Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten.

Zweiter Teil[1]).

Klasseninvarianten von Abbildungen.

Von

Heinz Hopf in Berlin.

Brouwer hat in seiner grundlegenden Arbeit „Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten“ [2]) den Abbildungsgrad durch den Beweis des folgenden Satzes eingeführt: „*Wenn eine zweiseitige, geschlossene, gemessene n-dimensionale Mannigfaltigkeit* μ *auf eine gemessene n-dimensionale Mannigfaltigkeit* μ' *eindeutig und stetig abgebildet wird, so existiert eine bei stetiger Modifizierung der Abbildung sich nicht ändernde endliche ganze Zahl c mit der Eigenschaft, daß die Bildmenge von* μ *jedes Teilgebiet von* μ' *im ganzen c Male positiv überdeckt. Ist* μ' *einseitig oder offen, so ist c stets gleich Null.*“ Dabei ist, wie aus dem Beweis des Satzes hervorgeht, der „*Abbildungsgrad*“ c im „algebraischen“ Sinne als Anzahl der positiven Bedeckungen aufzufassen, d. h. er ist die Anzahl der positiven Bedeckungen vermindert um die Anzahl der negativen Bedeckungen. Der Grad ändert sich, wie der Satz besagt, nicht, wenn die gegebene Abbildung f stetig modifiziert wird, er ist also eine Invariante der durch f bestimmten „Abbildungsklasse“; die ohne Berücksichtigung von Vorzeichen bestimmte Anzahl der glatten, d. h. eineindeutigen, Bedeckungen eines Gebietes durch die Bildmenge dagegen ist weder auf μ' noch in der Klasse konstant; über sie kann man von vornherein nur aussagen, daß sie niemals kleiner als $|c|$ sein kann. So entsteht folgende Frage: „*Gibt es in der durch f bestimmten Abbildungsklasse eine Ab-*

---

[1]) Erster Teil: Neue Darstellung der Theorie des Abbildungsgrades für topologische Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen **100** (1928). Im folgenden als „Teil I“ zitiert.

[2]) Brouwer, Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen **71** (1911).

bildung f', bei der die Bildmenge ein Gebiet von μ' nicht nur „algebraisch", sondern auch „geometrisch", d. h. in bezug auf eine Abzählung, die auf Vorzeichen keine Rücksicht nimmt, $|c|$-mal bedeckt? Die Beantwortung dieser Frage, auf deren Bedeutung ich durch Herrn Alexandroff hingewiesen worden bin, bildet das eigentliche Ziel dieser Arbeit.

Die Frage ist zu bejahen, wenn μ und μ' orientierbar sind. Dies wird unten für den Fall $n \neq 2$ bewiesen, während der Fall $n = 2$, der sich unserer Beweismethode entzieht, in demselben Sinne von H. Kneser erledigt worden ist[3]). Wenn also beide Mannigfaltigkeiten orientierbar sind, so läßt sich der Grad seinem Betrage nach charakterisieren als *die innerhalb der vorgelegten Abbildungsklasse mögliche Mindestzahl glatter Bedeckungen eines Gebietes von μ' durch die Bildmenge*, — eine Tatsache, die die von Brouwer in einer späteren Arbeit[4]) bewiesene topologische Invarianz des Grades in Evidenz setzt.

Diese Übereinstimmung des Grades mit der soeben genannten Mindestzahl besteht aber offenbar nicht, wenn μ' nicht orientierbar ist; denn dann ist ja nach dem am Anfang zitierten Brouwerschen Satz immer $c = 0$, während die fragliche Mindestzahl z. B. bei der Abbildung einer Kugel auf eine projektive Ebene, bei der das Bild der ersteren als unverzweigte zweiblättrige Überlagerungsfläche über letzterer liegt, wie man leicht erkennt, 2 ist. Hier ist also die Aufgabe zu lösen, diese Mindestzahl, die ihrer Definition nach eine Klasseninvariante ist, mittels Eigenschaften der vorgelegten Abbildung f zu bestimmen, und dieselbe Aufgabe tritt auf, wenn auch μ nicht orientierbar, der Grad also gar nicht definiert ist. Man wird versuchen, für diese Fälle eine dem Grade ähnliche Zahl zu erklären, von der sich nachträglich zeigen läßt, daß sie für die in der Klasse möglichen Bedeckungszahlen die Minimaleigenschaft hat, die nach dem oben Gesagten im Fall orientierbarer Mannigfaltigkeiten dem Grade zukommt. Dies wird unten durchgeführt; die Klasseninvariante, die die Rolle des Grades übernimmt, wird als „Absolutgrad" bezeichnet und ist im Falle geschlossener orientierbarer Mannigfaltigkeiten mit dem absoluten Betrag des Grades identisch; für ihre Definition ist unter anderem eine feinere Einteilung der Abbildungen nicht orientierbarer Mannigfaltigkeiten in „orientierbare" und „nicht orientierbare" Abbildungen notwendig, die das Verhalten der Bilder derjenigen geschlossenen Wege berücksichtigt, bei deren Durchlaufung sich die Orientierung umkehrt, und die in ähnlicher Weise gelegentlich ebenfalls schon von Brouwer vorgenommen worden ist[5]). Der Beweis der Übereinstimmung des

---

[3]) H. Kneser, Glättung von Flächenabbildungen, Math. Annalen **100** (1928).

[4]) Brouwer, Über Jordansche Mannigfaltigkeiten, § 6, Math. Annalen **71** (1911).

[5]) Brouwer, Aufzählung der Abbildungsklassen endlichfach zusammenhängender Flächen, Math. Annalen **82** (1921); besonders S. 284.

Absolutgrades mit der oben besprochenen minimalen Bedeckungszahl versagt auch hier für den Fall $n = 2$; aber auch diese Lücke ist von H. Kneser ausgefüllt worden[6]).

Nun ist aber der Bereich der Gebilde, für deren Abbildungen der Grad definiert ist, durch die *geschlossenen*, orientierbaren oder nicht orientierbaren, Mannigfaltigkeiten keineswegs erschöpft, und gerade bei manchen Anwendungen spielen die Abbildungen von *berandeten* oder von den aus diesen durch Weglassung des Randes entstehenden *offenen* Mannigfaltigkeiten eine wesentliche Rolle; es braucht wohl nur daran erinnert zu werden, daß Brouwers Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl[7]) auf der Betrachtung des — dort allerdings noch nicht mit diesem Namen versehenen — „Grades" der Abbildung eines n-dimensionalen Würfels beruht. Die Theorie des Grades für die Abbildungen offener Mannigfaltigkeiten, auf die sich, wie schon angedeutet, die Betrachtung berandeter Mannigfaltigkeiten stets zurückführen läßt, ist im ersten Teil der vorliegenden Arbeit ausführlich dargestellt worden; der Grad ist hier nicht mehr auf μ', sondern nur in gewissen Gebieten konstant; ferner hat man die Gesamtheit der zulässigen „stetigen Modifizierungen" der Abbildungen einzuschränken, und zwar ungefähr in dem Sinne, daß man, wenn eine berandete Mannigfaltigkeit abgebildet wird, die Abbildung am Rande nicht ändern darf. Für diesen weiteren Bereich von Abbildungen ergibt sich nun ebenso wie bei geschlossenen Mannigfaltigkeiten die Frage nach der durch zulässige stetige Abänderungen erreichbaren Mindestzahl glatter Bedeckungen eines Gebietes, und der oben genannte Weg zur Antwort auf diese Frage ist auch hier gangbar: die Definition des „Absolutgrades" gilt von vornherein für die Abbildungen beliebiger, geschlossener oder offener, Mannigfaltigkeiten, und auch der Nachweis seines Übereinstimmens mit der in Frage stehenden Mindestzahl hat für $n \neq 2$ diesen allgemeinen Gültigkeitsbereich. Jedoch zeigt es sich jetzt, daß die Dimensionszahl $n = 2$ nicht nur unserer Beweismethode unzugänglich ist, sondern daß sie wirklich in bezug auf unsere Fragestellung eine Ausnahmerolle spielt: *es gibt Abbildungen offener Flächen, für welche die durch zulässige Abänderungen erreichbare Mindestzahl der glatten Bedeckungen eines Gebietes größer ist als der Absolutgrad* — im Gegensatz zu allen anderen Dimensionszahlen, wo die beiden Zahlen stets einander gleich sind. Für die Abbildungen offener Flächen bleibt unser Problem also ungelöst, und seine nähere Untersuchung scheint auf gruppentheoretische Fragen zu führen[8]).

---

[6]) H. Kneser, Die kleinste Bedeckungszahl innerhalb einer Klasse von Flächenabbildungen; erscheint in den Math. Annalen.

[7]) Brouwer, Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl, Math. Annalen **70** (1911).

[8]) Vgl. Fußnote [30]).

Die bisher besprochene Mindestzahl läßt sich auch folgendermaßen schildern: Man faßt einen festen Punkt ξ von μ' und solche Abbildungen f aus der vorgelegten Klasse ins Auge, bei denen die Gleichung $f(x)=\xi$ nur „einfache" Lösungen x besitzt; dabei heißt ein Punkt x auf μ eine einfache Lösung, wenn es eine Umgebung von x gibt, in der die Gleichung $f(y)=\eta$ für jeden hinreichend nahe an ξ gelegenen Punkt η genau eine Lösung y hat; geometrisch gesprochen: es werden nur glatte Bedeckungen der Umgebung von ξ zugelassen. Gefragt wird nach einer Abbildung f, bei der die Anzahl dieser einfachen Lösungen möglichst klein ist. Bei dieser Formulierung drängt sich von selbst die Frage nach einer Abbildung der vorgelegten Klasse auf, für die die Anzahl der Lösungen von $f(x)=\xi$ schlechthin, ohne Rücksicht auf Einfachheit, möglichst klein ist, also nach einer Abbildung, die *die innerhalb der Klasse erreichbare Mindestzahl der Originalpunkte des Punktes* ξ liefert. Diese Mindestzahl ist ebenso wie die oben besprochene nach Definition eine Invariante der Abbildungsklasse und des Punktes ξ; für den Fall geschlossener Mannigfaltigkeiten μ ist sie wieder, wie man leicht sieht, von ξ unabhängig. Ihre Untersuchung ist in dieser Arbeit ein wichtiger Schritt auf dem Wege zu dem Absolutgrad und der mit diesem verknüpften Mindestzahl der glatten Bedeckungen.

Die somit gestellte Aufgabe, die in der Klasse mögliche Mindestzahl der Originale von ξ zu bestimmen, ist ihrem Wesen nach nahe verwandt mit der von J. Nielsen in Angriff genommenen Frage nach der innerhalb einer Klasse von Abbildungen von μ auf sich erreichbaren Mindestzahl von Fixpunkten[9]), also von Lösungen der Gleichung $f(x)=x$; und der Begriff, der bei uns im wesentlichen zum Ziele führt, ist einem Nielsenschen Grundbegriff nachgebildet: analog der durch Nielsen vorgenommenen Einteilung der Fixpunktmenge in „Fixpunktklassen" zerlegen wir die Originalmenge von ξ in „Schichten" und unterscheiden „wesentliche" und „unwesentliche" Schichten. Die Anzahl der wesentlichen Schichten ist eine Invariante der Klasse (und hängt, falls μ offen ist, von dem Punkte ξ ab); sie ist eine untere Schranke für die jetzt zu untersuchende Mindestzahl; es bleibt die Frage zu beantworten, ob sie gleich dieser Mindestzahl ist. Die Antwort fällt analog der Antwort auf die früher gestellte Frage nach der ersten von uns betrachteten Mindestzahl aus: *sie lautet „ja", falls* $n \neq 2$ *ist; dagegen gibt es Abbildungsklassen von Flächen — und hier sogar von geschlossenen Flächen —, für die die Mindestzahl der Originale eines Punktes größer als die wesentliche Schichten-*

[9]) J. Nielsen, Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen I, II. Acta mathematica **50**, **53** (1927, 1929). Man vergleiche besonders die Charakterisierung der Fixpunktklassen in I auf S. 289 unten.

zahl ist, und die Frage, wie die Mindestzahl allgemein zu bestimmen ist, bleibt offen.

Die Bestimmung der Anzahl der wesentlichen Schichten führt, wie es bei der Analogie mit den Nielsenschen Begriffen zu erwarten ist, auf die Betrachtung der Beziehung zwischen den Fundamentalgruppen der beiden Mannigfaltigkeiten, die durch die Abbildung vermittelt wird. *Ist μ geschlossen und der Grad (bzw. Absolutgrad) von 0 verschieden, so ist die Anzahl durch den genannten Gruppenhomomorphismus vollständig bestimmt: das Bild der Fundamentalgruppe von μ ist eine Untergruppe der Fundamentalgruppe von μ' mit endlichem Index; dieser Index ist die Zahl der wesentlichen Schichten und ein Teiler des Grades (bzw. Absolutgrades).*

Dies sind, in kurzen Zügen, die Probleme und Ergebnisse dieser Arbeit. Man sieht, daß die am wenigsten geklärten Punkte in unserem Problemkreis diejenigen sind, die sich auf Flächenabbildungen beziehen. Hier wird in zwei Richtungen weiterzuarbeiten sein: einerseits muß man die Abbildungsklassen der Flächen selbst, insbesondere der geschlossenen Flächen, noch genauer untersuchen, als es bisher geschehen ist, um z. B. die Mindestzahl der Originale eines Bildpunktes mittels Eigenschaften des durch die Abbildung bewirkten Gruppenhomomorphismus zu bestimmen (ein erstrebenswertes Ziel ist hier natürlich die Aufzählung aller Abbildungsklassen durch Angabe aller möglichen Homomorphismen von Flächengruppen[10])); andererseits wird man zu versuchen haben, den Fall $n = 2$ durch Modifizierung oder Verallgemeinerung der Fragestellung von seiner Ausnahmestellung zu befreien und in eine allgemeinere Theorie einzuordnen. In beiden Richtungen werden in zwei der Arbeit angefügten Anhängen kleine Vorstöße unternommen.

Inhaltsverzeichnis.

---

[10]) Daß die Aufzählung der Gruppenhomomorphismen im allgemeinen (nämlich dann, wenn μ' nicht die Kugel oder die projektive Ebene ist) mit der Aufzählung der Abbildungsklassen identisch ist, geht aus der unter [5]) genannten Arbeit von Brouwer (S. 286) hervor. Die unter [6]) genannte Arbeit von Kneser enthält wichtige Beiträge zur Durchführung dieser Aufzählung.

§ 1.

Vorbemerkungen über Fundamentalgruppe und Überlagerungsmannigfaltigkeiten [11]).

Unter einem „Weg" in der Mannigfaltigkeit M verstehen wir das eindeutige und stetige Bild einer Strecke, unter seinem Anfangs- und Endpunkt die Bilder des Anfangs- und Endpunkts der Strecke. Es ist klar, was unter dem zu einem Weg w inversen Weg w^{-1} sowie unter der Zusammensetzung $w_1 w_2$ zweier Wege zu verstehen ist. Ein Weg w heißt geschlossen, wenn Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen; ein geschlossener Weg läßt sich also als eindeutiges und stetiges Bild einer Kreisperipherie auffassen. Er ist dann und nur dann (auf einen Punkt) „zusammenziehbar", wenn sich diese Abbildung zu einer Abbildung der ganzen Kreisscheibe ergänzen läßt. Zwei geschlossene Wege w_1, w_2 mit gemeinsamem Anfangs- und Endpunkt heißen „äquivalent", wenn der Weg $w_1 w_2^{-1}$ zusammenziehbar ist; wir schreiben dann $w_1 \equiv w_2$. Aus $w_1 \equiv w_2$, $w_1 \equiv w_3$ folgt leicht $w_2 \equiv w_3$; die geschlossenen Wege mit gemeinsamem Anfangs- und Endpunkt x lassen sich also in Klassen zusammenfassen. Zwei geschlossene Wege durch x sind dann und nur dann unter Festhaltung ihres gemeinsamen Anfangs- und Endpunkts ineinander deformierbar, wenn sie zu einer Klasse gehören. Die Klassen bilden bezüglich der erwähnten Zusammensetzung eine Gruppe $\mathfrak{F}_x$. Ist y ein von x verschiedener Punkt, so ist die entsprechend definierte Gruppe $\mathfrak{F}_y$ mit $\mathfrak{F}_x$ isomorph; der Isomorphismus ist, wenn g_x ein geschlossener Weg durch x, v ein fester Weg von x nach y ist, dadurch gegeben, daß man dem Element g_x von $\mathfrak{F}_x$ das Element

[11]) Dieser Paragraph, insbesondere sein erster Absatz, ist nur eine Zusammenstellung von Tatsachen, die ziemlich allgemein bekannt sein dürften. — Literatur: Poincaré, Analysis Situs, §§ 12, 13, Journ. École Polytechn. (2) **1** (1895). — Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie (Berlin 1923), V. Abschn., § 2. — J. Nielsen, wie unter [9]). — Reidemeister, Fundamentalgruppe und Überlagerungsräume, Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1928. — Schreier, Die Verwandtschaft stetiger Gruppen im großen, § 1, Abhandl. Math. Sem. d. Hamburgischen Universität **5** (1927). — Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche (Leipzig-Berlin 1913), § 9.

$g_y = v^{-1} g_x v$ von $\mathfrak{F}_y$ zuordnet. Die Willkür von v hat zur Folge, daß dieser Isomorphismus nur bis auf innere Automorphismen bestimmt ist: wenn man nämlich v durch $\bar{v}$ ersetzt und $\bar{v}^{-1} v = h$ setzt, so wird dem Element g_x nicht $g_y = v^{-1} g_x v$, sondern $\bar{g}_y = \bar{v}^{-1} g_x \bar{v} = h v^{-1} g_x v h^{-1} = h g_y h^{-1}$ zugeordnet. Die abstrakte Gruppe $\mathfrak{F}$, von der $\mathfrak{F}_x, \mathfrak{F}_y, \ldots$ Realisationen sind, heißt die „Fundamentalgruppe" von M.

Zu jeder Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{F}$ wird folgendermaßen die „zu $\mathfrak{U}$ gehörige Überlagerungsmannigfaltigkeit von M" konstruiert:

x sei ein fester Punkt in M, $\mathfrak{U}_x$ eine der Untergruppen von $\mathfrak{F}_x$, die $\mathfrak{U}$ entsprechen (die also alle die Form $h\mathfrak{U}_x h^{-1}$ haben). Wir betrachten zunächst die Wege mit dem Anfangspunkt x und einem festen Endpunkt y und nennen zwei solche Wege w_1, w_2 „äquivalent mod $\mathfrak{U}_x$", geschrieben: $w_1 \equiv w_2 \pmod{\mathfrak{U}_x}$, wenn $w_1 w_2^{-1} \subset \mathfrak{U}_x$ ist. Ist

$$w_1 \equiv w_2 \pmod{\mathfrak{U}_x}, \qquad w_1 \equiv w_3 \pmod{\mathfrak{U}_x},$$

so ist also

$$w_1 w_2^{-1} \subset \mathfrak{U}_x, \qquad w_2 w_1^{-1} \subset \mathfrak{U}_x, \qquad w_1 w_3^{-1} \subset \mathfrak{U}_x,$$

mithin

$$w_2 w_1^{-1} w_1 w_3^{-1} \equiv w_2 w_3^{-1} \subset \mathfrak{U}_x, \text{ [12]}$$

d. h.

$$w_2 \equiv w_3 \pmod{\mathfrak{U}_x}.$$

Die von x nach y laufenden Wege lassen sich also in „Äquivalenzklassen mod $\mathfrak{U}_x$" einteilen.

Ist w_0 ein fester Weg von x nach y und sind w_1, w_2 irgend zwei Wege von x nach y, so ist, wenn wir die geschlossenen Wege $w_1 w_0^{-1}$, $w_2 w_0^{-1}$ mit g_1, g_2 bezeichnen, $w_1 w_2^{-1} \equiv g_1 g_2^{-1}$; w_1, w_2 gehören also dann und nur dann zur selben Klasse mod $\mathfrak{U}_x$, wenn $g_1 g_2^{-1} = u \subset \mathfrak{U}_x$, $g_1 \equiv u g_2$ ist, d. h. wenn g_1 und g_2 derselben Restklasse („Nebengruppe") mod $\mathfrak{U}_x$ angehören. Den Äquivalenzklassen der Wege von x nach y sind also — durch Vermittlung des willkürlich ausgezeichneten Weges w_0 — eineindeutig Restklassen von $\mathfrak{F}_x$ mod $\mathfrak{U}_x$ zugeordnet. Dabei kommt jede dieser Restklassen vor; denn ist g irgendein Weg aus $\mathfrak{F}_x$, so entspricht bei der Zuordnung der Äquivalenzklasse von $w = g w_0$ die Restklasse, der g angehört. Somit sehen wir: Dem System der Äquivalenzklassen der Wege von x nach y entspricht — nach Auszeichnung von w_0 — eineindeutig das System der Restklassen, in das $\mathfrak{F}_x$ mod $\mathfrak{U}_x$, oder, was dasselbe ist, in das $\mathfrak{F}$ mod $\mathfrak{U}$ zerfällt; insbesondere ist die — endliche oder unendliche —

[12]) Man ziehe $w_1^{-1} w_1$ unter Festhaltung des Endpunktes von w_1 auf diesen zusammen.

Anzahl der Äquivalenzklassen gleich der Anzahl j der Restklassen, die, wie üblich, der „Index" von $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{F}$ heißen möge[13]).

Wir lassen nun, immer unter Festhaltung von x, den Punkt y die Mannigfaltigkeit M durchlaufen und bekommen so eine Menge $\mathfrak{M}$ von Äquivalenzklassen, die so auf M abgebildet ist, daß jeder Punkt y Bild von j Klassen ist. Wir machen $\mathfrak{M}$ durch geeignete Definition eines Umgebungsbegriffs zu einer Mannigfaltigkeit:

Um jeden Punkt y zeichnen wir eine feste euklidische Umgebung U_y aus. Sind $w_1(y) = w_1$, $w_2(y) = w_2$ zwei zu einer Klasse W gehörige Wege von x nach y und sind v_1, v_2 zwei innerhalb U_y von y nach einem Punkt y' von U_y verlaufende Wege, so ist $v_1 v_2^{-1}$ zusammenziehbar, also ist auch $w_1 v_1 v_2^{-1} w_1^{-1}$ zusammenziehbar; es ist also $w_1 v_1 v_2^{-1} w_1^{-1} < \mathfrak{U}_x$, $w_1 w_2^{-1} < \mathfrak{U}_x$, mithin, wenn wir $w_1(y)\, v_1 = w_1'(y') = w_1'$, $w_2(y)\, v_2 = w_2'(y') = w_2'$ setzen,

$$w_1' w_2'^{-1} = w_1 v_1 v_2^{-1} w_1^{-1} w_1 w_2^{-1} < \mathfrak{U}_x, \quad \text{d. h.} \quad w_1' \equiv w_2' \pmod{\mathfrak{U}_x}.$$

Die somit durch die Klasse W der $w_i(y)$ bestimmte Klasse W' der $w_i'(y')$ nennen wir die zu W „benachbarte" Klasse der Wege von x nach y'. Ersetzt man die Wege $w_i(y)$ durch einen zu einer anderen Klasse $\overline{W}$ gehörigen Weg $\overline{w}(y)$, so geht die zu $\overline{W}$ benachbarte Klasse $\overline{W}'$ der nach y' führenden Wege aus der Klasse W' durch linksseitige Multiplikation mit $\overline{w} w^{-1}$ hervor, wobei $w < W$ ist; da $\overline{w} w^{-1}$ nicht zu $\mathfrak{U}_x$ gehört, ist $\overline{W}'$ von $\overline{W}$ verschieden. Zu voneinander verschiedenen nach y führenden Wegeklassen sind also voneinander verschiedene noch y' führende Wegeklassen benachbart.

Wir setzen nun fest, daß eine Menge von Klassen $W'(y')$ eine Umgebung der Klasse $W(y)$ heißt, wenn erstens die Punkte y' eine in U_y enthaltene euklidische Umgebung von y bilden, und wenn zweitens die $W'(y')$ zu $W(y)$ benachbart sind. Man überzeugt sich leicht von folgenden Tatsachen: Die Umgebungsdefinition erfüllt die Hausdorffschen Axiome, $\mathfrak{M}$ ist also zu einem topologischen Raum gemacht worden; die (durch die Endpunkte der Wege bestimmte) Abbildung von $\mathfrak{M}$ auf M ist stetig; zu jedem der in M ausgezeichneten Gebiete U_y gibt es in $\mathfrak{M}$ genau j Gebiete $U_y^1, U_y^2, \ldots$, die auf U_y abgebildet sind; diese Beziehung zwischen U_y^i und U_y ist eineindeutig und beiderseits stetig. Da somit die in $\mathfrak{M}$ definierten Umgebungen topologische Bilder euklidischer Gebiete sind, ist $\mathfrak{M}$ eine Mannigfaltigkeit.

---

[13]) Der Index ist unabhängig davon, ob man rechtsseitige oder linksseitige Restklassen betrachtet; denn bei dem Automorphismus von $\mathfrak{F}$, der entsteht, wenn man jedes Element durch sein Inverses ersetzt, werden die beiden Systeme der rechts- und linksseitigen Restklassen eineindeutig aufeinander abgebildet.

Wir waren ausgegangen von einer Untergruppe $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{F}$ und hatten der weiteren Betrachtung eine der Untergruppen von $\mathfrak{F}_x$ zugrunde gelegt, die bei dem zwischen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_x$ bestehenden Isomorphismus $\mathfrak{U}$ entsprechen; wir hätten statt dieser Untergruppe $\mathfrak{U}_x$ auch eine zu $\mathfrak{U}_x$ ähnliche Untergruppe $\overline{\mathfrak{U}}_x = h\,\mathfrak{U}_x h^{-1}$ zugrunde legen können. Dann wären wir statt zu $\mathfrak{M}$ zu einer anderen Mannigfaltigkeit $\overline{\mathfrak{M}}$ gelangt. Jedoch läßt sich $\overline{\mathfrak{M}}$ mit $\mathfrak{M}$ ohne Abänderung der zwischen $\overline{\mathfrak{M}}$ und M bzw. zwischen $\mathfrak{M}$ und M bestehenden Beziehung dadurch identifizieren, daß man den Punkt von $\mathfrak{M}$, zu dem die Wege $w_1, w_2, \ldots$ gehören, als identisch mit dem Punkt von $\overline{\mathfrak{M}}$ betrachtet, zu dem die Wege $h w_1, h w_2, \ldots$ gehören. Dies ist möglich, denn $w_1 \equiv w_2 \pmod{\mathfrak{U}_x}$ ist gleichbedeutend mit $h w_1 \equiv h w_2 \pmod{\overline{\mathfrak{U}}_x}$. Faßt man also $\mathfrak{M}$, $\overline{\mathfrak{M}}$ als Realisationen einer abstrakten Mannigfaltigkeit auf, so ist diese sowie ihre Abbildung auf M unabhängig davon, welche der $\mathfrak{U}$ entsprechenden Untergruppen von $\mathfrak{F}_x$ wir zugrunde gelegt haben.

Hätten wir schließlich statt des Punktes x einen Punkt z von M zugrunde gelegt, so wären wir statt zu $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_x$ zu einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_z$ gelangt. Aber $\mathfrak{M}_x$ und $\mathfrak{M}_z$ lassen sich ohne Störung ihrer Beziehungen zu M dadurch identifizieren, daß man den Punkt von $\mathfrak{M}_x$, zu dem die Wege $w_1, w_2, \ldots$ gehören, als identisch betrachtet mit dem Punkt von $\mathfrak{M}_z$, zu dem die Wege $v w_1, v w_2, \ldots$ gehören, wobei v ein fester Weg von z nach x ist; dies ist möglich, denn $w_1 \equiv w_2 \pmod{\mathfrak{U}_x}$ ist gleichbedeutend mit $v w_1 \equiv v w_2 \pmod{v\,\mathfrak{U}_x v^{-1}}$, und $\mathfrak{U}_z = v\,\mathfrak{U}_x v^{-1}$ ist eine Untergruppe von $\mathfrak{F}_z$, die $\mathfrak{U}$ entspricht. $\mathfrak{M}_x$ und $\mathfrak{M}_z$ können also wieder als Realisationen einer abstrakten Mannigfaltigkeit aufgefaßt werden, die samt ihrer Abbildung auf M von der Wahl der Punkte x oder z nicht abhängt.

Das Ergebnis ist: *Zu jeder Untergruppe $\mathfrak{U}$ der Fundamentalgruppe $\mathfrak{F}$ gehört eine wohlbestimmte abstrakte Mannigfaltigkeit $M_{\mathfrak{U}}$, die durch eine eindeutige und stetige Abbildung φ so auf M bezogen ist, daß auf jedes hinreichend kleine — nämlich in einem U_y enthaltene — Gebiet von M genau j Gebiete von $M_{\mathfrak{U}}$ topologisch abgebildet sind; dabei ist j der Index von $\mathfrak{U}$ in $\mathfrak{F}$. $M_{\mathfrak{U}}$ heißt die zu $\mathfrak{U}$ gehörige „Überlagerungsmannigfaltigkeit“ von M, j die Anzahl der „Schichten“ von $M_{\mathfrak{U}}$ über M.*

Wir betrachten nun noch die durch φ vermittelte Beziehung zwischen den Wegen auf $M_{\mathfrak{U}}$ und den Wegen auf M. Sei x ein Punkt in M, $\mathfrak{U}_x$ eine der $\mathfrak{U}$ entsprechenden Untergruppen von $\mathfrak{F}_x$, $\bar{x}$ der Punkt in $M_{\mathfrak{U}}$, der durch die von x nach x führenden Wege, welche zu $\mathfrak{U}_x$ gehören, also z. B. durch den nur aus dem Punkt x bestehenden Weg, definiert ist. Läuft in M ein Punkt x_t in stetiger Abhängigkeit von t in $x = x_0$ beginnend und ist w_t der bis zum Wert t durchlaufene Weg, $\bar{x}_t$ der durch w_t in $M_{\mathfrak{U}}$ bestimmte Punkt, so bilden diese Punkte, da φ in jedem hinreichend kleinen Gebiet von M eindeutig und stetig umkehrbar ist, einen

Weg $\bar{w}$ in $M_{\mathfrak{U}}$, und dessen Anfangspunkt ist $\bar{x}$, da dieser Punkt, wie eben bemerkt, infolge seiner Definition dem Weg w_0 entspricht. Hat man also in $M_{\mathfrak{U}}$ einen in $\bar{x}$ beginnenden Weg $\bar{w}$, so entspricht seinem Bild $w = \varphi(\bar{w})$ gerade der Endpunkt von $\bar{w}$.

Ist $\bar{w}$ geschlossen, so ist wegen der Eindeutigkeit von φ auch $w = \varphi(\bar{w})$ geschlossen; nach dem eben Gesagten entspricht dem Weg w der Endpunkt $\bar{x}$ von $\bar{w}$; folglich gehört w ebenso wie w_0 zu $\mathfrak{U}_x$, da, wie wir früher sahen, Wegen, die zu verschiedenen Restklassen mod $\mathfrak{U}_x$ gehören, verschiedene Punkte in $M_{\mathfrak{U}}$ entsprechen. Ist andererseits w ein zu $\mathfrak{U}_x$ gehöriger geschlossener Weg, so ist der seinen Teilbögen w_t entsprechende Weg in $M_{\mathfrak{U}}$ geschlossen, da $\bar{x}$ ja gerade durch die von x nach x führenden, zu $\mathfrak{U}_x$ gehörigen Wege definiert ist. Somit bildet φ die geschlossenen Wege durch $\bar{x}$ auf alle die und nur die geschlossenen Wege durch x ab, die zu $\mathfrak{U}_x$ gehören.

Ist der geschlossene Weg $\bar{w}$ in $M_{\mathfrak{U}}$ zusammenziehbar, so ist er das Randbild bei einer Abbildung $f(K)$ einer Kreisscheibe K; dann ist $w = \varphi(\bar{w})$ das Randbild bei der Abbildung $\varphi f(K)$ von K, also auch zusammenziehbar. Ferner erhält φ infolge ihrer Eindeutigkeit und Stetigkeit die Zusammensetzung geschlossener Wege, d. h. es ist $\varphi(\bar{w}_1 \bar{w}_2) = \varphi(\bar{w}_1)\,\varphi(\bar{w}_2)$; insbesondere ist also mit $\bar{w}_1 \bar{w}_2^{-1}$ auch $\varphi(\bar{w}_1)\,\varphi(\bar{w}_2)^{-1}$ zusammenziehbar, d. h. äquivalente Wege in $M_{\mathfrak{U}}$ werden auf äquivalente Wege in M abgebildet. Mithin bildet φ die Fundamentalgruppe $\overline{\mathfrak{U}}$ von $M_{\mathfrak{U}}$ homomorph auf $\mathfrak{U}_x$ ab.

Dieser Homomorphismus ist eineindeutig, also ein Isomorphismus. Um das zu beweisen, muß gezeigt werden, daß verschiedene Klassen von $\overline{\mathfrak{U}}$ auf verschiedene Klassen von $\mathfrak{U}_x$ abgebildet werden. Hierzu genügt der Nachweis der folgenden Behauptung: Ist $\varphi(\bar{w})$ zusammenziehbar, so ist auch $\bar{w}$ zusammenziehbar.

Sei also $w = \varphi(\bar{w})$ das Bild der Peripherie p bei der Abbildung $f(K)$ einer Kreisscheibe K und sei dabei $\mathfrak{x}$ der Punkt auf p, der durch f in den Anfangs- und Endpunkt x von w abgebildet wird. Ist $\mathfrak{w}_1$ ein Weg in K von $\mathfrak{x}$ nach einem Punkt $\mathfrak{y}$ in K, so entspricht dem in M verlaufenden Weg $f(\mathfrak{w}_1)$ ein bestimmter Punkt $\bar{y}$ in $M_{\mathfrak{U}}$; ist $\mathfrak{w}_2$ ein zweiter Weg in K von $\mathfrak{x}$ nach $\mathfrak{y}$, so ist $\mathfrak{w}_1 \mathfrak{w}_2^{-1}$ in K zusammenziehbar, also $f(\mathfrak{w}_1 \mathfrak{w}_2^{-1}) = f(\mathfrak{w}_1)\,f(\mathfrak{w}_2)^{-1}$ in M zusammenziehbar, also gewiß $f(\mathfrak{w}_1)\,f(\mathfrak{w}_2)^{-1} \subset \mathfrak{U}_x$; dann entspricht aber den Wegen $f(\mathfrak{w}_1)$ und $f(\mathfrak{w}_2)$ derselbe Punkt $\bar{y}$ in $M_{\mathfrak{U}}$. Die durch die Wege $\mathfrak{w}$ und $f(\mathfrak{w})$ vermittelte Abbildung F von K auf $M_{\mathfrak{U}}$ ist also eindeutig und infolge der Stetigkeit von f und der stetigen Umkehrbarkeit im Kleinen von φ stetig. Die Randabbildung $F(p)$ liefert $\bar{w}$; denn die auf p verlaufenden Bögen werden durch f auf die Teilbögen w_t von w abgebildet, und diesen entspricht, wie wir oben sahen, der Weg $\bar{w}$. — Damit ist die Behauptung und somit der folgende Satz bewiesen:

$\mathfrak{U}$ *ist die Fundamentalgruppe von* $M_{\mathfrak{U}}$.

Betrachten wir neben $\mathfrak{U}$ eine zu $\mathfrak{U}$ ähnliche Untergruppe von $\mathfrak{F}$: $\mathfrak{U}' = h\mathfrak{U}h^{-1}$, wobei h ein Element von $\mathfrak{F}$ ist. Sind wieder w_1, w_2 von x nach y führende Wege, die mod $\mathfrak{U}$ äquivalent sind, so sind hw_1, hw_2 mod $\mathfrak{U}'$ äquivalent und umgekehrt, denn $w_1 w_2^{-1} \subset \mathfrak{U}$ ist gleichbedeutend mit $(hw_1)(hw_2)^{-1} = hw_1w_2^{-1}h^{-1} \subset \mathfrak{U}'$. Wenn man dem durch $w_1, w_2, \ldots$ definierten Punkt $\bar{y}$ von $M_{\mathfrak{U}}$ den durch $hw_1, hw_2, \ldots$ definierten Punkt $\bar{y}'$ von $M_{\mathfrak{U}'}$ zuordnet, so wird daher $M_{\mathfrak{U}}$ eineindeutig auf $M_{\mathfrak{U}'}$ abgebildet, und zwar so, daß $\varphi(\bar{y}) = \varphi'(\bar{y}')$ ist, wobei φ' ebenso für $M_{\mathfrak{U}'}$ definiert ist wie φ für $M_{\mathfrak{U}}$. Mithin ist wegen der Stetigkeit von φ und der eindeutigen und stetigen Umkehrbarkeit von φ' im Kleinen die eineindeutige Beziehung zwischen $M_{\mathfrak{U}}$ und $M_{\mathfrak{U}'}$ auch stetig. Damit ist bewiesen:

Zu ähnlichen Untergruppen von $\mathfrak{F}$ *gehört — bis auf Homöomorphismen — dieselbe Überlagerungsmannigfaltigkeit.*

§ 2.

Definition von Klasseninvarianten und deren Haupteigenschaften.

1. Der Gruppenhomomorphismus der Abbildung. M und μ seien Mannigfaltigkeiten, $\mathfrak{F}$ und Φ ihre Fundamentalgruppen, f sei eine eindeutige und stetige Abbildung von M auf μ, x sei ein Punkt von M, $\xi = f(x)$ sein Bild. Die geschlossenen Wege durch x werden durch f auf geschlossene Wege — nicht notwendigerweise auf alle geschlossenen Wege — durch ξ abgebildet, jeder zusammenziehbare Weg wird auf einen zusammenziehbaren Weg, die Zusammensetzung zweier Wege wird auf die Zusammensetzung der Bilder der beiden Wege abgebildet. Daraus folgt, daß f die Gruppe $\mathfrak{F}_x$ der geschlossenen Wege durch x homomorph in die Gruppe Φ_ξ der geschlossenen Wege durch ξ abbildet. Bei Auszeichnung von x vermittelt also f einen Homomorphismus von $\mathfrak{F}$ in Φ [14]).

Ist y ein von x verschiedener Punkt in M, $\eta = f(y)$ sein Bild, so bildet f ebenso die Gruppe $\mathfrak{F}_y$ homomorph in die Gruppe Φ_η ab. Nun sind, wenn $\mathfrak{F}_x$ und Φ_ξ in bestimmter Weise als Realisationen der Fundamentalgruppen $\mathfrak{F}$ bzw. Φ aufgefaßt werden, $\mathfrak{F}_y$ und Φ_η dadurch noch nicht in eindeutiger Weise als Realisationen der Fundamentalgruppen bestimmt, vielmehr sind (vgl. § 1, 1. Absatz) willkürliche Wege v und w von x nach y bzw. von ξ nach η

---

[14]) Bei einem Homomorphismus von $\mathfrak{F}$ „in" Φ braucht nicht jedes Element von Φ Bild eines Elementes von $\mathfrak{F}$ zu sein; bei einem Homomorphismus von $\mathfrak{F}$ „auf" Φ soll dies immer der Fall sein (diese Ausdrucksweise kenne ich durch Herrn van der Waerden).

einzuführen, die zwischen $\mathfrak{F}_x$ und $\mathfrak{F}_y$ bzw. zwischen Φ_ξ und Φ_η vermitteln: dem Element g von $\mathfrak{F}_x$ wird das Element $v^{-1}gv$ von $\mathfrak{F}_y$, dem Element γ von Φ_ξ wird das Element $w^{-1}\gamma w$ von Φ_η zugeordnet. Ist der Homomorphismus von $\mathfrak{F}_x$ in Φ_ξ durch Gleichungen $f(g) = \gamma$ (wobei g die Gruppe $\mathfrak{F}_x$ durchläuft) gegeben, so ist der Homomorphismus von $\mathfrak{F}_y$ in Φ_η nicht durch $f(v^{-1}gv) = w^{-1}\gamma w$, sondern durch $f(v^{-1}gv) = f(v)^{-1}f(g)f(v)$ $= (f(v)^{-1}w)w^{-1}\gamma w(f(v)^{-1}w)^{-1}$ gegeben; dabei ist $f(v)^{-1}w$ ein Element von Φ_η. Der durch f zwischen $\mathfrak{F}$ und Φ vermittelte Homomorphismus ist also — bei Auszeichnung verschiedener Punkte $x, y, \ldots$ — nur bis auf innere Automorphismen von Φ bestimmt.

f werde nun stetig abgeändert, d. h. es existiere eine von t stetig abhängende, für $0 \leqq t \leqq 1$ erklärte Schar von Abbildungen f_t mit $f_0 = f$. Es sei g ein geschlossener Weg durch x, $f_t(g) = \gamma_t$, w_τ der Weg, den das Bild von x durchläuft, während t von τ bis 1 wächst. $\gamma_1^{-1}w_\tau^{-1}\gamma_\tau w_\tau$ ist ein geschlossener Weg durch $\xi_1 = f_1(x)$; läßt man τ von 0 bis 1 wachsen, so geht der Weg $\gamma_1^{-1}w_0^{-1}\gamma_0 w_0$ stetig in den Weg $\gamma_1^{-1}\gamma_1$ über; dieser ist zusammenziehbar; also ist es auch $\gamma_1^{-1}w_0^{-1}\gamma_0 w_0$; mithin ist $\gamma_1 \equiv w_0^{-1}\gamma_0 w_0$, $f_1(g) \equiv w_0^{-1}f_0(g)w_0$. Dies gilt — bei festem Weg w_0 — für alle Elemente g von $\mathfrak{F}_x$. Der — immer nur bis auf innere Automorphismen von Φ bestimmte — Homomorphismus von $\mathfrak{F}$ in Φ ändert sich also bei dem stetigen Übergang von f_0 zu f_1 nicht.

Somit werden wir, in dem Bestreben, Eigenschaften von f zu untersuchen, die bei stetiger Abänderung von f invariant sind, unser Augenmerk auf Eigenschaften eines Homomorphismus von $\mathfrak{F}$ in Φ richten, die sich bei inneren Automorphismen von Φ nicht ändern. Nun bilden diejenigen Elemente von Φ, die bei einem Homomorphismus H von $\mathfrak{F}$ in Φ Bildelemente sind, eine Untergruppe $H(\mathfrak{F}) = \mathfrak{U}$ von Φ. Wird Φ einem inneren Automorphismus unterworfen, so ist $\mathfrak{U}$ durch eine ähnliche Untergruppe $\mathfrak{U}' = h\mathfrak{U}h^{-1}$ zu ersetzen. In unserem Falle ist, wenn wir $\mathfrak{F}$ und Φ durch $\mathfrak{F}_x$ bzw. Φ_ξ realisieren, $\mathfrak{U}$ die Gruppe derjenigen Klassen geschlossener Wege durch ξ, welche Bilder geschlossener Wege durch x enthalten. Unter den Eigenschaften, die zugleich mit $\mathfrak{U}$ den mit $\mathfrak{U}$ ähnlichen Untergruppen zukommen, die also invariant gegenüber stetiger Abänderung von f sind, betrachten wir im folgenden den Index von $\mathfrak{U}$ in Φ und die zu $\mathfrak{U}$ gehörige Überlagerungsmannigfaltigkeit von μ:

Definition I. Unter der zu der Abbildung f von M auf μ gehörigen „Bildgruppe" verstehen wir die — bis auf innere Automorphismen von Φ bestimmte — Untergruppe $\mathfrak{U}$ von Φ, die durch die Bilder der geschlossenen Wege in M definiert wird.

Definition II. Unter dem „Index" j von f verstehen wir den Index der Bildgruppe in Φ.

Definition III. Unter der zu f gehörigen „Überlagerungsmannigfaltigkeit" verstehen wir die zu der Bildgruppe gehörige Überlagerungsmannigfaltigkeit μ^* von μ.

Die drei so definierten Begriffe sind, wie oben gezeigt wurde, invariant gegenüber stetiger Abänderung von f.

2. **Die Zerlegung der Abbildung.** z ist im folgenden stets ein fester Punkt in M, $\zeta = f(z)$ sein Bild. Φ_ζ ist die Gruppe der Klassen geschlossener Wege durch ζ, $\mathfrak{U}_\zeta$ die $\mathfrak{U}$ entsprechende Untergruppe von Φ_ζ, also die Gruppe derjenigen Wegeklassen durch ζ, die Bilder geschlossener Wege durch z enthalten. μ^* denken wir uns durch von ζ ausgehende Wege realisiert, d. h. zwei solche Wege v_1, v_2 stellen dann und nur dann denselben Punkt von μ^* dar, wenn sie mod $\mathfrak{U}_\zeta$ äquivalent sind, wenn also $v_1 v_2^{-1}$ dem Bild eines geschlossenen Weges durch z äquivalent ist.

Sind w_1, w_2 zwei beliebige Wege von z nach x, so sind $f(w_1)$, $f(w_2)$ von ζ nach $\xi = f(x)$ führende Wege, und es ist $f(w_1) f(w_2)^{-1} = f(w_1 w_2^{-1})$, also sind, da $w_1 w_2^{-1}$ ein geschlossener Weg durch z ist, $f(w_1)$ und $f(w_2)$ mod $\mathfrak{U}_\zeta$ äquivalent und stellen denselben Punkt ξ^* von μ^* dar. Diesen ordnen wir dem Punkt x zu und nennen ihn $f^*(x)$. Bezeichnet wieder φ die durch die Überlagerung bewirkte Abbildung von μ^* auf μ, so ist $\varphi(\xi^*) = \varphi f^*(x) = \xi$. Aus der im Kleinen eindeutigen und stetigen Umkehrbarkeit von φ folgt die Stetigkeit von f^*.

Damit haben wir f in zwei nacheinander auszuführende eindeutige und stetige Abbildungen zerlegt: zuerst wird M durch f^* auf μ^*, dann μ^* durch φ auf μ abgebildet; es ist $f(M) = \varphi f^*(M)$. Dabei ist φ die im § 1 ausführlich besprochene Abbildung der j-schichtigen Überlagerungsmannigfaltigkeit μ^* von μ auf μ, und j ist der Index von f. f^* hat den Index 1; denn ist γ^* ein geschlossener Weg durch denjenigen Punkt ζ^* von μ^*, der den von ζ nach ζ führenden, zu $\mathfrak{U}_\zeta$ gehörigen Wegen entspricht, so gehört $\gamma = \varphi(\gamma^*)$ zu $\mathfrak{U}_\zeta$ (da andernfalls der in ζ^* beginnende Weg γ^* in einem anderen Punkte enden müßte), es gibt also einen geschlossenen Weg g durch z, so daß $\gamma f(g)^{-1}$ zusammenziehbar ist; nun ist $\gamma f(g)^{-1} = \varphi(\gamma^* f^*(g)^{-1})$, und daraus folgt (vgl. § 1), daß $\gamma^* f^*(g)^{-1}$ auf μ^* zusammenziehbar, daß also γ^* dem Bild eines geschlossenen Weges äquivalent ist. Bei dem durch f^* bewirkten Homomorphismus von $\mathfrak{F}$ in die Fundamentalgruppe $\mathfrak{U}$ von μ^* ist also jedes Element von $\mathfrak{U}$ Bild, d. h. der Index ist 1.

Wird f stetig abgeändert, d. h. liegt eine von t stetig abhängende Schar f_t von Abbildungen mit $f = f_0$ vor, so ändert sich auch $f_t(z) = \zeta_t$ stetig mit t, und μ^* ist für verschiedene Werte von t durch von verschiedenen Punkten ζ_t ausgehende Wege zu realisieren; die homöomorphe

Beziehung zwischen diesen verschiedenen Realisationen μ_t^* ist (siehe § 1) noch abhängig von der Wahl willkürlicher Wege zwischen den verschiedenen Punkten ζ_t. Wir beseitigen diese Unbestimmtheit durch die Festsetzung: v_τ sei die während des Intervalls $0 \leqq t \leqq \tau$ von ζ_t durchlaufene Bahn; der durch den von ζ_τ ausgehenden Weg u dargestellte Punkt von μ_τ^* wird identifiziert mit dem Punkt von μ_0^*, der durch den Weg $v_\tau u$ dargestellt wird. Hierdurch wird (siehe § 1) die unter Zugrundelegung der Gruppe $\mathfrak{U}_\tau$ der geschlossenen Bildwege $f_\tau(g)$ konstruierte Überlagerungsmannigfaltigkeit μ_τ^* mit derjenigen zu ζ_0 gehörigen Überlagerungsmannigfaltigkeit identifiziert, deren Konstruktion die Gruppe $v_\tau \mathfrak{U}_\tau v_\tau^{-1}$ zugrunde gelegt ist; diese Untergruppe ist aber mit der Gruppe $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U}_\zeta$ der Bilder $f_0(g)$ identisch, was man erkennt, wenn t stetig von τ nach 0 läuft; die zugehörige Überlagerungsmannigfaltigkeit ist also μ_0^*. Fassen wir auf Grund dieser Beziehung zwischen μ_t^* und μ_0^* die zu f_t gehörige Abbildung f_t^* als Abbildung auf $\mu_0^* = \mu^*$ auf, so ist das Bild eines Punktes x von M folgendermaßen zu bestimmen: man nimmt einen festen Weg w von z nach x und ordnet x als Bild denjenigen Punkt von $\mu_0^* = \mu^*$ zu, der zu dem in ζ beginnenden Weg $v_t f_t(w)$ gehört. Dieser Bildpunkt $f_t^*(x)$ ändert sich offenbar stetig mit t, einer stetigen Änderung von f entspricht also eine stetige Änderung von f^*.

Es liegt also folgender Sachverhalt vor:

Satz I. *f läßt sich in zwei Abbildungen f^* und φ zerlegen, $f(M) = \varphi f^*(M)$; dabei ist f^* eine Abbildung vom Index 1 auf die zu f gehörige Überlagerungsmannigfaltigkeit μ^* und ändert sich bei stetiger Änderung von f stetig; φ ist die durch die Überlagerung gegebene Abbildung von μ^* auf μ und bleibt bei stetiger Änderung von f fest.*

3. Die Einteilung der Originalmenge eines Bildpunktes in Schichten. ξ sei ein Punkt in μ, X seine Originalmenge in M, d. h. die Menge derjenigen Punkte x, für die $f(x) = \xi$ ist. Ist u ein Weg zwischen zwei Punkten x_1, x_2 von X, so ist $f(u)$ ein geschlossener Weg in μ. Es kann eintreten, daß dieser zusammenziehbar ist; dies sei der Fall, und es sei ferner v ein Weg von x_2 nach dem ebenfalls zu X gehörigen Punkt x_3: dessen Bild $f(v)$ auch zusammenziehbar ist. Dann ist das Bild $f(uv) = f(u)f(v)$ des von x_1 nach x_3 laufenden Weges uv ebenfalls zusammenziehbar. Diese Tatsache ermöglicht es, die Menge X in zueinander fremde Teilmengen X_1, $X_2, \ldots$ durch die Bestimmung einzuteilen, daß zwei Punkte von X dann und nur dann derselben Teilmenge X_i angehören, wenn sie sich durch einen Weg verbinden lassen, dessen Bild zusammenziehbar ist; diese Teilmengen X_i bezeichnen wir als „Schichten", d. h. wir definieren:

Definition IV. Eine Teilmenge der Originalmenge X von ξ heißt „Schicht", wenn sich je zwei ihrer Punkte durch einen Weg verbinden lassen, dessen Bild, als geschlossener Weg in μ aufgefaßt, zusammenziehbar ist, und wenn sie nicht in einer größeren Teilmenge von X enthalten ist, die dieselbe Eigenschaft hat.

Ist x ein Häufungspunkt von X, so gehört er wegen der, aus der Stetigkeit von f folgenden, Abgeschlossenheit von X zu X und somit zu einer bestimmten Schicht, etwa zu X_1. Ist U eine so kleine Umgebung von x, daß ihr Bild in einem ξ enthaltenden euklidischen Element E enthalten ist, und sind x_1, x_2 irgend zwei Punkte von X in U, so ist das Bild eines Weges u, der x_1 mit x_2 innerhalb U verbindet, ein geschlossener Weg in E, also zusammenziehbar; mithin gehören x_1, x_2 zu einer Schicht, und zwar, da $x_1 = x$ sein kann, zu X_1. Ein Häufungspunkt von X ist also stets Häufungspunkt einer und nur einer Schicht und gehört dieser an. Hierin ist erstens enthalten, daß jede Schicht abgeschlossen ist; bezeichnen wir ein System von Mengen $A_1, A_2, \ldots$ in M als „isoliert“, wenn es um jeden Punkt von M eine Umgebung gibt, welche Punkte höchstens einer der Mengen A_i enthält, so haben wir zweitens gezeigt, daß die Schichten $X_1, X_2, \ldots$ ein isoliertes System bilden; es gilt also:

Satz II. *Die zu einem Punkt ξ gehörigen Schichten bilden ein isoliertes System abgeschlossener Mengen.*

Besteht ein isoliertes System $A_1, A_2, \ldots$ aus unendlich vielen, nicht leeren Mengen A_i, so kann eine unendliche Punktmenge $a_1, a_2, \ldots$, die aus Punkten $a_i \subset A_i$ gebildet ist, wegen der Eigenschaft der Isoliertheit keinen Häufungspunkt in M haben, die Vereinigungsmenge der A_i ist also nicht kompakt. Damit ist gezeigt:

Satz IIa. *Wenn die Originalmenge X von ξ kompakt ist — insbesondere also, wenn die Abbildung f im Punkte ξ kompakt ist*[15]*), — so besteht X nur aus endlich vielen Schichten.*

4. Der Zusammenhang zwischen der Zerlegung von f und der Schichteneinteilung. Neben der Einteilung von X in Schichten läßt sich X auf Grund der in Nr. 2 besprochenen Zerlegung von f in f^* und φ dadurch in zueinander fremde Teile zerspalten, daß man Punkte von X dann und nur dann zum selben Teil rechnet, wenn sie durch f^* auf denselben Punkt von μ^* abgebildet werden. Diese beiden Einteilungen von X sind aber miteinander identisch, d. h. es gilt

Satz III. *Zwei Punkte x_1, x_2 von X gehören dann und nur dann zu derselben Schicht, wenn $f^*(x_1) = f^*(x_2)$ ist.*

Beweis. x_1 und x_2 mögen zu derselben Schicht gehören. Dann gibt es einen Weg u von x_1 nach x_2 derart, daß der durch $\xi = f(x_1) = f(x_2)$

[15]) Definition der „Kompaktheit von f in ξ“: Teil I, § 4, S. 598.

laufende geschlossene Weg $f(u)$ zusammenziehbar ist. w_1 sei ein beliebiger Weg von z (siehe Nr. 2) nach x_1, w_2 der durch $w_2 = w_1 u$ definierte Weg von z nach x_2. Dann ist $f(w_1)f(w_2)^{-1} = f(w_1)f(w_1 u)^{-1} = f(w_1)f(u)^{-1}f(w_1)^{-1}$; dabei läuft $f(w_1)$ von $\zeta = f(z)$ nach ξ, $f(u)^{-1}$ von ξ nach ξ zurück, $f(w_1)^{-1}$ von ξ nach ζ. $f(u)^{-1}$ läßt sich unter Festhaltung von ξ auf ξ zusammenziehen; dadurch geht $f(w_1)f(w_2)^{-1}$ in den Weg $f(w_1)f(w_1)^{-1}$ über, der selbst zusammenziehbar ist; mithin ist $f(w_1)f(w_2)^{-1}$ zusammenziehbar, $f(w_1)$ und $f(w_2)$ sind also gewiß äquivalent mod $\mathfrak{U}_\zeta$, d. h. es ist $f^*(x_1) = f^*(x_2)$.

Es sei andererseits $f^*(x_1) = f^*(x_2)$. Dann ist, wenn w_1, w_2 Wege von z nach x_1, x_2 sind, $f(w_1)f(w_2)^{-1} \subset \mathfrak{U}_\zeta$, es gibt also einen geschlossenen Weg g durch z, so daß $f(w_1)f(w_2)^{-1} \equiv f(g)$ ist; das bedeutet, daß $f(w_1)f(w_2)^{-1}f(g)^{-1}$ zusammenziehbar ist; setzen wir $w_2^{-1}g^{-1} = u$, so ist u ein Weg von x_2 nach z, und $f(w_1)f(u)$ ist zusammenziehbar. Nun folgt aber stets, wenn a und b zwei Wege sind, derart, daß der Anfangspunkt des einen mit dem Endpunkt des anderen zusammenfällt, aus der Zusammenziehbarkeit von ab die Zusammenziehbarkeit von ba. Daher ist auch $f(u)f(w_1) = f(uw_1)$ zusammenziehbar, und da uw_1 ein Weg von x_2 nach x_1 ist, ist gezeigt, daß x_1 und x_2 zu derselben Schicht gehören.

Damit ist der Satz III bewiesen.

Da bei der Abbildung φ der Punkt ξ genau j Originalpunkte auf μ^* hat, folgt aus den Sätzen I und III

Satz IIIa. *Die Anzahl der zu einem Punkt ξ gehörigen Schichten ist höchstens gleich dem Index j von f* [16]).

5. Orientierbarkeit einer Abbildung. Sind x, y Punkte in M, E_x, E_y Elemente, die diese Punkte enthalten, und ist u ein Weg von x nach y, so läßt sich eine in E_x willkürlich ausgezeichnete Orientierung folgendermaßen längs u auf E_y übertragen: Durch Einfügung von Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ teilt man u in Teilwege $u_1 = x x_1, \ldots, u_i = x_{i-1} x_i, \ldots, u_k = x_{k-1} y$ ein, die so klein sind, daß sich jeder Bogen u_i in ein Element E_i einschließen läßt, wobei $E_1 = E_x$, $E_k = E_y$ ist; man überträgt nacheinander für $i = 1, 2, \ldots, k-1$ die Orientierung von E_i vermöge der Koinzidenz in einer Umgebung von x_i auf E_{i+1} und gelangt somit zu einer bestimmten Orientierung von E_y. Diese Orientierung hängt weder von der Wahl der

[16]) Bis hierher ist von den Räumen M und μ nicht benutzt worden, daß sie Mannigfaltigkeiten, sondern nur, daß sie zusammenhängende, im Kleinen zusammenhängende, im Kleinen kompakte topologische Räume sind, in denen sich jeder hinreichend kleine geschlossene Weg zusammenziehen läßt. — Von nun an aber ist es wesentlich, daß M und μ Mannigfaltigkeiten von der gleichen Dimensionszahl n sind.

Punkte x_i noch von der Wahl der Elemente E_i, also — nach Auszeichnung der Orientierung in E_x — nur von dem Wege u ab; denn man erkennt mühelos, daß sie sich erstens nicht ändert, wenn man unter Festhaltung der x_i die E_i $(i = 2, 3, \ldots, k-1)$ durch andere Elemente E_i' ersetzt, daß sie sich zweitens nicht ändert, wenn man die durch die x_i bewirkte Zerlegung von u in die Bögen u_i durch Einfügung neuer Teilpunkte verfeinert, und daß sie schließlich von der Wahl der x_i unabhängig ist, da man zu zwei verschiedenen Unterteilungen von u stets eine beiden gemeinsame feinere Unterteilung angeben kann.

Diese Übertragung der Orientierung von E_x auf E_y längs u behält ihren Sinn, wenn x mit y zusammenfällt, wenn also u geschlossen ist. Es sind dann zwei Fälle möglich: die vermöge der Koinzidenz in x von E_y auf E_x übertragene Orientierung ist entweder mit der ursprünglichen Orientierung identisch oder sie ist ihr entgegengesetzt. Je nachdem ob der erste oder der zweite Fall eintritt sagen wir, daß der geschlossene Weg u die Orientierung erhält oder umkehrt. Man sieht übrigens leicht, daß diese Unterscheidung nicht von der Wahl des Punktes x auf u, sondern nur von dem Weg u abhängt.

Ist u' ein zu u hinreichend benachbarter[17]) geschlossener Weg, so ergibt sich aus der Definition mittels der Elemente E_i wieder ohne weiteres, daß u' die Orientierung erhält oder umkehrt, je nachdem u sie erhält oder umkehrt. Da ferner jeder ganz in einem Element verlaufende geschlossene Weg die Orientierung erhält und sich jeder zusammenziehbare Weg in das Innere eines Elementes hinein stetig zusammenziehen läßt, folgt hieraus, daß jeder zusammenziehbare Weg die Orientierung erhält. Weiter ergibt sich aus der Definition, daß die Zusammensetzung uv zweier geschlossener Wege u und v durch x die Orientierung erhält, wenn beide Wege sie erhalten oder beide sie umkehren, daß dagegen uv die Orientierung umkehrt, wenn von den beiden Wegen einer sie erhält, der andere sie umkehrt. Aus alledem folgt, daß die Eigenschaft, die Orientierung zu erhalten oder sie umzukehren, nicht nur einzelnen geschlossenen Wegen durch x, sondern den ganzen Wegeklassen zukommt, daß die Klassen, die die Orientierung erhalten, eine Untergruppe $\mathfrak{G}$ der Fundamentalgruppe bilden, daß, wenn i ein bestimmter die Orientierung umkehrender Weg durch x ist, es zu jedem die Orientierung umkehrenden Weg i' durch x einen die Orientierung erhaltenden Weg g so gibt, daß $i' = ig$ ist, daß also $\mathfrak{G}$ genau zwei Restklassen in $\mathfrak{F}$ hat und man mithin $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{F} = \mathfrak{G} + i\mathfrak{G}$ zerlegen kann, vorausgesetzt, daß überhaupt ein i existiert.

[17]) Dabei sind u und u' als Bilder einer festen Kreislinie k aufzufassen und die Entfernung zwischen u und u' ist das Maximum der Entfernungen der beiden Bilder eines k durchlaufenden Punktes.

Aus der Definition der Orientierbarkeit einer Mannigfaltigkeit[18]) folgt, daß kein i existiert, wenn M orientierbar ist. Ist dagegen M nicht orientierbar, so gibt es Wege i; denn andernfalls wäre die Fortsetzung der Orientierung von E_x nach einem beliebigen anderen Element E_y vom Wege unabhängig (da, wenn u, v zwei Wege von x nach y sind, der Weg $u v^{-1}$ die Orientierung erhielte), also in eindeutiger Weise möglich, M wäre also orientierbar.

Wir teilen nun die Abbildungen von M auf μ nach dem Verhalten der Bilder der die Orientierung umkehrenden geschlossenen Wege in zwei Kategorien ein:

Definition V. f heißt „nicht orientierbar", wenn es einen die Orientierung umkehrenden geschlossenen Weg in M gibt, dessen Bild in μ zusammenziehbar ist; andernfalls heißt f orientierbar.

Ist M orientierbar, so ist jede Abbildung f orientierbar.

Ist M nicht orientierbar, f orientierbar und ist g ein die Orientierung erhaltender, i ein die Orientierung umkehrender geschlossener Weg durch x, so können die durch $\xi = f(x)$ laufenden geschlossenen Wege $f(g)$, $f(i)$ nicht untereinander äquivalent sein, da sonst $f(g) f(i)^{-1} = f(g i^{-1})$ zusammenziehbar wäre, was der Orientierbarkeit von f widerspräche, da $g i^{-1}$ ein geschlossener Weg ist, der die Orientierung umkehrt. Also ist ein geschlossener Weg in μ, sofern er überhaupt dem Bilde eines geschlossenen Weges von M äquivalent ist, entweder nur Bildern von Wegen, die die Orientierung erhalten, oder nur den Bildern von Wegen, die die Orientierung umkehren, äquivalent.

Ist f nicht orientierbar, i ein die Orientierung umkehrender Weg, für den $f(i)$ zusammenziehbar ist, z irgendein Punkt in M, w ein Weg von z nach einem Punkt x von i, so kehrt der durch z gehende geschlossene Weg $i' = w i w^{-1}$ die Orientierung um und sein Bild ist ebenfalls zusammenziehbar; derartige geschlossene Wege gibt es also durch jeden Punkt von M. Ist g irgendein die Orientierung erhaltender oder umkehrender, geschlossener Weg durch z, so kehrt $i' g$ die Orientierung um bzw. erhält sie; die Bilder $f(g)$ und $f(i' g)$ sind äquivalent, da $f(i')$ zusammenziehbar ist. Also ist ein geschlossener Weg in μ, sofern er überhaupt dem Bilde eines geschlossenen Weges von M äquivalent ist, sowohl dem Bild eines die Orientierung erhaltenden, als dem Bild eines die Orientierung umkehrenden Weges äquivalent.

Ist f orientierbar, X_i eine Schicht, x_1 ein Punkt von X_i, in dessen Umgebung eine Orientierung ausgezeichnet ist, so ist, wenn man für die Fortsetzung dieser Orientierung nach anderen Punkten von X_i nur solche

[18]) Teil I, § 3.

Wege zuläßt, deren Bilder in μ zusammenziehbar sind, die so fortgesetzte Orientierung in der Umgebung jedes Punktes von X_i eindeutig bestimmt; denn ist x_2 ein zweiter Punkt von X_i und sind u, v zwei Wege von x_1 nach x_2, deren Bilder zusammenziehbar sind, so ist auch das Bild von $u v^{-1}$ zusammenziehbar, also erhält wegen der Orientierbarkeit von f der Weg $u v^{-1}$ die Orientierung, mithin liefert die Fortsetzung der Orientierung der Umgebung von x_1 längs u dieselbe Orientierung der Umgebung von x_2 wie die Fortsetzung längs v; zu jeder der beiden Orientierungen der Umgebung von x_1 gehört also eine bestimmte Orientierung einer Umgebung der ganzen Schicht X_i, und wir dürfen festsetzen:

Definition VI. Bei einer orientierbaren Abbildung f verstehen wir unter einer Orientierung der Umgebung einer Schicht X_i solche Orientierungen von euklidischen Umgebungen der Punkte von X_i, die aus einer Orientierung der Umgebung eines Punktes von X_i durch Fortsetzung längs Wegen hervorgehen, deren Bilder zusammenziehbar sind.

Ist M orientierbar, so ist eine solche Orientierung natürlich die durch eine der Orientierungen von ganz M bewirkte.

6. Die Beiträge der Schichten. f sei im Punkte ξ von μ kompakt. G sei eine offene, die Originalmenge X von ξ enthaltende Menge in M und zerfalle in die Komponenten $G_1, G_2, \ldots$; dabei sind die G_i zueinander fremde Gebiete, d. h. zusammenhängende offene Mengen in M, also Teilmannigfaltigkeiten von M; und zwar sind sie sämtlich, wenn nicht $G = M$ und M geschlossen ist, offene Mannigfaltigkeiten.

Nur in endlich vielen G_i können Punkte von X enthalten sein; denn würde jedes Gebiet einer unendlichen Folge $G_1, G_2, \ldots$ von Komponenten je einen Punkt $x_1, x_2, \ldots$ von X enthalten, so hätte die Folge der x_i wegen der Kompaktheit von X einen Häufungspunkt x_0, dieser gehörte einer Komponente G_0 an und mit dieser hätten fast alle der Gebiete $G_1, G_2, \ldots$ Punkte — nämlich Punkte von X — gemeinsam, im Widerspruch zu ihrer Eigenschaft, voneinander verschiedene Komponenten zu sein.

Die endlich vielen Mannigfaltigkeiten G_i, die Punkte von X enthalten, mögen die „wesentlichen" Komponenten von G heißen.

Ist G_i eine wesentliche Komponente, so ist die Abbildung $f(G_i)$ in ξ kompakt (für eine unwesentliche Komponente ist dies trivial). Ist nämlich die positive Zahl δ erstens kleiner als der Abstand des Punktes ξ von dem Bilde des Randes von G_i und zweitens so klein, daß die ganze Originalmenge der δ-Umgebung von ξ in M kompakt ist — infolge der Kompaktheit von $f(M)$ in ξ ist diese Bedingung erfüllbar —, so hat der zu G_i gehörende Teil dieser Originalmenge keinen Häufungspunkt auf dem Rande von G_i, ist also in G_i kompakt.

Wir nehmen als G nun die ε-Umgebung von X, wobei ε eine die folgenden zwei Bedingungen erfüllende positive Zahl ist: erstens ist die Bildmenge $f(G)$ in einem ξ enthaltenden euklidischen Element enthalten; zweitens ist 2ε kleiner als der kleinste Abstand zwischen irgend zwei von den nach Satz IIa in endlicher Anzahl vorhandenen Schichten, in die X zerfällt. Dann enthält infolge der zweiten Bedingung keine der Mannigfaltigkeiten G_i Punkte zweier verschiedener Schichten. Jede der wesentlichen Komponenten G_i enthält also Punkte genau einer Schicht; und zwar seien diejenigen wesentlichen Komponenten von G, die Punkte von X_i enthalten, jetzt mit $G_{i1}, G_{i2}, \ldots$ bezeichnet.

Ist f orientierbar, so ist jede Mannigfaltigkeit G_{ij} orientierbar; denn ist g ein geschlossener Weg in G_{ij}, so ist infolge der ersten ε auferlegten Bedingung $f(g)$ in einem euklidischen Element enthalten, also zusammenziehbar, mithin erhält wegen der Orientierbarkeit von f der Weg g die Orientierung. Die Orientierung von G_{i1} bewirkt auf Grund von Definition VI eine bestimmte Orientierung von $G_{i2}, G_{i3}, \ldots$.

Die Abbildung jeder der so orientierten Mannigfaltigkeiten G_{ij} (i fest, $j = 1, 2, \ldots$) hat, da sie, wie oben gezeigt wurde, in ξ kompakt ist, in ξ einen bestimmten Grad[19]), wenn man noch eine bestimmte Orientierung der Umgebung von ξ ausgezeichnet hat. Ändert man diese Orientierung oder die Orientierung von G_{i1} und damit die Orientierung von $G_{i2}, G_{i3}, \ldots$, so ändert die Summe der Grade der Abbildungen von $G_{i1}, G_{i2}, \ldots$ ihr Vorzeichen, ihr absoluter Betrag bleibt derselbe. Dieser bleibt ferner ungeändert, wenn man ε verkleinert, da dann von den G_{ij} nur Punkte fortfallen, deren Bilder ξ nicht bedecken, die also auf den Wert des Grades keinen Einfluß haben. Der absolute Betrag der Summe der Grade hängt also nur von der Schicht X_i selbst ab und werde als der „Beitrag“ von X_i bezeichnet.

Ist f nicht orientierbar, so wird sowohl die Orientierbarkeit der Mannigfaltigkeiten G_{ij} in Frage gestellt, als auch die Übertragung der Orientierung von G_{i1} auf $G_{i2}, G_{i3}, \ldots$ unmöglich. Die Grade sind daher nicht definiert, die Betrachtung behält aber ihren Sinn, wenn wir die Grade durch die Paritäten[19]) ersetzen und sagen, daß die Schicht den „Beitrag“ 0 oder 1 liefere, je nachdem die Summe der Paritäten der Abbildungen von $G_{i1}, G_{i2}, \ldots$ in ξ gerade oder ungerade ist.

Wir fassen die Definition der „Beiträge“ noch einmal zusammen und fügen einige weitere Definitionen hinzu:

Definition VIIa. Ist f in ξ kompakt, so verstehen wir unter dem Beitrag einer zu ξ gehörigen Schicht X_i die folgende Zahl: wenn f orientier-

---

[19]) Teil I, § 5.

bar ist, den absoluten Wert des Grades der Abbildung einer hinreichend kleinen, gemäß Definition VI orientierten Umgebung von X_i im Punkte ξ; wenn f nicht orientierbar ist, die Zahl 0 oder 1, je nachdem die Parität der Abbildung einer hinreichend kleinen Umgebung von X_i im Punkte ξ gerade oder ungerade ist.

Definition VIIb. Eine Schicht heißt „wesentlich" oder „unwesentlich", je nachdem ihr Beitrag von 0 verschieden oder gleich 0 ist; die — nach Satz IIa a fortiori endliche — Anzahl der zu ξ gehörigen wesentlichen Schichten heißt die „wesentliche Schichtenzahl" von f in ξ und wird im folgenden mit s_ξ bezeichnet.

Definition VIIc. Die Summe der (wesentlichen) Schichtenbeiträge eines Punktes ξ heißt der „Absolutgrad" von f in ξ und wird im folgenden mit a_ξ bezeichnet.

Ist M orientierbar und sind $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ die auf Grund einer Orientierung von M bestimmten Grade der Umgebungen der einzelnen Schichten $X_1, X_2, \ldots$ in ξ, so ist der Grad gleich $\sum \gamma_i$, der Absolutgrad gleich $\sum |\gamma_i|$; folglich ist in diesem Fall, d. h. immer dann, wenn der Grad überhaupt definiert ist, der Absolutgrad mindestens so groß wie der absolute Betrag des Grades; insbesondere ist der Grad 0, wenn der Absolutgrad 0 ist. Ebenso folgt im Fall einer nicht orientierbaren Mannigfaltigkeit M, daß die Parität von f gerade ist, falls der Absolutgrad 0 ist.

Wir nehmen die durch Satz I gegebene Zerlegung von f vor; $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots$ seien die Punkte von μ^*, die durch φ auf ξ abgebildet werden. Nach Satz III gehört zu jeder Schicht X_i ein Punkt $\xi_i = f^*(X_i)$. X_i bildet auch bezüglich f^* eine einzige Schicht, da jeder durch φ auf einen zusammenziehbaren Weg von μ abgebildete Weg von μ^* selbst zusammenziehbar ist (siehe § 1). Der von X_i bezüglich f^* gelieferte Beitrag ist, da φ in der Umgebung von ξ_i^* eineindeutig und $f = \varphi f^*$ ist, gleich dem von X_i bezüglich f gelieferten Beitrag a_i; dabei hat man zu berücksichtigen, daß f^* orientierbar oder nicht orientierbar ist, je nachdem f es ist oder nicht ist, wieder infolge des Entsprechens der zusammenziehbaren Wege auf μ und μ^*.

G sei nun wieder eine ε-Umgebung von X und ε wieder so klein, daß verschiedene Schichten zu verschiedenen Komponenten von G gehören, und überdies so klein, daß Komponenten, die Punkte verschiedener Schichten X_i enthalten, durch f^* in die zueinander fremden Umgebungen U_i^* der $\xi_i^* = f^*(X_i)$ hinein abgebildet werden, die einer festen Umgebung U von ξ entsprechen. V sei eine in U enthaltene Umgebung von ξ, $V_1^*, V_2^*, \ldots$ seien die entsprechenden Umgebungen der $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots$; V sei so klein, daß $f(M - G)$ außerhalb V, daß also die Originalmenge von V in G liegt; diese Originalmenge besteht aus den zueinander fremden Originalmengen der V_i^* bezüglich f^*, und die Originalmenge einer einzelnen V_i^* gehört wegen $V_i^* \subset U_i^*$ solchen Komponenten von G an, die Punkte von X_i enthalten; hat ein Punkt ξ_j^* keinen Originalpunkt bei f^*, so ist auch die Originalmenge seiner Umgebung V_j^* leer.

Nun sei V ferner so klein, daß f in allen Punkten von V kompakt ist; dann ist f^* in allen Punkten von V_i^* kompakt, und da das durch f^* gelieferte Bild von $M - G$, also auch das des Randes von G fremd zu V_i^* ist, ist auch die Abbildung $f^*(G)$ und somit erst recht die Abbildung f^* jeder einzelnen Komponente von G in allen Punkten von V_i^* kompakt. Jede dieser Abbildungen hat also in V_i^* konstanten Grad bzw. konstante Parität. Ist η ein Punkt von V, η_i^* der entsprechende Punkt in V_i^*, a_i der Beitrag von X_i, so ist also a_i die Grad- bzw. Paritätensumme der Abbildung der Komponenten von G nicht nur in ξ_i^*, sondern auch in η_i^*. Da es außerhalb G keine Originalpunkte von η_i^* gibt, ist a_i die Grad- bzw. Paritätensumme bei der Abbildung der Komponenten einer Umgebung der ganzen Originalmenge Y_i von η_i^*. Ist $a_i \neq 0$, X_i also wesentlich, so ist Y_i nicht leer, sondern eine wesentliche Schicht von η mit dem Beitrag a_i. Ist $a_i = 0$, X_i also unwesentlich, so ist Y_i entweder leer oder unwesentlich.

Somit ist die Reihe $a_1, a_2, \ldots, a_s$ der Beiträge der wesentlichen Schichten in der Umgebung V von ξ konstant, und da es um jeden Punkt eines Gebietes, in dem f kompakt ist, eine solche Umgebung gibt, folgt:

Satz IVa. *Die Reihe der Beiträge der (wesentlichen) Schichten, also insbesondere auch die wesentliche Schichtenzahl s_ξ und der Absolutgrad a_ξ, sind konstant in jedem Gebiet, in dem f kompakt ist.*

Ändert man f gleichmäßig stetig so ab, daß die Abbildung immer kompakt in ξ bleibt, so bleibt bei hinreichender Kleinheit der Änderung die Originalmenge X in G enthalten; der Änderung entspricht (siehe Satz I) eine stetige Änderung von f^*; f^* bleibt in den ξ_i^* kompakt, die Originalmenge jedes Punktes ξ_i^* bleibt in den Komponenten von G enthalten, in denen sie ursprünglich war, und die Änderung der Abbildung jeder Komponente ist gleichmäßig stetig. Die Grade bzw. Paritäten der Abbildungen dieser Komponenten ändern sich daher in ξ_i^* nicht[19]. Daraus folgt:

Satz IVb. *Die Reihe der Beiträge der (wesentlichen) Schichten, also insbesondere auch die wesentliche Schichtenzahl und der Absolutgrad, im Punkte ξ sind Invarianten der „Abbildungsklasse in bezug auf ξ“*[20].

[20]) Teil I, § 4.

§ 3.

Überall kompakte Abbildungen.

Aus den im vorigen Paragraphen behandelten Tatsachen leiten wir in diesem Paragraphen Folgerungen für den Spezialfall her, in dem f in allen Punkten von μ kompakt ist; dieser Fall umfaßt insbesondere alle Abbildungen geschlossener Mannigfaltigkeiten M.

Satz V. *Bei einer überall kompakten Abbildung sind alle Schichtenbeiträge untereinander gleich; d. h. entweder gibt es nur unwesentliche Schichten, oder es gibt nur wesentliche Schichten und die Schichtenbeiträge in jedem Punkt sind untereinander und mit den Schichtenbeiträgen in den anderen Punkten gleich.*

Beweis. X_i, Y_k seien Schichten in den Punkten ξ, η von μ mit den Beiträgen a_i bzw. b_k; dabei darf auch $\xi = \eta$ sein. Dann sind (siehe § 2, 5.) a_i, b_k auch die Beiträge der Schichten X_i bzw. Y_k in den Punkten $\xi_i^* = f^*(X_i)$ bzw. $\eta_k^* = f^*(Y_k)$ bei der Abbildung f^*. Aus der Kompaktheit von f in allen Punkten von μ folgt die Kompaktheit von f^* in allen Punkten von μ^*; aus Satz IVa, angewandt auf f^*, ergibt sich daher $a_i = b_k$.

Satz VI. *Sind M und μ orientierbar und ist f überall kompakt, so ist der Absolutgrad gleich dem absoluten Betrag des Grades.*

Beweis. Aus der Orientierbarkeit von μ folgt die Orientierbarkeit von μ^*, da die Orientierung euklidischer Elemente von μ durch die in ihnen eindeutige Umkehrung der Abbildung φ in eindeutiger Weise auf ein vollständiges, aus euklidischen Elementen bestehendes Umgebungssystem in μ^* übertragen wird. Sind M und μ orientiert, so ist also auch μ^* orientiert, und die Abbildung f^* hat einen bestimmten Grad γ, der wegen der Kompaktheit von f^* in ganz μ^* konstant ist. Sein absoluter Betrag ist der laut Satz V konstante Schichtenbeitrag bei f^*. Infolge des oben definierten Zusammenhanges zwischen den Orientierungen von μ und μ^* hat die Abbildung φ in jedem Gebiet von μ^*, in dem sie eineindeutig ist, den Grad $+1$. Nach der Produktregel für die Grade[19]) hat daher die Abbildung $f = \varphi f^*$ der Umgebung einer Schicht X_i im Punkt ξ ebenfalls den Grad γ. Gehören zu ξ t Schichten, so ist $t\gamma$ der Grad von f, $t|\gamma|$ der Absolutgrad.

Bemerkung. Ist M orientierbar, μ nicht orientierbar, so ist der Grad auch noch definiert und stets gleich 0[19]). Der Absolutgrad kann aber von 0 verschieden sein. So hat er z. B. bei der durch die Überlagerung gegebenen Abbildung der eine projektive Ebene zweischichtig überlagernden Kugel auf die projektive Ebene den Wert 2.

Satz VII. *Hat eine überall kompakte Abbildung einen von 0 verschiedenen Absolutgrad, so ist der Index der Abbildung endlich.*

Beweis. Ist der Index j der überall kompakten Abbildung f unendlich, so hat (siehe § 1) die Überlagerungsmannigfaltigkeit μ^* unendlich viele Schichten, d. h. so gibt es auf ihr zu jedem Punkt ξ von μ unendlieh viele Punkte $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots$ mit $\varphi(\xi_i^*) = \xi$; da andererseits nach Satz IIa die Originalmenge X von ξ in nur endlich viele Schichten zerfällt und nach Satz III jede von diesen durch f^* auf einen der Punkte $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots$, nach Satz I aber kein nicht zu X gehöriger Punkt durch f^* auf einen Punkt ξ_i^* abgebildet wird, gibt es Punkte ξ_i^* — und sogar unendlich viele —, die bei der Abbildung f^* nicht Bildpunkte sind. Wäre nun in einem der Punkte $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots$ der Schichtenbeitrag von 0 verschieden, so wäre er nach Satz V in allen Punkten von μ^* von 0 verschieden, es wären also alle ξ_i^* Bildpunkte; mithin ist der Schichtenbeitrag von f^*, der zugleich der Schichtenbeitrag von f ist, gleich 0, und folglich ist auch der Absolutgrad 0.

Satz VIIa. *Der Index einer überall kompakten Abbildung ist ein Teiler des Absolutgrades; der laut Satz V konstante Schichtenbeitrag hat, wenn der Absolutgrad a und der Index j ist, den Wert $\frac{a}{j}$ (dabei wird $\frac{0}{\infty} = 0$ gesetzt); ist $a \neq 0$, so ist j gleich der (wesentlichen) Schichtenzahl s.*

Beweis. Wir dürfen $a \neq 0$ annehmen. Zu jedem der Punkte $\xi_1^*, \ldots, \xi_j^*$, für die $\varphi(\xi_i^*) = \xi$ ist, gehört derselbe Schichtenbeitrag $a_i = a_1$; es ist $a = \sum_{i=1}^{j} a_i = j\,a_1$, also $a_1 = \frac{a}{j}$. Daraus folgt weiter $a_1 \neq 0$, also sind alle j Schichten wesentlich, und es ist $j = s$.

Folgerung. Für die Abbildbarkeit einer geschlossenen Mannigfaltigkeit M auf die Mannigfaltigkeit μ mit einem vorgeschriebenen, von 0 verschiedenen, Absolutgrad a ist notwendig, daß sich $\mathfrak{F}$ homomorph so in Φ abbilden läßt, daß der Index der Bildgruppe endlich und ein Teiler von a ist. Z. B. muß, wenn $\mathfrak{F}$ eine endliche Gruppe ist, auch Φ eine endliche Gruppe sein.

Satz VIII. *Hat eine überall kompakte Abbildung den Absolutgrad $a = 1$, so ist jeder geschlossene Weg auf μ dem Bild eines geschlossenen Weges auf M äquivalent.*

Beweis. Nach Satz VIIa hat die Abbildung den Index $j = 1$, folglich ist die Bildgruppe $\mathfrak{U}$ mit der Fundamentalgruppe Φ von μ identisch.

Satz IX. *Bei einer überall kompakten Abbildung mit von 0 verschiedenem Absolutgrad ist die Anzahl der Komponenten (d. h. zueinander fremden zusammenhängenden abgeschlossenen Mengen), in die die Originalmenge X eines beliebigen Punktes ξ von μ zerfällt, mindestens gleich dem Index j von f.*

Beweis. Jede der wesentlichen Schichten, in die X zerfällt, enthält wenigstens eine Komponente. Die Anzahl der wesentlichen Schichten ist nach Satz VIIa gleich j.

Satz X. *Gibt es bei einer überall kompakten Abbildung mit von 0 verschiedenem Absolutgrad einen Punkt auf μ, dessen Originalmenge zusammenhängend ist, so ist jeder geschlossene Weg auf μ dem Bilde eines geschlossenen Weges auf M äquivalent.*

Beweis. Die Abbildung hat nach Satz IX den Index 1; folglich ist $\mathfrak{U}$ mit Φ identisch.

§ 4.

Die Anzahl der Originalpunkte und der glatten Bedeckungen eines Bildpunktes.

f sei wieder eine beliebige Abbildung von M auf μ und im Punkte ξ von μ kompakt; mit $\mathfrak{K}_\xi$ bezeichnen wir die „Abbildungsklasse in bezug auf ξ“, zu der f gehört, d. h. die Gesamtheit aller Abbildungen, die sich durch gleichmäßig stetige Abänderung unter Wahrung der Kompaktheit im Punkte ξ aus f herstellen lassen[20]). In $\mathfrak{K}_\xi$ gibt es Abbildungen, bei denen die Originalmenge von ξ aus endlich vielen Punkten besteht; deren Anzahl ist mindestens gleich der wesentlichen Schichtenzahl s_ξ, die innerhalb $\mathfrak{K}_\xi$ invariant ist (Satz IVb). Bezeichnen wir die innerhalb $\mathfrak{K}_\xi$ erreichbare Mindestzahl von Originalpunkten des Punktes ξ mit σ_ξ, so ist also $\sigma_\xi \geqq s_\xi$.

Statt nur nach der kleinsten Zahl von Originalpunkten von ξ kann man allgemeiner fragen, welche endlichen Zahlen als Anzahlen der Originalpunkte von ξ bei einer zu $\mathfrak{K}_\xi$ gehörigen Abbildung auftreten können; diese Frage wird durch die Antwort auf die Frage nach der Größe von σ_ξ mitbeantwortet: jede endliche Zahl, die nicht kleiner als σ_ξ ist, tritt auf. Denn wenn $\bar{f}$ eine Abbildung aus $\mathfrak{K}_\xi$ mit σ_ξ Originalpunkten von ξ ist, so läßt sich folgendermaßen eine zu $\mathfrak{K}_\xi$ gehörige Abbildung $\bar{f}_1$ mit $\sigma_\xi + k$ $(k > 0)$ Originalpunkten von ξ konstruieren: y sei ein Punkt von M mit $\bar{f}(y) = \eta \neq \xi$, E ein ξ und η enthaltendes Element von μ (bezüglich der Existenz von E siehe den unten ausgesprochenen Hilfssatz Ia), e ein y enthaltendes Element von M mit $\bar{f}(e) \subset E$ und $\xi \neq \bar{f}(e)$; dann kann man $\bar{f}$ im Innern von e so abändern, daß ξ dort genau k Originalpunkte bekommt[21]), und die so abgeänderte Abbildung $\bar{f}_1$ läßt sich, da das Innere von E als euklidischer R^n aufzufassen ist, ohne Änderung am Rande von e, also in stetigem Anschluß an $\bar{f}$, durch gleichförmige Bewegungen in E aus $\bar{f}$ herstellen; die

[21]) Folgt aus Teil I, § 1, Satz X, durch Anwendung auf k zueinander fremde Teilelemente von e.

Originalmenge einer Umgebung von ξ gehört dabei in jedem Augenblick zu e, ist also kompakt, mithin gehört $\bar{f}_1$ zu $\mathfrak{K}_\xi$.

σ_ξ hängt von ξ ab; jedoch gilt ebenso wie für die im § 2 behandelten Klasseninvarianten (siehe Satz IV)

Satz XIa. *σ_ξ ist konstant, wenn ξ ein Gebiet durchläuft, in dem f kompakt ist.*

Dieser Satz ist in dem folgenden allgemeineren Satz enthalten:

Satz XI. *ξ und η seien Punkte eines Gebietes G von μ, in dem f kompakt ist; dann tritt jede Punktmenge X von M, die als Originalmenge von ξ bei einer Abbildung f_1 aus $\mathfrak{K}_\xi$ auftritt, auch als Originalmenge von η bei einer Abbildung f_2 aus $\mathfrak{K}_\eta$ auf.*

Beim Beweis werden wir, wie oben bereits einmal, den folgenden Hilfssatz verwenden, den wir zusammen mit anderen Hilfssätzen im nächsten Paragraphen beweisen werden:

Hilfssatz Ia. Zu zwei Punkten einer Mannigfaltigkeit gibt es stets ein sie im Inneren enthaltendes Element der Mannigfaltigkeit.

Beweis von Satz XI. E sei ein ξ und η im Inneren enthaltendes Element von G. D_t sei eine topologische Deformation von μ in sich, die außerhalb und auf dem Rande von E die Identität ist und, während t von 0 bis 1 läuft, ξ in η überführt; dabei ist D_0 auch im Inneren von E die Identität. Alle Abbildungen $D_t f(M)$ sind in G kompakt; also gehört insbesondere $D_1 f(M)$ zu $\mathfrak{K}_\eta$. f_τ $(0 \leqq \tau \leqq 1)$ sei die in ξ kompakte Abbildungsschar, die $f = f_0$ in f_1 überführt. Die Abbildungsschar $D_1 f_\tau(M)$ ist in η kompakt, da die Originalmenge einer Umgebung von η bei $D_1 f_\tau$ mit der Originalmenge einer Umgebung von ξ bei f_τ identisch ist; folglich ist $D_1 f_1 = f_2 < \mathfrak{K}_\eta$. Die Originalmenge von η bei f_2 ist mit der Originalmenge von ξ bei f_1 identisch, sie ist also die Menge X.

Es liegt nahe, der Zahl σ_ξ eine in ähnlicher Weise definierte Zahl $\bar{\sigma}_\xi$ an die Seite zu stellen: $\bar{\sigma}_\xi$ sei die durch eine Abbildung aus $\mathfrak{K}_\xi$ erreichbare Mindestzahl der *Komponenten* (d. h. untereinander fremden, zusammenhängenden abgeschlossenen Teilmengen) der Originalmenge von ξ. Auch diese Zahl ist mindestens gleich der wesentlichen Schichtenzahl s_ξ; ferner folgt aus den Definitionen unmittelbar $\bar{\sigma}_\xi \leqq \sigma_\xi$. Die neue Definition liefert aber keine neue Zahl; es ist vielmehr stets $\bar{\sigma}_\xi = \sigma_\xi$. Diese Tatsache ist in dem folgenden Satz enthalten:

Satz XII. *Besteht bei der Abbildung f die Originalmenge X von ξ aus genau k Komponenten, so läßt sich f durch eine stetige Abänderung, die sich auf eine beliebig kleine Umgebung von X beschränkt, in eine zu $\mathfrak{K}_\xi$ gehörige Abbildung f_1 überführen, bei der die Originalmenge von ξ aus genau k Punkten besteht.*

Beweis. Wir beweisen den Satz zunächst für den Spezialfall $k = 1$; X sei also zusammenhängend. ε sei eine so kleine positive Zahl, daß das durch f gelieferte Bild der ε-Umgebung von X in einer euklidischen Umgebung U von ξ enthalten ist. Diese ε-Umgebung von X kann in mehrere Komponenten zerfallen; aber da X zusammenhängend ist, enthält nur eine Komponente Punkte von X; diese Komponente heiße M'. Durch eine beliebig kleine Abänderung in einer beliebig kleinen Umgebung von X kann man unter Wahrung der Kompaktheit in ξ die Abbildung f der Mannigfaltigkeit M' so abändern, daß ξ bei dem Ergebnis f' nur endlich viele Originalpunkte hat[22]). Ist deren Anzahl größer als eins, so läßt sie sich folgendermaßen vermindern: man schließe zwei Originalpunkte in ein Element E von M' ein (s. Hilfssatz Ia). f' bewirkt eine Abbildung des Elements E in das als euklidischen R^n aufzufassende Gebiet U. Daher[23]) kann man f', ohne außerhalb und auf dem Rande von E etwas zu ändern, im Inneren von E so abändern, daß ξ dort nur noch einen einzigen Originalpunkt hat; dabei bleibt die Originalmenge einer Umgebung von ξ immer kompakt. Mithin kann man die Originalmenge von ξ innerhalb von $\mathfrak{K}_\xi$ schließlich bis auf einen einzigen Punkt vermindern. Damit ist der Spezialfall $k = 1$ erledigt.

Ist $k > 1$, so seien K_i $(i = 1, \ldots, k)$ die Komponenten von X. Man wähle ein so kleines positives δ, daß die δ-Umgebungen der verschiedenen K_i zueinander fremd sind. Unter den Komponenten der δ-Umgebung von K_i ist, da K_i zusammenhängend ist, nur eine, die Punkte von K_i enthält. Sie ist eine Mannigfaltigkeit M_i. Bei der Abbildung $f(M_i)$ ist die Originalmenge von ξ zusammenhängend. Auf Grund des bereits bewiesenen Spezialfalles läßt sich f daher innerhalb von $\mathfrak{K}_\xi$ so abändern, daß jede Komponente K_i durch einen einzigen Originalpunkt von ξ ersetzt wird und daß weitere Originalpunkte nicht hinzutreten.

Bei der Definition von σ_ξ waren wir von der Tatsache ausgegangen, daß es in $\mathfrak{K}_\xi$ „fastglatte" Abbildungen[22]) gibt, d. h. solche, bei denen die Originalmenge von ξ endlich ist. Nun gibt es in $\mathfrak{K}_\xi$ sogar Abbildungen, die „glatt" sind, d. h. die eine endliche Anzahl von Gebieten eineindeutig auf eine Umgebung von ξ abbilden, während die Komplementärmenge dieser Gebiete keinen Originalpunkt von ξ enthält[24]). Diese Tatsache führt zu der folgenden Definition: α_ξ sei die Mindestzahl von glatten (d. h. eineindeutigen) Bedeckungen einer Umgebung von ξ, die durch eine Abbildung aus $\mathfrak{K}_\xi$ geliefert wird. α_ξ ist mindestens so groß wie der Absolut-

---

[22]) Teil I, § 4, Satz Ia.
[23]) Teil I, § 1, Satz X.
[24]) Teil I, § 4, Satz II.

grad a_ξ im Punkte ξ; denn bei einer in ξ glatten Abbildung gehören zu einer Schicht, deren Beitrag a_i ist, wenigstens a_i Originalpunkte von ξ, da die eineindeutige Abbildung der Umgebung eines solchen Punktes den Grad ± 1 bzw. ungerade Parität hat. Es ist also immer $\alpha_\xi \geqq a_\xi$.

Analog wie am Anfang des Paragraphen bei der Betrachtung von σ_ξ kann man statt nach der Mindestzahl nach jeder innerhalb $\mathfrak{K}_\xi$ überhaupt möglichen Anzahl glatter Bedeckungen von ξ fragen. Auch jetzt ist die Antwort auf diese Frage gegeben, wenn man α_ξ kennt: jede endliche Zahl, die nicht kleiner als α_ξ und die mit α_ξ kongruent modulo 2 ist, kann als Zahl glatter Bedeckungen von ξ auftreten. Denn wie früher kann man, wenn eine in ξ glatte Abbildung vorliegt, diese in einem Element e von M, dessen Bild ξ nicht enthält, stetig so abändern, daß das Bild von e ξ bedeckt; dabei kann man die abgeänderte Abbildung als glatt in ξ annehmen und, da die Abbildung von e in ξ den Grad 0 hat, als Anzahl der Bedeckungen der Umgebung von ξ durch das Bild von e jede gerade Zahl willkürlich vorschreiben[25]).

Ferner gilt in Analogie zu Satz XIa

Satz XIb. *α_ξ ist konstant, wenn ξ ein Gebiet durchläuft, in dem f kompakt ist.*

Beweis. ξ und η seien Punkte des Gebietes G, in dem f kompakt ist; f_1 sei eine Abbildung aus $\mathfrak{K}_\xi$, die in ξ glatt ist, und zwar werde bei ihr eine Umgebung von ξ k-mal glatt bedeckt. Dann liefert die im Beweise von Satz XI benutzte Konstruktion eine Abbildung f_2 aus $\mathfrak{K}_\eta$, bei der eine Umgebung von η k-mal glatt bedeckt wird. Jede Zahl k, die als Zahl der Bedeckungen einer Umgebung von ξ bei einer in ξ glatten Abbildung aus $\mathfrak{K}_\xi$ auftritt, tritt also auch als Zahl der Bedeckungen einer Umgebung von η bei einer in η glatten Abbildung aus $\mathfrak{K}_\eta$ auf, und umgekehrt. Daraus folgt die Behauptung.

Die Klasseninvarianten σ_ξ und α_ξ sind durch die Abbildung f und den Punkt ξ eindeutig bestimmt; jedoch ist aus ihrer Definition nicht ersichtlich, wie sie sich ermitteln lassen, wenn f und ξ gegeben sind (hierin besteht ein prinzipieller Gegensatz zwischen σ_ξ und α_ξ einerseits und den im § 2 behandelten Klasseninvarianten andererseits). σ_ξ und α_ξ sind durch ihre Definitionen ja nicht als Eigenschaften von f, sondern als Eigenschaften der durch f und ξ bestimmten Abbildungsmenge $\mathfrak{K}_\xi$ charakterisiert. Es entsteht daher die Aufgabe, σ_ξ und α_ξ durch Größen auszudrücken, die bereits bei vollständiger Kenntnis der Abbildung f selbst bekannt sind.

Diese Aufgabe bildet den weiteren Inhalt dieser Arbeit. Sie wird zwar für die meisten Fälle, jedoch nicht in voller Allgemeinheit gelöst

---

[25]) Teil I, § 1, Satz IX.

werden; ist die Dimensionszahl von M und μ $n \neq 2$, so wird sie dadurch gelöst, daß gezeigt wird: in den uns schon bekannten Beziehungen $\sigma_\xi \geqq s_\xi$, $\alpha_\xi \geqq a_\xi$ stehen immer die Gleichheitszeichen; dagegen gelten die Gleichungen $\sigma_\xi = s_\xi$, $\alpha_\xi = a_\xi$ nachweislich nicht bei gewissen Flächenabbildungen, und in diesen Fällen bleibt die oben formulierte Aufgabe ungelöst.

Nach Voranschickung einiger Hilfssätze im § 5 wird im § 6 der Fall $n \neq 2$ in dem genannten Sinne erledigt werden; im § 7 wird gezeigt werden, daß der Fall $n = 2$ sich nicht nur unserer Beweismethode entzieht, sondern daß in ihm die für die anderen Dimensionszahlen gültigen Sätze tatsächlich falsch sind.

§ 5.

Hilfssätze.

1. Sind w_1, w_2 zwei Wege mit dem gemeinsamen Anfangspunkt x und dem gemeinsamen Endpunkt y in der Mannigfaltigkeit M, so nennen wir sie, in Verallgemeinerung der im § 1 für geschlossene Wege getroffenen Festsetzungen, „äquivalent", wenn man den einen unter Festhaltung von Anfangs- und Endpunkt in den anderen deformieren kann; es ist leicht zu sehen, daß dies gleichbedeutend mit der Zusammenziehbarkeit des geschlossenen Weges $w_1 w_2^{-1}$ ist. Die Wege von x nach y werden so in Äquivalenzklassen eingeteilt.

Ist t ein Teilbogen des Weges w, ist also $w = s\,t\,u$, wobei s der Teilbogen von w von dem Anfangspunkt von w bis zu dem Anfangspunkt von t, u der Teilbogen von dem Endpunkt von t bis zu dem Endpunkt von w ist, und ist t mit t' äquivalent, so wird durch die Deformation von t in t' zugleich w in $w' = s\,t'\,u$ deformiert. Ersetzt man also einen Teilbogen eines Weges durch einen äquivalenten Bogen, so bleibt die Äquivalenzklasse des ganzen Bogens ungeändert.

Ist E ein x und y enthaltendes Element, so sind zwei Wege w_1 und w_2, die x mit y innerhalb E verbinden, stets miteinander äquivalent, da man die Überführung von w_1 in w_2 mit Hilfe der euklidischen Geometrie von E geradlinig und gleichförmig durchführen kann. Zu jedem x und y enthaltenden Element E gehört also eine wohlbestimmte Äquivalenzklasse von Wegen zwischen x und y. Es fragt sich, ob man umgekehrt bei gegebenen Punkten x und y zu jeder Äquivalenzklasse ein solches Element E angeben kann. Man sieht leicht, daß diese Frage nicht in voller Allgemeinheit zu bejahen ist: denn ist $n = 1$, M ein Kreis und w ein Weg von x nach y, der den Kreis mehrere Male umläuft, so daß die Änderung des Winkelarguments auf w größer als 2π ist, so ist sie auch auf jedem zu w äquivalenten Weg $> 2\pi$; ein solcher Weg läßt sich aber nicht in ein

Intervall einschließen. Jedoch spielt der Fall $n = 1$ eine Ausnahmerolle; denn es gilt:

Hilfssatz I. Ist $n > 1$, M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und w ein Weg zwischen den voneinander verschiedenen Punkten x und y in M, so gibt es in M ein x und y enthaltendes Element E mit der Eigenschaft, daß die x mit y innerhalb E verbindenden Wege mit w äquivalent sind.

Bemerkung. Hierin ist der im vorigem Paragraphen ausgesprochene und benutzte „Hilfssatz Ia" für $n > 1$ enthalten; da dieser aber für den Fall $n = 1$, in dem M entweder eine Gerade oder ein Kreis ist, sofort zu verifizieren ist, darf er nach Beweis des Hilfssatzes I als bewiesen angesehen werden.

Beweis. e sei ein x enthaltendes, y nicht enthaltendes Element. w hat Punkte mit dem Rande r von e gemeinsam, und unter diesen gibt es einen bei der Durchlaufung von w in der Richtung xy ersten Punkt z; falls der Bogen xz von w nicht doppelpunktfrei ist, ersetzen wir ihn durch einen in e von x nach z laufenden doppelpunktfreien Bogen. Hierdurch wird, da die beiden Bögen xz in e verlaufen, also, wie früher bemerkt, äquivalent sind, die Äquivalenzklasse des ganzen Weges w, wie ebenfalls früher bemerkt, nicht geändert. Falls w in seinem weiteren Verlauf wieder in e eintritt, falls es also auf dem Bogen zy einen im Inneren von e liegenden Punkt z gibt, so gehört dieser einem Teilbogen von w an, dessen Endpunkte z_1, z_2 auf dem Rande r von e liegen; da r eine $(n-1)$-dimensionale Sphäre und $n - 1 > 0$ ist, lassen sich z_1 und z_2 auf r durch einen Bogen verbinden, der wieder mit dem zwischen z_1 und z_2 verlaufenden Teil von w äquivalent ist, durch den wir den letzteren also ersetzen dürfen, ohne die Klasse von w zu ändern. Indem wir dies für jeden in e eintretenden Bogen tun, erreichen wir, daß der ganze Weg zunächst doppelpunktfrei von x bis in den Randpunkt z von e läuft und danach nie mehr ins Innere von e eintritt, so daß insbesondere der Anfangspunkt x nicht noch ein zweites Mal von dem Wege erreicht wird. Wir dürfen also annehmen, daß w von vornherein diesen Verlauf hat. (Diese Annahme ist, wie man leicht sieht, unzulässig, wenn M ein Kreis ist.)

Der Bogen zy läßt sich in so kleine Teilbögen einteilen, daß es zu jedem von ihnen ein ihn im Inneren enthaltendes, x nicht enthaltendes Element gibt. Setzen wir $e = E_1$ und bezeichnen wir die soeben eingeführten Elemente nach der Reihenfolge der in ihnen enthaltenden Teilbögen mit $E_2, \ldots, E_k$, so haben wir folgendes erreicht: w ist in k aneinanderschließende Bögen $w_1, \ldots, w_k$ eingeteilt und diese sind ins Innere von Elementen $E_1, \ldots, E_k$ derart eingeschlossen, daß der Anfangspunkt x von w außer dem Element E_1 keinem weiteren E_i angehört. Eine solche Bedeckung von w mit Elementen möge eine „zulässige Bedeckung von der Ordnung k" heißen.

Unser Satz wird bewiesen sein, wenn wir gezeigt haben, daß es, falls $k > 1$ ist, einen zu w äquivalenten Weg gibt, der eine zulässige Bedeckung von der Ordnung $k-1$ gestattet. Denn dann gelangt man nach $k-1$ Schritten zu einem Weg, der die Behauptung erfüllt.

Die Möglichkeit der Verminderung der Ordnung k einer zulässigen Bedeckung durch Übergang zu einem äquivalenten Weg sei bereits für den Fall $k=2$ bewiesen; dann ergibt sie sich für beliebiges k dadurch, daß man für den Teil $w_1 w_2$ von w und seine aus E_1 und E_2 bestehende zulässige Bedeckung von der Ordnung 2 die Verminderung der Ordnung vornimmt: man ersetzt $w_1 w_2$ durch einen äquivalenten Weg w_1', der eine Bedeckung der Ordnung 1 gestattet, sich also in ein Element E_1' einschließen läßt. Dann ist der Weg w', der aus w bei der Ersetzung von $w_1 w_2$ durch w_1' entsteht, mit w äquivalent, und die Elemente $E_1', E_3, \ldots, E_k$ bilden eine zulässige Bedeckung von w', deren Ordnung $k-1$ ist. Es genügt also, die Möglichkeit der Verminderung der Ordnung für den Fall $k=2$ zu beweisen.

w sei also in zwei Bögen $xq = w_1$, $qy = w_2$ geteilt, w_1 sei im Innern des Elements E_1, w_2 im Innern des Elements E_2, x sei nicht in E_2 enthalten. Da der Bogen w_1 vom Äußeren ins Innere von E_2 läuft, besitzt er Punkte auf dem Rande R von E_2; p sei der im Sinne der Durchlaufung von w_1 letzte derartige Punkt. Der Bogen pq verläuft also in dem Durchschnitt $E_1 \cdot E_2$. Nun sei T eine topologische Abbildung von $E_1 + E_2$ mit den folgenden Eigenschaften: Außerhalb und auf dem Rande von E_2 ist sie die Identität; E_2 wird durch T auf sich abgebildet, und zwar so, daß $T(q) = y$ ist. T kann durch eine eindeutige stetige Deformation hergestellt werden, indem man in E_2 jeden Punkt geradlinig und gleichförmig im Sinne einer in E_2 gültigen euklidischen Geometrie in der Zeit 1 in seinen Bildpunkt laufen läßt und außerhalb und auf dem Rande von E_2 alle Punkte festhält. Da x außerhalb von E_2 und p auf dem Rande von E_2 liegt, werden diese beiden Punkte dabei festgehalten, und der Bogen xp von w ist daher mit seinem Bild $T(xp)$ äquivalent. Ferner ist der Bogen py von w mit dem Bild $T(pq)$ des Bogens pq äquivalent, da beide Wege die Punkte p und y in E_2 miteinander verbinden. Folglich ist auch der Weg $w = xp + py$ mit dem Weg $w' = T(xp) + T(pq) = T(xq) = T(w_1)$ äquivalent. Da aber w_1 im Inneren des Elements E_1 liegt, liegt $w' = T(w_1)$ im Inneren des Elements $E' = T(E_1)$. w' und E' erfüllen also die Behauptung, und der Hilfssatz I ist damit bewiesen.

(Bemerkung. Da man innerhalb eines Elementes zwei Punkte immer durch einen doppelpunktfreien Weg verbinden kann, folgt aus dem Hilfssatz, daß man zu jedem Weg w einen äquivalenten, doppelpunktfreien

Weg w' mit denselben Anfangs- und Endpunkten finden kann. Die Konstruktion eines solchen w' ist, wie man leicht sieht, bereits durch eine beliebig kleine Abänderung von w möglich, wenn $n > 2$ ist; dies ist jedoch, wie man an einfachen Beispielen sieht, im Fall $n = 2$ im allgemeinen nicht möglich, vielmehr muß man in diesem Fall Konstruktionen von der Art vornehmen, wie sie im Beweis des Hilfssatzes verwendet wurden.)

2. Ist F eine abgeschlossene Teilmenge eines k-dimensionalen Elements E^k, und ist in F eine Abbildung f auf die n-dimensionale Mannigfaltigkeit μ definiert, so läßt sich diese im allgemeinen — im Gegensatz zu dem Spezialfall, in dem μ der euklidische Raum ist[26]) — nicht auf das ganze Element E^k erweitern. Denn ist z. B. F eine Kreislinie, so ist in der Erweiterbarkeit auf E^k die Erweiterbarkeit auf eine von F begrenzte Kreisscheibe enthalten, und dies bedeutet (siehe § 1), daß der geschlossene Weg $f(F)$ in μ zusammenziehbar ist, was nicht der Fall zu sein braucht. Jedoch ist stets wenigstens eine Erweiterung von f „im Kleinen" möglich; es gilt nämlich

Hilfssatz IIa. Ist in der abgeschlossenen Teilmenge F des k-dimensionalen euklidischen Elements E^k eine Abbildung f auf die Mannigfaltigkeit μ definiert, so läßt sich f auf eine gewisse Umgebung von F erweitern. Dabei wird unter einer Umgebung von F eine F enthaltende, relativ zu E^k offene Teilmenge von E^k verstanden.

Beweis. In μ wird eine bestimmte Metrik mit einer Entfernungsfunktion ϱ zugrunde gelegt. Φ sei eine kompakte Menge in μ. Dann läßt sich jeder positiven Zahl b eine positive (von Φ abhängige) Zahl $\delta(b)$ mit folgender Eigenschaft zuordnen: Jede Punktmenge, die wenigstens einen Punkt von Φ enthält und deren Durchmesser $< \delta(b)$ ist, läßt sich in ein Element mit einem Durchmesser $< b$ einschließen. Gäbe es nämlich zu einem positiven b keine derartige Zahl $\delta(b)$, so gäbe es zu jedem positiven δ_i eine einen Punkt p_i von Φ enthaltende Menge m_i mit einem Durchmesser $< \delta_i$, die sich nicht in ein Element mit einem Durchmesser $< b$ einschließen ließe. Ist aber $\delta_1, \delta_2, \ldots$ eine gegen 0 konvergierende Folge, so hat die zugehörige Punktfolge $p_1, p_2, \ldots$ wegen der Kompaktheit von Φ einen Häufungspunkt p; e sei ein p im Inneren enthaltendes Element mit einem Durchmesser $< b$; ε sei eine so kleine positive Zahl, daß die ganze ε-Umgebung von p im Inneren von e liegt. Ist dann i so groß, daß sowohl $\delta_i < \frac{1}{2}\varepsilon$ als $\varrho(p, p_i) < \frac{1}{2}\varepsilon$ ist, so liegt die ganze Menge m_i im

[26]) Diese Möglichkeit der Erweiterung einer Abbildung folgt unmittelbar aus der Möglichkeit, den Definitionsbereich einer stetigen Funktion zu erweitern. Man vgl. Teil I, Fußnote [17]), und die entsprechende Stelle im Text.

Inneren von e, im Gegensatz zu der Annahme, daß sich m_ι in kein Element mit einem Durchmesser $< b$ einschließen lasse.

Eine Funktion $\delta(b)$ existiert also. Aus ihrer Definition ergibt sich, daß immer $\delta(b) \leqq b$ ist. Der Existenzbeweis bleibt gültig für $b = +\infty$; der Sinn der Zahl $\delta^* = \delta(\infty)$ ist der, daß jede Menge, die einen Punkt Φ enthält und deren Durchmesser $< \delta^*$ ist, in ein Element eingeschlossen werden kann.

Wir setzen nun, wenn Φ die Bildmenge $f(F)$ und, wie oben eingeführt, k die Dimension von E^k ist:

$$d_k = \delta^*, \quad d_\varkappa = \delta\left(\frac{1}{3} d_{\varkappa+1}\right) \qquad (\varkappa = k-1, k-2, \ldots, 1, 0).$$

E^k denken wir uns als Simplex mit einer euklidischen Metrik. Infolge der gleichmäßigen Stetigkeit der Abbildung f läßt sich eine Zahl $c > 0$ so bestimmen, daß für zwei Punkte x_1, x_2 von F, deren Entfernung $< c$ ist, stets $\varrho(f(x_1), f(x_2)) < d_0$ ist.

E^k zerlegen wir in Teilsimplexe, deren Durchmesser $< \frac{1}{3}c$ sind; $E_1^k, E_2^k, \ldots$ seien diejenigen von ihnen, die im Inneren oder auf dem Rande wenigstens je einen Punkt von F enthalten. Die Menge der (relativ zu E^k) inneren Punkte der Vereinigungsmenge $F_k = \sum_i E_i^k$ bildet eine Umgebung von F. Unsere Aufgabe ist daher gelöst, sobald wir $f(F)$ zu einer Abbildung $f(F_k)$ ergänzt haben.

Mit $E_i^\varkappa$ ($\varkappa = 0, 1, \ldots, k-1$; $i = 1, 2, \ldots$) bezeichnen wir die $\varkappa$-dimensionalen Randsimplexe der E_i^k, mit $F_\varkappa$ die Vereinigungsmenge von F und $\sum_i E_i^\varkappa$ (worin bei festem $\varkappa$ über alle dabei vorkommenden i zu summieren ist). Wir werden f der Reihe nach für $F_0, F_1, \ldots, F_{k-1}, F_k$ erklären.

Ist E_i^0 ein Eckpunkt, der nicht zu F gehört, in dem also f nicht von vornherein definiert ist, so wählen wir willkürlich einen Punkt x von F, der einem E_i^k angehört, an welchem E_i^0 Ecke ist, und setzen: $f(E_i^0) = f(x)$; damit haben wir $f(F_0)$ erklärt. Sind dann y_1, y_2 zwei Punkte von F_0, die einem E_i^k angehören, so gibt es jedenfalls zwei Punkte x_1, x_2 von F (die nicht von den y_1, y_2 verschieden zu sein brauchen), deren Abstand voneinander $< c$ ist, derart, daß $f(y_1) = f(x_1)$, $f(y_2) = f(x_2)$ ist; folglich ist $\varrho(f(y_1), f(y_2)) < d_0$. Aus $y_1 \subset F_0 \cdot E_i^k$, $y_2 \subset F_0 \cdot E_i^k$ (für irgendein i, das aber in beiden Relationen dasselbe ist) folgt also immer $\varrho(f(y_1), f(y_2)) < d_0$.

Es sei nun bereits $f(F_\varkappa)$ so erklärt, daß aus $y_1 \subset F_\varkappa \cdot E_i^k$, $y_2 \subset F_\varkappa \cdot E_i^k$ immer $\varrho(f(y_1), f(y_2)) < d_\varkappa$ folgt. Dann hat, wenn wir ein bestimmtes $E_i^{\varkappa+1}$ betrachten, die Bildmenge $f(F_\varkappa \cdot E_i^{\varkappa+1})$ einen Durchmesser $< d_\varkappa$, sie läßt sich also infolge der Definition von $d_\varkappa$ und der Definition der δ-Funktion in ein Element e einschließen, dessen Durchmesser $< \frac{1}{3} d_{\varkappa+1}$ ist. Unter Zugrundelegung einer euklidischen Metrik in e läßt sich die Abbildung $f(F_\varkappa \cdot E_i^{\varkappa+1})$ zu einer Abbildung $f(E_i^{\varkappa+1})$ auf eine Teilmenge von e stetig erweitern[26]). Die so in den verschiedenen $E_i^{\varkappa+1}$ erklärten Abbildungen schließen stetig aneinander, da f in allen Simplexen $E_i^\varkappa$ ja schon bei dem vorigen Schritt erklärt worden war; somit ist eine stetige Abbildung $f(F_{\varkappa+1})$ erklärt. Wenn wir noch gezeigt haben, daß dabei aus $y_1 \subset F_{\varkappa+1} \cdot E_i^k$, $y_2 \subset F_{\varkappa+1} \cdot E_i^k$ immer $\varrho(f(y_1), f(y_2)) < d_{\varkappa+1}$ folgt, so ergibt sich durch Induktion die Möglichkeit der Erklärung von $f(F_k)$, womit die Behauptung bewiesen sein wird.

Es ist also noch zu zeigen, daß bei der soeben erklärten Abbildung $f(F_{\varkappa+1})$ aus $y_1 \subset F_{\varkappa+1} \cdot E_i^k$, $y_2 \subset F_{\varkappa+1} \cdot E_i^k$ immer $\varrho(f(y_1), f(y_2)) < d_{\varkappa+1}$ folgt. Ist y ein Punkt von $F_{\varkappa+1} \cdot E_i^k$, der in keinem $E_i^{\varkappa+1}$ liegt, so gehört y zu F, also auch zu $F_\varkappa$; ein beliebiger Eckpunkt z von E_i^k gehört auch zu $F_\varkappa$; mithin ist $y \subset F_\varkappa \cdot E_i^k$, $z \subset F_\varkappa \cdot E_i^k$, folglich $\varrho(f(y), f(z)) < d_\varkappa$, und da stets $\delta(b) \leqq b$ ist, auch $\varrho(f(y), f(z)) < \frac{1}{3} d_{\varkappa+1}$. Ist y ein Punkt von $F_{\varkappa+1} \cdot E_i^k$, der in einem $E_i^{\varkappa+1}$ liegt, so ist, da die Bildmenge $f(E_i^{\varkappa+1})$ in dem Element e enthalten ist, dessen Durchmesser $< \frac{1}{3} d_{\varkappa+1}$ ist, $\varrho(f(y), f(z)) < \frac{1}{3} d_{\varkappa+1}$ für jeden Eckpunkt z von $E_i^{\varkappa+1}$. In jedem Fall gibt es zu dem Punkt y aus $F_{\varkappa+1} \cdot E_i^k$ einen Eckpunkt z von E_i^k mit $\varrho(f(y), f(z)) < \frac{1}{3} d_{\varkappa+1}$. Zu zwei derartigen Punkten y_1, y_2 gibt es demnach zwei derartige Eckpunkte z_1, z_2 von E_i^k. Da z_1 und z_2 zu $F_\varkappa \cdot E_i^k$ gehören, ist $\varrho(f(z_1), f(z_2)) < d_\varkappa \leqq \frac{1}{3} d_{\varkappa+1}$. Da somit jede der drei Entfernungen $\varrho(f(y_1), f(z_1))$, $\varrho(f(z_1), f(z_2))$, $\varrho(f(z_2), f(y_2))$ kleiner als $\frac{1}{3} d_{\varkappa+1}$ ist, ist $\varrho(f(y_1), f(y_2)) < d_{\varkappa+1}$, w. z. b. w.

Damit ist der Hilfssatz IIa bewiesen.

Hilfssatz IIb. E^k, F, μ haben dieselben Bedeutungen wie im Hilfssatz IIa; in F sei aber nicht nur eine Abbildung f, sondern eine für $0 \leqq t \leqq 1$ stetig von dem Parameter t abhängende Schar von Abbildungen f_t auf μ gegeben. Dann läßt sich die ganze Abbildungsschar stetig auf eine Umgebung von F erweitern.

Beweis. Im euklidischen R^{k+1} sei ein rechtwinkliges x^1-x^2-...-x^{k+1}-Koordinatensystem eingeführt. E^k sei durch ein Simplex in dem durch die Gleichung $x^{k+1} = 0$ ausgezeichneten R^k gegeben. Ist $x \subset R^k$, so bezeichne x_t den Punkt, dessen senkrechte Projektion auf R^k der Punkt x und dessen x^{k+1}-Koordinate die Zahl t ist. $\bar{F}$ sei die Menge der Punkte x_t im R^{k+1}, für die $x \subset F$, $0 \leqq t \leqq 1$ ist, $\bar{E}^{k+1}$ der Quader im R^{k+1}, der von den Punkten x_t mit $x \subset E^k$, $0 \leqq t \leqq 1$ gebildet wird. Durch $f(x_t) = f_t(x)$ für $x_t \subset \bar{F}$ ist eine Abbildung $f(\bar{F})$ definiert; sie läßt sich nach Hilfssatz IIa zu einer Abbildung einer Umgebung $\bar{U}$ von $\bar{F}$ in $\bar{E}^{k+1}$ ergänzen. Es gibt eine Umgebung U von F in E^k derart, daß aus $x \subset U$, $0 \leqq t \leqq 1$ folgt: $x_t \subset \bar{U}$. In U wird durch $f_t(x) = f(x_t)$ die gewünschte Erweiterung von $f_t(F)$ geleistet.

Hilfssatz IIc. F sei eine abgeschlossene Teilmenge von E^k. In E^k sei eine Abbildung f_0 auf μ, in F eine an f_0 anschließende stetige Abbildungsschar f_t für $0 \leqq t \leqq 1$ definiert, die in den zum Rande R von E^k gehörigen Punkten von F für alle t-Werte mit f_0 übereinstimmt. Dann läßt sich in E^k eine an f_0 anschließende stetige Abbildungsschar für $0 \leqq t \leqq 1$ erklären, die in F mit der Schar f_t und auf R für alle t-Werte mit f_0 übereinstimmt.

Beweis. Es sei $f_t(R) = f_0(R)$, $F_1 = F - R$. Nach IIb läßt sich die Schar $f_t(F_1)$ auf eine Umgebung U von F_1 erweitern. ε sei so klein, daß die ε-Umgebung von F_1 in U liegt. Ist y ein Punkt von E^k, so bezeichne $r(y)$ die Entfernung des Punktes y von der Menge F_1. Die folgendermaßen erklärte Abbildungsschar $g_t(E^k)$ hat die gewünschten Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
&\text{Ist } r(y) \geqq \varepsilon, \text{ so ist } g_t(y) = f_0(y) && \text{für } 0 \leqq t \leqq 1;\\
&\text{ist } r(y) \leqq \varepsilon, \text{ so ist } g_t(y) = f_t(y) && \text{für } 0 \leqq t \leqq 1 - \tfrac{r(y)}{\varepsilon}\\
&\qquad\qquad\quad \text{und } g_t(y) = f_{1-\frac{r(y)}{\varepsilon}}(y) && \text{für } 1 - \tfrac{r(y)}{\varepsilon} \leqq t \leqq 1.
\end{aligned}$$

3. In der euklidischen Ebene ist jede Kreislinie zusammenziehbar; entfernt man aber den Mittelpunkt eines Kreises aus der Ebene, so entsteht eine einem Zylinder homöomorphe Fläche, auf der derselbe Kreis nicht mehr zusammenziehbar ist. Jedoch kann die Zusammenziehbarkeit eines geschlossenen Weges in einer Mannigfaltigkeit durch Herausnehmen eines Punktes aus dieser nur dann zerstört werden, wenn die Dimensionszahl der Mannigfaltigkeit 2 ist; es gilt nämlich:

Hilfssatz III. Ist $n > 2$, w ein in der n-dimensionalen Mannigfaltigkeit μ zusammenziehbarer Weg, ξ ein nicht auf w liegender Punkt von μ, μ' die durch Herausnahme von ξ aus μ entstehende Mannigfaltigkeit, so ist w auch in μ' zusammenziehbar.

Beweis. Die Zusammenziehbarkeit von w in μ bedeutet, daß w das Bild des Randes R bei einer Abbildung g einer Kreisscheibe, oder, was dasselbe bedeutet, einer Dreieckscheibe T auf μ ist. Falls das Bild $g(T)$ den Punkt ξ nicht enthält, ist $g(T) \subset \mu'$, w also in M' zusammenziehbar; falls $\xi \subset g(T)$ ist, besteht unsere Aufgabe darin, eine auf R mit g übereinstimmende Abbildung h von T auf μ zu konstruieren, so daß ξ nicht in der Bildmenge $h(T)$ enthalten ist.

Es sei also $\xi \subset g(T)$; X sei die Originalmenge von ξ in T. e sei ein ξ im Inneren enthaltendes Element; ε sei eine so kleine positive Zahl, daß die ε-Umgebung von ξ in e enthalten ist. Infolge der gleichmäßigen Stetigkeit der Abbildung $g(T)$ gibt es eine positive Zahl δ von der Eigenschaft, daß das Bild jeder Punktmenge von T, deren Durchmesser $< \delta$ ist, einen Durchmesser hat, der $< \varepsilon$ ist. Wir nehmen mit T eine Unterteilung in Dreiecke $t_1, t_2, \ldots$ vor, deren Durchmesser $< \delta$ und kleiner als der Abstand zwischen R und X sind; dann liegt das Bild jedes einen Punkt von X enthaltenden Dreiecks t_i im Inneren von e, und die Vereinigungsmenge Q derjenigen t_i, die wenigstens je einen Punkt von X im Inneren oder auf dem Rande enthalten, ist fremd zu dem Rande R. Wir tilgen nun die Abbildung g im Inneren von Q; auf R bleibt sie also bestehen. Außerhalb und auf dem Rande von Q setzen wir $h = g$. Jedem im Inneren von Q liegenden Eckpunkt eines t_i ordnen wir als Bild bei der Abbildung h einen beliebigen, von ξ verschiedenen, inneren Punkt von e zu. Darauf erweitern wir auf jeder Seite eines t_i, deren innere Punkte im Inneren von Q liegen, die in ihren Ecken schon erklärte Abbildung zu einer solchen Abbildung h der ganzen Seite in das Innere von e, daß ξ nicht zu der dabei entstehenden Bildmenge gehört; dies ist möglich, da $n > 1$ ist[27]. Schließlich erweitern wir in jedem zu Q gehörigen t_i die auf seinen Seiten schon erklärte Abbildung zu einer solchen Abbildung h des ganzen t_i in das Innere von e, daß ξ nicht in der Bildmenge $h(t_i)$ enthalten ist; dies ist möglich, da $n > 2$ ist[27]. Damit ist $h(T)$ in der gewünschten Weise konstruiert.

Bemerkung. Man sieht übrigens leicht, daß der Hilfssatz III trivialerweise auch für $n = 1$ gilt, da in diesem Falle jeder zusammenziehbare geschlossene Weg in sich selbst zusammenziehbar ist, so daß die Zusammenziehbarkeit durch Herausnahme eines nicht auf ihm gelegenen Punktes aus M nicht gestört wird.

Durch mehrmalige Anwendung des Hilfssatzes III wird dieser erweitert zu:

Hilfssatz IIIa. Die Aussage des Hilfssatzes III behält ihre Gültigkeit, wenn man an Stelle des Punktes ξ eine Menge von endlich vielen Punkten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ und an Stelle von μ' die durch Herausnahme dieser Punkte aus μ entstandene Mannigfaltigkeit betrachtet.

§ 6.

Die Bestimmung der im § 4 definierten Mindestzahlen für $n \neq 2$.

Wir beginnen mit dem Beweis des am Schluß des § 4 angekündigten Satzes, daß die in der Klasse $\mathfrak{K}_\xi$ erreichbare Mindestzahl von Original-

[27]) Teil I, § 2, Hilfssatz I.

punkten des Punktes ξ gleich der wesentlichen Schichtenzahl in ξ ist, falls die Dimensionenzahl nicht 2 ist, für einen Spezialfall:

Satz XIIIa. *Es sei $n \neq 2$. Das n-dimensionale Element E sei auf die n-dimensionale Mannigfaltigkeit μ so abgebildet, daß die Originalmenge des Punktes ξ von μ aus zwei im Inneren von E gelegenen Punkten besteht, deren Verbindungswege in E zusammenziehbare Bilder in μ haben. Dann läßt sich die Abbildung durch eine stetige Abänderung, die nur die Bilder innerer Punkte von E verrückt, in eine Abbildung überführen, bei der ξ einen einzigen Originalpunkt hat.*

Beweis. Ist $n = 1$, so wird durch die nach Voraussetzung mögliche Zusammenziehung des Bildes der Verbindungsstrecke der Originalpunkte x_1, x_2 von ξ auf den Punkt ξ die Abbildung $f(E)$ ohne Änderung in den beiden Randpunkten von E stetig in eine Abbildung $f_1(E)$ übergeführt, bei der die Strecke $x_1 x_2$ die Originalmenge von ξ ist. f_1 läßt sich (siehe Satz XII) ohne Änderung in den Endpunkten von E weiter stetig in eine Abbildung überführen, bei der ξ einen einzigen Originalpunkt hat.

Es sei $n > 2$. e_1, e_2 seien ξ enthaltende Elemente, und e_2 liege im Inneren von e_1. E denken wir uns als Simplex, v sei die Verbindungsstrecke der Originalpunkte x_1, x_2 von ξ. Wir werden zuerst zeigen, daß man die Abbildung f unter Festhaltung des Randbildes so abändern kann, daß $x_1 + x_2$ die Originalmenge von ξ bleibt und daß das Bild von v ganz im Inneren von e_1 liegt.

Das letztere sei also noch nicht der Fall. Dann gibt es bei Durchlaufung von v in der Richtung $x_1 x_2$ einen ersten Punkt p und einen letzten Punkt q mit Bildern auf dem Rande r von e_2; wir bezeichnen die Strecken $x_1 p$, pq, $q x_2$ der Reihe nach mit v_1, v_2, v_3; ferner sei w ein Weg von $f(p)$ nach $f(q)$ auf r (w existiert, da $n > 2$ ist). Der geschlossene Weg $f(v_1)^{-1} f(v_3)^{-1} w^{-1}$ ist zusammenziehbar, weil er in dem Element e_1 liegt, der geschlossene Weg $f(v_2) f(v_3) f(v_1)$ ist zusammenziehbar, weil der Weg $f(v_1) f(v_2) f(v_3) = f(v)$ nach Voraussetzung zusammenziehbar ist; folglich ist auch $f(v_2) w^{-1} = f(v_2) f(v_3) f(v_1) f(v_1)^{-1} f(v_3)^{-1} w^{-1}$ zusammenziehbar. Da ξ auf v_2 keinen Originalpunkt hat und da w auf r verläuft, liegt ξ nicht auf dem Wege $f(v_2) w^{-1}$; dieser ist daher nach Hilfssatz III nicht nur in μ, sondern auch in der durch Herausnahme von ξ aus μ entstehenden Mannigfaltigkeit μ' zusammenziehbar. w ist also mit $f(v_2)$ in μ' äquivalent (siehe § 5, Anfang), und man kann $f(v_2)$ unter Festhaltung seiner Endpunkte $f(p)$, $f(q)$ innerhalb μ' in w deformieren. Da die Strecke v_2 keinen Doppelpunkt hat, entspricht dieser Deformation eine stetige Schar eindeutiger Abbildungen $f_t(v_2)$ von v_2 in die Mannigfaltigkeit μ' mit $0 \leqq t \leqq 1$, $f_0(v_2) = f(v_2)$, $f_1(v_2) = w$.

Es sei nun E' ein im Inneren von E gelegenes Element mit folgenden Eigenschaften: p und q liegen auf dem Rande, die übrigen Punkte von v_2 liegen im Inneren, die von p und q verschiedenen Punkte von v_1 und v_3 liegen im Äußeren von E'. Auf E', $v_2 = F$ und μ' wenden wir den Hilfssatz IIc an; dann gelangen wir zu einer für $0 \leqq t \leqq 1$ stetigen Abbildungsschar $f_t(E')$ mit $f_0 = f$, mit $f_t = f$ am Rande von E' und mit $f_1(v_2) = w$. Fassen wir die f_t als Abbildungen von E' auf die Mannigfaltigkeit μ auf und setzen wir dann $f_t = f$ in $E - E'$ für $0 \leqq t \leqq 1$, so haben wir eine stetige Abbildungsschar $f_t(E)$ mit $f_0 = f$, mit $f_t = f$ am Rande von E, mit $f_1(v) = f(v_1)\, w f(v_3)$ und mit der Eigenschaft, daß $x_1 + x_2$ für alle t-Werte die Originalmenge von ξ ist. Da $f_1(v) < e_1$ ist, erhält man, während t von 0 bis 1 läuft, eine solche Abänderung von f, wie sie oben (2. Absatz des Beweises) als vorläufiges Ziel hingestellt wurde.

Damit sind wir aber auch im wesentlichen am Ende des Beweises; denn ist ε eine so kleine positive Zahl, daß das durch f_1 gelieferte Bild der ε-Umgebung von v in e_1 liegt, so kann man, da die abgeschlossene Hülle der ε-Umgebung der Strecke v ein Element E'' ist, in E'' f_1 weiter so abändern, daß am Rande von E'' nichts geändert wird und daß ξ schließlich nur noch einen einzigen Originalpunkt hat[22]).

Damit ist der Vorbereitungssatz XIIIa bewiesen, und wir haben jetzt die Gleichung $\sigma_\xi = s_\xi$, die ja das Ziel unserer gegenwärtigen Überlegungen ist, für $n \neq 2$ in voller Allgemeinheit zu beweisen. Hierzu haben wir, wenn die Abbildung f im Punkt ξ kompakt und wenn dort die wesentliche Schichtenzahl s_ξ ist, eine zu der „Klasse $\mathfrak{K}_\xi$ in bezug auf ξ“, die durch f bestimmt ist, gehörige Abbildung f_1 anzugeben, bei der ξ genau s_ξ Originalpunkte besitzt. Wir werden etwas mehr beweisen; wir werden nämlich den Bereich der zulässigen Abänderungen von f dadurch noch einschränken, daß wir die „Klasse in bezug auf ξ“ [20]) durch die „Klasse $\mathfrak{K}$“ [20]), zu der f gehört, ersetzen. In den Beweisen der folgenden Sätze dieses Paragraphen wird die Zugehörigkeit zu $\mathfrak{K}$ stets dadurch sichergestellt sein, daß alle vorkommenden Abänderungen von f sich immer nur auf kompakte Teile von M beziehen und außerhalb dieser Teile nichts ändern.

Satz XIIIb. *Es sei $n \neq 2$, M und μ seien n-dimensionale Mannigfaltigkeiten, f sei eine Abbildung von M auf μ, die im Punkte ξ kompakt ist; dann gibt es in der durch f bestimmten Klasse $\mathfrak{K}$ eine Abbildung f_1, bei der die Originalmenge X von ξ keine unwesentliche Schicht enthält und bei der jede wesentliche Schicht von X aus nur einem Punkt besteht.*

Beweis. Es sei zunächst $n > 2$. Da sich jede Abbildung durch eine kleine Abänderung „fastglatt“ in einem gegebenen Punkt machen läßt[22]), dürfen wir annehmen, daß die Originalmenge X von ξ nur aus endlich vielen Punkten besteht. x_1, x_2 seien Punkte einer Schicht von X; dann gibt es einen Weg u von x_1 nach x_2, dessen Bild $f(u)$ zusammenziehbar ist; nach Hilfssatz I gibt es ein x_1 und x_2 im Inneren enthaltendes Element, so daß jeder Weg v, der x_1 mit x_2 in dem Element verbindet, äquivalent mit u, daß daher sein Bild auch zusammenziehbar ist. Falls dieses Element außer x_1 und x_2 noch andere Punkte von X enthält, ersetzen wir es durch ein x_1 und x_2 enthaltendes Teilelement E, welches die anderen Punkte von X in seinem Äußeren läßt. Indem wir auf E den Satz XIIIa anwenden, ersetzen wir x_1 und x_2 durch einen einzigen Originalpunkt von ξ; wir vermindern also die Anzahl der Originalpunkte. Dies wiederholen wir so lange, bis jede Schicht nur noch einen einzigen Punkt enthält.

Wir haben nun noch diejenigen von diesen Punkten, die unwesentliche Schichten darstellen, zu beseitigen. Ist x ein solcher unwesentlicher Punkt, und ist f orientierbar, so hat die Abbildung eines kleinen, x enthaltenden Elementes im Punkt ξ den Grad 0, und man kann die Abbildung in diesem Element, ohne sie auf seinem Rande zu ändern, in eine Abbildung überführen, bei der ξ nicht mehr zu der Bildmenge gehört[28]. So werden, wenn f orientierbar ist, alle unwesentlichen Schichten beseitigt. Ist f nicht orientierbar, so hat die Abbildung eines kleinen, x enthaltenden Elementes e im Punkte ξ einen geraden Grad $2c$. Wir ersetzen f im Inneren von e mittels stetiger Abänderung, die am Rande von e wieder nichts ändert, durch eine solche Abbildung, daß ξ zwei Originalpunkte x_1, x_2 erhält und daß die Abbildungen von Umgebungen U_1 bzw. U_2 dieser beiden Punkte in ξ je den Grad c haben, wobei die Orientierungen von U_1 und U_2 durch eine Orientierung von e induziert sind[29]. Nun sei i ein geschlossener, die Orientierung umkehrender Weg durch x_2, dessen Bild zusammenziehbar ist; ist u ein x_1 mit x_2 innerhalb e verbindender Weg, so liefert die Fortsetzung einer bestimmten Orientierung von U_1 längs ui die entgegengesetzte Orientierung in U_2 wie die Fortsetzung längs u. Da das Bild von u in der Umgebung von ξ verläuft, ist es zusammenziehbar, und mithin ist auch das Bild von ui zusammenziehbar. Wir schließen jetzt, was nach Hilfssatz I möglich ist, x_1 und x_2 in ein solches Element E ein, daß jeder x_1

[28]) Teil I, § 1, Satz IXa.

[29]) Deutet man die in einer Umgebung von ξ mit ξ als Nullpunkt eingefuhrten euklidischen Koordinaten der Bildpunkte als die Komponenten von Vektoren, die den Punkten von e zugeordnet sind, so ist die hier zu lösende Aufgabe identisch mit der Aufgabe, ein in e gegebenes Vektorfeld, das am Rande den Index $2c$ hat, durch eine Abänderung im Inneren von e durch ein anderes Vektorfeld, das dort genau zwei Nullstellen mit den Indexen c hat, zu ersetzen; diese „Randwertaufgabe" ist lösbar; siehe H. Hopf, Abbildungsklassen n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten, § 5, Nr. 4, Math. Annalen **96** (1926).

mit x_2 in E verbindende Weg v äquivalent mit ui ist; dann ist auch das Bild von v zusammenziehbar. Da die Fortsetzung der Orientierung von U_1 nach U_2 längs v dasselbe Ergebnis hat wie die Fortsetzung längs dem Weg ui, also das entgegengesetzte Ergebnis wie die Fortsetzung längs u, hat die Abbildung einer der Umgebungen U_1, U_2, wenn man sie als Teile des Elementes E orientiert, in ξ den Grad $+c$, die der anderen den Grad $-c$; die Abbildung von E hat also in ξ den Grad 0. Da wir wieder annehmen dürfen, daß E außer x_1 und x_2 keinen Originalpunkt von ξ enthält, können wir nach Satz XIIIa durch eine Änderung im Inneren von E die Abbildung in eine solche überführen, die in E nur einen Originalpunkt x_0 von ξ besitzt. Der Grad in ξ ändert sich bei der Abänderung nicht; mithin hat die Abbildung einer Umgebung U_0 von x_0 den Grad 0, und man kann daher den Originalpunkt x_0 von ξ mittels einer weiteren Abänderung der Abbildung in U_0 beseitigen[28]). — Damit ist unser Satz für $n > 2$ bewiesen.

Ist $n = 1$, so unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem M ein Kreis oder eine Gerade ist. Im ersten Fall läßt sich, falls μ eine Gerade ist, die Bildmenge auf einen beliebigen Punkt von μ zusammenziehen, die Originalmenge eines gegebenen Punktes ξ läßt sich also überhaupt beseitigen; falls M und μ Kreise sind, läßt sich die Abbildung f, wenn ihr Grad $c \neq 0$ ist, in eine monotone c-malige Umlaufung von μ deformieren; bei einer solchen besteht jede der c wesentlichen Schichten für jeden Punkt ξ aus genau einem Punkt; ist $c = 0$, so läßt sich die Bildmenge wieder auf einen Punkt zusammenziehen, und die Originalmengen aller anderen Punkte sind leer.

Ist M eine Gerade, so ändern wir wie im Fall $n > 2$ f zunächst so ab, daß ξ nur endlich viele Originalpunkte hat. Sind x_1, x_2 Punkte einer Schicht, so ist, da auf der Geraden je zwei Verbindungswege zwischen zwei Punkten einander äquivalent sind, das Bild der Strecke $x_1 x_2$ zusammenziehbar. Wir ändern f stetig ab, indem wir es auf den Punkt ξ zusammenziehen. Haben wir dies getan, so können wir wieder wie im Beweis des vorigen Satzes die Abbildung im Inneren eines x_1 und x_2 im Inneren enthaltenden Intervalles, ohne sie in dessen Endpunkten zu ändern, stetig in eine Abbildung überführen, bei der ξ in diesem Intervall nur noch einen Originalpunkt enthält (siehe Satz XII). Auf diese Weise erreichen wir, wie im Fall $n > 2$, daß jede Schicht der Originalmenge von ξ nur einen Punkt enthält, und dieser läßt sich, wie bei einer orientierbaren Abbildung im Fall $n > 2$, beseitigen, falls die durch ihn repräsentierte Schicht unwesentlich ist.

Damit ist der Satz XIIIb bewiesen; er läßt sich noch verschärfen zu

Satz XIIIc. *Es sei $n \neq 2$, M und μ seien n-dimensionale Mannigfaltigkeiten, die Abbildung f von M auf μ sei in den Punkten $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^m$ kompakt; dann läßt sich f innerhalb der Klasse $\mathfrak{K}$ stetig in eine Abbil-*

dung f_1 überführen, bei der keine der Originalmengen X^k der Punkte ξ^k ($k = 1, 2, \ldots, m$) eine unwesentliche Schicht enthält und bei der jede wesentliche Schicht einer Menge X^k nur aus einem einzigen Punkt besteht.

Beweis. Es sei $n > 2$. Wir dürfen annehmen, daß jede der Mengen X^k von vornherein nur aus endlich vielen Punkten besteht[22]). Entfernt man einige der Punkte ξ^k aus μ und die entsprechenden Mengen X^k aus M, so bleiben Mannigfaltigkeiten μ' und M' übrig, wobei letztere auf erstere so abgebildet ist, daß diese Abbildung in den übriggebliebenen Punkten ξ^k kompakt ist; für deren Originalmengen hat sich überdies auf Grund des Hilfssatzes III die Schichtenzerlegung nicht geändert.

M_1, μ_1 seien die Mannigfaltigkeiten, die durch Herausnahme aller ξ^k und X^k mit Ausnahme von ξ^1 und X^1 entstehen. Wenden wir dann den Satz XIII b zunächst auf M_1, μ_1 und ξ^1 an, so wird die Behauptung unseres Satzes erfüllt, ohne daß an den Originalmengen der Punkte $\xi^2, \xi^3, \ldots, \xi^m$ etwas geändert würde. Darauf wenden wir den Satz XIII b auf M_2, μ_2 und ξ^2 an, wobei M_2 und μ_2 die Mannigfaltigkeiten sind, die durch Entfernung der (jetzt vorliegenden) Originalmengen von $\xi^1, \xi^3, \ldots, \xi^m$ aus M und der Punkte $\xi^1, \xi^3, \ldots, \xi^m$ aus μ entstehen; dabei wird an keiner der Mengen $X^1, X^3, \ldots, X^m$ etwas geändert, insbesondere wird das für ξ^1 bereits erzielte Ergebnis nicht wieder zerstört, und die Behauptung unseres Satzes wird also für ξ^1 und ξ^2 erfüllt. So fortfahrend erfüllen wir sie schließlich für alle ξ^k.

Ist $n = 1$ und M ein Kreis, so erfüllt, wie im Beweis des vorigen Satzes, diejenige durch stetige Abänderung von f entstandene Abbildung f_1, die M auf einen einzigen Punkt abbildet, oder die eine monotone mehrmalige Durchlaufung des Bildkreises μ darstellt, die Behauptung. Ist M eine Gerade, so führt die im Beweis des vorigen Satzes für den Punkt ξ angegebene Konstruktion zum Ziel, wenn man sie nacheinander für $\xi^1, \xi^2, \ldots$ durchführt; denn wendet man sie auf ξ^k an, so besteht ihr erster Schritt in der Zusammenziehung des Bildes einer Strecke auf den Punkt ξ^k, wobei die Originalmenge keines von ξ^k verschiedenen Punktes vermehrt wird, und ihr zweiter (und letzter) Schritt — das Ersetzen dieser Strecke durch einen einzigen Originalpunkt von ξ^k — ändert die Abbildung nur in einer beliebig kleinen Umgebung von ξ^k. Unsere Behauptung gilt also auch für $n = 1$.

Wir weisen noch auf eine Folgerung aus den Sätzen XIII c und VII a hin:

Satz XIII d. *Ist $n \neq 2$, f eine überall kompakte Abbildung von M auf μ mit einem von 0 verschiedenen Absolutgrad und mit dem Index j, so gibt es in der Klasse von f eine Abbildung, bei der jeder von endlich* *vielen, in μ willkürlich gegebenen Punkten $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^m$ genau j Originalpunkte hat.*

Wenn im Satz XIIIb der Absolutgrad in ξ $a_\xi = 0$, wenn also auch die wesentliche Schichtenzahl $s_\xi = 0$ ist, so besagt der Satz, daß es eine Abbildung f_1 in $\mathfrak{K}$ gibt, bei der ξ keinen Originalpunkt hat, also nicht zu der Bildmenge gehört. Diese Tatsache verallgemeinern wir, indem wir damit die zweite am Schluß des § 4 ausgesprochene Behauptung, nämlich: „$\alpha_\xi = a_\xi$ für $n \neq 2$“, beweisen, zu folgendem Satz:

Satz XIV. *Ist $n \neq 2$, ist die Abbildung f von M auf μ in den Punkten ξ^k kompakt und hat sie dort die Absolutgrade a^k $(k = 1, 2, \ldots, m)$, so gibt es in der durch f bestimmten Klasse $\mathfrak{K}$ eine Abbildung f^*, die in den Punkten ξ^k glatt ist und bei der je eine Umgebung dieser Punkte a^1-, a^2-, …, a^m-mal glatt bedeckt wird.*

Beweis. Auf Grund von Satz XIIIc dürfen wir annehmen, daß es in jedem der Punkte ξ^k nur wesentliche Schichten gibt und daß jede von diesen aus einem einzigen Punkt besteht. Die Originalmenge X^k von ξ^k bestehe also aus den Punkten $x_1^k, x_2^k, \ldots$, deren jeder eine Schicht darstellt, und a_i^k sei der Beitrag der durch x_i^k dargestellten Schicht. e_i^k sei ein so kleines, x_i^k enthaltendes Element, daß das Bild $f(e_i^k)$ in einer euklidischen Umgebung V^k von ξ^k liegt.

Ist f orientierbar, so ist a_i^k der Betrag des Grades in ξ^k bei der Abbildung $f(e_i^k)$. Man kann daher durch Änderung im Inneren von e_i^k und V^k zu einer Abbildung f' übergehen, die sich am Rande von e_i^k stetig an f anschließt und bei der das Bild $f'(e_i^k)$ eine Umgebung von ξ^k a_i^k-mal glatt bedeckt[25]). Führt man dies für jeden Punkt x_i^k einzeln durch, so gelangt man, da $\sum\limits_i a_i^k = a^k$ ist, zu einer Abbildung f^*, die die Behauptung erfüllt.

Ist f nicht orientierbar, so ist $a_i^k = 1$ und der Grad in ξ^k bei der Abbildung $f(e_i^k)$ ist ungerade. Wir dürfen aber sogar annehmen, daß er 1 ist. Denn ist er zunächst $2c + 1$, so können wir durch eine Abänderung in e_i^k erreichen, daß ξ^k dort zwei Originalpunkte y, z hat und daß die Abbildung einer Umgebung von y in ξ^k den Grad 1, die Abbildung einer Umgebung von z in ξ^k den Grad $2c$ hat[29a]). Dann können wir nach dem Verfahren, mit dem wir im Beweis des Satzes XIIIb die unwesentlichen Schichten im Fall einer nicht orientierbaren Abbildung beseitigt haben, den Punkt z aus der Originalmenge von ξ^k entfernen, so daß man zu den Sätzen XIIIb und XIIIc den Zusatz machen kann: Im Fall einer nicht orientierbaren Abbildung kann die Abbildung f_1 so gewählt werden, daß die Abbildungen der Umgebungen der die einzelnen Schichten repräsentie-

[29a]) Dies geschieht analog wie in Fußnote [29]) angegeben.

renden Punkte in ξ bzw. in allen Punkten $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^m$ sämtlich den Grad 1 haben.

$f(e_i^k)$ habe also in ξ^k den Grad 1. Dann kann man durch Änderung im Inneren von e_i^k und V^k zu einer Abbildung f' übergehen, die sich am Rande von e_i^k stetig an f anschließt und für die die Teilabbildung $f(e_i^k)$ in der Umgebung von ξ^k eineindeutig ist[25]). Durchführung dieses Verfahrens für jeden einzelnen Punkt x_i^k liefert schließlich eine Abbildung f^*, die die Behauptung erfüllt.

Es liegt nun die Frage nahe, wie weit sich die a^k-maligen glatten Bedeckungen, die wir in kleinen Umgebungen der Punkte ξ^k erzielt haben, ausdehnen lassen. Der folgende Satz gibt eine Antwort.

Satz XIVa. *Ist $n \neq 2$, sind G^k $(k = 1, 2, \ldots)$ Gebiete von μ, in deren jedem f kompakt ist, und K^k Teilmengen der G^k, die in diesen kompakt sind, so gibt es in der Klasse von f eine Abbildung f^*, bei der in jeder Menge K^k eine dort überall dichte, offene Teilmenge genau a^k-mal glatt von der Bildmenge bedeckt wird, wobei a^k der Absolutgrad von f in G^k ist.*

Beweis. Ist T ein n-dimensionales Simplex, t ein n-dimensionales Teilsimplex von T, so verstehen wir unter dem „Aufblasen von t auf T“ eine eindeutige Deformation von T in sich, bei der alle Randpunkte von T festbleiben, alle Punkte des Zwischengebietes $T - t$ und des Randes von t auf den Rand von T wandern und bei deren Endergebnis t eineindeutig auf T abgebildet ist. Eine solche Deformation läßt sich, wenn T und t gegeben sind, stets in elementarer Weise angeben.

E sei ein Teilelement von G^k, ξ ein innerer Punkt von E, und f sei bereits in seiner Klasse so abgeändert, daß eine in E gelegene Umgebung von ξ a^k-mal glatt bedeckt wird. e sei ein Teilelement dieser Umgebung, das bei einer topologischen Abbilduug von E auf ein Simplex T einem Teilsimplex t von T entspricht. Dann entspricht dem Aufblasen von t auf T eine Deformation D_τ $(0 \leqq \tau \leqq 1)$ von μ, die wir das „Aufblasen von e auf E“ nennen; da f in E kompakt und D_τ außerhalb E die Identität ist, sind die Abbildungen $f_\tau = D_\tau f$ überall dort kompakt, wo f kompakt ist, gehören also zu der Klasse von f. Bei dem Endergebnis f_1 wird das ganze Innere von E genau a^k-mal glatt bedeckt.

Sei jetzt E' ein zweites Teilelement von G^k, das mit E innere Punkte gemeinsam habe; die Menge dieser Punkte wird bei f_1 a^k-mal glatt bedeckt. In ihr läßt sich durch Abbildung von E' auf ein Simplex T ein Element e' finden, das man auf E' aufblasen kann; tun wir dies, so wird bei dem Endergebnis f_2 der durch diese Deformation bewirkten Abänderung von f_1, die wieder innerhalb der Klasse von f vor sich geht, das ganze Innere von E', sowie der nicht auf dem Rande von E' gelegene Teil des Inneren von E a^k-mal glatt bedeckt. Da der Rand von E' in E nirgends dicht ist, wird somit eine offene, in $E + E'$ überall dichte Menge a^k-mal glatt bedeckt.

Ist nun E'' ein drittes Element von G^k, das mit $E + E'$ innere Punkte gemeinsam hat, so läßt sich die a^k-malige glatte Bedeckung ebenso auf eine offene, in $E + E' + E''$ überall dichte Menge erweitern, nämlich auf die Menge derjenigen inneren Punkte von $E + E' + E''$, die nicht auf dem Rande eines dieser Elemente liegen. Dasselbe Ergebnis läßt sich durch wiederholtes Aufblasen geeigneter kleiner Elemente für eine beliebige endliche Anzahl von Elementen $E, E', \ldots, E^{(m)}$ erzielen, von denen jedes mit wenigstens einem vorhergehenden innere Punkte gemeinsam hat. Hieraus folgt, da sich jede Komponente jeder der gegebenen Mengen K^k ins Innere eines derartigen Systems von Elementen einschließen läßt, die Richtigkeit unserer Behauptung.

Betrachten wir noch den Spezialfall, daß M geschlossen ist: in ihm ist f überall in μ kompakt, μ kann also die Rolle eines G^k aus dem eben bewiesenen Satz übernehmen. Ist auch μ geschlossen, so kann μ überdies die Rolle des zugehörigen K^k übernehmen. Ist μ offen, so wird nur ein echter Teil von μ durch die Bildmenge bedeckt und es ist $a = 0$; man kann die Bildmenge mit endlich vielen Elementen $E, E', \ldots, E^{(m)}$ so bedecken, daß E auch Punkte enthält, die nicht zu der Bildmenge gehören, und daß jedes weitere der Elemente mit wenigstens einem vorhergehenden innere Punkte gemeinsam hat. Dann liefert der beim Beweise des vorigen Satzes benutzte Prozeß des sukzessiven Aufblasens, wenn man mit einem 0-mal bedeckten Teilelement e von E beginnt, eine Abbildung f^*, bei der die Bildmenge ganz auf den Rändern der $E, E', \ldots, E^{(m)}$ liegt. Es gilt also:

Satz XIVb. *Ist $n \neq 2$, M geschlossen und f eine Abbildung von M auf μ vom Absolutgrad a, so gibt es in der Klasse von f eine Abbildung f^*, bei der eine offene, in μ überall dichte Menge genau a-mal glatt bedeckt wird. Ist insbesondere $a = 0$, so ist bei f^* die Bildmenge nirgends dicht in μ.*

Die vorstehenden Sätze sind unter der Voraussetzung $n \neq 2$ bewiesen. Jedoch gilt, wie H. Kneser gezeigt hat[3]) [6]), der dem Satz XIVb entsprechende Satz auch, wenn M und μ geschlossene *Flächen* sind. Ferner macht der soeben durchgeführte, auf offene μ bezügliche Teil des Beweises von XIVb keinen Gebrauch von der Voraussetzung $n \neq 2$ (da ja in ihm die a-malige, d. h. 0-malige, glatte Bedeckung eines Teiles von E von selbst vorhanden ist und nicht erst auf Grund früherer Sätze hergestellt zu werden braucht); die Annahme der Geschlossenheit von μ ist für die Gültigkeit des Kneserschen Satzes also unnötig. Mithin gilt

Satz XIVc. *Die Voraussetzung $n \neq 2$ ist im Satz XIVb unnötig.*

§ 7.

Die Sonderstellung der Flächenabbildungen.

Wir werden jetzt die am Schluß des § 4 ausgesprochene Behauptung beweisen, daß die Gleichungen $\sigma_\xi = s_\xi$, $\alpha_\xi = a_\xi$, deren Richtigkeit für $n+2$ wir soeben erkannt haben, nicht bei allen Flächenabbildungen gelten. Wir beginnen mit einer Hilfsbetrachtung:

P sei eine euklidische x-y-Ebene; die Punkte der x-Achse bezeichnen wir kurz durch ihre x-Koordinate. U, V seien die Kreise mit dem Radius 1 um die Punkte -1, $+1$. P sei orientiert, und wir verstehen unter U, V die Kreise in ihren positiven, unter U^{-1}, V^{-1} die Kreise in ihren negativen Durchlaufungsrichtungen. E sei eine in einer zweiten orientierten Ebene M gelegene Kreisscheibe, C der Randkreis von E in positiver Durchlaufungsrichtung. Wir teilen C in vier in positiver Richtung aufeinander folgende Bögen b_1, b_2, b_3, b_4 und definieren folgende Abbildung g von C auf P: die Endpunkte der Bögen $b_1, \ldots, b_4$ werden auf den Punkt 0, die Bögen selbst werden der Reihe nach proportional auf die Kreise U, V, U^{-1}, V^{-1} abgebildet; das Bild ist ein von 0 nach 0 zurückführender geschlossener Weg $C' = U V U^{-1} V^{-1}$. Jeder im Inneren von U liegende Punkt hat in bezug auf C' die Ordnung 0, da er von U einmal positiv, von U^{-1} einmal negativ, von V und V^{-1} gar nicht umlaufen wird; ebenso hat jeder im Inneren von V liegende Punkt in bezug auf C' die Ordnung 0, und dasselbe gilt für die außerhalb von U und V gelegenen Punkte von P. Jede Abbildung $g(E)$, zu der die Randabbildung $g(C) = C'$ gehört, hat also in allen (nicht auf C' gelegenen) Punkten den Grad 0. Es gibt daher sowohl Abbildungen g, bei denen -1, als solche, bei denen $+1$ nicht zu der Bildmenge gehört[28]). Wir behaupten aber: *Bei jeder Abbildung $g(E)$ mit $g(C) = C'$ gehört wenigstens einer der Punkte $-1, +1$ zur Bildmenge und zwar besteht die Originalmenge des Punktepaares $-1, +1$ sogar stets aus wenigstens zwei Punkten.*

Beweis[30]). Wir dürfen annehmen, daß einer der beiden Punkte keinen Originalpunkt hat, und infolge der Symmetrie ist es keine Einschränkung,

---

[30]) Ein zweiter Beweis läßt sich folgendermaßen führen: Hat einer der Punkte nur einen Originalpunkt, so läßt sich dieser auf Grund von Teil I, § 1, Satz IXa durch eine kleine Abänderung, die dem anderen der beiden Punkte keinen neuen Originalpunkt schafft, beseitigen, da der Grad in den beiden Punkten 0 ist. Man hat also nur zu zeigen, daß es nicht eintreten kann, daß beide Punkte keinen Originalpunkt haben. Dies würde aber, da dann eine Abbildung der von C berandeten Kreisscheibe in die in $+1$ und -1 punktierte Ebene vorläge, bedeuten, daß der Weg $U V U^{-1} V^{-1}$ in dieser zweimal punktierten Ebene zusammenziehbar wäre; das ist jedoch nicht der Fall, da deren Fundamentalgruppe bekanntlich die von U und V erzeugte freie Gruppe ist.

anzunehmen, daß -1 dieser Punkt sei. Dann ist zu zeigen, daß $+1$ wenigstens zwei Originalpunkte besitzt. g ist zugleich eine Abbildung von E auf die Zylinderfläche P', die durch Herausnahme von -1 aus P entsteht; fassen wir die Abbildung so auf, so bezeichnen wir sie mit g'. Die Behauptung wird bewiesen sein, wenn wir gezeigt haben, daß es bei g' in $+1$ zwei wesentliche Schichten gibt. (Bei g gibt es in jedem Punkt höchstens eine Schicht, da in P jeder geschlossene Weg zusammenziehbar ist.)

Da in E jeder geschlossene Weg zusammenziehbar ist, sind auch die durch g' gelieferten Bilder der geschlossenen Wege sämtlich zusammenziehbar, die Bildgruppe $\mathfrak{U}$ (siehe § 2, Definition I) besteht nur aus der Identität, und die zu g' gehörige Überlagerungsmannigfaltigkeit (Definition III) P^* von P' ist daher die „universelle" Überlagerungsfläche, d. h. diejenige, die man erhält, wenn man in P' zwei von einem fest zugrunde gelegten Punkt ξ nach einem Punkt η laufende Wege w_1, w_2 dann und nur dann als denselben Punkt der Überlagerungsfläche auffaßt, wenn der geschlossene Weg $w_1 w_2^{-1}$ in P' zusammenziehbar ist. Nun ist die Zusammenziehbarkeit eines geschlossenen Weges v in P' gleichbedeutend damit, daß in P der Punkt -1 in bezug auf v die Ordnung 0 hat, daß sich also, wenn man in P ein Polarkoordinatensystem r, ψ mit -1 als Pol einführt, ψ auf v als eindeutige Funktion erklären läßt. Folglich liefern, wenn man in ξ einen Wert von ψ festgelegt hat, w_1 und w_2 dann und nur dann denselben Punkt von P^*, wenn die stetige Fortsetzung von ψ längs w_1 denselben Wert in η liefert wie die Fortsetzung längs w_2. Daraus folgt, daß man P^* darstellen kann als die durch $r > 0$ bestimmte Hälfte einer Ebene, in der r und ψ rechtwinklige kartesische Koordinaten sind. Die durch die Überlagerung gegebene Abbildung φ von P^* auf P' (siehe § 1) sowie die Abbildung g^* von E auf P^* (siehe Satz I) wird unmittelbar durch die Werte von r und ψ vermittelt.

Auf Grund des Satzes III und der Definitionen VIIa, b haben wir zu zeigen, daß es unter den Punkten von P^*, die durch φ auf den Punkt $+1$ von P abgebildet werden, zwei gibt, in denen die Abbildung $g^*(E)$ von 0 verschiedene Grade oder, was dasselbe ist, die in bezug auf das Bild $C^* = g^*(C)$ von 0 verschiedene Ordnungen haben. Wählt man in dem r-ψ-Polarkoordinatensystem die Richtung der positiven x-Achse als $\psi = 0$, so sind die durch φ auf $+1$ abgebildeten Punkte diejenigen mit $r = 2$, $\psi = 2\pi m$, wobei m ganz ist. g^* sei überdies so normiert, daß ψ in dem (durch g' auf den Punkt 0 abgebildeten) Anfangspunkt des Bogens b_1 von C' den Wert 0 hat. Dann kann der Verlauf von $C^* = g^*(C)$ $= g^*(b_1 b_2 b_3 b_4) = g^*(b_1) g^*(b_2) g^*(b_3) g^*(b_4)$ angegeben werden: $g^*(b_1)$ ist die Strecke von $r = 1$, $\psi = 0$ nach $r = 1$, $\psi = 2\pi$; $g^*(b_2)$ ist eine von dem letztgenannten Punkt in ihn zurücklaufende einfach geschlossene Kurve, die im Inneren des Streifens $2\pi - \frac{\pi}{2} < \psi < 2\pi + \frac{\pi}{2}$ liegt, symmetrisch zu der Geraden $\psi = 2\pi$ ist und mit ihr die Punkte $r = 1$, $r = 3$, und nur diese, gemeinsam hat; $g^*(b_3)$ ist die Strecke von $r = 1$, $\psi = 2\pi$ nach $r = 1$, $\psi = 0$; $g^*(b_4)$ ist die einfach geschlossene Kurve, die aus $g^*(b_2)^{-1}$ durch Translation längs der Strecke $g^*(b_3)$ entsteht. Dieser Verlauf von C^* zeigt, daß es unter den Punkten $r = 2$, $\psi = 2m\pi$ genau zwei gibt, die in bezug auf C^* von 0 verschiedene Ordnungen haben, nämlich die im Inneren der geschlossenen Kurven $g^*(b_2)$ bzw. $g^*(b_4)$ gelegenen Punkte mit $m = 1$ und $m = 0$; sie haben die Ordnungen $+1$ bzw. -1.

Dies bedeutet, daß es bei der Abbildung g' im Punkte $+1$ zwei wesentliche Schichten gibt; deren Beiträge sind je 1. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Wenn wir statt der betrachteten Randabbildungen $g(C) = C'$ eine andere Randabbildung $g_1(C) = C_1'$ zugrunde legen, in die sich $g(C)$ stetig so überführen läßt, daß dabei in keinem Augenblick einer der Punkte -1, $+1$ auf dem Bilde von C liegt, so hat bei jeder Abbildung $g_1(E)$ mit der Randabbildung $g_1(C)$ das Punktepaar -1, $+1$ wieder wenigstens zwei Originalpunkte; denn in dem oben gegebenen Beweis ist nur der Weg $C^* = g^*(C)$ durch $C_1^* = g_1^*(C)$ zu ersetzen, wobei C_1^* aus C^* durch eine stetige Abänderung hervorgeht, während welcher niemals einer der Punkte $r = 2$, $\psi = 2m\pi$ auf der sich ändernden Kurve liegt, so daß die Ordnungen dieser Punkte in bezug auf die Kurve ungeändert bleiben, also für C_1^* dieselben sind wie für C^*.

Wir erweitern jetzt die anfangs betrachtete Abbildung $g(E)$ auf die ganze Ebene M, in der E liegt, durch die Festsetzung: das nicht im Inneren von E liegende, unendliche Stück jedes Strahles durch den Mittelpunkt von E wird auf den Punkt von C' abgebildet, der das Bild des auf dem Strahl liegenden Punktes von C ist. Da die Originalmenge jedes nicht auf C' liegenden Punktes von P ungeändert bleibt, bleibt der Grad überall 0. $g(M)$ ändern wir gleichmäßig stetig so ab, daß sie immer kompakt in jedem der Punkte -1, $+1$ bleibt. Ist $g_1(M)$ eine sich bei dieser Abänderung ergebende Abbildung, so hat, wie man leicht sieht, eine hinreichend große, E enthaltende, zu E konzentrische Kreisscheibe E_1 in M die Eigenschaft, daß das Bild des Randes C_1 von E_1 in keinem Augenblick des Überganges von g in g_1 einen der Punkte -1, $+1$ enthält. Folglich gibt es, da wir die im vorigen Absatz gemachte Bemerkung auf E_1 und C_1 statt auf E und C anwenden können, bei der Abbildung g_1 wenigstens zwei Originalpunkte von -1 und $+1$ in E_1.

Somit hat die Abbildung g der Ebene M auf die Ebene P die folgende Eigenschaft: sie hat überall, wo sie kompakt ist, den Grad 0; *sie ist in* -1 *und* $+1$ *kompakt; bei jeder Abbildung, die aus g durch eine solche gleichmäßig stetige Änderung hervorgeht, daß in jedem Augenblick die jeweilige Abbildung in den Punkten* -1, $+1$ *kompakt ist, haben diese beiden Punkte zusammen wenigstens zwei Originalpunkte.*

Dies ist das Ergebnis unserer Hilfsbetrachtung; mit seiner Hilfe konstruieren wir jetzt ein Beispiel einer Abbildung f einer Fläche M auf eine Fläche μ, so daß in einem Punkte ξ von μ, in dem f kompakt ist, $\sigma_\xi > s_\xi$ und $\alpha_\xi > a_\xi$ ist:

M sei die oben betrachtete gleichnamige Ebene. μ sei ein Zylinder; die universelle Überlagerungsfläche von μ werde durch die Ebene P derart dargestellt, daß zwei Punkte x, y und x', y' dann und nur dann zu demselben Punkt von μ gehören, wenn $x' = x + 2k$ (k ganz), $y' = y$ ist. ξ sei der Punkt von μ, der zu den Punkten $x = 2k + 1$, $y = 0$ von P gehört. Die durch die Überlagerung gegebene Abbildung von P auf μ bezeichnen wir mit Φ. Die Abbildung f von M auf μ sei durch $f(M) = \Phi g(M)$ definiert, wobei g dieselbe Bedeutung wie früher hat. Da jeder geschlossene Weg in M zusammenziehbar ist, so folgt — wie an einer ähnlichen Stelle während der obigen Hilfsbetrachtung —, daß die zu f gehörige Überlagerungsmannigfaltigkeit μ^* die universelle Überlagerungsfläche von μ ist. Wenn wir diese in der angegebenen Weise mit P identifizieren, so ist in unserer früheren Bezeichnungsweise $f^* = g$. Da g in allen Punkten $x = 2k + 1$, $y = 0$ kompakt ist und in jedem von ihnen den Grad 0 hat, ist f in ξ kompakt und besitzt dort keine wesentliche Schicht. Es ist also $s_\xi = a_\xi = 0$.

Die durch f bestimmte Klasse $\mathfrak{K}_\xi$ in bezug auf ξ ist die Gesamtheit aller Abbildungen, die man erhält, wenn man f gleichmäßig stetig so abändert, daß die Abbildungen immer kompakt in ξ bleiben. Einer solchen Änderung entspricht eine gleichmäßig stetige Änderung von $f^* = g$ (siehe Satz II), bei der die Abbildungen immer kompakt in allen Punkten $x = 2k + 1$, $y = 0$, also insbesondere in den Punkten -1 und $+1$, bleiben. Nach dem Ergebnis der Hilfsbetrachtung behält das Punktepaar -1, $+1$ dabei immer wenigstens zwei Originalpunkte, und diese sind Originalpunkte von ξ bei der abgeänderten Abbildung f. Folglich ist $\sigma_\xi \geqq 2$, und, da immer $\alpha_\xi \geqq \sigma_\xi$ ist, auch $\alpha_\xi \geqq 2$, also $\sigma_\xi > s_\xi$, $\alpha_\xi > a_\xi$, w. z. b. w. (Es ist übrigens leicht, durch Angabe einer speziellen Abbildung g zu zeigen, daß $\alpha_\xi = \sigma_\xi = 2$ ist.) Also ist bewiesen:

Satz XV. *Ist $n = 2$, so gibt es — im Gegensatz zu den von 2 verschiedenen Dimensionszahlen — Abbildungen, für die die im § 4 definierten Mindestzahlen σ_ξ und α_ξ größer sind als die Invarianten s_ξ bzw. a_ξ.*

Am Schluß des vorigen Paragraphen sahen wir, daß die Ausnahmestellung der Dimensionszahl 2 bezüglich der Zahlen α und a in Fortfall kommt, falls M geschlossen ist. Es entsteht die Frage, ob dies bezüglich der Zahlen σ und s ebenso ist, d. h. ob die für die anderen Dimensionszahlen richtige Gleichung $\sigma = s$ im Fall $n = 2$ wenigstens für alle Abbildungen von geschlossenen Flächen gilt. Diese Frage ist zu verneinen. Wir werden nämlich zeigen:

Satz XVa. *Zu jedem $j > 4$ gibt es eine Klasse von Abbildungen der geschlossenen orientierbaren Fläche vom Geschlecht 2 auf die geschlossene orientierbare Fläche vom Geschlecht 1 mit $\sigma > j = s$.*

Beweis. Sind μ, μ^* zwei geschlossene orientierbare Flächen vom Geschlecht 1, so läßt sich μ^* durch eine Abbildung φ so auf μ abbilden, daß μ^* eine j-blätterige unverzweigte Überlagerungsfläche von μ wird. f^* sei folgende Abbildung der geschlossenen orientierbaren Fläche M vom Geschlecht 2 auf μ^*: durch eine geeignete einfach geschlossene Kurve C wird M in zwei Hälften zerlegt, deren jede eine einmal berandete Fläche vom Geschlecht 1 ist; jede der beiden Hälften wird so auf μ^* abgebildet, daß die Randkurve in einen einzigen Punkt ζ von μ^* übergeht und daß die Abbildung im übrigen auf jeder der Hälften eineindeutig vom Grade $+1$ ist; dann hat f^* den Grad $+2$ und, da die Originalmenge von ζ^* das Kontinuum C ist, nach Satz IX (§ 3) den Index 1, und nach Satz X ist jeder geschlossene Weg auf μ^* dem Bilde eines geschlossenen Weges auf M äquivalent. Hieraus folgt für die Abbildung $f = \varphi f^*$ von M auf μ, daß μ^* die zu ihr gehörige Überlagerungsmannigfaltigkeit (Definition III, § 2), die Zerlegung in f^* und φ die durch Satz I gekennzeichnete Zerlegung und mithin j der Index von f ist. Wenn es nun in der Klasse von f eine Abbildung f_1 gibt, bei der ein Punkt ξ von μ nur j Originalpunkte hat, so hat bei der f_1 entsprechenden Abbildung f_1^* von M auf μ^* jeder der j Punkte von μ^*, die durch φ auf ξ abgebildet werden, nur einen Originalpunkt. Daher ist die Behauptung bewiesen, sobald gezeigt ist, daß es bei jeder Abbildung von M auf μ^* vom Grade 2 höchstens 4 Punkte auf μ^* gibt, die nur je einen Originalpunkt haben; somit ist der Satz XVa zurückgeführt auf

Satz XVI. *Bei jeder Abbildung der geschlossenen orientierbaren Fläche F_p vom Geschlecht p auf die geschlossene orientierbare Fläche F_q vom Geschlecht q, deren Grad einen Betrag > 1 hat, ist die Anzahl der Punkte auf F_q, die nur je einen Originalpunkt haben, höchstens $2p + 2 - 2q$.*

Der Beweis wird nicht wie die übrigen in dieser Arbeit angestellten Betrachtungen mit dem auf der stetigen Deformierbarkeit beruhenden Begriff der „Äquivalenz“ geschlossener Wege, sondern mit dem Begriff der „Homologie" arbeiten[31]), und wir schicken einen in dieser Richtung liegenden einfachen Hilfssatz voraus.

Hilfssatz. Die offene Fläche F'_q, die aus der geschlossenen orientierbaren Fläche F_q vom Geschlecht q durch Herausnahme von s (>0) Punkten $y_1, y_2, \ldots, y_s$ entsteht, besitzt eine Homologiebasis von $2q+s-1$ Elementen (d. h. es gibt auf F'_q $2q+s-1$ geschlossene Kurven derart, daß jede geschlossene Kurve auf F'_q einer eindeutig bestimmten linearen Verbindung von ihnen homolog ist).

Beweis des Hilfssatzes. $A_1, A_2, \ldots, A_{2q}$ seien geschlossene Kurven auf F'_q, die eine Homologiebasis von F_q bilden; $B_1, B_2, \ldots, B_s$ seien kleine Kreise um die Punkte $y_1, y_2, \ldots, y_s$. Ist C irgendeine geschlossene Kurve auf F'_q, so ist C auf F_q einer linearen Verbindung der A_i homolog:

$$(1) \qquad C \sim \sum_{i=1}^{2q} a_i A_i \quad (\text{auf } F_q),$$

d. h. es gibt einen auf F_q liegenden Flächenkomplex K mit dem Rand $C - \sum a_i A_i$. Schneidet man aus F_q so kleine Löcher $L_1, L_2, \ldots, L_s$ um $y_1, y_2, \ldots, y_s$ aus, daß kein Randpunkt von K in einem solchen Loch liegt, so entsteht aus K ein Komplex K', der F'_q angehört und dessen Rand außer aus dem Rande von K aus einer linearen Verbindung der Ränder der Löcher besteht; da diese Ränder auf F'_q den Kreisen B_j homolog sind, ist also der Rand von K auf F'_q einer linearen Verbindung der B_j homolog, mithin ist

$$(2) \qquad C \sim \sum_{i=1}^{2q} a_i A_i + \sum_{j=1}^{s} b_j B_j \quad (\text{auf } F'_q).$$

Die A_i und B_j zusammen erzeugen also die Gruppe der Homologieklassen von F'_q. Sie sind aber nicht voneinander unabhängig; denn die Summe der B_j bildet den Rand des Teiles von F'_q, der aus F_q durch Herausnahme der durch die B_j begrenzten, die Punkte y_j enthaltenden kleinen Kreisscheiben entsteht; d. h. es ist

$$(3) \qquad \sum_{j=1}^{s} B_j \sim 0 \quad (\text{auf } F'_q).$$

Dies ist aber die einzige zwischen den A_i und B_j auf F'_q bestehende Relation; denn wenn

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{2q} u_i A_i + \sum_{j=1}^{s} v_j B_i \sim 0 \quad (\text{auf } F'_q)$$

irgendeine Relation ist, so folgt, da (4) erst recht auf F_q gilt, aus

$$(5) \qquad B_j \sim 0 \quad (\text{auf } F_q),$$

[31]) Zur Orientierung über die mit der „Homologie" zusammenhängenden Begriffe und Sätze vgl. man: J. W. Alexander, Combinatorial Analysis Situs. Transact. Am. Math. Soc. 28 (1926).

daß

$$\sum_{i=1}^{2q} u_i A_i \sim 0 \quad (\text{auf } F_q),$$

also

(6) $$u_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2q),$$

mithin nach (4)

(7) $$\sum_{j=1}^{s} v_j B_j \sim 0 \quad (\text{auf } F_q')$$

ist. Elimination von B_s aus (3) und Einsetzen in (7) liefert

(8) $$\sum_{j=1}^{s-1} (v_j - v_s) B_j \sim 0 \quad (\text{auf } F_q').$$

Dies bedeutet die Existenz eines zweidimensionalen Teilkomplexes K_1 von F_q', der von $\sum (v_j - v_s) B_j$ berandet wird; fügt man zu ihm für $i = 1, 2, \ldots, s-1$ das $(v_s - v_j)$-mal genommene Innengebiet von B_j (d. h. das von B_j begrenzte, y_j enthaltende Gebiet) hinzu, so entsteht ein *geschlossener* Komplex K_2, der in einem *echten* Teil der geschlossenen Fläche F_q liegt, da er den Punkt y_s nicht enthält. Ein solcher Komplex ist aber identisch 0; und da die $(v_s - v_j)$-mal genommene Umgebung von y_j ein Stück von K_1 ist, muß daher $v_s = v_j$ für alle j sein. Hieraus und aus (6) folgt, daß (4) die Gestalt

$$v_s \cdot \sum_{j=1}^{s} B_j \sim 0$$

hat, also eine Folge von (3) ist.

Man kann also jede geschlossene Kurve auf F_q' in der Gestalt (2) darstellen, und zwischen den A_i und B_j besteht nur die Relation (3). Damit ist der Hilfssatz bewiesen; denn man kann als Basis zum Beispiel die Kurven $A_1, A_2, \ldots, A_{2q}, B_1, \ldots, B_{s-1}$ wählen.

Beweis von Satz XVI. F_p sei durch f auf F_q mit dem Grade c abgebildet, und es sei $|c| > 1$. $y_1, y_2, \ldots, y_r$ seien Punkte auf F_q, die nur je einen Originalpunkt haben; ob es noch mehr solche Punkte gibt, ist dabei gleichgültig. Die ihnen entsprechenden Originalpunkte seien $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Die offenen Flächen, die durch Herausnahme der Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}$ bzw. $y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}$ aus F_p bzw. F_q entstehen, seien mit F_p', F_q' bezeichnet. Dann ist $f(F_p')$ eine überall kompakte Abbildung von F_p' auf F_q', bei der der Punkt y_r nur einen einzigen Originalpunkt hat, bei der daher nach Satz X (§ 3) jeder geschlossene Weg auf F_q' dem Bild eines geschlossenen Weges auf F_p' äquivalent, also a fortiori homolog ist.

Nach dem Hilfssatz gibt es auf F_q' eine Basis $C_1, C_2, \ldots, C_{2q+r-2}$. $Z_1, Z_2, \ldots, Z_{2q+r-2}$ seien geschlossene Wege auf F_p' deren Bilder den

Wegen C_i homolog sind:

$$f(Z_i) \sim C_i \quad (\text{auf } F'_q;\ i = 1, 2, \ldots, 2q + r - 2). \tag{9}$$

Wir behaupten, daß die Z_i unabhängig voneinander bezüglich Homologien nicht nur auf F'_p, sondern sogar auf F_p sind.

Ist

$$\sum a_i Z_i \sim 0 \quad (\text{auf } F_p), \tag{10}$$

so können wir, da es auf F_p keine „Nullteiler" gibt, d. h. da auf F_p ein Vielfaches einer geschlossenen Kurve nur dann ~ 0 ist, wenn die einfache Kurve ~ 0 ist, die linke Seite von (10) durch den größten gemeinsamen Teiler der a_i dividieren. Wir dürfen also von vornherein annehmen, daß die a_i entweder zueinander teilerfremd oder sämtlich 0 sind. (10) besagt, daß es auf F_p einen zweidimensionalen Komplex K gibt, der von $\sum a_i Z_i$ berandet wird. Schneiden wir um die Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}$ herum so kleine Elemente $L_1, L_2, \ldots, L_{r-1}$ aus F_p aus, daß kein Randpunkt von K (also kein Punkt einer Kurve Z_i) in einem L_j und daß jedes Bild $f(L_j)$ in einer euklidischen Umgebung von y_j liegt, so entsteht aus K ein Komplex K', der außer von dem Rande von K noch von einer linearen Verbindung der Ränder $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{r-1}$ der L_j berandet wird; da K' in F'_p liegt, ist daher

$$\sum a_i Z_i + \sum b_j Y_j \sim 0 \quad (\text{auf } F'_p). \tag{11}$$

Die Abbildung $f(L_j)$ hat, da x_j der einzige Originalpunkt von y_j ist, im Punkt y_j den Grad c; die Ordnung von y_j in bezug auf die Bildkurve $f(Y_j)$, d. h. die Anzahl der Umläufe von $f(Y_j)$ um y_j, ist daher c. Wenn also $\overline{Y}_j$ einen, den Punkt y_j einmal umlaufenden kleinen Kreis auf F_q bezeichnet, so ist

$$f(Y_j) \sim c\,\overline{Y}_j \quad (\text{auf } F'_q). \tag{12}$$

Aus (11), (9), (12) folgt

$$\sum a_i C_i + c \sum b_j \overline{Y}_j \sim 0 \quad (\text{auf } F'_q). \tag{13}$$

$\sum a_i C_i$ ist also auf F'_q einer c-mal genommenen geschlossenen Kurve homolog; da sich jede geschlossene Kurve eindeutig als Verbindung der C_i darstellen läßt, folgt daraus, daß alle a_i durch c teilbar sind. Da $|c| > 1$ ist, sind sie daher nicht teilerfremd, also, wie wir oben sahen, sämtlich 0. Dies bedeutet im Hinblick auf ihre Definition (10), daß die Z_i $(i = 1, 2, \ldots, 2q + r - 2)$ auf F_p voneinander unabhängig sind. Ihre Anzahl kann also höchstens $2p$ sein, d. h. es ist

$$2p \geqq 2q + r - 2, \qquad r \leqq 2p + 2 - 2q.$$

Damit sind der Satz XVI und der oben auf diesen zurückgeführte Satz XVa bewiesen.

Anhang I.

Über die Punktmenge, in der eine Abbildung eineindeutig ist.

Die soeben durchgeführte Abschätzung der Anzahl derjenigen Punkte bei einer Flächenabbildung, die nur je einen einzigen Originalpunkt haben, läßt sich — wenigstens unter gewissen Einschränkungen — auf Abbildungen n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten übertragen. An Stelle der *Anzahl* der Punkte, die ja die 0-dimensionale Bettische Zahl des Komplexes dieser Punkte ist, tritt dabei die $(n-2)$-*dimensionale Bettische Zahl*[31]), und diese Betrachtung weist daher vielleicht einen Weg, auf dem man den Fall $n=2$ von seiner Ausnahmestellung, die in dieser Arbeit eine so große Rolle spielt, befreien und ihn in eine allgemeine Theorie einordnen kann: man wird versuchen müssen, nicht nur die Komponentenzahlen der Originalmengen einzelner Punkte oder der glatten Originalmengen einzelner Gebiete, sondern auch die höheren Zusammenhangszahlen dieser Mengen zu untersuchen.

Die erwähnten Einschränkungen — die übrigens kaum wesentlich sein dürften — bestehen darin, daß wir nur solche Mannigfaltigkeiten und Abbildungen betrachten, die den Methoden der kombinatorischen Topologie ohne weiteres zugänglich sind. Wir werden uns also auf *triangulierbare* geschlossene Mannigfaltigkeiten beschränken, während den bisherigen Untersuchungen die (wenigstens begrifflich) weitere Gesamtheit der „topologischen" Mannigfaltigkeiten zugrunde lag, und wir werden von den Abbildungen voraussetzen, daß sie „*simplizial*" sind, d. h. daß sie den Eckpunkten eines Simplexes von M immer Eckpunkte eines (evtl. niedriger-dimensionalen) Simplexes von μ zuordnen und daß sie im Inneren der Simplexe von M die durch die Eckpunktzuordnung eindeutig bestimmten baryzentrischen Abbildungen sind.

Der Grad c einer simplizialen Abbildung von M auf μ ist die Anzahl der auf ein festes n-dimensionales Simplex von μ im positiven Sinne abgebildeten n-dimensionalen Simplexe von M vermindert um die Anzahl der auf dasselbe Simplex im negativen Sinne abgebildeten n-dimensionalen Simplexe von M. Die Punkte von μ, die nur je einen Originalpunkt haben, bilden einen Komplex $\overline{X}$, der, wenn $|c|>1$ ist, höchstens $(n-2)$-dimensional ist; denn würde er ein $(n-1)$-dimensionales Simplex τ^{n-1} enthalten, so kämen als Originalsimplexe für die beiden an τ^{n-1} anstoßenden n-dimensionalen Simplexe nur die beiden an das Originalsimplex t^{n-1} von τ^{n-1} anstoßenden Simplexe in Betracht, während doch jedes n-dimensionale Simplex von μ wenigstens $|c|$ Originalsimplexe besitzt. Die $(n-2)$-dimensionale, also die höchste nicht trivialerweise verschwindende, Bettische Zahl von $\overline{X}$, und damit auch von dem mit $\overline{X}$ homöomorphen Originalkomplex X von $\overline{X}$ ist, wie wir zeigen werden, durch die Bettischen Zahlen von M und μ nach oben beschränkt.

Wir bezeichnen die i-te Bettische Zahl eines Komplexes K stets mit $p^i(K)$.

Satz XVII. *M sei auf μ simplizial mit dem Grade c abgebildet; $|c|$ sei >1 und, falls M 1-dimensionale Torsionskoeffizienten besitzt, zu diesen teilerfremd; X und $\overline{X}$ seien die Komplexe in M bzw. μ, auf denen die Abbildung eineindeutig ist. Ist dann X' ein echter Teilkomplex von X, so ist*

$$p^{n-2}(X') \leqq p^1(M) - p^1(\mu) + p^2(\mu).$$

Bevor wir den Satz beweisen, werden wir einige Folgerungen ziehen. Zunächst ergibt sich, da nur dann $c \neq 0$ sein kann, wenn $p^2(M) \geqq p^2(\mu)$ ist[32]), unmittelbar eine Beschränkung von $p^{n-2}(X')$ mittels der Invarianten von M allein:

Satz XVIIa. *Unter den Voraussetzungen von Satz* XVII *ist*

$$p^{n-2}(X') \leqq p^1(M) + p^2(M).$$

Hierin ist z. B. die Tatsache enthalten, daß, falls bei einer Abbildung der 3-dimensionalen Sphäre mit $|c|>1$ der Komplex X ein einfach geschlossenes Polygon enthält, er mit diesem identisch ist, da die erste Bettische Zahl eines einfach geschlossenen Polygons 1, die eines *echten* Teils von X nach XVIIa aber 0 ist. Dasselbe gilt für die Abbildungen des 3-dimensionalen projektiven Raumes, vorausgesetzt, daß nicht nur $|c|<1$, sondern auch c ungerade ist, da der projektive Raum den 1-dimensionalen Torsionskoeffizienten 2 besitzt. Daß hierbei die Voraussetzung der Ungeradheit von c für die Gültigkeit von XVII und XVIIa wirklich notwendig ist, zeigt folgendes Beispiel: Der euklidische x_1-x_2-x_3-Raum sei der Abbildung auf sich unterworfen, die, wenn man statt x_1, x_2 Polarkoordinaten r, φ einführt, durch

$$r' = r, \quad \varphi' = 2\varphi, \quad x_3' = x_3$$

gegeben ist und die offenbar den Grad 2 hat; die Transformation von x_1, x_2, x_3 ist

$$x_1' = \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, \qquad x = \frac{2x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}, \qquad x_3' = x_3,$$

und sie läßt sich durch $x_4' = x_4$ zu einer Abbildung des projektiven $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$-Raumes auf sich erweitern. Bei dieser hat sowohl jeder Punkt mit $x_1 = x_2 = 0$ als jeder Punkt mit $x_3 = x_4 = 0$ nur einen Original-

---

[32]) H. Hopf, On some properties of one-valued transformations of manifolds, Satz Ia. Proc. of the Nat. Acad. of Sciences U. S. A. 14 (1928). — Eine ausführliche Darstellung erscheint demnächst unter dem Titel „Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten“ im Journ. f. d. reine u. angew. Math.

punkt, X enthält also *zwei* geschlossene projektive Geraden (und ist übrigens mit diesen identisch) — im Gegensatz zu den Behauptungen der beiden Sätze[33]).

Auch die $(n-2)$-te Bettische Zahl von X selbst läßt sich abschätzen: X' entstehe durch Entfernung eines $(n-2)$-dimensionalen Simplex T aus X (den Fall, daß X weniger als $(n-2)$-dimensional ist, brauchen wir nicht zu berücksichtigen, da dann $p^{n-2}(X)=0$ ist). Beim Übergang von X' zu X, d. h. beim Einsetzen von T in X' sind zwei Fälle möglich: entweder entsteht kein neuer $(n-2)$-dimensionaler Zyklus; dann ist $p^{n-2}(X)=p^{n-2}(X')$; oder es entsteht wenigstens ein neuer Zyklus Z; er enthalte T a-fach genommen; ist dann Z' ein zweiter Zyklus in X, der T enthält, und zwar b-mal genommen, so ist $aZ'-bZ$ ein Zyklus in X', d. h. Z und Z' sind in X' voneinander linear abhängig, und der Rang der Gruppe der $(n-2)$-dimensionalen Zyklen hat sich somit beim Übergang von X' zu X nur um 1 vermehrt, in diesem Falle ist also $p^{n-2}(X)=p^{n-2}(X')+1$. In jedem Fall ist $p^{n-2}(X)\leqq p^{n-2}(X')+1$. Mithin folgt aus XVII und XVIIa:

Satz XVIIb. *Unter den Voraussetzungen von* XVII *ist*

$$p^{n-2}(X)\leqq 1+p^1(M)-p^1(\mu)+p^2(\mu)\leqq 1+p^1(M)+p^2(M).$$

Für $n=2$ ist die erste dieser Ungleichungen der Satz XVI, da dann $p^2(\mu)=p^2(F_q)=1$ und $p^0(X)$ die Anzahl der Punkte ist, aus denen X besteht.

Der Beweis von Satz XVII läuft dem Beweis des Satzes XVI ganz parallel. Wir haben zunächst eine Tatsache festzustellen, die dem dem Beweis von XVI vorangeschickten Hilfssatz entspricht. Sie beruht auf einer von Pontrjagin entdeckten Verallgemeinerung des Alexanderschen Dualitätssatzes, die folgendermaßen lautet[34]): *Ist K ein in μ liegender Komplex, so werden die in K gelegenen i-dimensionalen Zyklen, die ~ 0 in μ sind, in Klassen bezüglich Homologien in K eingeteilt; der Rang der Gruppe dieser Klassen heiße $r^i(K)$; analog seien für die Komplementär-*

[33]) Um den Gegensatz zu dem Wortlaut dieser Sätze vollständig zu machen, hat man die im Text angegebene Abbildung noch durch eine simpliziale Abbildung mit denselben Eigenschaften zu ersetzen, was aber infolge des analytischen Charakters der Abbildung keine Schwierigkeit macht.

[34]) Pontrjagin, Zum Alexanderschen Dualitätssatz, Zweite Mitteilung, Satz Ia. Nachr. d. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, Math.-Phys. Klasse (1927). Dort ist der Satz für „Homologien mod 2" bewiesen; der Beweis für gewöhnliche Homologien ist mir aus einer Note von Pontrjagin bekannt, die demnächst veröffentlicht werden dürfte. — In engem Zusammenhang damit stehen die folgenden Arbeiten: van Kampen, Eine Verallgemeinerung des Alexanderschen Dualitätssatzes. Koninkl. Akad. van Wetenschappen te Amsterdam Proc. **31** (1928), und: Die kombinatorische Topologie und die Dualitätssätze, Diss. Leiden 1929. — Lefschetz, Closed point sets on a manifold. Annals of Math. **29** (1928), sowie die dort zitierten Noten in den Proc. Nat. Acad. (1927).

menge von K die Zahlen $r^i(\mu - K)$ erklärt. Dann ist

$$r^i(\mu - K) = r^{n-1-i}(K),$$

also insbesondere

$$(1) \qquad r^1(\mu - K) = r^{n-2}(K).$$

Nun bestehen einfache Zusammenhänge zwischen diesen Zahlen r und den Bettischen Zahlen von K, $\mu - K$ und μ. Bezeichnet $P^i(K)$ die Gruppe der Klassen, in die *alle* i-dimensionalen Zyklen in K bezüglich Homologien *in* K zerfallen, deren Rang also $p^i(K)$ ist, $R^i(K)$ die oben betrachtete Untergruppe vom Range $r^i(K)$, so ist der Rang $p^i(K) - r^i(K)$ der Faktorgruppe $\frac{P^i(K)}{R^i(K)}$ höchstens gleich $p^i(\mu)$; denn von je $1 + p^i(\mu)$ Elementen der Faktorgruppe gibt es eine lineare Verbindung, die ~ 0 in μ, die also in $R^i(K)$ enthalten ist, je $1 + p^i(\mu)$ Elemente der Faktorgruppe sind also voneinander linear abhängig. Es ist mithin in der Tat

$$(2) \qquad p^i(K) - r^i(K) \leqq p^i(\mu),$$

also insbesondere

$$(2') \qquad r^{n-2}(K) \geqq p^{n-2}(K) - p^{n-2}(\mu).$$

Analog ist

$$(3) \qquad p^i(\mu - K) - r^i(\mu - K) \leqq p^i(\mu),$$

also insbesondere

$$(3') \qquad p^1(\mu - K) \leqq r^1(\mu - K) + p^1(\mu).$$

Es sei jetzt K höchstens $(n-2)$-dimensional. Dann steht in $(3')$ immer das Gleichheitszeichen; denn da es zu jedem 1-dimensionalen Zyklus in μ einen beliebig benachbarten, also homologen, gibt, der fremd zu K ist, also in $\mu - K$ liegt, gibt es in $\mu - K$ $p^1(\mu)$ Zyklen, die nicht homolog 0 in μ und die untereinander unabhängig bezüglich Homologien in μ, also erst recht bezüglich Homologien in $\mu - K$ sind; die ihnen entsprechenden Elemente der Faktorgruppe $\frac{P^1(\mu - K)}{R^1(\mu - K)}$ sind voneinander unabhängig, weil ja sonst eine lineare Verbindung von ihnen zu $R^1(\mu - K)$ gehörte, also ~ 0 in μ wäre. Folglich ist der Rang der Faktorgruppe nicht nur wie im allgemeinen Fall $\leqq p^1(\mu)$, sondern $= p^1(\mu)$, d. h. es ist in der Tat

$$(3'') \qquad p^1(\mu - K) = r^1(\mu - K) + p^1(\mu).$$

Ersetzt man hierin $r^1(\mu - K)$ aus (1), so folgt aus $(2')$:

$$(4) \qquad p^1(\mu - K) \geqq p^{n-2}(K) - p^{n-2}(\mu) + p^1(\mu),$$

wofür man infolge des Poincaréschen Dualitätsgesetzes für die Bettischen Zahlen einer Mannigfaltigkeit auch schreiben kann:

$$(4') \qquad p^1(\mu - K) \geqq p^{n-2}(K) - p^2(\mu) + p^1(\mu).$$

Diese Ungleichung, die unter der Voraussetzung gilt, daß K höchstens $(n-2)$-dimensional ist, wird beim Beweise des Satzes XVII dieselbe Rolle spielen, wie der „Hilfssatz“ beim Beweis von Satz XVI.

Wir betrachten nun eine Abbildung f, die die Voraussetzungen von Satz XVII erfüllt; X' sei ein echter Teilkomplex des in dem Satz genannten Komplexes X, $\bar{X}'$ das Bild von X'. Wir wählen in $\mu - \bar{X}'$ eine 1-dimensionale Homologiebasis; sie besteht aus $p^1(\mu - \bar{X}')$ geschlossenen Kurven $C_1, C_2, \ldots$ und, falls 1-dimensionale Torsionskoeffizienten $\tau_1, \tau_2, \ldots$ vorhanden sind, noch aus weiteren geschlossenen Kurven $D_1, D_2, \ldots$ derart, daß jeder in $\mu - \bar{X}'$ gelegene 1-dimensionale Zyklus C eine und nur eine Homologie

$$C \sim \sum a_i C_i + \sum b_j D_j, \qquad 0 \leqq b_j < \tau_j, \qquad (\text{in } \mu - \bar{X}')$$

erfüllt. Aus der Einzigkeit dieser Homologie folgt insbesondere, daß nur dann $C \sim c\,C'$ in $\mu - \bar{X}'$ sein kann, wenn alle a_i durch c teilbar sind.

$M - X'$ wird durch f so auf $\mu - \bar{X}'$ abgebildet, daß diese Abbildung überall kompakt ist. Dabei hat jeder Punkt von $\bar{X} - \bar{X}'$ nur einen Originalpunkt. Folglich ist nach Satz X jeder geschlossene Weg in $\mu - \bar{X}'$ dem Bilde eines geschlossenen Weges aus $M - X'$ in $\mu - \bar{X}'$ äquivalent, also erst recht homolog. $Z_1, Z_2, \ldots$ seien geschlossene Wege in $M - X'$, so daß

$$(5) \qquad f(Z_i) \sim C_i \qquad (\text{in } \mu - \bar{X}';\ i = 1, 2, \ldots, p^1(\mu - \bar{X}'))$$

ist. Wir behaupten, daß diese Z_i unabhängig bezüglich Homologien nicht nur in $M - X'$, sondern sogar in M sind.

Dem Beweise schicken wir die Bemerkung voran, daß aus

$$(6) \qquad cZ \sim 0 \quad (\text{in } M)$$

stets

$$(7) \qquad Z \sim 0 \quad (\text{in } M)$$

folgt, wobei Z irgendein 1-dimensionaler Zyklus ist. Bilden nämlich die Zyklen $A_1, A_2, \ldots, A_{p^1(M)}$, $B_1, B_2, \ldots, B_{q^1(M)}$, wobei $p^1(M)$ die 1-dimensionale Bettische Zahl, $q^1(M)$ die Anzahl der 1-dimensionalen Torsionskoeffizienten $t_1, t_2, \ldots$ von M ist, eine Basis in M, und ist

$$Z \sim \sum u_i A_i + \sum v_j B_j, \qquad 0 \leqq v_j < t_j \qquad (\text{in } M),$$

so ist nach (6)

$$\sum c u_i A_i - \sum c v_j B_j \sim 0 \qquad (\text{in } M),$$

also sind einerseits alle $u_i = 0$, andererseits sind alle cv_j durch die entsprechenden t_j teilbar, was wegen der vorausgesetzten Teilerfremdheit von c und t_j nur möglich ist, wenn auch alle $v_j = 0$ sind, wenn also in der Tat (7) gilt.

Wenn nun

$$(8) \qquad \sum a_i Z_i \sim 0 \quad (\text{in } M)$$

ist, so können wir, falls alle a_i durch c teilbar sind, nach der eben gemachten Bemerkung die linke Seite von (8) durch c dividieren, und diese Division, falls nicht alle $a_i = 0$ sind, so oft wiederholen, bis die Koeffizienten in (8) nicht mehr c als gemeinsamen Teiler haben. Wir dürfen daher annehmen, daß von vornherein die a_i entweder sämtlich gleich 0 sind oder nicht den gemeinsamen Teiler c haben.

(8) bedeutet, daß ein 2-dimensionaler Komplex K in M existiert, der von $\sum a_i Z_i$ berandet wird. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit läßt sich annehmen, daß sich K und X in „allgemeiner Lage" zueinander befinden, daß sie sich also in endlich vielen Punkten schneiden (da X als $(n-2)$-dimensional vorausgesetzt werden darf, weil sonst unsere Behauptung XVII von selbst erfüllt ist). Es seien also $x_1, x_2, \ldots, x_r$ die Schnittpunkte von X und K; dabei dürfen wir infolge der „allgemeinen Lage" noch annehmen, daß jeder Punkt x_j innerer Punkt eines $(n-2)$-dimensionalen Simplexes T_j^{n-2} von X und eines Dreiecks von K ist. Um x_j herum schneiden wir ein kleines Loch L_j aus K aus; der dadurch entstehende Komplex K' liegt ganz in $M - X$, also erst recht in $M - X'$, und wird außer von dem Rande von K noch von einer linearen Verbindung der Ränder der L_j berandet; nun ist der Rand von L_j in $M - X'$ homolog dem geschlossenen Polygon Y_j, welches von den zu T_j^{n-2} fremden Kanten derjenigen n-dimensionalen Simplexe $T_1^n, T_2^n, \ldots, T_s^n$ gebildet wird, auf denen T_j^{n-2} liegt. Es ist also

$$(9) \qquad \sum a_i Z_i + \sum b_j Y_j \sim 0 \quad (\text{in } M - X').$$

Da T_j^{n-2} zu X gehört, ist $f(T_j^{n-2}) = \overline{T}_j^{n-2}$ ein ebenfalls $(n-2)$-dimensionales Simplex und besitzt außer T_j^{n-2} kein weiteres Originalsimplex; mithin besitzen auch diejenigen n-dimensionalen Simplexe von μ, auf denen $\overline{T}_j^{n-2}$ liegt, als Originalsimplexe nur die $T_1^n, T_2^n, \ldots, T_s^n$, und daher hat die Abbildung des „Sternes" $\sum_{i=1}^{s} T_i^n$ von T_j^{n-2} auf den „Stern" von $\overline{T}_j^{n-2}$ den Grad c; dabei wird jede nicht an $\overline{T}_j^{n-2}$ anstoßende Kante des Sternes von $\overline{T}_j^{n-2}$ von zu Y_j gehörigen Kanten im algebraischen Sinne c-mal bedeckt, und andererseits wird jede zu Y_j gehörige Kante auf eine nicht an $\overline{T}_j^{n-2}$ anstoßende (evtl. in einen Punkt ausgeartete) Kante des Sternes von $\overline{T}_j^{n-2}$ abgebildet. $f(Y_j)$ ist also das c-mal genommene, aus den genannten Kanten des Sternes von $\overline{T}_j^{n-2}$ gebildete geschlossene Polygon η_j:

$$(10) \qquad f(Y_j) \sim c\,\eta_j \quad (\text{in } \mu - \overline{X}').$$

Aus (9), (5), (10) folgt

$$(11) \qquad \sum a_i C_i \sim c\,C' \quad (\text{in } \mu - \overline{X}'),$$

wobei $-\sum b_j \eta_j = C'$ gesetzt ist. Daraus folgt weiter, wie wir oben sahen, daß alle a_i durch c_i teilbar sind, und dies bedeutet, wie wir ebenfalls schon sahen, daß alle $a_i = 0$, daß also die Z_i unabhängig in M sind. Ihre Anzahl ist daher höchstens $p^1(M)$, d. h. es ist

$$p^1(M) \geqq p^1(\mu - \overline{X}^1), \tag{12}$$

also auf Grund von $(4')$

$$p^1(M) \geqq p^{n-2}(\overline{X}') - p^2(\mu) + p^1(\mu), \tag{13}$$

womit, da $p^i(\overline{X}') = p^i(X')$ ist, die Behauptung des Satzes XVII bewiesen ist.

Anhang II.

Über die Windungspunkte einer Flächenabbildung.

Hat man, wie es im Satz XVI und im Anhang I geschehen ist, bei einer Abbildung, deren Grad einen Betrag > 1 besitzt, diejenigen Punkte der Bildmannigfaltigkeit betrachtet, die nur je einen Originalpunkt haben, so liegt folgende Verallgemeinerung der Fragestellung nahe. Wir definieren: *Bei einer Abbildung mit einem Grade c, dessen Betrag > 1 ist, heißt ein Punkt der Bildmannigfaltigkeit ein „Windungspunkt", wenn er weniger als $|c|$ Originalpunkte besitzt; ist deren Anzahl b, so heißt $|c| - b$ die „Ordnung" des Windungspunktes.*

Für die Anzahlen der Windungspunkte der verschiedenen Ordnungen, die bei Flächenabbildungen auftreten, existiert eine Schranke, die eine Verallgemeinerung und Verschärfung des Satzes XVI liefert:

Satz XVIII. *Bei jeder Abbildung einer geschlossenen orientierbaren Fläche auf eine andere geschlossene orientierbare Fläche gibt es höchstens endlich viele Windungspunkte. Ist w_r die Anzahl der Windungspunkte der Ordnung r, so ist*

$$\sum_{r=1}^{|c|-1} r\, w_r \leqq (2p-2) - |c|(2q-2),$$

wobei p das Geschlecht der Originalfläche, q das Geschlecht der Bildfläche, c der Grad ist.

Der Beweis besteht in einer einfachen Anwendung des folgenden Satzes von H. Kneser[6]): *Ist die geschlossene orientierbare Fläche vom Geschlecht P auf die geschlossene orientierbare Fläche vom Geschlecht $Q \neq 0$ mit dem Grade $c \neq 0$ abgebildet, so ist*

$$(P-1) - |c|(Q-1) \geqq 0.$$

Um unsere Behauptung auf diesen Satz zurückzuführen, nehmen wir mit der gegebenen Abbildung f der Fläche F_p vom Geschlecht p auf die

Fläche F_q vom Geschlecht q eine unwesentliche Abänderung in der Nähe von Windungspunkten vor. Es seien für $r = 1, 2, \ldots, |c| - 1$ wenigstens je v_r Windungspunkte der Ordnung r vorhanden: $\xi_1^r, \xi_2^r, \ldots, \xi_{v_r}^r$, wobei es gleichgültig ist, ob dies alle Windungspunkte sind. Um jeden Punkt ξ_i^r bestimmen wir ein Element ω_i^r, so daß diese Elemente zueinander fremd sind. $x_{i,1}^r, x_{i,2}^r, \ldots, x_{i,|c|-r}^r$ seien die Originalpunkte von ξ_i^r. Um jeden von ihnen bestimmen wir ebenfalls ein Element $e_{i,j}^r$, so daß diese Elemente untereinander fremd sind, und daß $f(e_{i,j}^r) \subset \omega_i^r$ ist. In ω_i^r führen wir ein Polarkoordinatensystem ϱ, ψ mit ξ_i^r als Pol ein und ebenso in $e_{i,j}^r$ ein Polarkoordinatensystem R, φ mit $x_{i,j}^r$ als Pol. Wir betrachten nun für ein festes $e_{i,j}^r$ die Abbildung f; sie sei durch

$$\varrho = f_1(R, \varphi), \qquad \psi = f_2(R, \varphi)$$

gegeben, und sie habe in ξ_i^r den Grad a. Wir ersetzen sie durch die folgende Abbildung $\bar{f}$:

$$\begin{aligned}
&\bar{f}_1(R, \varphi) = f_1(R, \varphi), \qquad \bar{f}_2(R, \varphi) = f_2(R, \varphi) \quad \text{für } R \geqq 2;\\
&\left.\begin{aligned}\bar{f}_1(R, \varphi) &= (R-1) f_1(R, \varphi) + (2-R)\\ \bar{f}_2(R, \varphi) &= (R-1) f_2(R, \varphi) + (2-R)\, a\varphi\end{aligned}\right\} \text{für } 2 \geqq R \geqq 1;\\
&\bar{f}_1(R, \varphi) = R, \qquad \bar{f}_2(R, \varphi) = a\varphi \quad \text{für } 1 \geqq R.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen stellen in der Tat eine eindeutige Abbildung dar; um dies zu erkennen, hat man sich nur davon zu überzeugen, daß $\bar{f}_2(R, \varphi + 2\pi) - \bar{f}_2(R, \varphi)$ stets ein ganzes Vielfaches von 2π ist; für $R \geqq 2$ und $R \leqq 1$ ist das selbstverständlich, und für $2 > R > 1$ folgt es aus der Tatsache, daß $f_2(R, \varphi + 2\pi) - f_2(R, \varphi) = a \cdot 2\pi$ ist, weil die Abbildung $f(e_{i,j}^r)$ im Punkte ξ_i^r den Grad a hat, ξ_i^r also von dem Bilde jedes Kreises $R =$ konst. a-mal umlaufen wird.

Diese Abänderung von f nehmen wir in jedem $e_{i,j}^r$ vor und nennen die sich ergebende Abbildung $\bar{f}$; sie hat denselben Grad c wie f, da die Bedeckungen der außerhalb der ω_i^r gelegenen Punkte ungeändert geblieben sind. $\bar{f}$ hat die Eigenschaft, daß die Originalmengen der durch $\varrho < 1$ bestimmten offenen Teilmengen der ω_i^r die durch $R < 1$ bestimmten offenen Teile der $e_{i,1}^r, e_{i,2}^r, \ldots, e_{i,|c|-r}^r$ sind. Entfernen wir die genannten offenen Mengen aus den beiden Flächen, so wird aus der Originalfläche F_p eine Fläche F_p' vom Geschlecht p mit $\sum_{r=1}^{|c|-1} (|c| - r) v_r$ Rändern und aus der Bildfläche F_q eine Fläche F_q' vom Geschlecht q mit $\sum_{r=1}^{|c|-1} v_r$ Rändern, und F_p' ist durch $\bar{f}$ auf F_q' so abgebildet, daß die Randkurven in die Randkurven übergehen. Wir stellen nun von jeder der Flächen F_p', F_q' ein zweites Exemplar F_p'' bzw. F_q'' her, und bilden F_p'' auf F_q'' ebenfalls durch $\bar{f}$

ab. Fügen wir dann F_p' und F_q' längs entsprechender Ränder und ebenso F_q' und F_q'' längs entsprechender Ränder zusammen, so entstehen zwei geschlossene, orientierbare Flächen F_P, F_Q, so daß F_P auf F_Q durch $\bar{f}$ eindeutig mit dem Grade c abgebildet ist. Dabei sind die Geschlechter dieser Flächen

$$P = 2p - 1 + \sum_r (|c| - r) v_r, \qquad Q = 2q - 1 + \sum_r v_r.$$

Ist $Q = 0$, so ist $q = 0$, $\sum_r v_r = 1$, also $\sum_r r v_r \leqq |c| - 1 < 2p - 2 + 2|c|$; ist $Q \geqq 1$, so ist nach dem oben genannten Kneserschen Satz

$$2p - 2 + |c| \sum_r v_r - \sum_r r v_r - 2q|c| + 2|c| - |c| \sum_r v_r \geqq 0,$$

d. h. es ist in jedem Fall

$$\sum_r r \cdot v_r \leqq (2p - 2) - |c|(2q - 2),$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Bemerkungen zu Satz XVIII. 1. Wenn die Bildmenge $f(F_p)$ als Riemannsche Fläche über F_q liegt, d. h. wenn die Umgebung jedes Punktes von F_q, der nicht Windungspunkt ist, genau c-mal glatt im positiven Sinne bedeckt wird, so gilt bekanntlich die „Hurwitzsche Formel“ [35])

$$\sum_r r w_r = (2p - 2) - c(2q - 2).$$

Unser Satz sagt also, daß die „Windungszahl“ $\sum_r r w_r$ einer solchen Abbildung den Höchstwert hat, der bei den vorliegenden p, q, c überhaupt möglich ist.

2. $w_{|c|-1}$ ist die Anzahl der Punkte auf F_q, die nur je einen Originalpunkt haben. Aus unserem Satz folgt

$$w_{|c|-1} \leqq \frac{2p - 2q|c|}{|c| - 1} + 2.$$

Satz XVI besagte:

$$w_{|c|-1} \leqq 2p + 2 - 2q.$$

Wenn nicht $|c| = 2$ und $q = 0$ ist, so ist die neue Schranke besser als die frühere. Ist $|c| = 2$, $q = 0$, so liefern beide Sätze

$$w_1 \leqq 2p + 2.$$

Diese Schranke läßt sich nicht verbessern; denn die Riemannsche Fläche der algebraischen Funktion

$$f(z) = \sqrt{z(z-1)(z-2)\ldots(z-2p)}$$

---

[35]) Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie (Berlin 1923), S. 160.

hat das Geschlecht p, zwei Blätter und $2p+2$ Windungspunkte der Ordnung 1, nämlich $0, 1, 2, \ldots, 2p, \infty$.

3. Nach Satz XVa gibt es Abbildungen geschlossener Flächen mit $\sigma > j$; dabei ist in den dort angegebenen Beispielen $j > 4$. Es bleibt aber noch die Frage offen, ob es auch Abbildungen geschlossener Flächen mit $\sigma > j = 1$ gibt, — eine Frage, deren Beantwortung der Beweismethode des Satzes XVa, nämlich der Zurückführung auf Satz XVI, nicht zugänglich ist. Jetzt können wir diese Frage bejahen; es gilt nämlich

Satz XVb. *Es gibt eine Klasse von Abbildungen der geschlossenen orientierbaren Fläche F_2 (vom Geschlecht 2) auf die geschlossene orientierbare Fläche F_1 (vom Geschlecht 1) mit $\sigma > j = 1$.*

Beweis. $\sigma > 1$ ist gleichbedeutend mit $w_{|c|-1} = 0$ für alle Abbildungen der Klasse. Nach der soeben bewiesenen Formel (mit $p = 2$, $q = 1$)

$$w_{|c|-1} \leqq \frac{4-2\ c}{|c|-1} + 2$$

genügt daher die Angabe einer Abbildung f von F_2 auf F_1 mit $c = 4$ und $j = 1$. Eine solche Abbildung kann folgendermaßen hergestellt werden: Man zerlegt F_2 durch eine geeignete einfach geschlossene Kurve C in zwei Hälften F_2' und F_2'', von denen jede eine einmal berandete Fläche vom Geschlecht 1 ist. F_2' wird so auf F_1 abgebildet, daß der Rand in einen Punkt ξ übergeht und die Abbildung im übrigen eineindeutig ist; F_2'' wird so abgebildet, daß der Rand in denselben Punkt ξ übergeht und die Bildmenge $f(F_2'')$ im übrigen als 3-blätterige unverzweigte Überlagerungsfläche über F_1 liegt. $f(F_2)$ ist eine eindeutige Abbildung vom Grade 4. Sie hat den Index $j = 1$; denn jeder (nicht durch ξ gehende) geschlossene Weg auf F_1 ist Bild eines geschlossenen Weges auf F_2'.

(Eingegangen am 22. 6. 1929.)