Begründung der projektiven Geometrie im offenen Kontinuum.

Von

Hans Mohrmann in Darmstadt.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

In den letzten fünfzig Jahren hat die Loslösung der Analysis vom Mutterschoß der Geometrie ihr Ende gefunden. Die Trennung des Begriffs der *Zahl* von demjenigen der *meßbaren Größe* (Länge einer Strecke), die noch P. Du Bois-Reymond[1]) für absurd hielt, hat dabei beträchtliche Wehen verursacht. Die Schwierigkeiten, die zu überwinden waren, spiegeln sich vielleicht am sichtbarsten in den Umständen, die die Einführung der Zahl in die Geometrie unabhängig vom Maßbegriff, also, modern gesprochen, ohne Benutzung von Kongruenzaxiomen bereitet hat; oder anders ausgedrückt: die die Begründung der projektiven Geometrie auf Grund der ihr eigentümlichen projektiven Axiome allein verursacht hat. Es gibt wohl kaum einen mathematischen Satz, über den so viel geschrieben worden ist, wie über den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie[2]).

[1]) Allgemeine Funktionentheorie, Tübingen 1882. — Vgl. auch Reye, Geometrie der Lage I, 1, 4. Aufl. (1898), S. 3: „Auf die höhere Analysis, dieses mächtige Werkzeug der modernen Mathematik, müssen wir schon deshalb verzichten, weil wir das Maß nicht benutzen."

[2]) Vgl. Hölder, Math. Annalen **65** (1908), S. 161 ff. Die (100 Seiten umfassende) Arbeit Hölders über die „Geometrie der projektiven Geraden" gibt wohl einen vollständigen Überblick über die frühere Literatur. Dabei zeigt sich die Stärke Hölders im Blick für die Schwächen seiner Vorgänger, seine Schwäche im Mangel an Blick für ihre Stärken.

Wir wollen im folgenden zeigen, daß diese Schwierigkeiten nicht nur in der Natur der Sache begründet sind. Dabei folgen wir einem Gedanken von F. Lindemann[3]), dessen große Tragweite allerdings weiterhin nur D. Hilbert[4]) erkannt zu haben scheint, der sich den Lindemannschen Gedanken ausdrücklich zu eigen gemacht und mehrfach verwandt hat[5]).

I.

Axiome des offenen projektiven Kontinuums.

Wir legen das folgende aus sieben „linearen" (einschließlich dem Stetigkeitsaxiom), zwei „ebenen" und einem „räumlichen" Axiom bestehende System zugrunde, das sich ohne Mühe auf Räume von beliebig vielen Dimensionen ausdehnen läßt:

Das *Element* der Punktgeometrie ist der *Punkt.*

I, 1. *Es gibt wenigstens zwei voneinander verschiedene Punkte.*

I, 2. *Zwei voneinander verschiedene Punkte bestimmen eine Menge von Punkten, die wir g-Linie nennen.*

I, 3. *Irgendzwei voneinander verschiedene Punkte einer und derselben g-Linie bestimmen diese g-Linie.*

I, 4. *Wenn A, B, C Punkte einer g-Linie sind und B zwischen A und C liegt, so liegt B auch zwischen C und A.*

I, 5. *Wenn A und C zwei voneinander verschiedene Punkte einer g-Linie sind, so gibt es stets wenigstens einen Punkt B, der zwischen A und C liegt, und wenigstens einen Punkt D, so daß C zwischen A und D liegt.*

I, 6. *Unter irgend drei voneinander verschiedenen Punkten einer g-Linie gibt es stets einen und nur einen, der zwischen den beiden anderen liegt.*

Erklärung. Wir betrachten auf einer g-Linie zwei voneinander verschiedene Punkte A und B; wir nennen das System der beiden Punkte A und B eine *Strecke* und bezeichnen sie mit $\overline{AB}$ oder $\overline{BA}$. Die Punkte zwischen A und B heißen Punkte der Strecke $\overline{AB}$ oder auch *innerhalb* $\overline{AB}$ gelegen; die Punkte A und B heißen *Endpunkte* der Strecke $\overline{AB}$. Alle übrigen Punkte der g-Linie heißen *außerhalb* der Strecke $\overline{AB}$ gelegen.

---

[3]) Clebsch-Lindemann, Vorles. uber Geometrie 2 (1891), Teil I, S. 433ff.

[4]) Grundlagen der Geometrie, Anhang I, S. 113 der 6. Aufl.

[5]) Was wohl deshalb so wenig bekannt ist, weil fast immer von *den* Grundlagen der Geometrie Hilberts gesprochen und nur selten beachtet wird, daß Hilbert verschiedene Eingänge in die Grundlagen gezeigt hat, keineswegs nur einen solchen, bei dem die Stetigkeitsforderungen den Schlußstein des Axiomensystems bilden.

I, 7. (Stetigkeitsaxiom[6].) *Jedem Punkte einer Strecke entspricht eine reelle Zahl eines Intervalls und umgekehrt.*

Die Zuordnung der Zahlen zu den Punkten der Strecke, d. i. die *Numerierung* der Punkte, erfolgt alsdann auf Grund der Axiome des „*Zwischen*", wobei noch vielfach-unendlich viele Möglichkeiten bestehen. Die primitivste *stetige Skala* (zum Unterschiede von den *projektiven* und *metrischen*) erhält man, wenn man den Endpunkten A und B der Strecke $\overline{AB}$ die (reellen) Zahlen α und β zuordnet, wobei etwa $\alpha < \beta$ sei, einem beliebigen Punkte C zwischen A und B aber eine *beliebige* Zahl γ, $\alpha < \gamma < \beta$ usw.

I, 8. *Es gibt wenigstens drei nicht auf einer und derselben g-Linie gelegene Punkte.*

I, 9. *Wenn A, B, C irgend drei nicht in einer und derselben g-Linie gelegene Punkte sind, D ein Punkt der Strecke $\overline{BC}$ und E ein Punkt der Strecke $\overline{AD}$ ist, dann gibt es einen der Strecke $\overline{AB}$ angehörigen Punkt F derart, daß E auf der Strecke $\overline{CF}$ liegt*[7].

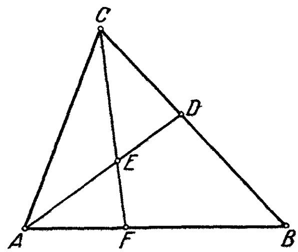

Fig. 1.

Erklärung. Die Menge der Punkte, die durch drei nicht auf einer und derselben g-Linie liegende Punkte A, B, C vermöge den Punkten ihrer Verbindungsstrecken oder g-Linien und denjenigen der Verbindungsstrecken oder g-Linien der Punkte dieser bestimmt ist, heißt *Dreieck* oder *E-Fläche* (*Ebene*).

I, 10. *Es gibt wenigstens vier nicht in einer und derselben E-Fläche gelegene Punkte.*

Tetraeder und *Raum*, *Simplex* und *Raum von mehr als drei Dimensionen* werden ebenso erklärt wie Dreieck und E-Fläche.

Wollen wir uns auf ein dreidimensionales Kontinuum beschränken, so brauchen wir noch ein *Schlußaxiom*:

[6] Die auf die Vorstellung der *Iteration* gegründete *analysis infinitorum* der projektiven Geometrie (unbegrenzt fortsetzbare Vierseitskonstruktionen) ist keine andere als die auf die Vorstellung der *natürlichen Zahlenreihe* gegründete analysis infinitorum der reellen Zahlen. — Vgl. Weyl, Das Kontinuum, Leipzig 1918, S. 72f. Auch wenn man den Standpunkt Weyls nicht einnimmt (Fréchet, v. Kerékjártó) liegt für uns kein Grund vor, jene analysis noch einmal im geometrischen oder mengentheoretischen Gewande zu begründen.

[7] Peano, Sui fondamenti di geometria, Rivista di matematica **4** (1894), p. 65. E. H. Moore, Trans. of the Amer. Math. Soc. **3** (1902), p. 147. F. Schur, Grundlagen der Geometrie (1909), S. 7ff.

I, 11. *Außerhalb eines Raumes gibt es keinen Punkt.*

Andernfalls läßt sich unser Axiomensystem ohne weiteres auf Räume von beliebig vielen Dimensionen ausdehnen. In *jedem* Falle können wir noch ein *Vollständigkeitsaxiom* hinzufügen:

I, 12. *Die Elemente der Geometrie bilden ein System von Dingen, das bei Aufrechterhaltung sämtlicher genannten Axiome keiner Erweiterung mehr fähig ist*[8]).

Dieses hat dann allerdings einen völlig anderen Charakter als bei Hilbert, wo es mit dem „Archimedischen Axiom“ zusammen die Forderung der Stetigkeit ausmacht, die wir in I, 7 gestellt haben. Es hat bei uns vielmehr den Zweck, unter allen zulässigen („nirgends-konkaven“, offenen) Kontinuen das *umfassendste* auszusondern.

Betrachten wir z. B. als Punkte unserer Geometrie, die Punkte der *Kugelhaube*

$$X^2+Y^2+Z^2=2, \qquad Z>1$$

(X, Y, Z rechtwinklige kartesische Koordinaten im Euklidischen Raum), als g-Linien die Großkreise der Kugel, soweit sie auf der Kugelhaube verlaufen, so erfüllen diese Punkte und g-Linien sämtliche Axiome I, 1—10. Das *Vollständigkeitsaxiom* I, 12 aber ist nicht erfüllt.

Die Punkte und g-Linien der offenen *Halbkugel*

$$X^2+Y^2+Z^2=2, \qquad Z>0$$

indessen erfüllen — bei Beschränkung auf ein zweidimensionales Kontinuum — auch das Vollständigkeitsaxiom.

Hieraus erkennt man leicht, daß das *Hilbertsche Parallelenaxiom*: *Es sei a eine beliebige g-Linie und A ein Punkt außerhalb a: dann gibt es in der durch a und A bestimmten E-Fläche höchstens eine g-Linie* (und dann eine und nur eine), *die durch A läuft und a nicht schneidet,* auf Grund unserer Axiome I, 1—12 ein *beweisbarer Satz* ist. (Hierin ist wohl auch der Grund zu suchen, warum das Hilbertsche Parallelenaxiom nur in der ersten Auflage der „Grundlagen“ vor den Kongruenzaxiomen gestanden hat.) In der Tat ist das Hilbertsche Parallelenaxiom dem Euklidischen nur deshalb äquivalent, weil die Axiome des „Zwischen“, die Euklid fremd waren, insbesondere Hilberts II, 3 (unser I, 6) in Verbindung mit Hilberts erstem Kongruenzaxiom (III, 1) vom Streckenabtragen die *unendliche Länge* der g-Linie fordern (die Euklid erst im Parallelenaxiom voraussetzt) und damit die *elliptische Geometrie* (auch im offenen Kontinuum) ausschließen[9]).

---

[8]) Hilbert, Grundlagen, § 8.

[9]) Siehe hierüber mein demnächst im Verlag der „Akademischen Verlagsgesellschaft“ in Leipzig erscheinendes Büchlein: Einführung in die Nicht-Euklidische Geometrie.

II.

Die Beweismittel.

1. Wir dürfen hier als bekannt voraussetzen[9]), daß man auf Grund unserer Axiome I, 1—6, 8—10, also ohne Benutzung des Stetigkeitsaxioms I, 7 den folgenden *Satz vom 4. harmonischen Punkte* beweisen kann:

a) *Sind A, B, C drei voneinander verschiedene Punkte einer g-Linie g derart, daß B zwischen A und C liegt, so gibt es auf g zu C in bezug auf A und B einen und nur einen 4. harmonischen Punkt D.* Dabei heißen nach v. Staudt[10]) vier Punkte A, B, C, D einer und derselben g-Linie harmonisch, wenn A und B Schnittpunkte der Gegenseitenpaare eines eigentlichen Vierecks sind und C und D auf den Diagonalen dieses Vierecks liegen. D liegt dann notwendig zwischen A und B.

Wir dürfen hier ferner den folgenden leicht auf Grund derselben Axiome elementar beweisbaren Satz über *harmonische Strahlen voraussetzen*[11]):

b) *Werden die g-Linien a, b, c, d, die vier harmonische Punkte A, B, C, D einer g-Linie g aus einem Punkte S außerhalb g projizieren, von einer beliebigen weiteren g-Linie g_1 in vier Punkten $A_1\, B_1\, C_1\, D_1$ geschnitten derart, daß S nicht zwischen A und A_1, B und B_1, C und C_1, D und D_1 liegt, so sind auch $A_1\, B_1\, C_1\, D_1$ vier harmonische Punkte. Die g-Linien $a\, b\, c\, d$ heißen* (deshalb) *harmonische Strahlen.*

2. Bezeichnet man mit Pringsheim[12]) als *Systembruch* mit der Basis b (b positiv ganz $\geqq 2$) einen Ausdruck von der Form

$$\sigma_\nu = g + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \dots + \frac{a_\nu}{b^\nu},$$

wo g eine ganze Zahl, auch die Null, vorstellen kann und die a „Ziffern" der Zahlenwerte $0, 1, 2, \dots, b-1$ bedeuten, so gilt der (uns aus der Dezimalzahl-Theorie geläufige) *grundlegende Satz*:

Jede reelle Zahl kann durch einen und nur einen unbegrenzt fortsetzbaren Systembruch[13]) *mit vorgeschriebener Basis b*

---

[10]) Geometrie der Lage, Nürnberg 1847.

[11]) Im allgemeinen zerstört Projektion das „Zwischen". — Wir brauchen die Sätze a) und b) nur in dieser engen Form.

[12]) Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre 1, 1 (1916), S. 111 ff.

[13]) Allenfalls mit der eingliedrigen Periode $b-1$;

für $b = 10$ ist z. B. $\frac{1}{2} \equiv 0{,}5 = 0{,}4999\dots$ und

für $b = 2$ ist $\frac{1}{2} \equiv 0{,}1 = 0{,}0111\dots$.

$$\sigma = g + \frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b^2} + \ldots + \frac{a_\nu}{b^\nu} + \ldots$$

dargestellt werden, und umgekehrt stellt jeder solche Systembruch eine und nur eine reelle Zahl dar.

Es ist also

$$\sigma_\nu < \sigma \leqq \sigma_\nu + \frac{1}{b^\nu} \quad (\text{für jedes } \nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Damit haben wir die Beweismittel zusammengestellt.

III.

Über den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie.

1. Seien wieder X, Y, Z gewöhnliche rechtwinklige kartesische Koordinaten im Euklidischen Raum. Alsdann stellen die Gleichungen und Ungleichungen

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1 \qquad (0 < a < b < c; \;\; X \geqq 0, \;\; Y \geqq 0, \;\; Z \geqq 0)$$

einen *Oktanten eines dreiachsigen Ellipsoids* dar. Die *inneren* Punkte dieses Oktanten ($X > 0$, $Y > 0$, $Z > 0$) betrachten wir als Punkte einer Geometrie, die geodätischen (kürzesten) Linien des Ellipsoid-Oktanten als ihre g-Linien. Das System dieser Punkte und g-Linien genügt unseren sämtlichen Axiomen I, 1—9. Dem *„räumlichen"* Axiom I, 10 indessen genügt es, nach einem bekannten Satze von Beltrami [14]), nicht, d. h. *ein den Axiomen* I, 1—9 *genügendes System von Punkten und g-Linien kann im allgemeinen nicht als Teil eines entsprechenden räumlichen Systems von Punkten und g-Linien aufgefaßt werden.*

Wir wollen zeigen, daß *eine den Axiomen* I, 1—7 *genügende g-Linie immer als Teil eines räumlichen Systems betrachtet werden kann,* oder mit anderen Worten, daß eine allgemeine *stetige Skala* (Abschnitt I dieser Arbeit) immer als *projektive Skala* aufgefaßt werden kann.

Die drei Punkte, in denen die positiven Koordinatenachsen unser Ellipsoid durchstoßen, bezeichnen wir mit X, Y und O. Wir *numerieren* die Randpunkte unseres Ellipsoid-Oktanten auf OX und OY, d. h. wir stellen zwei beliebige *stetige Skalen* OX und OY her, indem wir dem Punkte O den Wert Null, den Punkten X und Y je den Wert ∞ zuweisen und irgendeinem Punkte zwischen O und X bzw. O und Y den Wert x bzw. y $0 < x < \infty$, $0 < y < \infty$, usw. Alsdann sind sowohl die

[14]) Annali di matematica 7 (1865), S. 187.

Punkte x auf OX zwischen O und X als auch die Punkte y auf OY zwischen O und Y den positiven Zahlen zwischen 0 und ∞ eindeutig umkehrbar zugeordnet. Die g-Linien, welche die Punkte der X-Achse aus Y projizieren, wählen wir als Koordinatenlinien $x =$ konst., diejenigen, welche die Punkte der Y-Achse aus X projizieren, als Koordinatenlinien $y =$ konst.

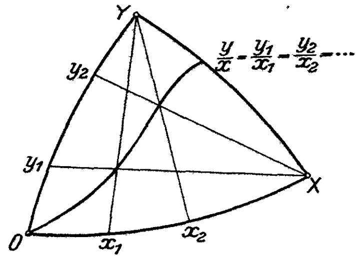

Fig. 2.

Durch jeden Punkt im Innern des Ellipsoid-Oktanten geht eine und nur eine Koordinatenlinie des einen und des anderen Systems.

Wir bezeichnen die Punktmengen im Innern des Ellipsoid-Oktanten, deren Koordinaten eine Gleichung von der Form

$$Ax + By + C = 0$$

erfüllen, als γ-Linien. Alsdann genügen die Punkte des Ellipsoid-Oktanten und seine γ-Linien unseren sämtlichen Axiomen I, 1—10. Und wir könnten, wenn wir uns paradox ausdrücken wollten, sagen, wir hätten die projektive Geometrie mit alleiniger Benutzung linearer und ebener projektiver Axiome begründet.

Indessen sind nur die Koordinatenlinien

$$x = \text{konst.} \quad \text{und} \quad y = \text{konst.}$$

zugleich g- und γ-Linien. Hätten wir nur *eine* Skala *direkt* hergestellt, etwa die auf der X-Achse, und diese dann zunächst aus Y auf eine beliebige g-Linie g durch O projiziert, die so gewonnene Skala wiederum aus X auf die Y-Achse, so wäre auch die γ-Linie

$$y = x$$

mit einer g-Linie identisch, weitere γ-Linien indessen nicht. Hieran würde sich auch dann noch nichts ändern, wenn $a = b = c > 0$, d. h. unser Ellipsoid eine Kugel wäre, obwohl dann die g-Linien

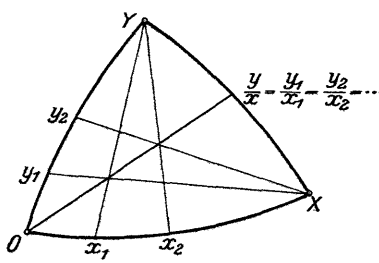

Fig. 3.

des *Kugel-Oktanten* (und seine Punkte) unseren sämtlichen Axiomen I, 1—10 genügen, so daß sowohl für die γ-Linien als auch für die g-Linien des Kugel-Oktanten die Sätze der ebenen projektiven Geometrie (im offenen Kontinuum) gültig wären.

Vier Punkte der X-Achse, die in bezug auf die γ-Linien *harmonisch* sind, sind es in bezug auf die g-Linien (im allgemeinen) *nicht. Eine Los-*

lösung der projektiven Geometrie der Geraden von der Ebene hat also keinen geometrischen Sinn [15]).

2. Wir ersehen daraus weiter, daß man, um den Fundamentalsatz der projektiven Geometrie auf Grund unserer Axiome I, 1—10 zu erweisen, die Koordinaten nicht willkürlich einführen darf. Dies hat vielmehr so zu geschehen — und das ist der in der Einleitung erwähnte *Lindemannsche Gedanke* —, daß das System der γ-Linien mit dem System der g-Linien zusammenfällt. Kann man das zeigen, so ist damit auch der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie erwiesen, sowie die Gültigkeit des *Pascalschen Satzes* [16]) (im offenen Kontinuum) usw.

Notwendige Voraussetzung ist demnach, daß vier Punkte einer Koordinatenachse, die in bezug auf die g-Linien harmonisch sind, auch in bezug auf die γ-Linien harmonisch liegen. Hieraus erklärt es sich, daß man eine im v. Staudtschen geometrischen Sinne *projektive Skala* im Gegensatz zur *stetigen* (im Hölderschen Sinne projektiven) *Skala nur mit Hilfe von Vierseits-Konstruktionen herstellen* kann, indem man drei Punkten A, B, C beliebige Zahlen x_1, x_2, x_3 zuweist, dem vierten harmonischen Punkt D hingegen diejenige Zahl x, die sich aus der Gleichung

$$(ABCD) = (x_1 x_2 x_3 x) = -1$$

ergibt, wo $(x_1 x_2 x_3 x_4)$ das *Doppelverhältnis* der Elemente $x_1 x_2 x_3 x_4$

---

[15]) Hölder (a. a. O., S. 248) nennt eine ein-eindeutige Beziehung zwischen den sämtlichen Punkten einer Geraden g und den sämtlichen Punkten einer Geraden g' (die Geraden können auch koinzidieren) projektiv, wenn die Bedingung erfüllt ist, daß vier harmonischen Punkten von g stets vier harmonische Punkte von g' entsprechen und umgekehrt. Hölder konstatiert ausdrücklich die Übereinstimmung seiner Definition der Projektivität mit derjenigen v. Staudts und fügt hinzu, daß die Definition durch (mehrmaliges) Projizieren für seine Zwecke unbrauchbar sei. Da Hölder trotz den 100 Seiten, die er der „Geometrie der projektiven Geraden" widmet, keine Gelegenheit findet, zu erklären, was man unter vier harmonischen Punkten zu verstehen habe, während er auf der anderen Seite als *ein* Ziel seiner Arbeit die „*Loslosung der projektiven Geometrie der Geraden von der Ebene*" bezeichnet, so kann die Meinung entstehen, es sollten an die Stelle der v. Staudtschen Definition von vier harmonischen Punkten die hierauf bezüglichen *Hölderschen Axiome* III bis VI treten, um so mehr, als Hölder sagt (S. 167): „Dabei ist es aber nun notwendig, daß außer den für die Gerade gültigen Axiomen der Anordnung und … der Stetigkeit gewisse die harmonischen Punkte betreffende Tatsachen vorausgesetzt werden, die man bei einem anderen Ausgangspunkt der Untersuchung aus den Tatsachen der Ebene bzw. des Raumes beweist."

[16]) Der passend spezialisierte „*Pascalsche Satz*" spielt bekanntlich bei der Begründung der projektiven Geometrie mit Hilfe der Kongruenzaxiome eine wichtige Rolle; er ist dem Fundamentalsatz äquivalent. Vgl. z. B. Schur, Grundlagen, a. a. O. S. 170.

$$\frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_4} : \frac{x_2 - x_3}{x_2 - x_4},$$

die bekannte *Invariante* gegenüber linearer Substitution, bedeutet.

Man ersieht daraus aber auch, daß der *Fundamentalsatz der projektiven Geometrie kein linearer Satz* ist, obwohl man ihn scheinbar so aussprechen kann, indem man mit v. Staudt die Projektivität nicht durch Perspektivität, sondern durch das Entsprechen harmonischer Gebilde erklärt und vergißt, daß harmonische Punktquadrupel nur mit Hilfe der Ebene geometrisch definiert werden können.

Wir können den Sachverhalt auch so ausdrücken: Die projektive Geometrie der Ebene ist das Primäre, der sogenannte Fundamentalsatz der projektiven Geometrie das Sekundäre. Wir geben ihm die folgende Fassung:

Fundamentalsatz der projektiven Geometrie (im offenen Kontinuum). *Numeriert man mittels wiederholter (unbegrenzt fortsetzbarer) Vierseits-Konstruktionen die Punkte einer Strecke AC, indem man etwa den Endpunkten A und C der Strecke die Werte* 0 *und* ∞, *einem beliebigen Punkte B zwischen A und C die Zahl* 1 *zuordnet, so ist die entstehende projektive Skala vom Wege der Herstellung unabhängig.*

Damit treten aber auch schon die eigenartigen Schwierigkeiten zutage, die bei einer Begründung der projektiven Geometrie auf Grund der ihr eigentümlichen projektiven Axiome allein zu überwinden sind. Wir erwähnen nur zwei: 1. Es ist zu zeigen, daß vier Punkte, für deren Koordinaten das Doppelverhältnis

$$(x_1 \, x_2 \, x_3 \, x_4) = -1$$

ist, ein (im geometrischen Sinne) harmonisches Quadrupel bilden; 2. Es ist zu zeigen, daß Punkte mit gleichen Koordinaten, die sich auf verschiedenen Wegen ergeben haben, identisch sind.

Dem letzten Umstande können wir sofort entnehmen, daß der Fundamentalsatz der projektiven Geometrie, auch unter Voraussetzung des Stetigkeitsaxioms I, 7, d. h. *unter Ausschluß späterer Hinzunahme sogenannter Nicht-Archimedischer Elemente*[17]), nicht ohne Stetigkeitsbetrachtungen erwiesen werden kann[18]). Man braucht nur zu beachten, daß den Vierseits-Konstruktionen gegenüber ein und dasselbe Element *„rational"* *und „irrational"* sein kann. Beispielsweise ergibt sich $\frac{1}{3}$ aus 0, 1, ∞ mit

[17]) Siehe Hilbert, Grundlagen, § 12. — Eine *angebliche* Begründung der (projektiven) Geometrie mit Hilfe von Kongruenzaxiomen *ohne* Stetigkeitsaxiom hat nur unter dieser Voraussetzung einen Sinn, d. h. die so entstehende Geometrie ist *unfertige, nicht* etwa *elementare* Geometrie.

[18]) Vgl. Hilbert, Grundlagen, Kap. VI.

zwei Schritten, nämlich so:

$$(0 \quad 1 \quad \infty \quad x_1) = -1 \qquad \left(x_1 = \frac{1}{2}\right);$$

$$\left(0 \quad \frac{1}{2} \quad 1 \quad x_2\right) = -1 \qquad \left(x_2 = \frac{1}{3}\right).$$

Wendet man dagegen den Prozeß des fortgesetzten „Halbierens" an:

$$(x_1 \quad x_2 \quad \infty \quad x) = -1 \qquad \left(x = \frac{x_1 + x_2}{2}\right),$$

so kann man $\frac{1}{3}$ nicht mit endlich vielen Schritten erreichen, da es *nur eine* Entwicklung von $\frac{1}{3}$ in einen (unbegrenzt fortsetzbaren, periodischen) *dyadischen Bruch* gibt (II, 2):

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots$$

oder, in dyadischer Schreibweise, wegen

$$1 = 2^0 \equiv 1{,}000\dots \quad \text{und} \quad 3 = 2^1 + 2^0 \equiv 11{,}000\dots,$$

$$\frac{1}{3} \equiv \frac{1}{11} = 0{,}010101\dots.$$

IV.

Beweis des Fundamentalsatzes.

Wir schreiten nunmehr zum Beweise des Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie im *begrenzten Gebiete* oder, was dasselbe besagt, im offenen Kontinuum auf Grund unserer Axiome I, 1—10. Als Kontinuum wählen wir das Innere eines Dreiecks (YOX). Man sieht dann leicht, daß man diesem Kontinuum, ohne mit den vorausgesetzten Axiomen in Widerstreit zu geraten, noch drei weitere, völlig gleichartige „Quadranten", samt den ihnen gemeinsamen Randpunkten, aber mit Ausschluß der Punkte $X^{\pm\infty}$ und $Y^{\pm\infty}$, nämlich

$$(YO-X), \quad (-XO-Y), \quad (-YOX)$$

hinzufügen kann. Und daß man in diesem *umfassendsten* zweidimensionalen, offenen Kontinuum (im Sinne des Vollständigkeits-Axioms I, 12) wiederum Kontinua abgrenzen kann, für deren Inneres ebenfalls sämtliche Axiome I, 1—10 gültig sind.

Hierzu ist zunächst nötig, mit Hilfe von Vierseits-Konstruktionen eine projektive X-Skala OX herzustellen. Das kann auf unendlich viele Weisen geschehen, und es ist nach dem Fundamentalsatze gleichgültig, auf welchem Wege es geschieht. Aber es ist *nicht gleichgültig für den Beweis*. Wollen wir unser Ziel erreichen, so müssen wir die schon erwähnten Schwierigkeiten berücksichtigen. Hierzu ist in erster Linie erforderlich, die Skala so anzulegen, daß wir sicher sind, jeden Punkt der Trägerstrecke ein und nur einmal zu *numerieren*.

Dies geschieht am einfachsten dadurch[19]), daß man den Endpunkten der Skalenträgerstrecke OX die Werte O und ∞ zuweist, und einem beliebigen Punkte zwischen O und X die Zahl 1. Dann sucht man die Punkte mit ganzzahligen Abszissen auf; und endlich unterteilt man jede Strecke, deren Endpunkte zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen zu Abszissen haben, auf die gleiche Weise, durch fortgesetztes „Halbieren".

Zu diesem Zwecke wenden wir den früher erklärten Prozeß der Konstruktion des *vierten harmonischen* Punktes D (zu einem Punkte C in bezug auf zwei von diesem und voneinander verschiedene Punkte A und B, von denen B zwischen A und C liegt) auf die beiden folgenden Weisen an:

$$(ABCD) = (\infty\, x_2\, x_1\, x) = -1, \tag{1}$$

d. h.

$$x - x_2 = x_2 - x_1$$

(Antragen der gleichen Strecke einer metrischen Skala im Euklidischen Bilde), woraus sich, wenn man mit $x_1 = 0$ und $x_2 = 1$ beginnt, die Reihe der *natürlichen* (positiven, ganzen) *Zahlen* ergibt[20]);

$$(ABCD) = (x_1\, x_2\, \infty\, x) = -1, \tag{2}$$

d. h.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

(Halbieren einer Strecke einer metrischen Skala im Euklidischen Bilde), woraus sich die erwähnten Unterteilungen ergeben.

Wir wollen nun unsre „Abszissen"-Skala x soweit fertiggestellt denken, daß die Differenz irgend zweier aufeinanderfolgender Abszissen $\frac{1}{2^k}$ (k pos. ganz) beträgt. Alsdann projizieren wir die Skala OX aus Y auf eine beliebige g-Linie OU im Innern des Dreiecks (OXY), und die so entstehende Skala aus X auf OY, wodurch wir eine „Ordinaten"-Skala y erhalten. Die g-Linien durch Y und X wählen wir als Koordinatenlinien

$$x = \text{konst.} \quad \text{und} \quad y = \text{konst.}$$

---

[19]) Vgl. Clebsch-Lindemann a. a. O., S. 436.

[20]) Nur der Mathematiker, an dessen axiomatischen Gebilden noch das (den geometrischen Gebilden der Wirklichkeit eigentümliche) deiktische Begriffsmerkmal des Ausgedehntseins haftet, wittert hier das Fehlen eines weiteren (Archimedischen) Axioms: die „Linien" der „axiomatischen" Geometrie sind aber, ebenso wie diejenigen der „analytischen", nur Mengen von Elementen, die wir Punkte oder Zahlen nennen; sonst nichts.

Und die Schnittpunkte der Koordinatenlinien bezeichnen wir als *Gitterpunkte,* und wir nennen

$$\frac{1}{2^k}$$

die *Maschenweite des* (unbegrenzt fortsetzbaren) *offenen Gitters.*

Weiter bezeichnen wir, wie früher, als γ-Linien solche Punktmengen unsres Kontinuums, deren Koordinaten (x, y) linearen Gleichungen

$$Ax + By + C = 0$$

genügen. Alsdann wollen wir den folgenden, für uns *grundlegenden Satz* beweisen:

Irgend drei Punkte eines offenen Gitters, die auf einer und derselben γ-Linie liegen, gehören auch einer und derselben g-Linie an.

Zu diesem Zwecke brauchen wir nur die Figuren (4) und (5) zu betrachten, von denen (5) das metrische Euklidische Bild von (4) ist.

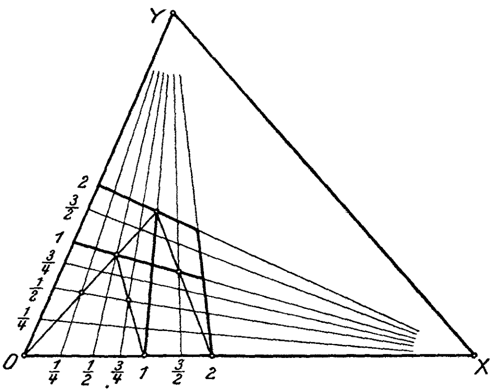

Fig. 4.

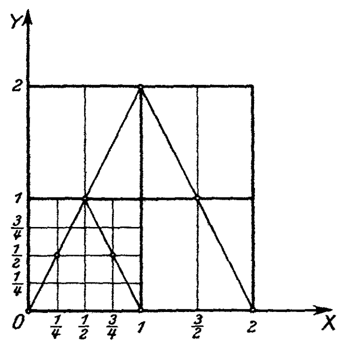

Fig. 5.

Auf Grund der Skalenkonstruktion und des Satzes (II, 1, b), nach dem vier harmonische Punkte durch vier harmonische Strahlen projiziert werden und, was dasselbe besagt, vier harmonische Strahlen nach vier harmonischen Punkten geschnitten werden, erkennt man sofort die Richtigkeit unsres Satzes für die γ-Linien $y = 2x$ und (ihre Spiegelbilder)

$$y = -2(x-1) \quad \text{sowie} \quad y = -2(x-2).$$

Hierbei kommen als projizierende Strahlen nur *Koordinatenlinien* in Betracht. Wählt man aber jetzt die Punkte $(x = \frac{1}{2},\ y = 1)$ und $(x = 1,\ y = 2)$ zu Projektionszentren, so erkennt man, daß auch die Punkte der X-Achse

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \infty, \frac{1}{2}\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \infty, 1\right)$$

harmonische Quadrupel bilden, womit die Verbindung zwischen den Konstruktionselementen der Skalen hergestellt ist (was übrigens auch mittels den Diagonallinien des Gitters hätte geschehen können). Durch Wiederholung der gleichen Betrachtung ergibt sich hieraus ohne Mühe, daß *irgend drei Skalenpunkte* $x_1\, x_2\, x_3$, für die

$$x_3 - x_2 = x_2 - x_1$$

ist, *mit* $x = \infty$ *harmonische Quadrupel*

$$(ABCD) = (x_1\, x_3 \infty\, x_2)$$

bilden. Hieraus aber folgt unser Satz mit ausschließlicher Benutzung von Koordinatenlinien als Projektions-Strahlen zunächst für irgend drei aufeinanderfolgende und damit für irgend drei Gitterpunkte einer γ-Linie.

Bei unsrer Einführung von Koordinaten auf Grund von Vierseits-Konstruktionen erscheinen die Zahlen in Gestalt von *dyadischen „Systembrüchen“* (II, 2, mit der Basis $b = 2$). Beträgt die *Maschenweite* unsres Gitters $\frac{1}{2^k}$, so haben *alle* Koordinaten die Form[21]):

$$\sigma_k = g + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_k}{2^k},$$

wo also g eine ganze Zahl und die a_ν 0 oder 1 bedeuten.

Da wir nun die Maschenweite unsres (offenen) Gitters durch fortgesetzte Vierseits-Konstruktionen unter jede Grenze herabdrücken können, so folgt aus unserm Satze über die Punkte eines (offenen) Gitters, daß *jede g-Linie durch eine lineare Gleichung in den Koordinaten x, y dargestellt werden kann, und daß umgekehrt jede derartige lineare Gleichung eine g-Linie darstellt.*

Damit aber ist der Beweis der Gültigkeit der projektiven Geometrie für ein beliebiges, den projektiven Axiomen I, 1—10 genügendes Kontinuum erbracht: die projektive Geometrie im begrenzten Gebiet oder, was dasselbe besagt, im offenen Kontinuum ist auf Grund der ihr eigentümlichen Axiome[22]) allein begründet, und damit auch der Fundamentalsatz erwiesen.

Darmstadt, den 6. April 1929.

---

[21]) Die von Hölder a. a. O., S. 205 und Klein-Rosemann, Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie, Berlin 1928, S. 160 verwandte Form $\frac{p}{2^n}$ ist für unsern Schluß durch *vollständige Induktion* ungeeignet.

[22]) Da zu diesen auch ein *Stetigkeitsaxiom* gehört (I, 7), so zählen wir es mit zu den „projektiven“ Axiomen (im Gegensatz zu anderen Autoren).

(Eingegangen am 10. 4. 1929.)