

## Werk

**Titel:** Mathematische Annalen

**Ort:** Berlin

**Jahr:** 1930

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN235181684\_0102

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684\\_0102](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0102)

**LOG Id:** LOG\_0026

**LOG Titel:** Bemerkungen zu meiner Arbeit Über die Summen zufälliger Größen"

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN235181684

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

# Bemerkungen zu meiner Arbeit „Über die Summen zufälliger Größen“<sup>1)</sup>.

Von

A. Kolmogoroff in Moskau.

---

Den Zweck dieser Bemerkungen bilden einerseits einige Berichtigungen und Präzisierungen (§§ 1 und 2), andererseits die Untersuchung eines wichtigen Spezialfalls des Gesetzes der großen Zahlen (§ 3).

## § 1.

Herrn V. W. Niemytzki verdanke ich den Hinweis, daß im Beweis des Satzes IV der oben erwähnten Abhandlung ich die falsche Formel

$$\mathfrak{S}_0(t) \geq \frac{1}{2} D$$

benutzte. In der Tat ist leicht zu beweisen, daß

$$\mathfrak{S}_0(t) = \frac{1}{2} \mathfrak{D} |t| \leq \frac{1}{2} \sqrt{\mathfrak{D}(t^2)} = \frac{1}{2} D$$

gilt, also die genau inverse Ungleichung.

Nun will ich die Sätze IV, V und VI durch folgende ersetzen:

Satz IV\*. *Es sei  $M \leq D$ . Dann ist*

$$\mathfrak{B}(|s| \geq \frac{D}{2}) \geq \frac{1}{1600}.$$

Satz V\*.

$$\mathfrak{B}(|s| \geq R) \geq \frac{1}{1600} \left[ 1 - \frac{M^2 + 4R^2}{D^2} \right].$$

Die Sätze VII bis XI bleiben ungeändert, da wir den Satz VI nur bei dem Beweis des Satzes VIII benutzten, wo man ihn durch den neuen Satz V\* ersetzen kann.

---

<sup>1)</sup> Math. Annalen 99 (1928), S. 309.

Beweis des Satzes IV\*. Wir bezeichnen mit  $e$  den Fall

$$|s| \geq \frac{D}{2}$$

und mit  $\bar{e}$  den entgegengesetzten Fall. Wenn

$$|\mathfrak{D}(s)| \geq 2D$$

ist, so haben wir

$$D^2 \geq \mathfrak{J}_{\bar{e}}(t^2) \geq \mathfrak{J}_{\bar{e}}\left(2D - \frac{D}{2}\right)^2 \geq \frac{9}{4} \mathfrak{B}(\bar{e}) D^2,$$

$$\mathfrak{B}(\bar{e}) \leq \frac{1}{2},$$

womit unser Satz bewiesen ist. Wenn

$$|\mathfrak{D}(s)| < 2D$$

ist, setzen wir

$$e_m \equiv \left[ 3mD \leq |t| < 3(m+1)D, |s| \geq \frac{D}{2} \right].$$

Wegen des Satzes II haben wir

$$\mathfrak{B}(e_m) \leq \frac{1}{2^{2m}},$$

$$\mathfrak{J}_{e_m}(s^2) \leq \frac{(m+1)^2}{2^{2m}} 25D^2,$$

und da im Fall

$$e' = \sum_{m=0}^5 e_m$$

die Ungleichungen

$$|t| \leq 15D, \quad |s| \leq 20D$$

erfüllt sind, haben wir auch

$$\mathfrak{J}_{e'}(s^2) \leq \mathfrak{B}(e) 400D^2.$$

Da für den Fall  $\bar{e}$

$$\mathfrak{J}_{\bar{e}}(s^2) \leq \frac{1}{4}D^2$$

gilt, so haben wir endlich

$$D^2 \leq \mathfrak{J}(s^2) \leq \left( \mathfrak{J}_{\bar{e}} + \mathfrak{J}_{e'} + \sum_{m=6}^{\infty} \mathfrak{J}_{e_m} \right) (s^2)$$

$$\leq \frac{1}{4}D^2 + 400D^2 \mathfrak{B}(e) + \sum_{m=6}^{\infty} \frac{(m+1)^2}{2^{2m}} 25D^2 \leq \frac{3}{4}D^2 + 400D^2 \mathfrak{B}(e),$$

$$\mathfrak{B}(e) \geq \frac{1}{1600},$$

w. z. b. w.

Beweis des Satzes V\*. Wenn  $M > D$  oder  $R > \frac{1}{2}D$  gilt, ist unser Satz richtig, da in diesen Fällen die rechte Seite der Ungleichung negativ ist. Wenn aber  $M \leq D$  und  $R \leq \frac{1}{2}D$  gilt, so erhalten wir leicht unseren Satz aus dem Satz IV\*.

## § 2.

Bei dem Beweis des Satzes VIII meiner oben zitierten Abhandlung benutzte ich die Formel

$$(16) \quad \sum_{k=1}^{m_n} \mathfrak{B}(|y_{nk} - f_{nk}| \geq m_n n) \rightarrow 0.$$

Für den strengen Beweis dieser Formel ist folgender Satz nötig:

Satz VI\*. *Es sei  $e_1, e_2, \dots, e_n$  eine Folge unabhängiger Ereignisse und  $u$  ein willkürliches Ereignis, für welche*

$$\mathfrak{B}_{e_k}(u) \geq u, \quad \mathfrak{B}(e_1 + e_2 + \dots + e_n) \geq u$$

*gilt. Dann ist*

$$\mathfrak{B}(u) \geq \frac{1}{9} u^2.$$

Beweis des Satzes VI\*. Wenn es ein solches  $k$  gibt, daß

$$\mathfrak{B}(e_k) \geq \frac{1}{3} u$$

gilt, so haben wir

$$\mathfrak{B}(u) \geq \mathfrak{B}(e_k) \mathfrak{B}_{e_k}(u) \geq \frac{1}{3} u^2,$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Wenn aber für alle  $k$

$$\mathfrak{B}(e_k) < \frac{1}{3} u$$

gilt, so gibt es gewiß ein solches  $k$ , daß

$$\frac{1}{3} u \leq \mathfrak{B}(e_1 + e_2 + \dots + e_k) \leq \frac{2}{3} u$$

ist. Bezeichnen wir nun mit  $\bar{f}_i$  den Fall

$$\bar{f}_i = e_1 + e_2 + \dots + e_{i-1}$$

und mit  $\bar{\bar{f}}_i$  den entgegengesetzten Fall. Da die Ereignisse  $\bar{f}_i$  und  $e_i$  gegenseitig unabhängig sind, erhalten wir für  $i \leq k$

$$\mathfrak{B}_{e_i}(\bar{f}_i) = \mathfrak{B}(\bar{f}_i) \leq \mathfrak{B}(\bar{f}_k) \leq \frac{2}{3} u,$$

$$\mathfrak{B}_{e_i}(u \bar{\bar{f}}_i) \geq \frac{1}{3} u,$$

$$\mathfrak{B}(u \bar{\bar{f}}_i e_i) \geq \frac{1}{3} u \mathfrak{B}(e_i),$$

$$\mathfrak{B}(u) \geq \sum_{i=1}^k \mathfrak{B}(u \bar{\bar{f}}_i e_i) \geq \frac{1}{3} u \sum_{i=1}^k \mathfrak{B}(e_i) \geq \frac{1}{3} u \mathfrak{B}(\bar{f}_k) \geq \frac{1}{9} u^2,$$

w. z. b. w.

Beweis der Formel (16). Es sei

$$\begin{aligned} u &\equiv \left( |\sigma_n - d_n| \geq \frac{\eta}{2} \right), \\ e_k &\equiv \left( |y_{nk} - f_{nk}| \geq m_n \eta \right), \\ \bar{f}_k &\equiv \left\{ \left| \frac{\sum_{i \pm k} y_{ni} + f_{nk}}{m_n} - d_n \right| \geq \frac{\eta}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Es ist offenbar

$$\mathfrak{B}_{\bar{f}_k}(u) \geq \frac{1}{2}.$$

Für genügend große  $n$  haben wir, unter der Voraussetzung der Stabilität der Mittelwerte,

$$\mathfrak{B}(u) \leq \frac{1}{4}$$

und folglich

$$\mathfrak{B}(\bar{f}_k) \leq \frac{1}{2}.$$

Wenn  $e_k$  erfüllt und  $\bar{f}_k$  nicht erfüllt ist, so ist  $u$  erfüllt. Folglich haben wir

$$\mathfrak{B}_{e_k}(\bar{f}_k) + \mathfrak{B}_{e_k}(u) \geq 1.$$

Aber da  $e_k$  und  $\bar{f}_k$  gegenseitig unabhängig sind, so gilt für genügend große  $n$

$$\mathfrak{B}_{e_k}(\bar{f}_k) = \mathfrak{B}(\bar{f}_k) \leq \frac{1}{2},$$

$$\mathfrak{B}_{e_k}(u) \geq \frac{1}{2}.$$

Wegen des Satzes VI\* erhalten wir

$$\mathfrak{B}(u) \geq \frac{1}{36} \mathfrak{B}^2(e_1 + e_2 + \dots + e_{m_n}),$$

und da  $\mathfrak{B}(u)$  gegen Null konvergiert, so gilt auch

$$\mathfrak{B}(e_1 + e_2 + \dots + e_{m_n}) \rightarrow 0,$$

$$\sum_{k=1}^{m_n} \mathfrak{B}(e_k) \rightarrow 0,$$

w. z. b. w.

### § 3.

Wir wollen nun einen besonderen Fall des Gesetzes der großen Zahlen untersuchen, nämlich den, wo alle unabhängigen Größen

$$y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$$

dieselbe Verteilung

$$\mathfrak{B}(y < x) = F(x)$$

haben. In diesem Fall gilt:

Satz XII. *Für die Stabilität der Mittelwerte unabhängiger Größen mit einer festen Verteilung ist die Bedingung*

$$n \mathfrak{B}(|y| > n) \rightarrow 0$$

*notwendig und hinreichend.*

Zum Beweis, daß diese Bedingung hinreichend ist, setzen wir

$$\begin{aligned} \bar{y}_{nk} &= y_n, & \text{wenn } |y_n| &\leq n, \\ \bar{y}_{nk} &= 0, & \text{wenn } |y_n| &> n. \end{aligned}$$

Es ist leicht einzusehen, daß, wenn unsere Bedingung erfüllt ist, das System  $\{\bar{y}_{nk}\}$  mit  $\{y_n\}$  äquivalent ist, und daß

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathfrak{D}(\bar{z}_{nk}^2) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathfrak{D}(\bar{y}_{nk}^2) \rightarrow 0$$

gilt. Folglich sind wegen des Satzes VIII die Mittelwerte stabil.

Sind andererseits die Mittelwerte stabil, so gilt, wie wir bewiesen haben, die Formel (16). In unserem Falle verwandelt sich (16) in

$$n \mathfrak{B}(|y - f| > n\eta) \rightarrow 0,$$

wo  $f$  eine Konstante ist. Aus dieser Formel folgt die zu beweisende Bedingung unmittelbar.

Wenn unsere Größen  $y_n$  eine bestimmte mathematische Erwartung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x)$$

haben, so ist die Bedingung XII erfüllt, da in diesem Fall

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| dF(x) < \infty,$$

$$n \mathfrak{B}(|y| > n) \leq \left( \int_{-\infty}^{-n} + \int_{+n}^{+\infty} \right) |x| dF(x) \rightarrow 0$$

gilt. Man könnte zeigen, daß die Stabilität in diesem Falle normal sein wird. So haben wir

Satz XIII. *Für die normale Stabilität der Mittelwerte unabhängiger Größen mit fester Verteilung ist die Existenz der mathematischen Erwartung notwendig und hinreichend<sup>2)</sup>.*

Der letzte Satz ist schon früher von A. Khintchine bewiesen worden<sup>3)</sup>.

<sup>2)</sup> Die Notwendigkeit ist trivial und hängt damit zusammen, daß die Definition der normalen Stabilität nur im Falle der Existenz der mathematischen Erwartung einen Sinn hat.

<sup>3)</sup> Comptes Rendus 188, S. 477.