Bemerkungen zu meiner Arbeit „Über die Summen zufälliger Größen“[1]).

Von

A. Kolmogoroff in Moskau.

Den Zweck dieser Bemerkungen bilden einerseits einige Berichtigungen und Präzisierungen (§§ 1 und 2), andererseits die Untersuchung eines wichtigen Spezialfalls des Gesetzes der großen Zahlen (§ 3).

§ 1.

Herrn V. W. Niemytzki verdanke ich den Hinweis, daß im Beweis des Satzes IV der oben erwähnten Abhandlung ich die falsche Formel

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{fo}}(t) \geqq \frac{1}{2} D$$

benutzte. In der Tat ist leicht zu beweisen, daß

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{fo}}(t) = \frac{1}{2} \mathfrak{D} \, |t| \leqq \frac{1}{2} \sqrt{\mathfrak{D}(t^2)} = \frac{1}{2} D$$

gilt, also die genau inverse Ungleichung.

Nun will ich die Sätze IV, V und VI durch folgende ersetzen:

Satz IV*. *Es sei* $M \leqq D$. *Dann ist*

$$\mathfrak{W}\left(|s| \geqq \frac{D}{2}\right) \geqq \frac{1}{1600}.$$

Satz V*.

$$\mathfrak{W}(|s| \geqq R) \geqq \frac{1}{1600}\left[1 - \frac{M^2 + 4R^2}{D^2}\right].$$

Die Sätze VII bis XI bleiben ungeändert, da wir den Satz VI nur bei dem Beweis des Satzes VIII benutzten, wo man ihn durch den neuen Satz V* ersetzen kann.

---

[1]) Math. Annalen **99** (1928), S. 309.

Beweis des Satzes IV*. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{e}$ den Fall
$$|s| \geqq \frac{D}{2}$$
und mit $\bar{\mathfrak{e}}$ den entgegengesetzten Fall. Wenn
$$|\mathfrak{D}(s)| \geqq 2D$$
ist, so haben wir
$$D^2 \geqq \mathfrak{J}_{\bar{\mathfrak{e}}}(t^2) \geqq \mathfrak{J}_{\bar{\mathfrak{e}}}\left(2D - \frac{D}{2}\right)^2 \geqq \frac{9}{4}\,\mathfrak{W}(\bar{\mathfrak{e}})\,D^2,$$
$$\mathfrak{W}(\bar{\mathfrak{e}}) \leqq \frac{1}{2},$$
womit unser Satz bewiesen ist. Wenn
$$|\mathfrak{D}(s)| < 2D$$
ist, setzen wir
$$\mathfrak{e}_m \equiv \left[3mD \leqq |t| < 3(m+1)D,\ |s| \geqq \frac{D}{2}\right].$$
Wegen des Satzes II haben wir
$$\mathfrak{W}(\mathfrak{e}_m) \leqq \frac{1}{2^{2m}},$$
$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{e}_m}(s^2) \leqq \frac{(m+1)^2}{2^{2m}}\,25D^2,$$
und da im Fall
$$\mathfrak{e}' = \sum_{m=0}^{5} \mathfrak{e}_m$$
die Ungleichungen
$$|t| \leqq 15D, \qquad |s| \leqq 20D$$
erfüllt sind, haben wir auch
$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{e}'}(s^2) \leqq \mathfrak{W}(\mathfrak{e})\,400D^2.$$
Da für den Fall $\bar{\mathfrak{e}}$
$$\mathfrak{J}_{\bar{\mathfrak{e}}}(s^2) \leqq \frac{1}{4}D^2$$
gilt, so haben wir endlich
$$D^2 \leqq \mathfrak{J}(s^2) \leqq \left(\mathfrak{J}_{\bar{\mathfrak{e}}} + \mathfrak{J}_{\mathfrak{e}'} + \sum_{m=6}^{\infty} \mathfrak{J}_{\mathfrak{e}_m}\right)(s^2)$$
$$\leqq \frac{1}{4}D^2 + 400D^2\,\mathfrak{W}(\mathfrak{e}) + \sum_{m=6}^{\infty} \frac{(m+1)^2}{2^{2m}}\,25D^2 \leqq \frac{3}{4}D^2 + 400D^2\,\mathfrak{W}(\mathfrak{e}),$$
$$\mathfrak{W}(\mathfrak{e}) \geqq \frac{1}{1600},$$
w. z. b. w.

Beweis des Satzes V*. Wenn $M > D$ oder $R > \frac{1}{2}D$ gilt, ist unser Satz richtig, da in diesen Fällen die rechte Seite der Ungleichung negativ ist. Wenn aber $M \leqq D$ und $R \leqq \frac{1}{2}D$ gilt, so erhalten wir leicht unseren Satz aus dem Satz IV*.

§ 2.

Bei dem Beweis des Satzes VIII meiner oben zitierten Abhandlung benutzte ich die Formel

$$(16) \qquad \sum_{k=1}^{m_n} \mathfrak{W}(|y_{nk} - f_{1,k}| \geqq m_n n) \to 0\,.$$

Für den strengen Beweis dieser Formel ist folgender Satz nötig:

Satz VI*. *Es sei* $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_n$ *eine Folge unabhängiger Ereignisse und* $\mathfrak{u}$ *ein willkürliches Ereignis, für welche*

$$\mathfrak{W}_{\mathfrak{e}_k}(\mathfrak{u}) \geqq u\,, \qquad \mathfrak{W}(\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2 + \ldots + \mathfrak{e}_n) \geqq u$$

gilt. Dann ist

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{u}) \geqq \frac{1}{9} u^2.$$

Beweis des Satzes VI*. Wenn es ein solches k gibt, daß

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{e}_k) \geqq \frac{1}{3} u$$

gilt, so haben wir

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{u}) \geqq \mathfrak{W}(\mathfrak{e}_k)\, \mathfrak{W}_{\mathfrak{e}_k}(\mathfrak{u}) \geqq \frac{1}{3} u^2,$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Wenn aber für alle k

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{e}_k) < \frac{1}{3} u$$

gilt, so gibt es gewiß ein solches k, daß

$$\frac{1}{3} u \leqq \mathfrak{W}(\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2 + \ldots + \mathfrak{e}_k) \leqq \frac{2}{3} u$$

ist. Bezeichnen wir nun mit $\mathfrak{f}_i$ den Fall

$$\mathfrak{f}_i = \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2 + \ldots + \mathfrak{e}_{i-1}$$

und mit $\bar{\mathfrak{f}}_i$ den entgegengesetzten Fall. Da die Ereignisse $\mathfrak{f}_i$ und $\mathfrak{e}_i$ gegenseitig unabhängig sind, erhalten wir für $i \leqq k$

$$\mathfrak{W}_{\mathfrak{e}_i}(\mathfrak{f}_i) = \mathfrak{W}(\mathfrak{f}_i) \leqq \mathfrak{W}(\mathfrak{f}_k) \leqq \frac{2}{3} u,$$

$$\mathfrak{W}_{\mathfrak{e}_i}(\mathfrak{u}\bar{\mathfrak{f}}_i) \geqq \frac{1}{3} u,$$

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{u}\bar{\mathfrak{f}}_i\mathfrak{e}_i) \geqq \frac{1}{3} u\, \mathfrak{W}(\mathfrak{e}_i),$$

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{u}) \geqq \sum_{i=1}^{k} \mathfrak{W}(\mathfrak{u}\bar{\mathfrak{f}}_i\mathfrak{e}_i) \geqq \frac{1}{3} u \sum_{i=1}^{k} \mathfrak{W}(\mathfrak{e}_i) \geqq \frac{1}{3} u\, \mathfrak{W}(\mathfrak{f}_k) \geqq \frac{1}{9} u^2,$$

w. z. b. w.

Beweis der Formel (16). Es sei

$$\mathfrak{u} \equiv \left(|\sigma_n - d_n| \geqq \frac{\eta}{2}\right),$$

$$\mathfrak{e}_k \equiv (|y_{nk} - f_{nk}| \geqq m_n \eta),$$

$$\mathfrak{f}_k \equiv \left\{\left|\frac{\sum\limits_{i \neq k} y_{ni} + f_{nk}}{m_n} - d_n\right| \geqq \frac{\eta}{2}\right\}.$$

Es ist offenbar

$$\mathfrak{W}_{\mathfrak{f}_k}(\mathfrak{u}) \geqq \frac{1}{2}.$$

Für genügend große n haben wir, unter der Voraussetzung der Stabilität der Mittelwerte,

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{u}) \leqq \frac{1}{4}$$

und folglich

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{f}_k) \leqq \frac{1}{2}.$$

Wenn $\mathfrak{e}_k$ erfüllt und $\mathfrak{f}_k$ nicht erfüllt ist, so ist $\mathfrak{u}$ erfüllt. Folglich haben wir

$$\mathfrak{W}_{\mathfrak{e}_k}(\mathfrak{f}_k) + \mathfrak{W}_{\mathfrak{e}_k}(\mathfrak{u}) \geqq 1.$$

Aber da $\mathfrak{e}_k$ und $\mathfrak{f}_k$ gegenseitig unabhängig sind, so gilt für genügend große n

$$\mathfrak{W}_{\mathfrak{e}_k}(\mathfrak{f}_k) = \mathfrak{W}(\mathfrak{f}_k) \leqq \frac{1}{2},$$

$$\mathfrak{W}_{\mathfrak{e}_k}(\mathfrak{u}) \geqq \frac{1}{2}.$$

Wegen des Satzes VI* erhalten wir

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{u}) \geqq \frac{1}{36}\mathfrak{W}^2(\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2 + \ldots + \mathfrak{e}_{m_n}),$$

und da $\mathfrak{W}(\mathfrak{u})$ gegen Null konvergiert, so gilt auch

$$\mathfrak{W}(\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2 + \ldots + \mathfrak{e}_{m_n}) \to 0,$$

$$\sum_{k=1}^{m_n} \mathfrak{W}(\mathfrak{e}_k) \to 0,$$

w. z. b. w.

§ 3.

Wir wollen nun einen besonderen Fall des Gesetzes der großen Zahlen untersuchen, nämlich den, wo alle unabhängigen Größen

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$$

dieselbe Verteilung

$$\mathfrak{W}(y < x) = F(x)$$

haben. In diesem Fall gilt:

Satz XII. *Für die Stabilität der Mittelwerte unabhängiger Größen mit einer festen Verteilung ist die Bedingung*

$$n\,\mathfrak{W}(|y| > n) \to 0$$

notwendig und hinreichend.

Zum Beweis, daß diese Bedingung hinreichend ist, setzen wir

$$\begin{aligned} \bar{y}_{nk} &= y_n, \quad \text{wenn} \quad |y_n| \leqq n, \\ \bar{y}_{nk} &= 0, \quad \text{wenn} \quad |y_n| > n. \end{aligned}$$

Es ist leicht einzusehen, daß, wenn unsere Bedingung erfüllt ist, das System $\{\bar{y}_{nk}\}$ mit $\{y_n\}$ äquivalent ist, und daß

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{D}(\bar{z}_{nk}^2) \leqq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathfrak{D}(\bar{y}_{nk}^2) \to 0$$

gilt. Folglich sind wegen des Satzes VIII die Mittelwerte stabil.

Sind andererseits die Mittelwerte stabil, so gilt, wie wir bewiesen haben, die Formel (16). In unserem Falle verwandelt sich (16) in

$$n\,\mathfrak{W}(|y - f| > n\eta) \to 0,$$

wo f eine Konstante ist. Aus dieser Formel folgt die zu beweisende Bedingung unmittelbar.

Wenn unsere Größen y_n eine bestimmte mathematische Erwartung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dF(x)$$

haben, so ist die Bedingung XII erfüllt, da in diesem Fall

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|\,dF(x) < \infty,$$

$$n\,\mathfrak{W}(|y| > n) \leqq \left(\int_{-\infty}^{-n} + \int_{+n}^{-\infty}\right)|x|\,dF(x) \to 0$$

gilt. Man könnte zeigen, daß die Stabilität in diesem Falle normal sein wird. So haben wir

Satz XIII. *Für die normale Stabilität der Mittelwerte unabhängiger Größen mit fester Verteilung ist die Existenz der mathematischen Erwartung notwendig und hinreichend*[2].

Der letzte Satz ist schon früher von A. Khintchine bewiesen worden[3].

---

[2]) Die Notwendigkeit ist trivial und hängt damit zusammen, daß die Definition der normalen Stabilität nur im Falle der Existenz der mathematischen Erwartung einen Sinn hat.

[3]) Comptes Rendus 188, S. 477.

(Eingegangen am 8. 2. 1929.)