Werk

Titel: Mathematische Annalen
Ort: Berlin
Jahr: 1930
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN235181684_0102
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0102

LOG Id: LOG_0028
LOG Titel: Über das monotone Polynom, welches die minimale Abweichung von Null hat, wenn die Werte seiner ersten Ableitungen gegeben sind
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684

Über das monotone Polynom, welches die minimale Abweichung von Null hat, wenn die Werte seiner ersten Ableitungen gegeben sind.

Von

W. Břečka und J. Geronimus in Charkow.

Wir wollen das folgende Problem behandeln:

Man soll in dem Intervall $(-1, +1)$ *die minimale Abweichung von Null des Polynoms höchstens n-ten Grades*

$$y_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \ldots + A_n$$

finden, welches in diesem Intervall monoton wachsend ist, wenn die Werte seiner k ersten Ableitungen in einem Punkte $|\eta| < 1 - \varepsilon$ *gegeben sind:*

$$y_n^{(i)}(\eta) = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

wobei ε *eine beliebig kleine, aber von n unabhängige Zahl bedeutet.*

I. Kapitel.

§ 1.

Wir wollen mit einem leichteren Problem beginnen:

Man soll das Minimum des Integrals

$$S = \int_{-1}^{1} q(x) R_m^2(x)\, dx$$

finden, wo $q(x)$ *ein gegebenes Polynom l-ten Grades ist, welches keine Wurzel in dem Intervall* $-1 < x < 1$ *hat;* $R_m(x)$ *ist ein Polynom m-ten Grades. Die Werte dieses Polynoms und seiner r ersten Ableitungen in einem Punkte* $|\eta| < 1 - \varepsilon$ *sind gegeben:*

$$R_m^{(i)}(\eta) = b_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, r).$$

Um dieses Problem zu lösen, wollen wir

$$R_m(x) = \sum_{s=0}^{m} c_s P_s(x)$$

setzen, wo die Polynome $P_s(x)$ normiert und orthogonal sind, d. h.

$$\int_{-1}^{1} q(x) P_s(x) P_p(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } s \neq p, \\ 1 & \text{für } s = p. \end{cases}$$

Es soll nun

$$S = \sum_{s=0}^{m} c_s^2 \tag{1}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{s=0}^{m} c_s P_s^{(i)}(\eta) = b_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, r)$$

zum Minimum gemacht werden.

Dann erhalten wir die Gleichungen

$$2 c_s = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i P_s^{(i)}(\eta) \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots, m), \tag{2}$$

und hieraus folgt

$$2 S = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i b_i . \tag{3}$$

Weiter multiplizieren wir die Gleichungen (2) mit $P_s^{(j)}(\eta)$, summieren und erhalten

$$2 b_j = \sum_{i=0}^{r} \lambda_i a_{ij} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, r), \tag{4}$$

wo

$$a_{ij} = \sum_{s=0}^{m} P_s^{(i)}(\eta) P_s^{(j)}(\eta)$$

ist.

Nach (3) und (4) finden wir

$$\begin{vmatrix} S & b_0 & b_1 & \ldots & b_r \\ b_0 & a_{00} & a_{10} & \ldots & a_{r0} \\ b_1 & a_{01} & a_{11} & \ldots & a_{r1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_r & a_{0r} & a_{1r} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} = 0$$

und endlich

$$S = \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{r} (-1)^{i+j} b_i b_j \frac{A_{ij}}{a}, \tag{4'}$$

wo

$$a = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{10} & \dots & a_{r0} \\ a_{01} & a_{11} & \dots & a_{r1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{0r} & a_{1r} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}$$

ist und A_{ij} die Unterdeterminante dieser Determinante ist, welche dem Element a_{ij} entspricht.

§ 2.

Jetzt soll

$$a_{ij} = \sum_{s=0}^{m} P_s^{(i)}(\eta)\, P_s^{(j)}(\eta) \tag{5}$$

gefunden werden. Die Formel

$$\sum_{s=0}^{m} P_s(x)\, P_s(y) = c_m \frac{P_{m+1}(x)\, P_m(y) - P_m(x)\, P_{m+1}(y)}{x-y} \text{ [1]}, \tag{6}$$

wo

$$c_m = \frac{d_m^{(m)}}{d_{m+1}^{(m+1)}}, \qquad (P_m(x) = d_m^{(m)} x^m + d_{m-1}^{(m)} x^{m-1} + \dots + d_0^{(m)}),$$

benutzend, erhalten wir nach i-maliger Differentiation von (6) in bezug auf x folgendes:

$$\sum_{s=0}^{m} P_s^{(i)}(x)\, P_s(y) = c_m \Bigg\{ P_m(y) \sum_{r=0}^{i} (-1)^r \binom{i}{r} \frac{P_{m+1}^{(i-r)}(x)\, r!}{(x-y)^{r+1}} - P_{m+1}(y) \sum_{r=0}^{i} (-1)^r \binom{i}{r} \frac{P_m^{(i-r)}(x)\, r!}{(x-y)^{r+1}} \Bigg\},$$

und indem wir alsdann diesen Ausdruck j-mal in bezug auf y differenzieren, erhalten wir

$$\sum_{s=0}^{m} P_s^{(i)}(x)\, P_s^{(j)}(y) = c_m \Bigg\{ \sum_{r=0}^{i} (-1)^r \binom{i}{r} P_{m+1}^{(i-r)}(x) \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} \frac{P_m^{(j-l)}(y)\,(r+l)!}{(x-y)^{r+l+1}} - \sum_{r=0}^{i} (-1)^r \binom{i}{r} P_m^{(i-r)}(x) \sum_{l=0}^{j} \binom{j}{l} \frac{P_{m+1}^{(j-l)}(y)\,(r+l)!}{(x-y)^{r+l+1}} \Bigg\}.$$

Setzen wir $x = y + t$ und entwickeln alsdann alle Polynome, die von x abhängig sind, in eine Taylorreihe und setzen schließlich $t = 0$, so finden

[1]) Vgl. Darboux, Approximation des fonctions de très grands nombres, Journal de Mathématiques pures et appliquées (3) 4 (1878), p. 413.

wir, daß unsere Summe den Wert

$$\sum_{s=0}^{m} P_s^{(i)}(\eta) P_s^{(j)}(\eta)$$

$$= c_m \sum_{l=0}^{j} \left\{ \binom{j}{l} [P_m^{(j-l)}(\eta) P_{m+1}^{(i+l+1)}(\eta) - P_{m+1}^{(j-l)}(\eta) P_m^{(i+l+1)}(\eta)] \sum_{r=0}^{i} \frac{(-1)^r \binom{i}{r}}{l+r+1} \right\}$$

hat; es ist aber

$$\sum_{r=0}^{i} (-1)^r \binom{i}{r} \cdot \frac{1}{l+r+1} = \sum_{r=0}^{i} (-1)^r \binom{i}{r} \int_0^1 x^{r+l}\, dx = \int_0^1 (1-x)^i x^l\, dx$$

$$= B(i+1, l+1) = \frac{i!\, l!}{(i+l+1)!}$$

und wir erhalten endlich

$$\sum_{s=0}^{m} P_s^{(i)}(\eta) P_s^{(j)}(\eta) \tag{7}$$

$$= c_m \frac{i!\, j!}{(i+j+1)!} \sum_{l=0}^{j} \binom{i+j+1}{j-l} [P_m^{(j-l)}(\eta) P_{m+1}^{(i+l+1)}(\eta) - P_{m+1}^{(j-l)}(\eta) P_m^{(i+l+1)}(\eta)]$$

$$= c_m \frac{i!\, j!}{(i+j+1)!} \sum_{p=0}^{j} \binom{i+j+1}{p} [P_m^{(p)}(\eta) P_{m+1}^{(i+j+1-p)}(\eta) - P_{m+1}^{(p)}(\eta) P_m^{(i+j+1-p)}(\eta)].$$

§ 3.

Wir wollen die asymptotische Form von (7) finden, indem wir annehmen, daß m ins Unendliche wächst (i und j bleiben endlich).

Die Polynome $R_n(x)$, welche die Bedingungen der Orthogonalität

$$\int_{-1}^{1} \frac{p^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} R_m(x) R_n(x)\, dx = 0 \qquad (m \neq n)$$

erfüllen, lassen die asymptotischen Ausdrücke

$$R_m(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\cos(m\varphi + \psi)}{p(x)}$$

zu, wo $\varphi = \arccos x$ und ψ eine Funktion ist, die von $p(x)$ abhängt[2]).

Setzt man

$$q(x) = \frac{p^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \eta = \cos\varphi \qquad (|\eta| < 1 - \varepsilon),$$

---

[2]) S. Bernstein, Sur quelques propriétés asymptotiques de la meilleure approximation, Comptes Rendus **186**, p. 840. — Sur les polynomes orthogonaux, ibidem **188**, p. 361.

so erhält man

$$P_m(\cos\varphi) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\cos(m\varphi+\psi)}{\sqrt{q(\cos\varphi)\sin\varphi}}.$$

Alsdann ist

$$P_m^{(p)}(\cos\varphi) \sim \frac{\sqrt{2}\cos\left(m\varphi+\psi+p\cdot\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{\pi q(\cos\varphi)\sin\varphi}\,(-\sin\varphi)^p}\cdot m^p$$

und

$$P_m^{(p)}(\cos\varphi)\,P_{m+1}^{(i+j+1-p)}(\cos\varphi) - P_{m+1}^{(p)}(\cos\varphi)\,P_m^{(i+j+1-p)}(\cos\varphi)$$

$$\sim \frac{2}{\pi}\cdot\left\{\frac{\cos\left(m\varphi+\psi+p\frac{\pi}{2}\right)\cos\left[(m+1)\varphi+\psi+(i+j+1-p)\frac{\pi}{2}\right]}{(-1)^{i+j+1}q(\cos\varphi)(\sin\varphi)^{i+j+2}}\right.$$

$$\left.-\frac{\cos\left[(m+1)\varphi+\psi+p\frac{\pi}{2}\right]\cos\left[m\varphi+\psi+(i+j+1-p)\frac{\pi}{2}\right]}{(-1)^{i+j+1}q(\cos\varphi)(\sin\varphi)^{i+j+2}}\right\}\cdot m^{i+j+1}$$

$$=\frac{m^{i+j+1}}{\pi}\left\{\frac{\cos\left[(2m+1)\varphi+2\psi+(i+j+1)\frac{\pi}{2}\right]+\cos\left[\varphi+(i+j+1)\frac{\pi}{2}-p\pi\right]}{(-1)^{i+j+1}q(\cos\varphi)(\sin\varphi)^{i+j+2}}\right.$$

$$\left.-\frac{\cos\left[(2m+1)\varphi+2\psi+(i+j+1)\frac{\pi}{2}\right]+\cos\left[\varphi-(i+j+1)\frac{\pi}{2}+p\pi\right]}{(-1)^{i+j+1}q(\cos\varphi)(\sin\varphi)^{i+j+2}}\right\}$$

$$=-\frac{2m^{i+j+1}(-1)^{i+j+1}\sin\varphi\cdot\sin\left(\frac{i+j+1}{2}\pi-p\pi\right)}{\pi q(\cos\varphi)(\sin\varphi)^{i+j+2}}$$

$$=\frac{2m^{i+j+1}(-1)^{i+j+p}\sin\frac{i+j+1}{2}\pi}{\pi q(\cos\varphi)(\sin\varphi)^{i+j+1}}=\frac{2m^{i+j+1}(-1)^{i+j}\cos\frac{i+j}{2}\pi}{\pi q(\cos\varphi)(\sin\varphi)^{i+j+1}}(-1)^p.$$

Dann ist

$$a_{ij}=\sum_{s=0}^{m}P_s^{(i)}(\eta)\,P_s^{(j)}(\eta)\sim c_m\frac{i!\,j!}{(i+j+1)!}\sum_{p=0}^{j}\binom{i+j+1}{p}\frac{2m^{i+j+1}(-1)^{i+j}\cos\frac{i+j}{2}\pi\cdot(-1)^p}{\pi q(\cos\varphi)(\sin\varphi)^{i+j+1}}$$

$$=c_m\frac{i!\,j!}{(i+j+1)!}\cdot\frac{2m^{i+j+1}(-1)^{i+j}\cos\frac{i+j}{2}\pi}{\pi q(\cos\varphi)(\sin\varphi)^{i+j+1}}\sum_{p=0}^{j}\binom{i+j+1}{p}(-1)^p.$$

Man findet leicht, daß

$$(-1)^p\binom{i+j+1}{p}=f(p)-f(p-1)$$

ist, wo

$$f(p)=(-1)^p\binom{i+j}{p}$$

ist. Sodann ist

$$\sum_{p=0}^{j}\binom{i+j+1}{p}(-1)^p = 1+\sum_{p=1}^{j}\binom{i+j+1}{p}(-1)^p = 1+f(j)-f(0) = (-1)^j\binom{i+j}{j}$$

und

$$a_{ij} \sim \frac{2\,c_m\,(-1)^{i+j}\cos\frac{i-j}{2}\pi\cdot m^{i+j+1}}{\pi\,q\,(\cos\varphi)\,(\sin\varphi)^{i+j+1}\,(i+j+1)}.$$

Die Szegösche Formel[3]) benutzend finden wir leicht, daß $c_m \sim \frac{1}{2}$ ist.

Also endlich

(8)
$$a_{ij} \sim \frac{(-1)^{i+j}\cos\frac{i-j}{2}\pi\cdot m^{i+j+1}}{\pi\,q\,(\cos\varphi)\,(\sin\varphi)^{i+j+1}\,(i+j+1)}.$$

§ 4.

Es soll nun $\frac{A_{ij}}{a}$ gefunden werden, wo a die aus a_{ij} gebildete Determinante und A_{ij} die Unterdeterminante dieser Determinante ist, welche dem Element a_{ij} entspricht.

Man kann leicht finden, daß

$$\frac{a}{A_{ij}} \sim \frac{(-1)^{i+j}\cdot m^{i+j+1}}{\pi\,q\,(\cos\varphi)\,(\sin\varphi)^{i+j+1}}\cdot\frac{d}{D_{ij}}$$

ist, wo d die aus $d_{ij} = \dfrac{\cos\frac{i-j}{2}\pi}{i+j+1}$ gebildete Determinante und D_{ij} die entsprechende Unterdeterminante ist.

Nun betrachten wir das System der linearen Gleichungen:

(9)
$$\sum_{s=0}^{r} x_s\,\frac{\cos\frac{t-s}{2}\pi}{t+s+1} = \varepsilon_t \qquad \begin{cases}\text{für } t \neq j & \varepsilon_t = 0,\\ \text{für } t = j & \varepsilon_t = 1.\end{cases}$$

Dann ist

$$x_i = (-1)^{i+j}\frac{D_{ij}}{d}.$$

Es sei

$$y_i = (-1)^{\frac{i}{2}}\,x_i,$$

dann ist

$$\sum_{s=0}^{r}\frac{y_s}{t+s+1} = (-1)^{\frac{t}{2}}\varepsilon_t, \qquad s \equiv t \pmod 2.$$

---

[3]) G. Szegö, Über die Entwickelung einer analytischen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems, Math. Annalen 82 (1920), S. 207.

Alsdann ist

$$y_i = (-1)^{i+j+\frac{1}{2}j} \cdot \frac{\overline{D}_{ij}}{\overline{d}},$$

wo $\overline{d}$ die aus $\overline{d}_{ij} = \frac{1+(-1)^{i+j}}{2(i+j+1)}$ gebildete Determinante und $\overline{D}_{ij}$ die entsprechende Unterdeterminante ist.

Dann ist

$$(-1)^{i+j+\frac{1}{2}j} \cdot \frac{\overline{D}_{ij}}{\overline{d}_{ij}} = (-1)^{i+j+\frac{1}{2}i} \cdot \frac{D_{ij}}{d}$$

und

$$\frac{D_{ij}}{d} = (-1)^{\frac{i-j}{2}} \cdot \frac{\overline{D}_{ij}}{\overline{d}}.$$

Die Werte von $\frac{\overline{D}_{ij}}{\overline{d}}$ sind[4])

$$\frac{\overline{D}_{ij}}{\overline{d}} = \frac{(\nu-i-1)(\nu+j+1)\overline{P}_\nu^{(i)}(0)\,\overline{P}_\nu^{(j)}(0)}{i!\; j!\; (i+j+1)} \left.\begin{cases} \nu = r & \text{für } i \equiv j \equiv r \\ \nu = r-1 & \text{für } i \equiv j \equiv r-1 \end{cases}\right\} (\operatorname{mod} 2),$$

wo $\overline{P}_\nu(x)$ das Legendresche Polynom ist. Für $i \equiv j-1 \pmod 2$ ist $\overline{D}_{ij} = 0$. Also haben wir

$$\frac{D_{ij}}{d} = (-1)^{\frac{i-j}{2}} \cdot \frac{(\nu+i+1)(\nu+j+1)\overline{P}_\nu^{(i)}(0)\,\overline{P}_\nu^{(j)}(0)}{i!\; j!\; (i+j+1)}$$

und endlich

$$(10)\quad S \sim \pi q(\cos\varphi) \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{r} \frac{(\sin\varphi)^{i+j+1}(-1)^{\frac{i-j}{2}} b_i b_j}{i!\; j!\; (i+j+1)\, m^{i+j+1}} (\nu+i+1)(\nu+j+1)\overline{P}_\nu^{(i)}(0)\,\overline{P}_\nu^{(j)}(0)$$

$$= \frac{\pi q(\cos\varphi)}{2^{2\nu}} \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{r} \frac{(\sin\varphi)^{i+j+1} b_i b_j}{m^{i+j+1}} \cdot \frac{(\nu+i+1)!\; (\nu+j+1)!}{\left(\frac{\nu+i}{2}\right)!\left(\frac{\nu-i}{2}\right)!\left(\frac{\nu+j}{2}\right)!\left(\frac{\nu-j}{2}\right)!\; i!\; j!\; (i+j+1)}.$$

Wenn alle Zahlen b_i von einer und derselben Ordnung sind, so ist

$$(11)\qquad S \sim \frac{\pi b_0^2\, q(\cos\varphi)\sin\varphi}{m} \cdot \frac{(\nu+1)!^2}{2^{2\nu}\left(\frac{\nu}{2}\right)!^4},$$

wo $\nu = r$, *wenn* r *gerade, und*

$\nu = r-1$, *wenn* r *ungerade ist.*

[4]) J. Geronimus, Über die minimale mittlere quadratische Abweichung des Polynoms von Null im gegebenen Intervall (Russisch), Communications de la Société Mathématique de Kharkow (4) 2 (1928), S. 32.

Wenn $\frac{b_i}{i!} \sim \beta_i b_0 m^i$, *wo* β_i *endliche Zahlen sind, so ist*

$$(12)\qquad S \sim \frac{\pi b_0^2 q(\cos\varphi)}{2^{2\nu} m} \sum_{i=0}^{r} \sum_{j=0}^{r} \frac{(\sin\varphi)^{i+j+1} \beta_i \beta_j (\nu+i+1)!\,(\nu+j+1)!}{(i+j+1)\left(\frac{\nu+i}{2}\right)!\left(\frac{\nu-i}{2}\right)!\left(\frac{\nu+j}{2}\right)!\left(\frac{\nu-j}{2}\right)!},$$

wo $\nu = r$ *für* $i \equiv j \equiv r \pmod 2$,

$\nu = r - 1$ *für* $i \equiv j \equiv r - 1 \pmod 2$.

II. Kapitel.

§ 5.

Jetzt wollen wir zum monotonen Polynom zurückkehren. Es ist klar, daß *es folgende Form hat*

$$y_n(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x)\, q(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\, dx \qquad (\alpha, \beta = 0, 1),$$

wo $q(x)$ *keine Wurzel für* $-1 \leqq x \leqq 1$ *hat.*

Man kann beweisen, daß $q(x)$ *höchstens* $(k-1)$*-ten Grades ist, wenn* k *gerade, und* k*-ten Grades, wenn* k *ungerade ist.*

Ist k gerade, so läßt sich ein Polynom konstruieren

$$\bar{y}(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}[x-\eta]^k\, dx;$$

dann erfüllt, wenn $q(x)$ vom Grade $\geqq k$ ist, das Polynom

$$R_n(x) = y_n(x) - \lambda \bar{y}(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,[q(x) - \lambda(x-\eta)^k]\, dx$$

alle Bedingungen unseres Problems, wenn λ so klein gewählt ist, daß

$$q(x) - \lambda(x-\eta)^k > 0 \quad \text{für} \quad -1 \leqq x \leqq 1;$$

aber für $\lambda > 0$ ist

$$R_n(1) < y_n(1).$$

Folglich ist $q(x)$ höchstens $(k-1)$-ten Grades. Ist k ungerade, so konstruiert man das Polynom auf folgende Weise

$$z(x) = \int_{-1}^{x} u^2(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}[x-\eta]^{k+1}\, dx$$

und man beweist, daß $q(x)$ höchstens k-ten Grades ist.

Demnach können wir

$$y_n(x) = \int_{-1}^{x} q(x)\, u^2(x)\, dx$$

setzen, wo der Grad von $q(x)$ *endlich ist.*

Es sei

$$q(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_k).$$

Dann haben wir

$$\frac{q'(\eta)}{q(\eta)} = \sum_{s=1}^{k} \frac{1}{\eta-\alpha_s}.$$

Wir sehen, daß $\left|\frac{q'(\eta)}{q(\eta)}\right|$ eine endliche Zahl ist oder sogar, wenn alle Wurzeln α_i unendlich groß sind, gegen Null strebt.

Ebenso haben wir

$$\frac{q''(\eta)}{q(\eta)} = \left\{\frac{q'(\eta)}{q(\eta)}\right\}^2 - \sum_{s=1}^{k} \frac{1}{(\eta-\alpha_s)^2}$$

usw. So sehen wir, daß für $s > 0$

$$\lim \left\{\frac{1}{m^s}\,\frac{q^{(i)}(\eta)}{q(\eta)}\right\} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, k;\ m \to \infty).$$

Wenn jedoch einige Wurzeln den Wert ± 1 haben, z. B. $\alpha_i = 1$, so haben wir

$$\left|\frac{1}{\eta - a_i}\right| < \frac{1}{\varepsilon},$$

wo ε eine kleine positive Konstante ist, die von n unabhängig ist. Deshalb haben

$$\frac{q'(\eta)}{q(\eta)},\quad \frac{q''(\eta)}{q(\eta)},\quad \ldots,\quad \frac{q^{(k)}(\eta)}{q(\eta)}$$

eine obere Grenze, die von n unabhängig ist.

Hiernach läßt sich unsere Aufgabe in folgender Weise auf die in §§ 1 — 4 gelöste zurückführen. Wir wissen, daß

$$q(\eta)\,u^2(\eta) = a_1, \qquad \frac{d^t}{dx^t}\left[q(x)\,u^2(x)\right]_{x=\eta} = a_{t+1} \qquad (t = 1, 2, 3, \ldots, k-1)$$

ist. *Nehmen wir an, daß alle gegebenen Ableitungen a_i einer und derselben Ordnung sind und daß $a_1 \neq 0$ ist.* Dann haben wir

$$a_{s+1} = \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} q^{(s-i)}(\eta) \sum_{p=0}^{i} \binom{i}{p} u^{(p)}(\eta)\,u^{(i-p)}(\eta)$$

und

$$(13)\qquad \frac{a_{s+1}}{a_1} = \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} \frac{q^{(s-i)}(\eta)}{q(\eta)} \sum_{p=0}^{i} \left\{\binom{i}{p} \frac{u^{(p)}(\eta)}{u(\eta)} \cdot \frac{u^{(i-p)}(\eta)}{u(\eta)}\right\}.$$

Wenn wir

$$u^{(p)}(\eta) = b_p$$

setzen, so kann man leicht ersehen, daß wir imstande sind aus diesen Gleichungen alle b_p aufzufinden, und daß alle diese Ableitungen einer und derselben Ordnung sind.

Zum Beispiel

$$q(\eta)\, u^2(\eta) = q(\eta)\, b_0^2 = a_1,$$

$$q'(\eta)\, u^2(\eta) + 2 q(\eta)\, u(\eta)\, u'(\eta) = b_0^2 q'(\eta) + 2 b_0 b_1 q(\eta) = a_2,$$

woraus

$$\frac{a_2}{a_1} = 2\frac{b_1}{b_0} + \frac{q'(\eta)}{q(\eta)}, \qquad 2\frac{b_1}{b_0} = \frac{a_2}{a_1} - \frac{q'(\eta)}{q(\eta)}.$$

Ferner ist

$$u^2(\eta)\, q''(\eta) + 4 u(\eta)\, u'(\eta)\, q'(\eta) + 2 q(\eta)\, u(\eta)\, u''(\eta) + 2 q(\eta)\, u'^2(\eta)$$
$$= b_0^2 q''(\eta) + 4 b_0 b_1 q'(\eta) + 2 b_0 b_2 q(\eta) + 2 b_1^2 q(\eta) = a_3$$

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{q''(\eta)}{q(\eta)} + 4\frac{b_1}{b_0}\cdot\frac{q'(\eta)}{q(\eta)} + 2\frac{b_2}{b_0} + 2\left(\frac{b_1}{b_0}\right)^2,$$

woraus

$$2\frac{b_2}{b_0} = \frac{a_3}{a_1} - \frac{q''(\eta)}{q(\eta)} - 2\frac{q'(\eta)}{q(\eta)}\left(\frac{a_2}{a_1} - \frac{q'(\eta)}{q(\eta)}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{a_2}{a_1} - \frac{q'(\eta)}{q(\eta)}\right)^2 \text{ usw.}$$

Es soll nun das Integral

$$L = \int_{-1}^{1} q(x)\, u^2(x)\, dx$$

unter den Nebenbedingungen

$$u^{(i)}(\eta) = b_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, k-1)$$

(wenn alle b_i einer und derselben Ordnung sind) zum Minimum gemacht werden.

Die Formel (11) benutzend, erhalten wir

$$L \sim \frac{\pi q(\cos\varphi)\, b_0^2 \sin\varphi}{m} (\nu+1)^2 [\overline{P}_\nu(0)]^2 = \frac{\pi q(\cos\varphi)}{m} b_0^2 \sin\varphi \left\{\frac{(\nu+1)!}{2^\nu \left(\frac{\nu}{2}\right)!^2}\right\}^2,$$

wo $\nu = k-1$, *wenn k ungerade ist, und* $\nu = k-2$ *für gerades k. Endlich im Falle, wo die gegebenen Ableitungen einer und derselben Ordnung sind, ist die minimale gesuchte Abweichung von Null durch die Formel*

$$L \sim \frac{2\pi a_1 \sin\varphi}{n} \left\{\frac{(\nu+1)!}{2^\nu \left(\frac{\nu}{2}\right)!^2}\right\}^2 \tag{14}$$

gegeben, weil

$$q(\cos\varphi)\, b_0^2 = a_1$$

ist.

Wenn $k = 1$, $\nu = 0$, so finden wir, daß

$$L \sim \frac{2\pi a_1 \sin\varphi}{n} \tag{15}$$

ist[5]).

---

[5]) Vgl. W. Břečka and J. Geronimus, On a monotonic polynomial having the minimal deflection from zero, Tôhoku Mathematical Journal **30** (1929), Nr. 3, 4, S. 389.

§ 6.

Nun wollen wir den Fall betrachten, wo die Ordnung der gegebenen Ableitungen in geometrischer Progression wächst.

Alsdann ist

$$a_{i+1} \sim i!\, a_1 \alpha_i m^i,$$

wo α_i endliche Zahlen sind. Wir erhalten aus (13)

$$(16) \qquad s!\, \alpha_s m^s = \sum_{i=0}^{s} \binom{s}{i} \frac{q^{(s-i)}(\eta)}{q(\eta)} \sum_{p=0}^{i} \left\{ \binom{i}{p} \frac{b_p}{b_0} \cdot \frac{b_{i-p}}{b_0} \right\}.$$

Wir wollen zeigen, daß

$$\frac{b_i}{i!} \sim b_0 \beta_i m^i$$

ist. Wir sehen, daß

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{q'(\eta)}{q(\eta)} + 2\frac{b_1}{b_0}$$

ist, also

$$\frac{b_1}{1!} \sim b_0 \beta_1 m,$$

weil

$$\frac{a_2}{a_1} \sim \alpha_1 m$$

ist. *Wir wollen beweisen, daß, wenn*

$$\frac{b_i}{i!} \sim b_0 \beta_i m^i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, s-1)$$

ist, so

$$\frac{b_s}{s!} \sim b_0 \beta_s m^s$$

ist.

Aus (16) finden wir, daß

$$s!\, \alpha_s m^s = \sum_{i=0}^{s-1} i! \binom{s}{i} \frac{q^{(s-i)}(\eta)}{q(\eta)} \left\{ \sum_{p=0}^{i} \beta_p \beta_{i-p} m^i \right\} + \sum_{p=0}^{s} \binom{s}{p} \frac{b_p}{b_0} \cdot \frac{b_{s-p}}{b_0}$$

ist. Die zweite Summe ist gleich

$$2\frac{b_s}{b_0} + s! \sum_{p=1}^{s-1} \beta_p \beta_{s-p} m^s,$$

also ist

$$\frac{b_s}{s!} \sim b_0 \beta_s m^s$$

und

$$(17) \qquad 2\beta_s = \alpha_s - \sum_{p=1}^{s-1} \beta_p \beta_{s-p}.$$

Diese Formel gestattet alle β zu berechnen.

Es soll nun das Integral

$$L = \int_{-1}^{1} q(x)\, u^2(x)\, dx$$

unter den Nebenbedingungen

$$u^{(i)}(\eta) = b_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, k-1),$$

wo

$$\frac{b_i}{i!} \sim b_0 \beta_i m^i$$

ist, zum Minimum gemacht werden.

Aus der Formel (12) erhalten wir

$$(18) \qquad L \sim \frac{\pi a_1}{2^{2\nu-1} n} \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\sin\varphi)^{i+j+1} \beta_i \beta_j (\nu+i+1)!\,(\nu+j+1)!}{(i+j+1)\left(\frac{\nu+i}{2}\right)!\left(\frac{\nu-i}{2}\right)!\left(\frac{\nu+j}{2}\right)!\left(\frac{\nu-j}{2}\right)!},$$

wo $i \equiv j \pmod 2$

und $\nu = k-1$, wenn k ungerade ist,

und $\nu = k-2$ für gerades k.

Die Werte von β können aus den Gleichungen (17) berechnet werden.

Charkow (Ukraine).

(Eingegangen am 30. 3. 1929.)