

Werk

Titel: Mathematische Annalen

Ort: Berlin

Jahr: 1930

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN235181684_0102

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0102

LOG Id: LOG_0031

LOG Titel: Bemerkung zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Bemerkung zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz.

Von

Karl Dörge in Köln.

Der Hilbertsche Irreduzibilitätssatz¹⁾ besagt das Folgende: $f(x, t)$ sei ein Polynom von x und t mit rationalen Koeffizienten. Ist dann f als Polynom der beiden Veränderlichen x, t im natürlichen Rationalitätsbereich P irreduzibel²⁾, so kann man t als ganze rationale Zahl so spezialisieren, daß f , dann als Polynom von x allein, auch in P irreduzibel wird. Genauer besagt der Satz, daß man t auf unbeschränkt viele Weisen in dieser Art spezialisieren kann.

Aus dem in der Abhandlung von André Weil, Acta mathematica Bd. 52, S. 315 mitgeteilten Satze folgt, wie mir der Entdecker desselben freundlicherweise mitgeteilt hat, das außerordentlich weitgehende allgemeine Resultat: Ein Polynom $f(x, t)$ mit rationalen Koeffizienten zerfällt höchstens dann für unendlich viele ganzzahlige Werte t , wenn es möglich ist, für t einen Ausdruck in einer neuen Unbestimmten u

$$t = c_{-m} u^{-m} + c_{-m+1} u^{-m+1} + \dots + c_0 + c_1 u + \dots + c_m u^m \text{ } ^3)$$

zu finden, so daß u in t wirklich vorkommt und nach der Substitution f als rationale Funktion von x und u in P identisch zerfällt.

Ich behandle hier den Spezialfall, daß in dem nach x geordneten Polynom der höchste und letzte Koeffizient a_0 und a_n nicht von t abhängen, t also nur in den übrigen Koeffizienten a_1, \dots, a_{n-1} steckt. Ich beweise dann — unter der selbstverständlichen Voraussetzung des H. I.-S. —, indem ich den H. I.-S. wesentlich benutze: f kann höchstens dann für unendlich viele — sogar rationale — t in P zerfallen, wenn ein durch n

¹⁾ Im folgenden abgekürzt als H. I.-S. Der Satz ist von Hilbert in Crelles Journal 110 bewiesen.

²⁾ Diese Voraussetzung nenne ich in Zukunft „die Voraussetzung des H. I.-S.“

³⁾ Die c brauchen nicht rational zu sein.

allein — es wird $a_0 \neq 0$ vorausgesetzt, so daß n der genaue Grad ist — einfach zu charakterisierendes Polynom $\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n)$ identisch in t verschwindet. Es zeigt sich an Beispielen, daß diese Bedingung nicht ganz fortgelassen werden kann.

Dann behandle ich im zweiten Teil den noch weiter spezialisierten Fall, in dem $f(x, t)$ so entsteht, daß man in dem Ausdruck $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ einen Koeffizienten, etwa a_ν , durch t ersetzt, während alle übrigen Koeffizienten a feste rationale Zahlen bedeuten. Dann ergibt sich z. B.: Sind ν und n teilerfremd, $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$, dann wird $f(x, t)$ höchstens für endlich viele rationale Werte t in P reduzibel, während es, wenn n und ν nicht teilerfremd sind, immer ein Gegenbeispiel gibt. Es kann daraus auch gefolgert werden, daß man durch Ungleichungen zwischen den Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_n in mannigfacher Weise die Irreduzibilität des Polynoms $\sum_{\nu=0}^n a_\nu x^{n-\nu}$ erzwingen kann. Sind n und ν nicht teilerfremd, so wird ferner gezeigt, daß die Anzahl der ganzzahligen t unterhalb S , für welche f in P zerfällt, kleiner als konst. \sqrt{S} ist, wo wieder der Exponent $\frac{1}{2}$ von S — jedenfalls für gerade n, ν — nicht verkleinert werden kann.

I.

1.

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu x^{n-\nu} \quad (a_0 \neq 0)$$

sei ein Polynom mit Koeffizienten aus irgendeinem Körper K . Dieses heiße in K halbreduzibel, wenn es sich schreiben läßt in der Form

$$(b_0 x^k + b_1 x^{k-1} + \dots + b_k)(c_0 x^l + c_1 x^{l-1} + \dots + c_l) \quad (k > 0, l > 0)$$

derart, daß die äußeren Koeffizienten der beiden Faktoren, also die vier Zahlen

$$b_0, b_k, c_0, c_l,$$

zu K gehören. Aus dem Zerfallen eines Polynoms f in K folgt dann das Halbzerfallen von f in K , aber nicht immer umgekehrt. Die n Wurzeln von f bezeichne man mit

$$x_1, x_2, \dots, x_n.$$

Die notwendige und hinreichende Bedingung für das Halbzerfallen von f in K ist dann offenbar diese: Es gibt ϱ Wurzeln x , $0 < \varrho < n$, deren Produkt $x_{a_1} x_{a_2} \dots x_{a_\varrho}$ in K rational ist.

Man bilde das Produkt

$$III(x_{a_1} x_{a_2} \dots x_{a_\varrho} - \delta)$$

mit einer neuen Unbestimmten δ , multipliziert über alle $\binom{n}{\varrho}$ Kombinationen

von je ϱ der n Wurzeln x . Man erhält dann ein wohlbestimmtes Polynom $F_{\varrho}(\delta)$ von δ und $\frac{a_1}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0}$ mit ganzen rationalen Koeffizienten. Dann setze man

$$F(\delta) = \prod_{\varrho=1}^{n-1} F_{\varrho}(\delta).$$

Auf diese Weise ist jedem Polynom f ein bestimmtes Polynom $F(\delta)$ der neuen Unbestimmten δ zugeordnet, und die Bedingung für das Halbzerfallen von f in K ist offenbar die: $F(\delta) = 0$ soll eine Wurzel δ in K haben.

Statt des Körpers K behandle man nun den natürlichen Rationalitätsbereich P . Die Koeffizienten a des Polynoms $f(x)$ sind dann rationale Zahlen. Durch Multiplikation mit dem Generalnenner der a erreicht man, daß dieselben ganze rationale Zahlen sind. Dann denke man sich die äußeren Koeffizienten a_0 und a_n fest vorgegeben, die übrigen Koeffizienten a_1, a_2, \dots, a_{n-1} veränderlich. Die Wurzeln δ der Gleichung $F(\delta) = 0$ sind dann die Produkte $x_{a_1} x_{a_2} \dots x_{a_{\varrho}}$ ($0 < \varrho < n$). Wird ein solches Produkt rational, so ist es jedenfalls nur endlich vieler rationaler Werte fähig, weil bei reduzierten Darstellungen sein Zähler durch die Teiler von a_n , sein Nenner durch die Teiler von a_0 auf endlich viele Werte beschränkt ist. Man fixiere nun irgendeine Vorschrift, die zu jedem Paar von Zahlen a_0, a_n endlich viele rationale Zahlen

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_S$$

bestimmt von der Art, daß unter ihnen alle etwaigen rationalen Wurzeln δ von $F(\delta) = 0$ enthalten sind. Bei vorgegebenen a_0 und a_n ist

$$\prod_{\sigma=1}^S F(\delta_{\sigma}) = R(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$$

dann ein Polynom von a_1, a_2, \dots, a_{n-1} , welches durch n, a_0 und a_n eindeutig bestimmt ist, und die Bedingung für das Halbzerfallen von $f(x)$ bei fest vorgegebenem a_0 und a_n ist

$$R(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = 0,$$

also eine algebraische Bedingung für a_1, a_2, \dots, a_{n-1} .⁴⁾

⁴⁾ Etwas allgemeiner ergibt sich folgendes: Man schreibe die Primzahlzerlegungen von a_0 und a_n vor:

$$a_0 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}, \quad a_n = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_s^{\beta_s}.$$

Die Bedingung für das Halbzerfallen von $f(x)$ ist dann das Verschwinden eines durch $n, \alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s$ eindeutig bestimmten Polynoms

$$R(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_s)$$

von $a_1, \dots, a_{n-1}, p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_s$.

2. Diese Bedingung $R = 0$ des Halbzerfallens ist nach dem Früheren für das Zerfallen des Polynoms $f(x)$ notwendig. Sie ist aber, wenn man von im folgenden zu charakterisierenden Ausnahmefällen absieht, auch für das Zerfallen hinreichend. Um dies zu zeigen, betrachte man neben dem Polynom $f(x)$ aus dem beliebigen Körper K für $0 < \varrho < n$ das Polynom

$$f_{\varrho}(x) = a_0^{N_{\varrho}} \prod (x - x_{a_1} x_{a_2} \dots x_{a_{\varrho}}),$$

dessen Wurzeln alle $\binom{n}{\varrho}$ Produkte von je ϱ Wurzeln x sind. N_{ϱ} bestimme man etwa als kleinstmögliche ganze Zahl, für welche die Koeffizienten von f_{ϱ} ganze rationale Funktionen von a_0, a_1, \dots, a_n werden. Man erhält dann die Polynome $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{n-1}(x)$. Es ist offenbar $f_1(x) = f(x)$. Die Diskriminante von $f_{\varrho}(x)$ sei Δ_{ϱ} . Ferner sei ⁵⁾

$$\Delta = \Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_{n-1}.$$

Δ ist dann ein durch n eindeutig bestimmtes Polynom

$$\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n).$$

$f(x)$ soll nun ein spezielles Polynom heißen, wenn Δ verschwindet. *Ist ein Polynom nicht ein spezielles, so folgt, wenn es halb zerfällt, daß es zerfällt.* Zerfällt es nämlich halb, so ist ein Produkt $x_{a_1} x_{a_2} \dots x_{a_{\varrho}}$ in K rational, es habe den Wert m . Wegen $\Delta \neq 0$ ist dann die Gleichung

$$x_{a_1} x_{a_2} \dots x_{a_{\varrho}} - m = 0$$

intransitiv, folglich f in K reduzibel.

3. Wir beweisen nach dieser Vorbereitung den

Satz 1. $f(x, t)$ sei ein Polynom der beiden Veränderlichen x, t mit ganzen rationalen Koeffizienten, welches den Voraussetzungen des H. I.-S. genügt. Geordnet nach Potenzen von x hat dann $f(x, t)$ die Form $\sum_{\nu=0}^n a_{\nu} x^{n-\nu}$. Man setze nun speziell voraus, daß a_0 und a_n nicht von t abhängen, daß also dieses nur in den Koeffizienten a_1, \dots, a_{n-1} steckt. Schließlich möge das zu f , aufgefaßt als Polynom allein von x , gehörende Diskriminantenprodukt Δ nicht identisch in t verschwinden. *Dann gibt es nur endlich viele rationale Zahlen τ , die, statt t in $f(x, t)$ eingesetzt, dieses als Polynom von x in P reduzibel machen.*

Beim Beweise setzen wir den H. I.-S. voraus. Dann schließen wir so: Nach 1. gehört zu $f(x, t)$, aufgefaßt als Polynom von x , ein bestimmtes Polynom

$$R(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = R^*(t)$$

und nach 2. ein bestimmtes Diskriminantenprodukt

$$\Delta(a_0, a_1, \dots, a_n) = \Delta^*(t).$$

⁵⁾ Es genügt auch, hier $\Delta = \Delta_2 \Delta_3 \dots \Delta_{n-1}$ zu setzen.

Nach Voraussetzung verschwindet $\Delta^*(t)$ nicht identisch. Es hat daher nur endlich viele Nullstellen. Die etwaigen rationalen Nullstellen nenne man $\bar{\tau}$. Die $\bar{\tau}$ sind dann unter den rationalen Zahlen τ alle, welche, in f statt t eingesetzt, dieses zu einem speziellen Polynom — der Veränderlichen x — machen. Für ein rationales τ , das nicht ein $\bar{\tau}$ ist, folgt also aus dem Halbzerfallen von f das Zerfallen in P . Daher kann $R^*(t)$ nicht identisch verschwinden. Denn dann wäre f für jedes rationale τ außer den endlich vielen $\bar{\tau}$ in P reduzibel, was dem H. I.-S. widerspricht. Daher hat $R^*(t)$ nur endlich viele Nullstellen. D. h. aber: f zerfällt nur für endlich viele rationale Zahlen τ halb, also zerfällt es erst recht nur für endlich viele rationale Zahlen τ in P , w. z. b. w.

Handelt es sich um mehrere Parameter t , so ergibt sich ein entsprechender Satz. Durch bekannte, von Kronecker herrührende Verfahren kann man ferner entsprechende Sätze für mehrere Veränderliche x und für beliebige algebraische Zahlkörper zurückführen auf den Fall einer Veränderlichen und den Körper P .

II.

4. Es gilt offenbar der folgende

Hilfssatz. $f(x) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} x^{n-\nu}$ sei ein Polynom aus dem nicht nur endlich viele Elemente enthaltenden Körper K , $a_0 \neq 0$. Ist $f(x+h)$ als Polynom von x für hinreichend viele⁶⁾ in K rationale Zahlen h halbreduzibel, so ist $f(x)$ in K reduzibel.

Es muß dann nämlich wenigstens eine Kombination von Wurzeln $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_{\varrho}}$ ($0 < \varrho < n$) von $f(x)$ geben derart, daß der Ausdruck

$$(x_{\alpha_1} + h)(x_{\alpha_2} + h) \dots (x_{\alpha_{\varrho}} + h)$$

für mehr als ϱ Zahlen h aus K in K rational wird. Dann aber gehören die elementarsymmetrischen Funktionen von $x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_{\varrho}}$ zu K und dann zerfällt f in K .

Ferner ist es im folgenden bequem, statt mit Polynomen $\sum_{\nu=0}^n a_{\nu} x^{n-\nu}$ mit beliebigen ganzzahligen Koeffizienten aus K zu operieren, sie auf eine Form zu bringen, in welcher der höchste Koeffizient a_0 den Wert 1 hat. Dazu multipliziere man $f(x)$ in bekannter Weise mit a_0^{n-1} , setze dann $a_0 x = x'$ und schreibe schließlich statt der neuen Veränderlichen x' wieder x . Auf diese Weise entspricht dem ganzzahligen Polynom $f(x) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} x^{n-\nu}$

⁶⁾ Die Anzahl kann allein durch n charakterisiert werden. Es genügt z. B., sie gleich $2^n \cdot n$ zu nehmen.

eindeutig das normierte ganzzahlige Polynom $f^*(x) = \sum_{\nu=1}^n a_\nu^* x^{n-\nu}$, wo jetzt aber $a_0^* = 1$, $a_\nu^* = a_\nu^{\nu-1} a_\nu$ ist. Offenbar zerfällt $f(x)$ dann und nur dann in K halb, wenn $f^*(x)$ in K halb zerfällt.

Nun betrachte man die Polynome, die aus dem Ausdruck $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ dadurch entstehen, daß man statt eines Koeffizienten⁷⁾ a_ν ($\nu \neq 0$) die Veränderliche t schreibt, während die übrigen Koeffizienten feste ganze rationale Zahlen sind, jedoch $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$. Das so entstehende Polynom von x

$$f_\nu(x, t) = a_0 x^n + \dots + a_{\nu-1} x^{n-\nu+1} + t x^{n-\nu} + a_{\nu+1} x^{n-\nu-1} + \dots + a_n$$

hat dann in $P(t)$ ganzzahlige Koeffizienten. Ferner ist, wie man leicht erkennt, $f_\nu(x, t)$ in $P(t)$ irreduzibel. Nach dem Hilfssatz gibt es nun eine ganze rationale Zahl h_0 derart, daß

$$f_\nu(x + h_0, t) = \bar{f}_\nu(x, t)$$

als Polynom von x in $P(t)$ nicht halbreduzibel ist. Zu diesem Polynom $\bar{f}_\nu(x, t)$ gehört ferner eindeutig ein normiertes Polynom $\bar{f}_\nu^*(x, t)$ mit ganzen Koeffizienten in $P(t)$, so daß dieses in $P(t)$ nicht halbreduzibel ist. Es gilt dann: $f_\nu(x, t)$ zerfällt für diejenigen rationalen Zahlen t in P , für welche $\bar{f}_\nu^*(x, t)$ in P zerfällt, und nur für diese. Man schreibe $\bar{f}_\nu^*(x, t)$ in der Form $\sum_{\nu=1}^n a_\nu^* x^{n-\nu}$, was möglich ist, da es ja noch den Grad n hat. Offenbar ist dann

$$a_n^* = a_0^{n-1} f(h_0).$$

Nun sei S eine ganze positive Zahl und man spezialisire t in $f_\nu(x, t)$ und $\bar{f}_\nu^*(x, t)$ der Reihe nach auf die Zahlen $1, 2, \dots, S$. Man erhält dann S Polynome $f_\nu(x, \tau)$ ($\tau = 1, 2, \dots, S$) und S Polynome $\bar{f}_\nu^*(x, \tau)$ ($\tau = 1, 2, \dots, S$) in P . Unser Ziel ist es, zu untersuchen, wie viele der so erhaltenen Polynome $f_\nu(x, \tau)$ oder, was dasselbe ist, der $\bar{f}_\nu^*(x, \tau)$ in P zerfallen. Für die Zahlen a_n , die jetzt als absolute Glieder in $\bar{f}_\nu^*(x, \tau)$ auftreten, erhält man, da $f(h_0)$ ein linearer Ausdruck von t ist, offenbar die Abschätzung⁸⁾

$$a_n^* < C_1 S.$$

Setzt man daher $C_2 = \sqrt{C_1}$, so ergibt sich: Wenn eines der S Polynome $\bar{f}_\nu^*(x, \tau)$ in P in zwei — wie man ohne Einschränkung annehmen darf,

⁷⁾ Den Fall $\nu = 0$ erreicht man, indem man $\nu = n$ setzt und dann das reziproke Polynom nimmt.

⁸⁾ C_1 und die folgenden Konstanten C_2, \dots lassen sich allein durch n, ν und $a_0, a_1, \dots, a_{\nu-1}, a_{\nu+1}, \dots, a_n$ bestimmen. Sie sind also insbesondere von S unabhängig.

normierte — Faktoren zerfällt, so muß das absolute Glied wenigstens eines der beiden Faktoren, welches wegen der Normierung von \bar{f}_v^* von selbst eine ganze Zahl ist, $< C_2 \sqrt{S}$ sein.

Nach 1. gehört nun zu $\bar{f}_v^*(x, t)$ ein bestimmtes Polynom $F(\delta)$. Für δ setzt man hier der Reihe nach $1, 2, \dots, [C_2 \sqrt{S}], -1, -2, \dots, -[C_2 \sqrt{S}]$ und bilde dann das Produkt $\Pi F(\delta)$. Dies ist ein Polynom

$$\Phi(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{v-1}, t, a_{v+1}, \dots, a_n)$$

von t . Der Grad in t kann mit Hilfe der Anzahl der Faktoren des Produktes Π nach oben abgeschätzt werden und ist daher kleiner als $C_3 \sqrt{S}$. Φ kann ferner nicht identisch verschwinden, weil daraus folgen würde, daß $\bar{f}_v^*(x, t)$ in $P(t)$ halb zerfällt, was ja nicht der Fall war. Daher hat Φ höchstens $C_3 \sqrt{S}$ Nullstellen t , und das heißt: Unter den S Polynomen

$$f_v(x, \tau) \quad (\tau = 1, 2, \dots, S)$$

sind höchstens $C_3 \sqrt{S}$ reduzibel.

In ganz entsprechender Weise erhält man dieselbe Abschätzung für die reduziblen unter den Polynomen $f_v(x, \tau)$ [$\tau = -1, -2, \dots, -S$]. Aus diesen beiden Resultaten ergibt sich schließlich:

Satz 2. Die Anzahl der reduziblen unter den $2S + 1$ Polynomen

$$f_v(x, \tau) \quad (-S \leq \tau \leq S)$$

ist $< C_4 \sqrt{S}$.⁹⁾

Zusatz: Offenbar gilt, wie jetzt nachträglich folgt, Satz 2 auch, wenn man die Koeffizienten $a_0, \dots, a_{v-1}, a_{v+1}, \dots, a_n$ nur als rational voraussetzt.

Durch Multiplikation mit ihrem Generalnenner, etwa c , geht dann $f_v(x, \tau)$ über in $a'_0 x^n + \dots + c\tau x^{n-v} + \dots + a'_n$. Setzt man $c\tau = \tau'$, so wird, wenn τ von $-S$ bis $+S$ variiert, τ' zwischen $-cS$ und $+cS$ liegen. Die Anzahl derjenigen dieser τ' , also auch der τ , für welche $f_v(x, \tau)$ in P zerfällt, ist dann $< C_4 \sqrt{c} \sqrt{S} = C_5 \sqrt{S}$.

5. Wie nach Satz 1 zu erwarten ist, läßt sich dies Ergebnis noch weiter verschärfen. Man kann nämlich folgenden Satz beweisen:

Satz 3. Man bilde $f_v(x, t)$ für $0 < v < n$, $a_0 \neq 0, a_n \neq 0$. Dieses zerfällt höchstens dann für unendlich viele rationale Werte τ in Faktoren der Grade ϱ und σ , wenn ϱ und σ Vielfache von $\frac{n}{d}$ sind, unter d den G. G. T. von n und v verstanden¹⁰⁾. Sind also z. B. n und v teilerfremd, so zerfällt $f_v(x, t)$ höchstens für endlich viele rationale Zahlen τ .

⁹⁾ Dies ist eine wesentliche Verschärfung der Abschätzung, die ich in dieser Zeitschrift 95, S. 254 angegeben habe.

¹⁰⁾ Der Satz, für $v = 0$ und $v = n$ ausgesprochen, ist offenbar selbstverständlich. Er besagt dann nichts.

Soll $f(x, t)$ für unendlich viele rationale τ in Faktoren der Grade ϱ, σ zerfallen, so muß die Gleichung $F_{\varrho}(\delta) = 0$ bei veränderlichem t durch eine rationale Zahl δ gelöst werden, es muß also $f(x, t)$ im Körper $P(t)$ in Faktoren der Grade ϱ, σ halb zerfallen. Um den Satz zu beweisen, kommt es also allein darauf an, zu zeigen, daß, wenn $f(x, t)$ im Körper $P(t)$ in zwei Faktoren der Grade ϱ, σ halbzerfällt, ϱ und σ Vielfache von $\frac{n}{d}$ sind. Statt von f_{ν} genügt es, dies von dem normierten Polynom f_{ν}^* zu zeigen. Die algebraische Funktion x von t , welche durch die Gleichung $f_{\nu}^*(x, t) = 0$ definiert wird, zerfällt in n Zweige. Jeder der n Zweige wird für hinreichend große t durch eine nach oben abbrechende Laurentreihe einer Wurzel $t^{\frac{1}{\nu}}$ dargestellt. In unserem Falle müssen, wie man leicht sieht, $n - \nu$ Zweige als höchste Potenz $t^{\frac{1}{n-\nu}}$ und ν Zweige $t^{\frac{1}{\nu}}$ enthalten. Soll nun f_{ν}^* in $P(t)$ in zwei Faktoren der Grade ϱ und σ halb zerfallen, so dürfen diese Faktoren als normiert angenommen werden. Dann müssen ihre absoluten Glieder ganze Elemente aus $P(t)$ sein. Die Wurzeln des Faktors ϱ -ten Grades verteilen sich auf ϱ Zweige der algebraischen Funktion, es seien dies κ Zweige, deren Laurentreihe mit $t^{\frac{1}{n-\nu}}$, und λ Zweige, deren Laurentreihe mit $t^{\frac{1}{\nu}}$ beginnt. Das absolute Glied des Faktors ϱ -ten Grades ist dann eine Laurentreihe einer Wurzel von t , welche den höchsten Exponenten

$$\frac{\kappa}{n-\nu} - \frac{\lambda}{\nu}$$

hat. Das absolute Glied des andern Faktors beginnt mit dem höchsten Exponenten

$$-\left(\frac{\kappa}{n-\nu} - \frac{\lambda}{\nu}\right),$$

da das Produkt der beiden absoluten Glieder a_n ist. Da die beiden absoluten Glieder Elemente aus $P(t)$ sein sollten, andererseits wegen der Normierung der Faktoren von selbst ganze Elemente, also Polynome von t sind, folgt $\frac{\kappa}{n-\nu} - \frac{\lambda}{\nu} = 0$, also $\frac{\kappa}{\lambda} = \frac{n-\nu}{\nu}$. Ist d der G. G. T. von n und ν , also auch der G. G. T. von $n - \nu$ und ν , so folgt jetzt: κ ist Vielfaches von $\frac{n-\nu}{d}$, etwa $\kappa = \frac{n-\nu}{d} l$. Dann ist $\lambda = \frac{\nu}{d} l$, also $\kappa + \lambda = \varrho$ und damit auch σ Vielfaches von $\frac{n}{d}$, w. z. b. w.

Zusatz zu Satz 3. Ganz wie im Zusatz zu Satz 2 folgt jetzt wieder nachträglich, daß Satz 3 auch dann gilt, wenn man nur verlangt, daß die Koeffizienten $a_0, \dots, a_{\nu-1}, a_{\nu+1}, \dots, a_n$ rationale Zahlen sind.

Einem Teil dieses Satzes wollen wir noch eine etwas andere Formulierung geben. Die Koeffizienten von $f(x) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} x^{n-\nu}$ seien wieder ganze rationale Zahlen, $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$. Statt mit f operieren wir nun mit f^* . Auf Grund der Betrachtung von 1. gehört dann zu f^* ein bestimmtes Polynom $F(\delta)$. Als Wurzeln von $F(\delta) = 0$ kommen nun nur ganze rationale Zahlen in Betracht, die ihrer absoluten Größe nach durch a_0 und a_n nach oben beschränkt sind. Die Koeffizienten der Glieder von $R(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ sind daher jetzt ganze rationale Zahlen, deren Betrag durch a_0 und a_n nach oben beschränkt ist. Nun sei ν zu n teilerfremd. Wenn dann für irgendein System fester ganzer Zahlen $a_0, a_1, \dots, a_{\nu-1}, a_{\nu+1}, \dots, a_n$ das Polynom R die Veränderliche a_{ν} nicht mehr enthält, so kann für dieses Wertsystem R , wie aus dem Beweise von Satz 3 folgt, nicht verschwinden, also $f(x)$ für keinen einzigen Wert a_{ν} reduzibel werden. Für jedes andere System $a_0, \dots, a_{\nu-1}, a_{\nu+1}, \dots, a_n$ aber muß in R die Veränderliche a_{ν} wirklich auftreten. Der Koeffizient der höchsten auftretenden Potenz von a_{ν} ist dem Betrage nach mindestens 1. Daraus folgt

Satz 4. $f(x) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} x^{n-\nu}$ habe ganze rationale Koeffizienten.

$a_0 \neq 0, a_n \neq 0$. ν und n seien teilerfremd. Dann lassen sich allein durch n und ν zwei ganze positive Zahlen K und M so bestimmen, daß folgendes gilt: S sei das Maximum der absoluten Beträge $|a_0|, \dots, |a_{\nu-1}|, |a_{\nu+1}|, \dots, |a_n|$. Ist dann

$$|a_{\nu}| > K \cdot S^M,$$

so ist $-R \neq 0$, also $-f(x)$ in P irreduzibel. Es läßt sich also durch Ungleichungen, die für die Koeffizienten vorgeschrieben werden, die Irreduzibilität von $f(x)$ erzwingen. Außer nach der angegebenen lassen sich auf noch mannigfache andere Weise aus der Tatsache, daß das Polynom R verschwinden muß, Ungleichungen ableiten, aus denen die Irreduzibilität von $f(x)$ folgt.

6. Wir wollen schließlich an Beispielen uns über die Schärfe der bewiesenen Sätze einige Klarheit verschaffen. Sind n und ν irgendwelche vorgegebene, nicht teilerfremde Zahlen, so kann man in P Polynome $f_{\nu}(x, t)$ angeben, die für unendlich viele — sogar ganze — rationale Werte t zerfallen. Sei nämlich d der G. G. T. von n und ν , $n = dn'$, $\nu = d\nu'$. Man wähle dann irgendein Polynom $\varphi(x)$ vom Grade n' , dessen Koeffizienten feste ganze rationale Zahlen sind bis auf den ν' -ten Koeffizienten. An dessen Stelle setze man $\sqrt[d]{s}$. Das absolute Glied von $\varphi_{a-1}(x)$ möge nicht verschwinden. $\varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(d-1)}(x)$ mögen aus $\varphi(x)$ hervorgehen, indem man statt $\sqrt[d]{s}$ die $d-1$ algebraisch konjugierten Ausdrücke $\varepsilon \sqrt[d]{s}$ einsetzt,

unter ε die von 1 verschiedenen d -ten Einheitswurzeln verstanden.

$$\varphi(x) \cdot \varphi'(x) \dots \varphi^{(d-1)}(x) = \Phi(x) = \sum_{\nu=0}^n a_{\nu} x^{n-\nu}$$

ist dann ein Polynom n -ten Grades im Körper $P(s)$. Jetzt sind alle Koeffizienten in $\Phi(x)$ bis auf den ν -ten, a_{ν} , feste ganze rationale Zahlen. a_{ν} läßt sich in der Form schreiben $s + r = t$, unter r eine ganze rationale Zahl verstanden. $\Phi(x)$ ist dann ein Polynom, wie wir es oben als $f_{\nu}(x, t)$ bezeichnet haben, das bei festen $a_0, \dots, a_{\nu-1}, a_{\nu+1}, \dots, a_n$, $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$ für unendlich viele rationale Zahlen t in P reduzibel wird, nämlich für alle Zahlen t , für welche $t - r = s$ eine d -te Potenz einer rationalen Zahl ist. Das Beispiel zeigt, daß in dem Zusatz zu Satz 3 die Bedingung, daß n und ν teilerfremd sind, nicht fortgelassen werden kann. Daraus folgt weiter, daß in Satz 1 die Bedingung: $\Delta(a_0, \dots, a_n)$ soll nicht identisch in t verschwinden, nicht ganz fortgelassen werden kann.

Schließlich sei noch ein Beispiel bez. des Satzes 2 angegeben. Es seien n und ν als gerade Zahlen vorgegeben, $n > \nu$, $n = 2n'$, $\nu = 2\nu'$. $\varphi(x)$ sei ein Polynom n' -ten Grades mit festen ganzen rationalen Koeffizienten $a'_0, \dots, a'_{\nu-1}, a'_{\nu+1}, \dots, a'_n$. An Stelle von a'_{ν} setze man \sqrt{s} . $\varphi'(x)$ entstehe aus $\varphi(x)$, indem man für \sqrt{s} setzt $-\sqrt{s}$. $\Phi(x) = \varphi(x) \varphi'(x)$ ist dann ein Polynom $\sum_{\nu=0}^n a_{\nu} x^{n-\nu}$, und es sind $a_0, \dots, a_{\nu-1}, a_{\nu+1}, \dots, a_n$ von s unabhängig $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$, $a_{\nu} = s + r = t$, wo r eine ganze rationale Zahl ist. Also hat $\Phi(x)$ die Form eines $f_{\nu}(x, t)$. Die Anzahl der reduziblen unter den $f_{\nu}(x, \tau)$ ($-S < \tau < S$) ist dann im wesentlichen — d. h. bis auf höchstens endlich viele, deren Anzahl nicht von S abhängt — $2\sqrt{S}$, da wir dann und nur dann ein reduzibles Polynom erhalten, wenn $\tau - r = s$ eine Quadratzahl ist. Das zeigt, daß bei geraden n und ν die Abschätzung des Satzes 2 im Exponenten von S nicht verschärft werden kann.

(Eingegangen am 18. 3. 1929.)