point

$$\frac{dg}{dt} + c_U g = 4\pi i \varrho.$$

En les soustrayant membre à membre, on trouve:

$$\frac{2\omega^2}{g} = c_U - c_\varrho . \tag{18}$$

Puisque les surfaces sont de révolution, on a plus simplement:

$$\frac{\omega^2}{g} = \frac{1}{R_U} - \frac{1}{R_\varrho} \tag{19}$$

les R étant les rayons de courbure des méridiennes. Les surfaces étant de nouveau supposées ellipsoïdales et de faible aplatissement, c_U variera entre deux limites qui correspondent: 1° au cas d'une concentration de toute la masse au centre et 2° au cas d'une répartition homogène.

On trouve pour ces deux circonstances

$$1°\colon\quad \frac{1}{R_U} = \frac{1}{t}, \qquad 2°\colon\quad \frac{1}{R_U} = \frac{1}{t} - \frac{6}{5}\frac{e}{t}$$

tandis que l'on a toujours

$$\frac{1}{R_\varrho} = \frac{1}{t} - 2\frac{e}{t},$$

on déduit alors de l'équation (19) les inégalités

$$\frac{4}{5}e \leqq \frac{\omega^2 t}{g} \leqq 2e, \qquad \frac{1}{2}\frac{\omega^2 t}{g} \leqq e \leqq \frac{4}{5}\frac{\omega^2 t}{g}$$

qui constituent elles aussi un important *théorème de Clairaut.*

A l'extérieur de l'astre $\varrho = 0$ et la formule (14) donne en négligeant les termes du second ordre

$$4\varepsilon + 2t\varepsilon' - t^2\varepsilon'' = 0 .$$

Cette équation linéaire admet la solution

$$\varepsilon = \omega^2\lambda(t^4 + \varkappa t^{-1}) \tag{20}$$

λ et $\varkappa$ étant deux constantes. Nous allons voir que λ est lié à la masse totale de la planète et $\varkappa$ à ses moments d'inertie.

Soit S une surface de niveau extérieure à l'astre. En intégrant les deux membres de la formule (6') à l'intérieur de S, on trouve, après usage d'une identité de Green, l'équation de Poincaré

$$\iint g\,dS = 4\pi i M - 2\omega^2 T \tag{21}$$

où M est la masse totale de l'astre et T le volume total intérieur à S. Désignons alors par φ la latitude d'un point de S où la pesanteur est g et par g_0 la pesanteur au pôle de S. On a

$$g = \frac{g_0}{\frac{dn}{dt}} = \frac{g_0}{1 + \varepsilon'\cos^2\varphi} = g_0(1 - \varepsilon'\cos^2\varphi)$$

et d'autre part

$$T = \frac{4}{3}\pi t^3, \quad dS = (t + \varepsilon\cos\theta)^2 d\Sigma,$$

$d\Sigma$ étant l'élément de la sphère unité.

En portant ces expressions dans la formule (21), on trouvera après intégration, et en remplaçant ε par sa valeur (20)

$$\frac{iM}{t^2} - \frac{2}{3}\omega^2 t = g_0\left[1 + 2\omega^2\lambda\left(\varkappa t^{-2} - \frac{2}{3}t^3\right)\right].$$

Puis mettons en évidence la partie principale de g_0

(22) $$g_0 = \frac{iM}{t^2} + \omega^2 g_{0,1}$$

dans l'équation précédente, ce qui donne

$$-g_{0,1} = 2iM\lambda\varkappa t^{-4} + \frac{2}{3}t(1 - 2iM\lambda).$$

Le coefficient de t doit être nul car g ne peut pas croître avec t; on a donc

(23) $$\lambda = \frac{1}{2iM}$$

et

24) $$g_{0,1} = -\varkappa t^{-4}.$$

Les deux relations déduites de (20)

(25) $$\frac{\varepsilon}{t} = \omega^2\lambda(t^3 + \varkappa t^{-2}),$$

(26) $$\varepsilon' = \omega^2\lambda(4t^3 - \varkappa t^{-2})$$

donnent par addition

(27) $$\frac{\varepsilon}{t} + \varepsilon' = \frac{5}{2}\frac{\omega^2 t^3}{iM}$$

ou

(28) $$\frac{\varepsilon}{t} + \varepsilon' = \frac{5}{2}\frac{\omega^2 t}{g}.$$

C'est une relation de Clairaut qui s'écrit encore, en introduisant la pesanteur g_1 sur l'équateur de S, et l'aplatissement lui-même e,

(29) $$e + \frac{g_1 - g_0}{g} = \frac{5}{2}\frac{\omega^2 t}{g}.$$

Soient A, B, C les moments d'inertie de la masse par rapport aux axes x, y, z. On aura:

$$C = \iiint \varrho(x^2 + y^2)\,dT$$

les autres expressions se déduisent de celle-là par permutation des lettres A, B, C; x, y, z. La densité ϱ satisfait à la relation

$$4\pi i\varrho = 2\omega^2 - \nabla\Phi.$$

Cette valeur introduite dans C donne après usage de l'identité de Green

$$(30)\quad 4\pi i C = 4\iiint(\Phi_S - \Phi)\,dT + \iint g(x^2+y^2)\,dS + 2\omega^2\iiint(x^2+y^2)\,dT.$$

La soustraction de deux formules semblables donne:

$$(31)\qquad 4\pi i(C-A) = \iint g(x^2-z^2)\,dS + 2\omega^2\iiint(x^2-z^2)\,dT.$$

Cette relation montre que $C-A$ ne dépend que de la surface S, de la vitesse angulaire et des valeurs de g sur S. Elle convient quels que soient l'aplatissement et la vitesse angulaire. Elle s'écrit encore, en désignant par T' le volume compris entre S et une sphère centrée à l'origine et de même pôle que S,

$$4\pi i(C-A) = \iint g(x^2-z^2)\,dS + 2\omega^2\iiint(x^2-z^2)\,dT'.$$

En négligeant les termes du second ordre comme nous l'avons fait précédemment, on trouve simplement

$$4\pi i(C-A) = \iint g(x^2-z^2)\,dS.$$

Enfin, en remplaçant g et dS par leurs valeurs on trouvera, facilement,

$$(32)\qquad C-A = \frac{t^4}{3i}\left(\frac{M}{t^2} - g_0\right),$$

ou

$$(33)\qquad C-A = 3i\omega^2\varkappa.$$

C'est la relation cherchée liant $\varkappa$ aux moments d'inertie. Enfin, en tirant $\varkappa$ de la formule (20) on trouve la *relation de d'Alembert*:

$$(34)\qquad C-A = \frac{2}{3}\,\frac{g}{i}\,t^4\left(e - \frac{\omega^2 t}{g}\right).$$

Les relations (29) ... (34) sont vraies à l'extérieur de l'astre.

On voit avec quelle rapidité la formule de Bruns permet d'obtenir les résultats classiques de la théorie des figures planétaires.

(Eingegangen am 22. 4. 1929.)