Über die topologische Erweiterung von Räumen.

Von

A. Tychonoff in Moskau.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit schließt an die abstrakt-topologischen Untersuchungen von Alexandroff und Urysohn an[1]) und behandelt das Problem der Einbettung von beliebigen topologischen Räumen in absolut abgeschlossene[2]) und insbesondere in bikompakte Räume. Ich beweise in erster Linie den folgenden

Satz I. *Zu jeder Kardinalzahl τ gibt es einen nur von dieser Kardinalzahl abhängenden bikompakten Raum R_τ von der Eigenschaft, daß jeder normale topologische Raum, der ein Umgebungssystem von einer Mächtigkeit $\leqq \tau$ besitzt, einer Teilmenge des Raumes R_τ homöomorph ist; dabei besitzt der Raum R_τ selbst ein Umgebungssystem von der Mächtigkeit τ. Wenn $\tau = \aleph_0$ ist, so ist R_τ dem Fundamentalquader des Hilbertschen Raumes homöomorph.*

(Man versteht bekanntlich unter dem Fundamentalquader des Hilbertschen Raumes die Gesamtheit aller Punkte $\xi = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, deren Koordinaten x_n für jedes n den Ungleichungen $0 \leqq x_n \leqq \frac{1}{n}$ genügen.)

---

[1]) Siehe vor allem Alexandroff und Urysohn, Zur Theorie der topologischen Räume, Math. Annalen **92** (1924), S. 258, und Alexandroff, Über stetige Abbildungen kompakter Räume, Math. Annalen **96** (1926), S. 555; die Kenntnis dieser Arbeit (insbesondere auch die dort gebrauchte Terminologie) wird im folgenden vorausgesetzt; die erste dieser Arbeiten wird kurz durch „Alexandroff-Urysohn", die zweite durch „Alexandroff" zitiert. Wegen ausführlicher Darstellung der erwähnten Untersuchungen möge insbesondere auf „Mémoire sur les espaces compacts" (Verh. K. Akademie Amsterdam, Deel XIV, No. 1 (1929)) derselben Verfasser hingewiesen sein.

[2]) Alexandroff-Urysohn, S. 261.

In dem letzten Teile des soeben ausgesprochenen Satzes sind insbesondere die beiden bekannten Urysohnschen Metrisationssätze[3]) (der Metrisationssatz für separable normale Räume, sowie der Metrisationssatz für kompakte topologische Räume) und auch der Urysohnsche Satz von der Einbettbarkeit jedes separablen metrischen Raumes in den Fundamentalquader des Hilbertschen Raumes[4]) enthalten.

Die Frage liegt nahe, ob die Normalität eines topologischen Raumes auch notwendig ist, um den Raum in einen bikompakten topologischen Raum einbetten zu können. In der vorliegenden Arbeit (§ 4) wird auf diese Frage eine negative Antwort gegeben, indem gezeigt wird, daß auch nichtnormale topologische Räume als Teilmengen von bikompakten Räumen auftreten können. Somit entsteht die Frage, notwendige und hinreichende Bedingungen aufzustellen, damit ein Raum in einen bikompakten topologischen eingebettet werden kann. Um diese Bedingung formulieren zu können, führen wir die folgende Definition[5]) ein.

Ein topologischer Raum heißt *vollständig regulär*, wenn zu jedem Punkte x_0 und zu jeder ihn nicht enthaltenden abgeschlossenen Menge A eine im ganzen Raume stetige Funktion $f(x)$ definiert werden kann, die im ganzen Raume der Bedingung

$$0 \leqq f(x) \leqq 1$$

genügt und die überdies in x_0 gleich 0 und in sämtlichen Punkten von A gleich 1 ist.

Jeder vollständig reguläre Raum ist, wie leicht ersichtlich, regulär, während jeder normale Raum vollständig regulär ist. Im § 4 der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß es vollständig reguläre Räume gibt, die nicht normal, und daß es reguläre Räume gibt, die nicht vollständig regulär sind, womit die Klasse der vollständig regulären Räume als eine logisch berechtigte Klasse von Räumen erscheint. Ihre mathematische Berechtigung wird durch den folgenden Satz gegeben:

Satz II. *Ein Raum ist dann und nur dann einer Teilmenge eines bikompakten topologischen Raumes homöomorph, wenn er vollständig regulär ist.*

Was endlich den allgemeinen Fall topologischer Räume betrifft, so gilt der

Satz III. *Jeder topologische Raum R ist einer Teilmenge eines absolut abgeschlossenen Raumes homöomorph, der ein Umgebungssystem besitzt,*

---

[3]) Siehe Urysohn, Zum Metrisationsproblem, Math. Annalen **94** (1925), S. 309, wo auch andere Arbeiten über denselben Gegenstand angegeben sind.

[4]) Siehe Urysohn, Der Hilbertsche Raum ..., Math. Annalen **92** (1924), S. 302.

[5]) Diese Definition rührt von Urysohn her. Vgl. seine Arbeit: Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen, Math. Annalen **94** (1925), S. 292.

welches dieselbe Mächtigkeit hat wie ein gegebenes Umgebungssystem des Raumes R.

In der Formulierung der obigen Sätze wird unter einem Umgebungssystem selbstverständlich ein volles (d. h. dem System aller im Raume vorhandener Gebiete gleichwertiges) System von Umgebungen verstanden. Ein solches Umgebungssystem soll im folgenden kurz eine *Basis* genannt werden.

Ich möchte zum Schluß noch erwähnen, daß ich bei der endgültigen Redaktion dieser Arbeit von Herrn Alexandroff unterstützt worden bin.

§ 1.

Konstruktion der Räume R_τ.

Es sei $\{J_\alpha\}$ eine Menge von der Mächtigkeit τ von abstrakt gegebenen zueinander fremden Einheitsstrecken [6]) $0 \leqq t \leqq 1$. Ein Punkt x des Raumes R_τ ist definitionsgemäß der Inbegriff $\{t_1, t_2, \ldots, t_\alpha, \ldots\}$ von „Koordinaten" t_α, wobei t_α ein Punkt von J_α, also eine reelle Zahl $0 \leqq t_\alpha \leqq 1$ ist. Die Umgebungsdefinition geschieht folgendermaßen: Es sei $x_0 = \{t_1^0, t_2^0, \ldots, t_\alpha^0, \ldots\}$ ein Punkt von R_τ. Wir wählen beliebig endlichviele $J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2}, \ldots, J_{\alpha_k}$ und auf jedem dieser Intervalle J_{α_i} zwei rationale Zahlen $\tau'_{\alpha_i} < t^0_{\alpha_i} < \tau''_{\alpha_i}$; eine Umgebung von $x_0 = \{t_1^0, t_2^0, \ldots, t_\alpha^0, \ldots\}$ besteht dann definitionsgemäß aus allen Punkten $x = \{t_1, t_2, \ldots, t_\alpha, \ldots\}$, die den Bedingungen $\tau'_{\alpha_i} < t_{\alpha_i} < \tau''_{\alpha_i}$ genügen.

Dieses Umgebungssystem hat, wie leicht ersichtlich, die Mächtigkeit $\aleph_0 \cdot \tau = \tau$. Ein gleichwertiges Umgebungssystem erhält man, wenn man für τ'_{α_i} bzw. τ''_{α_i} die Punkte $t^0_{\alpha_i} - \varepsilon_i$ bzw. $t^0_{\alpha_i} + \varepsilon_i$ wählt (ε_i sind beliebige hinreichend kleine positive Zahlen). Wir werden kurz schreiben $t_{\alpha_i} \subset S(t^0_{\alpha_i}; \varepsilon_i)$. Wenn $\varepsilon_i = \frac{1}{n_i}$ ist, werden wir die soeben definierte Umgebung durch

$$U^{n_1 n_2 \ldots n_k}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}(x_0)$$

bezeichnen.

Der mittels dieses Umgebungssystems definierte Raum genügt, wie man leicht zeigt, allen Hausdorffschen Axiomen; R_τ ist also ein topologischer Raum.

Es ist nun leicht zu zeigen, daß $R_{\aleph_0}$ dem kompakten, durch die Bedingungen $0 \leqq x_n \leqq \frac{1}{n}$ bestimmten Fundamentalquadern des Hilbertschen Raumes homöomorph ist. Um diese Homöomorphie festzustellen, lassen wir jedem Punkte $x = \{t_1, \ldots, t_n, \ldots\}$ des Raumes $R_{\aleph_0}$ den Punkt

[6]) α nimmt alle Werte von Null bis zur ersten Ordnungszahl $\omega^{(\tau)}$ von der Mächtigkeit τ an.

$x^* = \left\{t_1, \ldots, \frac{t_n}{n}, \ldots\right\}$ des Hilbertschen Raumes entsprechen. Die Abbildung ist eineindeutig. Um zu zeigen, daß sie beiderseits stetig ist, muß man folgende Behauptungen beweisen:

a) Zu jeder Umgebung U von x_0 im $R_{\aleph_0}$ gibt es eine Zahl ε von der Eigenschaft, daß aus

$$\varrho(x_0^*; x^*) < \varepsilon$$

im Hilbertschen Raume die Inklusion

$$x \subset U(x_0) \qquad (\text{in } R_{\aleph_0})$$

folgt.

b) Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine Umgebung $U(x_0)$ von der Eigenschaft, daß aus

$$x \subset U(x_0) \qquad (\text{in } R_{\aleph_0})$$

die Ungleichung

$$\varrho(x_0^*; x^*) < \varepsilon$$

im Hilbertschen Raum folgt.

Beweis von a). Es sei eine Umgebung $U(x_0)$ durch die Bedingungen

$$t_{n_i} \subset S(t_{n_i}^{(0)}; \varepsilon_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

gegeben. Man wähle N größer als alle n_i, und ε kleiner als alle $\frac{\varepsilon_i}{N}$.

Wenn nun

$$\varrho(x_0^*; x^*) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t_n^0 - t_n)^2}{n^2}} < \varepsilon$$

ist, so ist auch

$$\frac{|t_n^{(0)} - t_n|}{n} < \varepsilon.$$

Es ist also für jedes n_i

$$|t_{n_i}^0 - t_{n_i}| < \varepsilon n_i < \varepsilon N < \varepsilon_i$$

und somit $x \subset U(x_0)$.

Beweis von b). Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben; man wähle N so groß, daß

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

ist. Dann ist für jeden Punkt x der durch die Bedingungen

$$t_i \subset S\left(t_i^0; \frac{\varepsilon\sqrt{3}}{\pi}\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N)$$

bestimmten Umgebung U von x_0.

$$\varrho(x_0^*; x^*) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t_n^0 - t_n)^2}{n^2}} < \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \frac{(t_n^0 - t_n)^2}{n^2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} < \varepsilon,$$

w. z. b. w.

§ 2.

Beweis der Bikompaktheit von R_τ.

Vorbemerkung 1. Es sei irgendein Raum R und eine (abstrakt gedachte) Menge M (beliebiger Mächtigkeit) gegeben. Es sei ferner $\mathfrak{a}$ eine eindeutige (im allgemeinen nicht eineindeutige) Abbildung von M auf eine echte oder unechte Teilmenge $\mathfrak{a}(M)$ von R. Dann ist für jeden Punkt x von $\mathfrak{a}(M)$ eine Kardinalzahl, nämlich die Mächtigkeit der Menge aller Originalpunkte von x bei der Abbildung $\mathfrak{a}$, bestimmt. Diese Kardinalzahl nenne ich das *Gewicht* des Punktes x. Die Summe von Gewichten aller Punkte einer Teilmenge von $\mathfrak{a}(M)$ soll das Gewicht dieser Teilmenge heißen.

Wenn ξ ein Punkt von R ist, so nennen wir ihn *Konzentrationspunkt von M (in bezug auf* $\mathfrak{a}$), wenn, wie auch die Umgebung $U(\xi)$ von ξ gewählt sei, das Gewicht der Durchschnittsmenge $U(\xi)\cdot\mathfrak{a}(M)$ gleich der Mächtigkeit von M ist.

Die Menge aller Konzentrationspunkte von M in bezug auf $\mathfrak{a}$ ist eine in R abgeschlossene Menge, die wir durch $[M]_{\mathfrak{a}}$ bezeichnen werden.

Wenn R bikompakt ist, so besitzt jede unendliche Menge M in bezug auf jede Abbildung $\mathfrak{a}$ mindestens einen Konzentrationspunkt (Beweis mit Hilfe des Borel-Lebesgueschen Satzes ohne Schwierigkeit zu führen).

Im folgenden wird diese Bemerkung unter der Voraussetzung, daß R ein abgeschlossenes Intervall ist, benutzt.

Es sei E irgendeine unendliche Teilmenge von R_τ, deren Mächtigkeit $\mathfrak{m} \geqq \aleph_0$ sein möge. Indem man die Gesamtheit der ersten Koordinaten aller Punkte von E betrachtet, erhält man eine eindeutige Abbildung $\mathfrak{a}_1$ von E auf die Einheitsstrecke; wir bezeichnen durch t_1^0 einen (beliebig, aber eindeutig gewählten) Konzentrationspunkt von E in bezug auf $\mathfrak{a}_1$.

Es seien jetzt die reellen Zahlen

$$t_1^0,\ t_2^0,\ \ldots,\ t_\alpha^0,\ \ldots \qquad (0 \leqq t_\alpha \leqq 1)$$

für alle $\alpha < \alpha_0$ definiert (dabei ist α_0 eine beliebige Ordnungszahl unter ω^τ, und ω^τ die erste Ordnungszahl von der Mächtigkeit τ), und zwar so, daß folgende Bedingung erfüllt ist.

(A) Wenn E_n^α die Menge aller Punkte von E bedeutet, deren α-te Koordinate t_α der Ungleichung $|t_\alpha - t_\alpha^0| < \frac{1}{n}$ genügt, so hat der Durchschnitt eines beliebigen endlichen Systems

$$E_{n_1}^{\alpha_1}\cdot E_{n_2}^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot E_{n_k}^{\alpha_k} \qquad (\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_k < \alpha_0)$$

die Mächtigkeit $\mathfrak{m}$.

(Für $\alpha_0 = 2$ ist die Bedingung (A) erfüllt, weil dann

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 1$$

ist und $E_{n_1}^{\alpha_1} \cdot E_{n_2}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot E_{n_k}^{\alpha_k} = E_\nu^1$, wo ν die größte unter den Zahlen $n_1, n_2, \ldots, n_k$ ist; die Menge E_ν^1 hat offenbar die Mächtigkeit $\mathfrak{m}$, weil t_1^0 ein Konzentrationspunkt von E ist.)

Es sei jetzt $\mathfrak{a}$ die Abbildung von R_τ auf die Einheitsstrecke, die dadurch entsteht, daß man jedem Punkte von R_τ seine α_0-te Koordinate entsprechen läßt.

Man betrachte alle abgeschlossenen Mengen von der Gestalt

$$[E_{n_1}^{\alpha_1} \cdot E_{n_2}^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot E_{n_k}^{\alpha_k}]_{\mathfrak{a}} = F_{n_1 n_2 \ldots n_k}^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k},$$

wobei wie immer $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_k < \alpha_0$ ist.

Ich behaupte, daß je endlichviele unter den Mengen $F_{n_1 n_2 \ldots n_k}^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}$ einen nicht leeren Durchschnitt haben. Es seien in der Tat

$$F_{n_1^1 n_2^1 \ldots n_{k_1}^1}^{\alpha_1^1 \alpha_2^1 \ldots \alpha_{k_1}^1}, \quad F_{n_1^2 n_2^2 \ldots n_{k_2}^2}^{\alpha_1^2 \alpha_2^2 \ldots \alpha_{k_2}^2}, \quad \ldots, \quad F_{n_1^h n_2^h \ldots n_{k_h}^h}^{\alpha_1^h \alpha_2^h \ldots \alpha_{k_h}^h}$$

beliebig gegeben. Dann ist

$$(1) \qquad \prod_{i=1}^{h} F_{n_1^i n_2^i \ldots n_{k_i}^i}^{\alpha_1^i \alpha_2^i \ldots \alpha_{k_i}^i} = \prod_{i=1}^{h} \left[E_{n_1^i n_2^i \ldots n_{k_i}^i}^{\alpha_1^i \alpha_2^i \ldots \alpha_{k_i}^i}\right]_{\mathfrak{a}}.$$

Nun ist aber (wie die Mengen A und B gewählt sein mögen) stets

$$[A]_{\mathfrak{a}} \cdot [B]_{\mathfrak{a}} \supset [A \cdot B]_{\mathfrak{a}}.$$

Aus dieser Bemerkung und der Identität (1) folgt somit

$$(2) \qquad \prod_{i=1}^{h} F_{n_1^i n_2^i \ldots n_{k_i}^i}^{\alpha_1^i \alpha_2^i \ldots \alpha_{k_i}^i} \supset \left[\prod_{i=1}^{h} \prod_{j=1}^{k_i} E_{n_j^i}^{\alpha_j^i}\right]_{\mathfrak{a}}.$$

Es gilt ferner vermöge der Bedingung (A):

$$(3) \qquad \text{Mächt. von} \left[\prod_{i=1}^{h} \prod_{j=1}^{k_i} E_{n_j^i}^{\alpha_j^i}\right] = \mathfrak{m},$$

woraus folgt, daß

$$\left[\prod_{i=1}^{h} \prod_{j=1}^{k_i} E_{n_j^i}^{\alpha_j^i}\right]_{\mathfrak{a}}$$

und insbesondere

$$\prod_{i=1}^{h} F_{n_1^i n_2^i \ldots n_{k_i}^i}^{\alpha_1^i \alpha_2^i \ldots \alpha_{k_i}^i}$$

nicht leer ist.

Da je endlichviele unter den Mengen $F^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}_{n_1n_2\ldots n_k}$ $(\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_k < \alpha_0)$ einen nicht leeren Durchschnitt haben, so haben alle diese Mengen (die ja abgeschlossene Teilmengen der Strecke $0 \leqq t \leqq 1$ sind) mindestens einen Punkt gemein. Einen beliebig (aber eindeutig) gewählten unter den Punkten der Durchschnittsmenge aller $F^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}_{n_1n_2\ldots n_k}$ bezeichnen wir durch $t^0_{\alpha_i}$, und man zeigt leicht, daß die Bedingung (A) für alle $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_k < \alpha_0 + 1$ erfüllt ist[7]).

Auf diese Weise bestimmt man für jede Ordnungszahl $\alpha < \omega^\tau$ einen Punkt t^0_α der Strecke $0 \leqq t \leqq 1$. Man betrachte jetzt den Punkt x_0 von R_τ mit den Koordinaten

$$t^0_1,\ t^0_2,\ \ldots,\ t^0_\alpha,\ \ldots \qquad (\alpha < \omega^\tau):$$

$$x_0 = \{t^0_1,\ t^0_2,\ \ldots,\ t^0_\alpha,\ \ldots\}.$$

Ich behaupte, daß x_0 ein vollständiger Häufungspunkt der Menge E ist. In der Tat enthält eine beliebige Umgebung von x_0 $U^{n_1n_2\ldots n_k}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}(x_0)$ die Menge $E^{\alpha_1}_{n_1} \cdot E^{\alpha_2}_{n_2} \cdot \ldots \cdot E^{\alpha_k}_{n_k}$, die (vermöge der Bedingung (A)) die Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ hat, w. z. b. w.

§ 3.

Beweis der Sätze I und II.

Um die Sätze I und II zu beweisen, genügt es zu zeigen:

1. daß jede Teilmenge eines bikompakten Raumes vollständig regulär ist;

2. daß jeder vollständig reguläre Raum R mit einer Basis von der Mächtigkeit τ einer Teilmenge von R_τ homöomorph ist.

Die erste Behauptung folgt daraus, daß die vollständige Regularität eine im Urysohnschen Sinne transitive Eigenschaft ist, d. h. daß eine Teilmenge eines vollständig regulären Raumes, als Raum betrachtet, selbst vollständig regulär ist. Es sei in der Tat R eine Teilmenge eines vollständig regulären Raumes R^*. Ist nun x_0 ein Punkt und A eine zu x_0 fremde in R abgeschlossene Menge, so gibt es eine in R^* abgeschlossene Menge A^* derart, daß $A = R \cdot A^*$. Da R^* vollständig regulär ist, kann man dort eine stetige Funktion $f(x)$ erklären, die folgenden Bedingungen genügt:

$$\begin{cases} \quad f(x_0) = 0, & \\ \quad f(x) = 1 & \text{für alle } x \subset A^*, \\ 0 \leqq f(x) \leqq 1 & \text{für alle übrigen Punkte.} \end{cases}$$

---

[7]) Es seien in der Tat

$$E^{\alpha_1}_{n_1},\ E^{\alpha_2}_{n_2},\ \ldots,\ E^{\alpha_k}_{n_k}$$

gegeben. $E^* = E^{\alpha_1}_{n_1} \cdot E^{\alpha_2}_{n_2} \cdot \ldots \cdot E^{\alpha_k}_{n_k}$ hat die Mächtigkeit $\mathfrak{m}$, und $t^{(0)}_{\alpha_0}$ ist ein Konzentrationspunkt dieser Menge in bezug auf $\mathfrak{a}$; daraus und aus der Definition von $E^{\alpha_0}_{n_0}$ folgt dann unmittelbar, daß bei jedem n_0 $E^* \cdot E^{\alpha_0}_{n_0}$ von derselben Mächtigkeit $\mathfrak{m}$ ist.

Die Menge A ist in der Menge A^* enthalten, also ist für alle ihre Punkte $f(x)=1$. Betrachtet man die Funktion $f(x)$ nur in Punkten von R, so genügt sie allen aufgestellten Bedingungen, womit die vollständige Regularität von R bewiesen ist.

Bemerkung 2. Ist R ein vollständig regulärer Raum, so gibt es für jeden Punkt x_0 und jede seine Umgebung $U(x_0)$ eine andere Umgebung desselben Punktes $V(x_0)$ derart, daß eine stetige Funktion $f(x)$ sich erklären läßt, so daß

$$\begin{cases} \quad f(x)=0, & \text{wenn} \quad x \subset \overline{V(x_0)}, \\ \quad f(x)=1, & \text{wenn} \quad x \subset R-U(x_0), \\ 0 \leqq f(x) \leqq 1 & \text{für alle übrigen Punkte von } R. \end{cases}$$

Um letztere Tatsache zu beweisen, erkläre man im Raume R eine stetige Funktion $f^*(x)$ dadurch, daß man

$$\begin{cases} \quad f^*(x_0)=0, & \\ \quad f^*(x) \;=1, & \text{wenn} \quad x \subset R-U(x), \\ 0 \leqq f^*(x) \;\leqq 1 & \text{in allen übrigen Punkten von } R \end{cases}$$

setzt.

Die Funktion $f(x)$ ist stetig, es gibt also eine Umgebung von x_0, $V(x_0)$, für deren Punkte $f^*(x)<\frac{1}{2}$. Dann kann man eine Funktion $f(x)$ z. B. folgendermaßen definieren:

$$\begin{cases} f(x)=f^*(x) & , \text{ falls } \; f^*(x)=1, \\ f(x)=0 & , \text{ falls } \; f^*(x) \leqq \dfrac{1}{2}, \\ f(x)=2\left(f^*(x)-\dfrac{1}{2}\right), & \text{ falls } \; \frac{1}{2}<f^*(x)<1. \end{cases}$$

Der Beweis der Behauptung 2 geschieht nunmehr mit Hilfe einer von Urysohn zum Beweis eines seiner Metrisationssätze angewandten Methode. Es sei R ein vollständig regulärer Raum mit einer Basis $\mathfrak{B}$ von der Mächtigkeit τ. Ein Paar zur Basis $\mathfrak{B}$ gehörender Umgebungen $(U, V)=\pi$ soll kanonisch heißen, falls $U \supset \overline{V}$ ist und eine stetige Funktion $f(x)$ im Raume R bestimmt werden kann, die in $\overline{V}$ verschwindet, in $R-U$ gleich 1 ist und überall in R der Ungleichung $0 \leqq f(x) \leqq 1$ genügt.

Es seien

$$\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\alpha, \ldots \qquad (\alpha<\omega^\tau)$$

alle kanonischen Paare[8]) und

[8]) Die Mächtigkeit der Menge aller kanonischen Paare ist höchstens gleich der Mächtigkeit der Basis; sie kann aber auch nicht kleiner sein, weil (vermöge der Bemerkung 2) jedes U aus $\mathfrak{B}$ mindestens in einem π vorkommt; die Mächtigkeit aller kanonischen Paare ist also genau τ.

$$f_1, f_2, \ldots, f_\alpha, \ldots \qquad (\alpha < \omega^\tau)$$

die ihnen entsprechenden stetigen Funktionen.

Wir lassen nun einem Punkt $x \subset R$ den Punkt

$$f(x) = x^* = \{t_1, t_2, \ldots, t_\alpha, \ldots\}$$

entsprechen, wo $t_\alpha = f_\alpha(x)$. Die dadurch bestimmte Abbildung von R auf eine Teilmenge R^* von R_τ ist eineindeutig. Sind in der Tat x und y verschiedene Punkte von R, so gibt es zunächst eine Umgebung U, die x, aber nicht y enthält; vermöge der Bemerkung 2 gibt es sodann eine in U enthaltene Umgebung V von x, so daß U und V ein kanonisches Paar $\pi_\alpha = (U, V)$ bilden. Somit ist $f_\alpha(x) = 0$, während $f_\alpha(y) = 1$ ist; die Punkte x^* und y^* sind also verschieden.

Die Abbildung $x^* = f(x)$ ist *beiderseits* stetig.

1. Es sei x_0 ein Punkt,

$$f(x_0) = x_0^* = \{t_1^0, t_2^0, \ldots, t_\alpha^0, \ldots\}$$

sein Bildpunkt in R^*, $U(x_0^*) = U_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}^{n_1 n_2 \ldots n_k}$ eine beliebige Umgebung letzteren Punktes. Um die Stetigkeit der Funktion $x^* = f(x)$ nachzuweisen, genügt es eine den Punkt x_0 enthaltende offene Menge G zu finden, dessen Bild $f(G)$ in $U(x_0^*)$ enthalten ist. Man beachte zu diesem Zwecke die Menge $G_{\alpha_i}^{n_i}$ aller Punkte x von R, für die

$$(1_i) \qquad t_{\alpha_i}^0 - \frac{1}{n_i} < f_{\alpha_i}(x) < t_{\alpha_i}^0 + \frac{1}{n_i} \qquad (1 \leqq i \leqq k)$$

ist; da $f_\alpha(x)$ stetig ist, so ist G_α^n eine offene Menge; da außerdem $f_{\alpha_i}(x_0) = t_{\alpha_i}^0$ ist, so ist $x_0 \subset G_{\alpha_i}^{n_i}$. Es genügt jetzt

$$G = G_{\alpha_1}^{n_1} \cdot G_{\alpha_2}^{n_2} \cdot \ldots \cdot G_{\alpha_k}^{n_k}$$

zu setzen. G ist eine offene Menge und für $x \subset G$ sind alle Bedingungen (1_i) erfüllt, d. h. es ist $f(x) \subset U(x_0^*)$; da überdies $x_0 \subset G$ ist, ist unsere Behauptung bewiesen.

2. Um die Stetigkeit der Umkehrungsfunktion $x = f^{-1}(x^*)$ zu beweisen, zeigen wir, daß für jede $U(x_0)$ sich eine $U(x_0^*)$ finden läßt, für welche $f^{-1}(U(x_0^*)) \subset U(x_0)$. Letztere Bedingung heißt aber nichts anderes, als daß aus

$$y \subset R - U(x_0)$$
$$y^* \subset R^* - U(x_0^*)$$

folgen soll. Es ist nun $U(x_0)$ beliebig gegeben; man bestimme ein V so, daß $x_0 \subset V$ und (U, V) ein kanonisches Paar, und zwar $\pi_\alpha = (U, V)$ ist; dann ist aber $f_\alpha(x_0) = 0$; $f_\alpha(y) = 1$ für jedes $y \subset R - U$, d. h. die α-te Koordinate von x_0^* ist gleich Null, die α-te Koordinate eines jeden Punktes

y^* für $y \subset R - U$ ist dagegen gleich 1. Wenn jetzt $U(x_0^*) = U_\alpha^2$ gesetzt wird, so folgt aus $y \subset R - U(x_0)$, daß die α-te Koordinate von y^* gleich 1; also $> \frac{1}{2}$ ist; y^* liegt somit außerhalb von $U(x_0^*)$.

Die Homöomorphie der beiden Räume R und R^* ist hiermit nachgewiesen. Dadurch sind aber auch die beiden Sätze I und II bewiesen.

§ 4.

Konstruktion von Beispielen.

In diesem Paragraphen will ich zeigen:

1. daß es vollständig reguläre Räume gibt, die nicht normal sind, und
2. daß es reguläre Räume gibt, die nicht vollständig regulär sind.

Ich konstruiere zunächst einen Raum S folgendermaßen. Die Punkte x von S sind Paare (α, β), wobei α und β Ordnungszahlen sind, und zwar durchläuft α alle Werte $\leqq \omega_1$ und β alle Werte $\leqq \omega$. Wenn $x_0 = (\alpha_0, \beta_0)$ $(1 \leqq \alpha_0 \leqq \omega_1,\ 1 \leqq \beta_0 \leqq \omega)$ ein Punkt von S ist, so erhält man eine beliebige Umgebung $U_{\alpha'\beta'}(x_0)$ $0 \leqq \alpha' < \alpha_0$, $0 \leqq \beta < \beta_0$ dadurch, daß man alle $x = (\alpha; \beta)$ betrachtet, für die $\alpha' < \alpha \leqq \alpha_0$, $\beta' < \beta \leqq \beta_0$ ist.

Wie leicht ersichtlich, ist S ein bikompakter Raum.

Man bezeichne nun durch $\dot{S}$ den Raum, der aus S durch Tilgen des Punktes (ω_1, ω) entsteht. Als Teilmenge eines bikompakten Raumes S ist $\dot{S}$ vollständig regulär; andererseits ist aber $\dot{S}$ nicht normal, weil die beiden abgeschlossenen und zueinander fremden Teilmengen von $\dot{S}$

$$X = \left\{ \begin{matrix} (\alpha, \omega) \\ 1 \leqq \alpha < \omega_1 \end{matrix} \right\} \quad \text{und} \quad Y = \left\{ \begin{matrix} (\omega_1, \beta) \\ 1 \leqq \beta < \omega \end{matrix} \right\}$$

durch keine zwei zueinander fremde Gebiete getrennt werden können. Es gilt sogar die schärfere

Behauptung I. Wenn G ein die Menge $Y_n = \left\{ \begin{matrix} (\omega_1, \beta) \\ n \leqq \beta < \omega \end{matrix} \right\}$ enthaltendes Gebiet ist, so gibt es ein $\alpha_0 < \omega_1$ derart, daß $\bar{G}$ alle Punkte $X_{\alpha_0} = \{\alpha, \omega\}$, $\alpha_0 \leqq \alpha < \omega_1$, enthält.

In der Tat gibt es für jeden Punkt $x = (\omega_1, \beta)$ eine $U_{\alpha_\beta, \beta'}(x) \subset G$; also sind insbesondere alle $x = (\alpha, \beta)$ $\alpha > \alpha_\beta$ in G enthalten. Da die Menge aller α_β abzählbar ist, gibt es eine Zahl α_0, die kleiner als ω_1 und größer als alle α_β ist. Somit sind alle Punkte (α, β), $\alpha > \alpha_0$, $n \leqq \beta < \omega$ in G und alle Punkte (α, ω), $\alpha > \alpha_0$ in $\bar{G}$ enthalten, w. z. b. w.

Ein regulärer Raum ist (vermöge des Satzes II) dann und nur dann vollständig regulär, wenn er in einen bikompakten Raum eingebettet werden kann. Da jeder bikompakte Raum regulär ist, so folgt aus dem soeben

Gesagten, daß ein nicht bikompakter regulärer Raum, der in bezug auf reguläre Punkte abgeschlossen ist, sicher nicht vollständig regulär ist. Bevor wir einen solchen Raum konstruieren, machen wir die folgende

Behauptung II. Wenn $\dot{G}$ ein die Mengen

$$X_{\alpha_0} = \left\{ \begin{matrix} (\alpha, \omega) \\ \alpha_0 < \alpha < \omega_1 \end{matrix} \right\}, \qquad Y_{n_0} = \left\{ \begin{matrix} (\omega_1, \beta) \\ n_0 < \beta < \omega \end{matrix} \right\}$$

enthaltendes Gebiet in $\dot{S}$ ist, so ist $\dot{S} - \dot{G}$ (als Relativraum in $\dot{S}$ betrachtet) bikompakt.

In der Tat ist

$$\dot{S} - \dot{G} = S - G$$

(wobei $G = \dot{G} + (\omega_1, \omega)$ ist), woraus unsere Behauptung folgt.

Es sei jetzt R^* ein topologischer Raum, der dadurch entsteht, daß man die Vereinigungsmenge von abzählbar vielen Exemplaren

$$\dot{S}^1, \; \dot{S}^2, \ldots, \dot{S}^k, \ldots$$

von $\dot{S}$ betrachtet. Wir bezeichnen die Punkte von $\dot{S}^k$ durch $(\alpha, \beta)^k$, die Mengen X_α und Y_n von $\dot{S}^k$ durch X_α^k bzw. Y_n^k usw. Man betrachte ferner die stetige Zerlegung[9]) von R^* in (höchstens aus zwei Punkten bestehende) Mengen X, wobei

X entweder ein Punkt $(\alpha, \beta)^k$, $\alpha \neq \omega_1$, $\beta \neq \omega$ von R

oder ein Punktepaar $[(\omega_1, \beta)^{2n-1}, (\omega_1, \beta)^{2n}]$, $n = 1, 2, \ldots$

oder ein Punktepaar $[(\alpha, \omega)^{2n}, (\alpha, \omega)^{2n+1}]$, $n = 1, 2, \ldots$

ist. Der durch diese Zerlegung induzierte Raum ist, wie leicht ersichtlich, ein regulärer Raum $\dot{R}^*$[10]). Jedem Punkte $(\alpha, \beta)^k$ von R^* entspricht ein Punkt $(\alpha, \beta)^{*k}$ von $\dot{R}^*$, ebenso entsprechen die Teilmengen $\dot{S}^k$ bzw. X_α^k bzw. Y_n^k von R^* Teilmengen $\dot{S}^{*k}$ bzw. X_α^{*k} bzw. Y_n^{*k} von $\dot{R}^*$.

Wir konstruieren endlich einen Raum

$$R = \dot{R}^* + \xi$$

dadurch, daß wir einen neuen Punkt ξ mittels der Umgebungserklärung

$$U_m(\xi) = \xi + \left(\dot{R}^* - \sum_{k=1}^{m} \dot{S}^{*k}\right) \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

einführen. Man zeigt ohne Schwierigkeit, daß R ein regulärer Raum ist.

Ich behaupte, daß R in bezug auf alle regulären Punkte abgeschlossen ist.

---

9) Alexandroff, Math. Annalen **96** (1926), S. 557 (§ 4).

10) Man könnte sagen, daß $\dot{R}^*$ aus R^* dadurch entsteht, daß man in R^* die Punkte $(\omega_1, \beta)^{2n-1}$ bzw. $(\alpha, \omega)^{2n}$ mit $(\omega_1, \beta)^{2n}$ bzw. $(\alpha, \omega)^{2n+1}$ identifiziert.

Um dies zu beweisen machen wir die folgende

Behauptung III. Es sei G ein Teilgebiet von $\dot{S}$, welches die Menge X_{α_0} enthält; es gibt dann eine natürliche Zahl n_0 von der Eigenschaft, daß $\overline{G}$ alle Punkte (ω_1, β), $n_0 \leqq \beta < \omega$ (d. h. die Menge Y_{n_0} enthält.

Es existiert in der Tat für jedes $x = (\alpha, \omega)$, $\alpha > \alpha_0$, eine $U_{\alpha', n_\alpha}(x) \subset G$; infolgedessen sind alle (α, β), $n_\alpha < \beta < \omega$, in G enthalten; da es nur abzählbar viele verschiedene n_α gibt, gibt es ein $n_0 < \omega$, so daß für unabzählbar viele α alle (α, β), $n_0 < \beta < \omega$, in G enthalten sind; dann sind aber alle (ω_1, β), $n_0 < \beta < \omega$, in $\overline{G}$ enthalten.

Es sei jetzt

$$R + \eta$$

ein regulärer Raum. Dann gibt es zwei Umgebungen $U(\xi) = U_N(\xi)$ und $V(\eta)$, so daß

$$\overline{U(\xi)} \cdot \overline{V(\eta)} = 0$$

ist; wir dürfen dabei stets voraussetzen, daß N gerade ist. Man konstruiere ferner

$$\overline{V_1(\eta)} \subset V(\eta), \ldots, \quad \overline{V_{m+1}(\eta)} \subset V_m(\eta), \ldots \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

und setze

$$G_n = R - \overline{V_m(\eta)}.$$

Dann ist

$$\overline{G}_m \subset R - V_m(\eta) \subset R - \overline{V_{m+1}(\eta)} \subset G_{m+1}. \tag{0}$$

Außerdem ist

$$G_1 \supset U_N(\xi) \supset \sum_{k=N+1}^{\infty} \dot{S}^{*k}, \tag{1}$$

so daß

$$V(\eta) \subset \sum_{k=1}^{N} \dot{S}^{*k} + \eta$$

ist.

Aus (1) folgt weiter, daß

$$G_1 \supset X^{*N+1},$$

also auf Grund der Behauptung III existiert ein n_1, so daß

$$\overline{G}_1 \supset Y_{n_1}^{*N+1} = Y_{n_1}^{*N}$$

und also (vermöge (0))

$$G_2 \supset Y_{n_1}^{*N}.$$

Aus der Behauptung I folgt sodann, daß es ein α_2 gibt, so daß

$$G_3 \supset \overline{G}_2 \supset X_{\alpha_2}^{*N} = X_{\alpha_2}^{*N-1}.$$

Daraus folgt weiter (nach Behauptung III), daß

$$G_4 \supset \overline{G}_3 \supset Y_{n_3}^{*N-1} = Y_{n_3}^{*N-2},$$

was (nach Behauptung I)

$$G_5 > \bar{G}_4 > X_{a_4}^{*N-2}$$

ergibt.

Eine wiederholte Anwendung der beiden Behauptnngen I und III schließt mit

$$G_{N+2} > Y_{a_N}^{*1} + X_{n_{N+1}}^{*1}.$$

Nun ist

$$V_{N+2} < R - G_{N+2}.$$

Da aber G_{N+2} sämtliche $X_{a_{N-k}}^{*k}$ und $Y_{n_{N-k}}^{*k}$ $k \leqq N$ und sämtliche $\dot{S}^{*m}$ $m > N+1$ enthält, so ist $V_{N+2}(\eta)$ in einer nach Bemerkung II bikompakten Teilmenge von R^* enthalten, was aber nur dann möglich[11]) ist, wenn η in V_{N+2} und somit in $R+\eta$ isoliert ist; damit ist die Abgeschlossenheit von R^* in bezug auf reguläre Punkte bewiesen.

Es sei hierzu noch bemerkt, daß durch das soeben konstruierte Beispiel eine von Alexandroff und Urysohn (a. a. O. S. 266) gestellte Frage, ob jeder reguläre nicht absolut abgeschlossene Raum sich zu einem ebenfalls regulären Raum durch Hinzufügung eines nicht isolierten Punktes erweitern läßt, eine volle (und zwar negative) Antwort erhalten hat.

§ 5.

Beweis des Satzes III.

Der Beweis des Satzes III beruht auf der Betrachtung von Zerlegungen[12]) der Räume R_τ in zueinander fremde abgeschlossene Mengen: es wird sich nämlich zeigen, daß die absolut abgeschlossenen Räume, deren Existenz im Satze III behauptet wird, durch Zerlegungen der Räume R_τ bestimmt werden. Bei der Untersuchung dieser Zerlegungen werden wir folgende von Alexandroff a. a. O. bewiesene Tatsache benutzen: ein durch eine Zerlegung eines bikompakten Raumes R bestimmter Raum R^* ist ein topologischer Raum; wenn R eine Basis von einer Mächtigkeit $\leqq \mathfrak{m}$ besitzt, so gilt dasselbe auch für R^*.[13])

Es sei R ein topologischer Raum mit einer Basis $\mathfrak{B}$ von der Mächtigkeit $\leqq \tau$. Der Satz III wird bewiesen sein, wenn wir gezeigt haben werden, daß es eine Zerlegung von R_τ gibt, die einen absolut abgeschlossenen

---

[11]) Alexandroff und Urysohn, S. 263, Satz V.

[12]) Im Sinne von Alexandroff, Math. Annalen **96** (1926), § 3 (S. 556—557). Es sei hier ausdrücklich erwähnt, daß wir (der Alexandroffschen Definition entsprechend) beliebige allgemeine und nicht notwendig etwa stetige Zerlegungen betrachten.

[13]) Bei Alexandroff ist diese Behauptung explizite nur für stetige Zerlegungen und $\mathfrak{m} = \aleph_0$ (S. 262, Satz V und § 13) bewiesen. Der Beweis gilt aber wörtlich auch in unserem allgemeinen Falle.

Raum bestimmt, welcher eine dem Raume R homöomorphe Teilmenge enthält. Wir gehen jetzt zum Beweise letzterer Behauptung über.

Es sei X_α eine auf der Einheitsstrecke liegende abgeschlossene Menge. Im folgenden werden wir die Mengen $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_\alpha, \ldots\}$ des Raumes R_τ betrachten, die aus allen Punkten $x = \{t_1, t_2, \ldots, t_\alpha, \ldots\}$ bestehen, für die $t_\alpha \subset X_\alpha$ ist. Die Mengen X sind abgeschlossen. In der Tat, wenn $x_0 = \{t_1^0, t_2^0, \ldots, t_\alpha^0, \ldots\}$ nicht zu X gehört, so ist wenigstens für ein α

$$\varrho(t_\alpha^0, X_\alpha) = \delta > 0$$

(die Entfernung auf J_α gemessen). Dann enthält aber seine, durch die Bedingung $t_\alpha \subset S\left(t_\alpha^0, \frac{\delta}{2}\right)$ bestimmte Umgebung keinen Punkt der Menge X; x_0 ist somit kein Häufungspunkt von X.

Jetzt wollen wir diejenigen Mengen X, die als Zerlegungseinheiten von R_τ auftreten sollen, definieren. Zu diesem Zwecke bestimmen wir für ein beliebiges Gebiet G des Raumes R zwei Funktionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ durch die Vorschrift·

$$\varphi_G(X) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x \subset \overline{G} \\ 1 & \text{falls} \quad x \subset G; \end{cases} \qquad \psi_G(X) = \begin{cases} 0 & \text{falls} \quad x \subset G \\ 1 & \text{falls} \quad x \subset R - G. \end{cases}$$

Für jeden Punkt des Raumes ist $\varphi_G(x) \leqq \psi_G(x)$. Man sieht auch leicht, daß, wenn $\varphi_G(x_0) = \psi_G(x)$ ist, eine Umgebung $U(x_0)$ des Punktes x_0 existiert, für deren jeden Punkt $y \subset U(x_0)$

$$\varphi_G(y) = \psi_G(y) = \varphi_G(x_0) = \psi_G(x_0)$$

ist.

Es seien

$$U_1, U_2, \ldots, U_\alpha, \ldots \qquad (\alpha < \omega^{(\tau)})$$

die Elemente der Basis $\mathfrak{B}$ des Raumes R. Einfachheitshalber setzen wir

$$\varphi_\alpha(x) = \varphi_{u_\alpha}(x) \quad \text{und} \quad \psi_\alpha(x) = \psi_{u_\alpha}(x).$$

Es sei ferner $X_\alpha(x)$ die Gesamtheit aller der Bedingung $\varphi_\alpha(x) \leqq t \leqq \psi_\alpha(x)$ genügender reeller Zahlen und

$$X(x) = \{X_1(x), X_2(x), \ldots, X_\alpha(x), \ldots\}.$$

Wenn x und y verschiedene Punkte von R sind, so gibt es eine U_α so, daß $x \subset U_\alpha$, $y \subset R - \overline{U}_\alpha$, woraus folgt, daß $X(x)$ und $X(y)$ zueinander fremd sind.

Wenn die Vereinigungsmenge Ξ der (für alle Punkte x von R) bestimmten $X(x)$ nicht mit dem ganzen Raum R_τ identisch ist, betrachten wir alle Punkte von $R - \Xi$ als neue Zerlegungseinheiten, so daß schließlich der ganze Raum R_τ in zueinander fremde abgeschlossene Mengen zerlegt wird: $R_\tau = \sum X$. Diese Zerlegung ist durch den Raum R allein eindeutig bestimmt und soll deshalb als die Zerlegung $\zeta(R_\tau, R)$ bezeichnet werden. Der durch $\zeta(R_\tau, R)$ bestimmte Raum soll R_τ^R heißen. Die Zerlegung $\zeta(R_\tau, R)$ induziert aber auch eine, im allgemeinen unstetige Abbildung von R_τ auf R_τ^R, die wir durch φ bezeichnen werden: $R_\tau^R = \varphi(R_\tau)$. Die Punkte von R_τ^R werden wir durch x^* bezeichnen. Da jedem Punkte $x \subset R$ eine Menge X, d. h. ein Punkt $x^* = f(x)$ zugeordnet ist, sind wir im Besitze einer eineindeutigen Abbildung $x^* = f(x)$ des Raumes R auf eine (echte oder unechte) Teilmenge R^* von R_τ^R. Wir werden zeigen, daß diese Abbildung eine Homöomorphie ist. Dazu brauchen wir aber eine bequeme Basis des Raumes R_τ^R.

Es sei $G_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}^{n_1 n_2 \ldots n_k}(x_0)$ die Gesamtheit aller Punkte $x = \{t_1, t_2, \ldots, t_\alpha, \ldots\}$ von R_τ, für die $t_{\alpha_i} \subset S\left(X_{\alpha_i}(x_0), \frac{1}{n_i}\right)$ ist. $G_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}^{n_1 n_2 \ldots n_k}$ ist ein Gebiet. Es sei ferner $V_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}^{n_1 n_2 \ldots n_k}(x_0^*)$ die Gesamtheit aller x^*, die, als Mengen X betrachtet, in $G_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}^{n_1 n_2 \ldots n_k}$ liegen. Ich behaupte, daß die $V_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}^{n_1 n_2 \ldots n_k}$ eine Basis bilden. Um es einzusehen, genügt es zu zeigen, daß man für jedes Gebiet $G \supset X_0$ ein Gebiet $G_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}^{n_1 n_2 \ldots n_k}(x_0)$ finden kann von der Eigenschaft, daß

$$X_0 \subset G_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}^{n_1 n_2 \ldots n_k} \subset G \tag{1}$$

ist.

Um dieses $G_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}^{n_1 n_2 \ldots n_k}$ zu konstruieren, wähle man für jeden Punkt $x \subset X_0$ eine $U_{\alpha_1^x, \alpha_2^x, \ldots \alpha_k^x}^{2m_1^x, 2m_2^x, \ldots, 2m_k^x}(x)$, wobei die $\alpha_1^x, \alpha_2^x, \ldots, \alpha_k^x, m_1^x, m_2^x, \ldots, m_k^x$ durch die Bedingung

$$U_{\alpha_1^x, \alpha_2^x, \ldots, \alpha_k^x}^{m_1^x, m_2^x, \ldots, m_k^x}(x) \subset G$$

bestimmt sind. Auf diese Weise entsteht eine Überdeckung der abgeschlossenen Teilmenge X_0 von R_τ; nach dem Borel-Lebesgueschen Satze kann man diese Überdeckung durch eine endliche Teilüberdeckung ersetzen. Es seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ alle bei den Elementen dieser Überdeckung auftretenden untere Indizes und $2m_i$ der größte unter den zu α_i gehörenden oberen Indizes. Dann ist

$$G_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}^{2m_1, 2m_2, \ldots, 2m_k} \subset G.$$

Es sei in der Tat $\xi = \{t_1, t_2, \ldots, t_\alpha, \ldots\}$ irgendein Punkt von $G_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k}^{2m_1, 2m_2, \ldots, 2m_k}$. Es ist $|t_{\alpha_i} - t_{\alpha_i}^0| < \frac{1}{2m_i}$, wobei

$$x_0 = \{t_1^0, t_2^0, \ldots, t_\alpha^0, \ldots\}$$

ein Punkt von X_0 ist; nun ist aber x_0 in einer bestimmten $U_{\alpha_1^x, \alpha_2^x, \ldots, \alpha_k^x}^{2m_1^x, 2m_2^x, \ldots, 2m_k^x}(x)$ mit $x = \{t_1^x, t_2^x, \ldots, t_\alpha^x, \ldots\}$ enthalten. Alle $\alpha_1^x, \alpha_2^x, \ldots, \alpha_k^x$ kommen unter den $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ vor und es ist

$$|t_{\alpha_i^x}^x - t_{\alpha_i^x}| \leqq |t_{\alpha_i^x}^x - t_{\alpha_i^x}^0| + |t_{\alpha_i^x}^0 - t_{\alpha_i^x}| < 2 \cdot \frac{1}{2m_i^x} = \frac{1}{m_i^x}.$$

Daraus folgt, daß die Koordinaten von ξ allen die Umgebung $U^{m_1^x, m_2^x, \ldots, m_k^x}_{\alpha_1^x, \alpha_2^x, \ldots, \alpha_k^x}(x)$ bestimmenden Bedingungen genügen und also

$$\xi < U^{m_1^x, m_2^x, \ldots, m_k^x}_{\alpha_1^x, \alpha_2^x, \ldots, \alpha_k^x} < G$$

ist.

Wir wollen jetzt zeigen, daß die eineindeutige Abbildung

$$R^* = f(R)$$

in beiden Richtungen stetig ist.

Der Beweis vollzieht sich in zwei Schritten.

I. Es sei $U(x_0^*) = V^{n_1 n_2 \ldots n_k}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}(x_0^*)$ beliebig gegeben. Man betrachte ein $X_{\alpha_i}(x_0)$. Wenn $\varphi_{\alpha_i}(x_0) = \psi_{\alpha_i}(x_0)$ ist, so gibt es (wie bei der Definition der Funktionen φ und ψ erwähnt wurde) eine $U(x_0)$ in R — nennen wir sie W_{α_i} — derart, daß für sämtliche $x < W_{\alpha_i}(x_0)$

$$\varphi_{\alpha_i}(x) = \psi_{\alpha_i}(x) = \varphi_{\alpha_i}(x_0) = \psi_{\alpha_i}(x_0)$$

ist, es ist m. a. W.

$$X_{\alpha_i}(x) = X_{\alpha_i}(x_0)$$

und also um so mehr

$$X_{\alpha_i}(x) < S\left(X_{\alpha_i}(x_0); \frac{1}{n_i}\right)$$

für alle $x < W_{\alpha_i}(x_0)$.

Wenn aber $X_{\alpha_i}(x_0)$ die ganze Einheitsstrecke ist, so ist für jeden Punkt $x < R$

$$X_{\alpha_i}(x) < S\left(X_{\alpha_i}(x_0); \frac{1}{n_i}\right)$$

und wir setzen dementsprechend $W_{\alpha_i}(x_0) = R$.

Es sei jetzt $U(x_0)$ eine im Gebiete

$$W_{\alpha_1}(x_0) \cdot W_{\alpha_2}(x_0) \cdot \ldots \cdot W_{\alpha_k}(x_0)$$

enthaltene Umgebung; offenbar ist dann für jeden Punkt $x < U(x_0)$ und jedes $i = 1, 2, \ldots, k$

$$X_{\alpha_i}(x) < S\left(X_{\alpha_i}(x_0); \frac{1}{n_i}\right);$$

diese Tatsache bedeutet aber gerade, daß

$$f(x) < V^{n_1 n_2 \ldots n_k}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}(x_0^*),$$

sobald $x < U(x_0)$.

II. Es sei eine beliebige $U(x_0) = U_\alpha$ gegeben; um die Stetigkeit der Umkehrungsfunktion $f^{-1}(x^*)$ zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß für jeden Punkt x^* von R^*, der in $V_\alpha^2(x_0^*)$ liegt, $f^{-1}(x^*) < U_\alpha$ ist. Nun ist aber $\varphi_\alpha(x_0) = \psi_\alpha(x_0) = 0$, also besteht $X_\alpha(x_0)$ aus dem einzigen Punkte 0. Wenn $f^{-1}(x^*) = x < R - U_\alpha$ wäre, wäre $\psi_\alpha(x) = 1$, also könnte auch x^* definitionsgemäß nicht zu $V_\alpha^2(x_0^*)$ gehören.

Die Homöomorphie zwischen R und R^* ist hiermit bewiesen. Da $R^* \subset R_\tau^R$ ist, haben wir noch zu zeigen, daß R_τ^R ein absolut abgeschlossener Raum ist. Dazu brauchen wir aber folgende zwei Bemerkungen zu machen:

1. Es gibt für jeden Punkt $x_0 = \{t_1^0, t_2^0, \ldots, t_\alpha^0, \ldots\}$ von R_τ abzählbare Punktmengen A, die zu diesem Punkte konvergieren, und zwar solche, daß unter den Koordinaten der Punkte von A weder 0 noch 1 vorkommt. Wir brauchen in der Tat z. B. die Punktmenge $x_n = \{t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, \ldots, t_\alpha^{(n)}, \ldots\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ zu nehmen mit $t_\alpha^n = t_\alpha^0 - \frac{t_\alpha^0}{n+1}$, falls $t_\alpha^0 \neq 0$ und $t_\alpha^{(n)} = \frac{1}{n+1}$, falls $t_\alpha^{(0)} = 0$. Von einer solchen Folge sagen wir, sie konvergiere regelmäßig gegen x_0.

Sind alle Koordinaten eines Punktes x_0 von 0 und 1 verschieden, so ist $x_0 \subset R - \Xi$ und somit ist $\varphi(x_0) = x_0$; wenn x_n regelmäßig gegen x_0 konvergiert, so konvergiert auch $\varphi(x_n)$ gegen $\varphi(x_0)$ (weil ja auch $\varphi_n(x_n) = x_n$ ist.

2. Die den Raum R_τ^R bestimmende Zerlegung von R_τ ist im allgemeinen nicht stetig[14]). Es kann also vorkommen, daß für eine Umgebung $U(x_0^*)$ in R_τ^R die Menge $\varphi^{-1}(U)$ die Menge $X_0 = \varphi^{-1}(x_0^*)$ nicht im Innern enthält; dagegen existiert ein Teilgebiet G von R_τ von der Eigenschaft, daß

$$\varphi^{-1}(\overline{U(x_0^*)}) \supset G \supset X_0$$

ausfällt. Es genügt in der Tat, für G das der Definition von $U(x_0^*)$ zugrunde gelegtes Gebiet[15]) zu wählen. Es sei x ein beliebiger Punkt von G, $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ eine gegen x regelmäßig konvergierende Folge. Da $\varphi(x_n) = x_n$ ist, so ist $\varphi(x_n) \subset U(x_0^*)$, also $\varphi(x) \subset \overline{U(x_0^*)}$.

Um jetzt die absolute Abgeschlossenheit des Raumes R_τ^R zu beweisen, genügt es nach einem Satze von Alexandroff und Urysohn[16]) zu zeigen, daß man aus jedem den Raum R_τ^R überdeckenden System von Umgebungen $\{U\}$ ein endliches Teilsystem $U_1, U_2, \ldots, U_N$ so wählen kann, daß

$$\overline{U}_1 + \overline{U}_2 + \ldots + \overline{U}_n = R_\tau^R$$

ist. Man betrachte zu diesem Zwecke die der Definition von $\{U\}$ zugrunde gelegten[17]) Gebiete G in R_τ. Da R_τ bikompakt ist und die $\{G\}$ eine

[14]) Aus dem Satze II und dem unter [13]) zitierten Satz von Alexandroff folgt vielmehr, daß unsere Zerlegung nur dann stetig sein kann, wenn der gegebene Raum regulär ist.

[15]) Alexandroff, a. a. O. § 3, S. 537.

[16]) Alexandroff und Urysohn, Zur Theorie der topologischen Räume, Math. Annalen 92 (1924), S. 262, Satz II.

[17]) Alexandroff a. a. O. § 3, S. 537.

Überdeckung von R_τ bilden, lassen sich endlichviele unter den $\{G\}$ — etwa $G_1, G_2, \ldots, G_N$ — so wählen, daß

$$G_1 + G_2 + \ldots + G_N = R_\tau$$

ist. Dann ist

$$\varphi(G_1) + \varphi(G_2) + \ldots + \varphi(G_N) = R_\tau^R;$$

nach dem soeben Bewiesenen ist aber $\varphi(G) \subset \overline{U}$, so daß

$$\overline{U}_1 + \overline{U}_2 + \ldots + \overline{U}_N$$

erst recht den ganzen Raum R_τ^R ausfüllt.

Dadurch ist die absolute Abgeschlossenheit von R_τ^R und mithin auch der Satz III vollständig bewiesen.

Ich möchte hervorheben, daß die von Alexandroff und Urysohn seit langem gestellte Frage, *ob jeder topologische Raum als überalldichte Teilmenge eines absolut abgeschlossenen Raumes betrachtet werden kann*, durch den soeben bewiesenen Satz keine Antwort erhalten hat[18]), da man nicht weiß, ob die Menge $\overline{R}^* \subset R_\tau^R$, als Raum betrachtet, absolut abgeschlossen ist. Auch die Frage, ob man alle topologischen Räume, die Basen von der Mächtigkeit τ besitzen, in *einen und denselben absolut abgeschlossenen Raum einbetten kann*, bleibt unentschieden.

---

[18]) Eine abgeschlossene Teilmenge eines absolut abgeschlossenen Raumes braucht nicht (wie elementare Beispiele zeigen) absolut abgeschlossen zu sein (siehe Alexandroff und Urysohn, Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Verh. Kon. Ak. Amsterdam, Deel XIV, No. 1 (1929)).

(Eingegangen am 6. 1. 1929.)