Über die Lösungen der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus.

Von

Willy Feller in Kiel.

Bekanntlich kann die allgemeine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit *zwei unabhängigen Veränderlichen* auf eine Normalform gebracht werden, welche für alle Untersuchungen besonders geeignet ist, da sie in den zweiten Ableitungen mit der Laplaceschen Gleichung übereinstimmt. Für diese Gleichung hat Herr Lichtenstein in verschiedenen Arbeiten[1]) die Randwert- bzw. die Eigenwertaufgabe in größter Allgemeinheit gelöst, und ihre Lösungen verhalten sich in mancher Hinsicht ähnlich wie die Potentialfunktionen. Die dabei benutzten Methoden können aber nicht auf den Fall von mehreren unabhängigen Veränderlichen übertragen werden; indessen hat Herr Sternberg[2]) die Randwertaufgabe bei drei Veränderlichen auf eine lineare Integralgleichung zurückgeführt, indem er von Integralausdrücken ausgeht, die ganz den bekannten Raum- und Flächenpotentialen für die Laplacesche Gleichung nachgebildet sind.

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, wie sich fast alle klassischen Sätze über die Eigenschaften der Potentialfunktionen ohne weiteres auf die Lösungen der allgemeinen selbstadjungierten Differentialgleichung zweiter Ordnung vom elliptischen Typus übertragen, wenn man zu ihrer Formulierung die naturgemäß mit der Gleichung verbundene *Riemannsche Maßbestimmung* benutzt. Es bleiben dann fast alle Formeln mit geringfügigen Änderungen bestehen, so ein Analogon zum *Mittelwertsatz*, die Integraldarstellungen und Sprungrelationen, die *Gaußsche geometrische Deutung* für die Doppel-

[1]) Nähere Literaturangaben in der Encyklopädie der math. Wissensch. II, C, 12: L. Lichtenstein, Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus (1924).

[2]) W. Sternberg, Über die lineare elliptische Differentialgleichung zweiter Ordnung mit drei unabhängigen Veränderlichen. Math. Zeitschr. 21 (1924), S. 286—311.

belegung usw. Viele von diesen Eigenschaften übertragen sich auch auf die *nicht selbstadjungierten* Differentialgleichungen. So ergibt sich z. B. ein äußerst einfacher Beweis der sog. *Harnackschen Konvergenzsätze* für *beliebige* Gleichungen.

Alle folgenden Entwicklungen werden naturgemäß nach Möglichkeit invariant geschrieben gegenüber allen Koordinatentransformationen, und der selbstadjungierte Differentialausdruck wird daher als zweiter Differentialparameter der betreffenden Maßbestimmung aufgefaßt. Vorkenntnisse über Riemannsche Geometrie werden übrigens nicht vorausgesetzt, bloß im folgenden Abschnitt muß das Volumelement einer im n-dimensionalen Raume eingebetteten $(n-1)$-dimensionalen Mannigfaltigkeit entwickelt werden. Es wird gleich allgemein der Fall von n unabhängigen Veränderlichen ins Auge gefaßt, da sich die Darstellung nicht umständlicher gestaltet als für $n = 3$ und der erste Teil doch in dieser Allgemeinheit notwendig ist.

§ 1.

Das Volumelement eingebetteter Mannigfaltigkeiten im Riemannschen Raume.

Bekanntlich definiert man das Volumelement im Raume mit dem (definiten) Linienelement

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad (g_{ik} = g_{ki}) \tag{1}$$

durch

$$dV = \sqrt{g}\, dx_1 \ldots dx_n,$$

wobei mit g die wesentlich positive Determinante der Matrix (g_{ik}) bezeichnet wurde. Eine in diesem Raume eingebettete $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sigma = \text{konst.} \tag{2}$$

können wir auch durch $n-1$ unabhängige Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ in der Form

$$x_i = x_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{2'}$$

bestimmen. Die Maßbestimmung auf dieser Hyperfläche erhalten wir, indem wir diese Größen in das Linienelement (1) einsetzen; so erhalten wir zugleich auch das Volumelement dieser Mannigfaltigkeit. Für das Folgende müssen wir jedoch, ähnlich wie im euklidischen Falle, dieses Volumelement direkt durch die Koeffizienten g_{ik} und die Größen (2′) ausdrücken.

Es möge wie üblich g^{ik} das durch die Determinante g dividierte algebraische Komplement von g_{ik} in der Matrix (g_{ik}) bezeichnen; ferner bezeichnen wir mit D_i $(i = 1, \ldots, n)$ die n Funktionaldeterminanten der Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ nach den Parametern $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$, also

$$D_i = (-1)^{i-1} \frac{\partial(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{\partial(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})}.$$

Wir zeigen, daß das gesuchte *Volumelement der Mannigfaltigkeit* $(2')$ geliefert wird durch den Ausdruck[3])

$$(3) \qquad do = \sqrt{g} \sqrt{\sum_{l,k=1}^{n} g^{lk} D_l D_k} \cdot d\lambda_1 \ldots d\lambda_{n-1}.$$

Zum Beweise zeigen wir zunächst, daß dieser Ausdruck unabhängig ist sowohl von der besonderen Wahl der Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$, als auch vom speziellen Koordinatensystem $x_1, \ldots, x_n$ des Raumes. Sodann genügt offenbar der Nachweis, daß bei einer *besonderen* Wahl des Koordinatensystems und der Parameter das gesuchte Volumelement in der Tat durch (3) dargestellt wird.

Die Größen g^{lk} und g sind nur vom ursprünglichen Raume, nicht von der Hyperfläche abhängig, während sich die Funktionaldeterminanten D_i bei einer Transformation der Parameter λ_i mit der Determinante der Transformation multiplizieren: daher bleibt die Größe (3) invariant gegenüber allen Transformationen der Parameter.

Es bleibt zu zeigen, daß der Ausdruck

$$\sqrt{g} \sqrt{\sum_{l,k=1}^{n} g^{lk} D_l D_k}$$

unabhängig ist von der Wahl des Koordinatensystems x_i im Raume. Der Kürze halber führen wir die Bezeichnung

$$F_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

ein. Es ist, wie man leicht bestätigen kann,

$$F_i : F_k = D_i : D_k$$

und daher

$$(4) \qquad \frac{F_i}{\sqrt{\sum_{l,k=1}^{n} g^{lk} F_l F_k}} = \frac{D_i}{\sqrt{\sum_{l,k=1}^{n} g^{lk} D_l D_k}}.$$

Der Nenner auf der linken Seite ist, wie leicht nachzurechnen, eine Invariante (nämlich der sog. erste Differentialparameter von Beltrami der

[3]) Diese Behauptung reduziert sich bekanntlich im Falle einer euklidischen Maßbestimmung auf die *Identität von Lagrange* und stellt daher eine Verallgemeinerung derselben dar.

Funktion F); um das Verhalten des Ausdrucks $\sqrt{\sum g^{lk} D_l D_k}$ bei Koordinatentransformationen zu erkennen, fassen wir für den Augenblick auch σ als unabhängige Veränderliche auf, so daß uns die n-Gleichungen (2) und (2′) eine Transformation der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ in neue Veränderliche $\sigma, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ liefern. Die Funktionaldeterminante dieser Transformation berechnet sich mit Hilfe von (4) zu

$$D = \frac{\partial (x_1, \ldots, x_n)}{\partial (\sigma, \lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial \sigma} D_i = \sqrt{\frac{\sum g^{lk} D_l D_k}{\sum g^{lk} F_l F_k}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial \sigma} F_i = \sqrt{\frac{\sum g^{lk} D_l D_k}{\sum g^{lk} F_l F_k}}.$$

Es ist mithin

$$\sqrt{\sum g^{lk} D_l D_k} = D \sqrt{\sum g^{lk} F_l F_k},$$

d. h. die linke Seite verhält sich bei Transformationen der x — da ja die Wurzel rechts eine Invariante ist — wie die Determinante D. Daher verhält sich in der Tat die Größe

$$\sqrt{g} \sqrt{\sum g^{lk} D_l D_k}$$

invariant gegenüber allen Koordinatentransformationen. Damit sind beide Invarianzeigenschaften des Ausdrucks (3) bewiesen, und es ist leicht zu zeigen, daß er das Volumelement der Mannigfaltigkeit $F = \sigma$ darstellt. In einem hinreichend kleinen Gebiete können wir nämlich das Koordinatensystem so wählen, daß diese Hyperfläche etwa durch die Gleichung $x_n =$ konst. dargestellt wird. Fassen wir dann die übrigen Koordinaten $x_\alpha = \lambda_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, n-1$, als Parameter auf, so wird der Definition nach das Volumelement gleich $\sqrt{\gamma}\, dx_1 \ldots dx_{n-1}$, wenn γ die Determinante der $(n-1)$-reihigen Matrix $(g_{\alpha\beta})$ bezeichnet ($\alpha, \beta = 1, \ldots, n-1$). Es ist also $\gamma = g g^{nn}$. Andererseits wird offenbar $D_\alpha = 0$ für $\alpha = 1, \ldots, n-1$ und $D_n = 1$, so daß auch die rechte Seite von (3) $do = \sqrt{g g^{nn}}\, dx_1 \ldots dx_{n-1}$ ergibt. Da aber dieser Ausdruck invariant ist gegenüber allen Transformationen der Koordinaten und der Parameter, so stellt er tatsächlich das Oberflächenelement dar.

§ 2.

Die Greenschen Formeln und die Grundlösung.

Um unser Ziel zu erreichen, müssen wir auch den *Greenschen Formeln* eine invariante Fassung geben, ähnlich wie sie in der Flächentheorie üblich ist.

Wir betrachten zunächst einen *selbstadjungierten* elliptischen Differentialausdruck mit mehr als zwei unabhängigen Veränderlichen. Wir werden ihn im folgenden stets in der Form des zum Linienelement (1) gehörigen zweiten *Beltramischen Differentialparameter*

$$(5)\qquad \Delta_2 u = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(g^{ik} \sqrt{g}\, u_i\right), \quad g = |g_{ik}| = \frac{1}{|g^{ik}|}, \quad u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

gegeben denken. Man kann im Falle von $n > 2$ unabhängigen Veränderlichen jeden selbstadjungierten Differentialausdruck

$$\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(A^{ik} u_i\right)$$

in dieser Form schreiben, indem man $g^{ik} = A^{\frac{1}{2-n}} A^{ik}$ setzt. $\left(A = \frac{1}{|A^{ik}|}\right)$ und den Ausdruck mit $\frac{1}{\sqrt{g}}$ multipliziert. Die Koeffizienten des Linienelements (1) sind dann die algebraischen Komplemente von (g^{ik}) dividiert durch die Determinante. Im übrigen ist diese Schreibweise für das Folgende nicht wesentlich; läßt man nämlich den Faktor $\sqrt{g}$ fort, so kommt in den zu entwickelnden Formeln bloß überall eine Funktionaldeterminante als Faktor vor. Die Koeffizienten g^{ik} mögen im ganzen betrachteten Bereiche T mit hinreichenden Stetigkeitseigenschaften versehen sein, z. B. stetige, einer Hölderschen Bedingung genügende zweite Ableitungen besitzen (auf eine möglichst weitgehende Reduktion der Voraussetzungen kommt es uns im folgenden nicht an); die Diskriminante g soll in diesem Bereiche wesentlich positiv sein.

Unseren Differentialausdruck multiplizieren wir nun mit dem Volumelement $dV = \sqrt{g}\, dx_1 \ldots dx_n$ und integrieren über ein (beschränktes) Gebiet G; dieses soll ganz in T liegen und durch eine zweimal stetig differenzierbare Hyperfläche F begrenzt sein, die wir uns durch die Gleichungen (2′) gegeben denken. Durch partielle Integration erhalten wir in bekannter Art die sog. *zweite Formel von Green*, die wir in folgender Form schreiben können:

$$(6)\qquad \iiint_G (v\,\Delta_2 u - u\,\Delta_2 v)\, dV = \iint_F \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n}\right) do.$$

Dabei wurde, wie auch im folgenden, der Übersichtlichkeit halber durch ein dreifaches Integrationszeichen ein n-dimensionales Gebietsintegral bezeichnet, durch das Doppelintegral das $(n-1)$-fache Integral über dessen Rand. Ferner ist das Oberflächenelement do durch (3) definiert, während

$$(7)\qquad \frac{\partial}{\partial n} = \sum_{l,k=1}^{n} g^{lk} \frac{D_k}{\sqrt{\sum g^{ij} D_i D_j}} \frac{\partial}{\partial x_l}$$

ist[4]); es ist das die *normierte Differentiation in der Richtung der Normale auf die Randfläche* im Sinne unserer Riemannschen Maßbestimmung, und zwar ist dadurch bei geschlossenen Hyperflächen die *äußere* Normale festgelegt. Man kann das leicht bestätigen, wenn man die Beziehung

$$\sum_{k,s} D_k \frac{\partial x_k}{\partial \lambda_s} d\lambda_s = 0$$

beachtet, die sich aus den Gleichungen (4) und (2) ergibt. Die allgemeine Greensche Formel hat demnach so geschrieben genau dieselbe Form wie diejenige für den Laplaceschen Ausdruck. Insbesondere ist die so normierte Differentiation in der Normalenrichtung bei einer Kugel mit dem Radius r gleich der Differentiation nach dem Radius r, wie man direkt aus den Differentialgleichungen der geodätischen Linien bestätigt, oder indem man die Entfernung r als unabhängige Veränderliche in das Linienelement einführt.

Den allgemeinsten *nicht selbstadjungierten* Differentialausdruck schreiben wir in der Form

$$(8) \qquad L(u) = \Delta_2 u + \sum_{i=1}^{n} b_i u_i + cu = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,k} \frac{\partial}{\partial x_k} (g^{ik} \sqrt{g}\, u_i) + \sum_i b_i u_i + cu;$$

als den dazu *adjungierten* Ausdruck müssen wir in unserer Schweibweise

$$(9) \qquad M(v) = \Delta_2 v - \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i \sqrt{g}\, v) + cv$$

ansehen. Wie vorhin erhalten wir durch Produktintegration

$$(10) \qquad \iiint_G \{v L(u) - u M(v)\} dV = \iint_F \left\{ v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} + N u v \right\} do$$

mit

$$(11) \qquad N = \sum_i \frac{b_i D_i}{\sqrt{\sum_{l,k} g^{lk} D_l D_k}} = \sum_i b_i \cos(n, x_i);$$

$\frac{\partial}{\partial n}$ bezeichnet wiederum die Differentiation in der (äußeren) Normalenrichtung der Randfläche.

Man kann nun diese Formeln mit genau denselben Ergebnissen anwenden, wie man es in der Potentialtheorie tat, wenn man eine *Grundlösung* der Differentialgleichung benutzt. Eine solche hat bekanntlich

---

[4]) Diese Definition unterscheidet sich von der üblichen Differentiation in der „*Transversalenrichtung*" durch den Faktor $\frac{1}{\sqrt{g}\sqrt{\sum g^{ij} D_i D_j}}$; vgl. z. B. J. Hadamard, Lectures on Cauchys Problem in linear partial differential Equations, New Haven 1923.

E. E. Levi[5]) mit Hilfe der Fredholmschen Theorie konstruiert; ihr *Hauptteil* ist

$$\frac{1}{\left\{\sum_{i,k} g_{ik}(x_i-\xi_i)(x_i-\xi_k)\right\}^{\frac{n-2}{2}}}.$$

Es erspart uns manche Abschätzungen, wenn wir statt dessen eine Grundlösung benutzten, deren Hauptteil

$$\frac{1}{s^{n-2}}$$

ist, wobei s die geodätische Entfernung des Punktes (x) vom Aufpunkt (ξ) ist. Die Konstruktion ist natürlich dieselbe, sogar etwas einfacher, als bei E. E. Levy; wesentlich ist bloß zu zeigen, daß $\Delta_2\left(\frac{1}{s^{n-2}}\right)$ von der Größenordnung $\frac{1}{s^{n-1}}$ ist[6]).

Diese Grundlösung $\Gamma(x,\xi)$ der selbsadjungierten Gleichung ist außerhalb des Punktes (ξ) zweimal stetig nach den Koordinaten x_i differenzierbar; wir können sie, solange wir uns auf einen begrenzten Bereich be-

---

[5]) E. E. Levi, Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali. Rend. del circ. mat. Palermo **24** (1907), S. 275—317, insb. S. 311 ff.

[6]) Man sieht das am einfachsten, indem man die *kanonischen Koordinaten* von Riemann benutzt. Dieses Koordinatensystem $(\mathfrak{x}_1,\ldots,\mathfrak{x}_n)$ ist so gewählt, daß die Gleichungen der vom Punkte $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ ausgehenden geodätischen Linien mit der Bogenlänge s als Parameter die Form

$$\mathfrak{x}_\alpha = c_\alpha s,\qquad c_\alpha = \text{konst.} = \left(\frac{d\mathfrak{x}_\alpha}{ds}\right)_{s=0}$$

erhalten, wobei natürlich $\sum_{i,k} g_{ik}c_i c_k = 1$ sein muß, wenn die Form (g_{ik}) auf die Koordinaten $\mathfrak{x}_\alpha$ bezogen ist. Bezeichnet man mit g^0_{ik} den Wert von g_{ik} im Punkte (ξ), d. h. $\mathfrak{x}_\alpha = 0$, so wird insbesondere

$$\sum g^0_{ik}c_i c_k = 1 \quad\text{oder}\quad s^2 = \sum g^0_{ik}c_i c_k s^2 = \sum g^0_{ik}\mathfrak{x}_i\mathfrak{x}_k,$$

d. h. die geodätische Entfernung ist eine quadratische Form in diesen Koordinaten mit *konstanten* Koeffizienten. Diese Beziehung braucht auch Hadamard bei seiner Konstruktion der Grundlösung und findet sie auf anderem Wege (a. a. O. S. 84–90). Herr Herglotz hat nun gezeigt (vgl. „Zur Riemannschen Metrik", Berichte der sächsischen Akademie der Wiss. **73** (1921), S. 215; siehe auch Math. Annalen **93** (1925), S. 47), daß die Normalkoordinaten charakterisiert sind durch das Bestehen der n Identitäten

$$\sum g_{ik}c_k \equiv \sum g^0_{ik}c_k \qquad (i=1,\ldots,n),$$

woraus sich mühelos $\Delta_2\left(\frac{1}{s^{n-2}}\right) = -(n-2)\frac{1}{s^{n-1}}\frac{\partial \log\sqrt{g}}{\partial s}$ ergibt. Herr Herglotz setzt zwar die Koeffizienten analytisch voraus, doch dürfte das nicht notwendig sein. Unsere Behauptung kann man jedenfalls auch im allgemeinen Falle nachrechnen.

schränken, immer *positiv* voraussetzen, indem wir ihr eventuell eine Konstante hinzufügen. Um unsere Formeln möglichst den bekannten aus der Potentialtheorie anzupassen, können wir daher gelegentlich unter Auszeichnung eines Punktes (ξ) die Grundlösung in der Form

$$\Gamma(x;\xi)=\frac{1}{\varrho^{n-2}} \tag{12}$$

schreiben. Es ist dann ϱ beständig positiv, für $x_i \neq \xi_i$ regulär und es wird

$$\lim_{(\xi)\to(x)}\frac{s}{\varrho}=\lim_{s\to 0}\frac{s}{\varrho}=1.$$

Die Hyperflächen $\varrho=$ konst. sind (für hinreichend kleine Werte der Konstanten) geschlossen, und speziell bestimmt die Gleichung $\varrho=0$ nur den Punkt (ξ). Führt man die Größe ϱ und $n-1$ geeignete Parameter $\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1}$ auf den Hyperflächen $\varrho=$ konst. als neue Koordinaten ein, was innerhalb eines gewissen Bereiches immer möglich ist, so erhält das Linienelement die Form [7])

$$ds^2=a_0\,d\varrho^2+\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1}a_{\alpha\beta}\,d\varphi_\alpha\,d\varphi_\beta. \tag{13}$$

Das Koordinatensystem hat im Nullpunkte dieselbe Irregularität wie die gewöhnlichen Polarkoordinaten: die Diskriminante verschwindet wie ϱ^{2n-2}.

Das vorhin bestimmte *Oberflächenelement* berechnet sich für diese Flächen zu $\sqrt{a}\,d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-1}$, wenn a die Diskriminante der Form $\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1}a_{\alpha\beta}\,d\varphi_\alpha\,d\varphi_\beta$ bedeutet (*nicht* des Linienelements; das Volumelement des Raumes ist demnach $\sqrt{a_0 a}\,d\varrho\,d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-1}$); die Differentiation in der Normalrichtung erweist sich gleich $\frac{1}{\sqrt{a_0}}\frac{\partial}{\partial\varrho}$. Es ist nun wichtig zu bemerken, daß der Ausdruck $\sqrt{\frac{a}{a_0}}$ die Größe ϱ nur als Faktor ϱ^{n-1} enthält, so daß $\frac{1}{\varrho^{n-1}}\sqrt{\frac{a}{a_0}}=\Phi(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})$ *von ϱ nicht mehr abhängt.* In unserem Koordinatensystem wird nämlich

$$\Delta_2 u=\frac{1}{\sqrt{a_0 a}}\left\{\left(\sqrt{\frac{a}{a_0}}\,u_\varrho\right)_\varrho+\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1}\frac{\partial}{\partial\varphi_\beta}\left(a^{\alpha\beta}\sqrt{a_0 a}\,u_{\varphi_\alpha}\right)\right\}, \tag{14}$$

wobei jetzt auch die $a^{\alpha\beta}$ *bezüglich der $(n-1)$-reihigen Matrix* der $a_{\alpha\beta}$ gebildet sind. Da nun $u=\frac{1}{\varrho^{n-2}}$ eine Lösung sein muß, so folgt die Be-

[7]) Man kann immer die φ_i so wählen, daß die die Produkte enthaltenden „gemischten Glieder" verschwinden; vgl. z. B. Darboux, G., Théorie des Surfaces 2, 2. Aufl., (1915), S. 522.

hauptung unmittelbar. Daher ist insbesondere auch

$$(15)\qquad \iint\limits_{\varrho=\text{konst.}} \frac{1}{\varrho^{n-1}}\sqrt{\frac{a}{a_0}}\,d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-1} = E(\xi_1,\ldots,\xi_n)$$

eine von ϱ unabhängige beständig positive Größe.

§ 3.

Folgerungen. Der Mittelwertsatz.

Nun sind wir imstande diese Ergebnisse genau so wie in der Potentialtheorie anzuwenden und dadurch die bekannten Eigenschaften der Potentialfunktionen auf die Lösungen der allgemeinen selbstadjungierten elliptischen Differentialgleichung zu übertragen.

Setzen wir zunächst in die Greensche Formel $v = \Gamma(x;\xi) = \frac{1}{\varrho^{n-2}}$ ein, so müssen wir bei der Integration den Punkt $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$, falls er sich innerhalb des Integrationsgebietes befindet, etwa durch eine Hyperfläche $\varrho = \varepsilon$ ausschließen. Der Beitrag dieser Hyperfläche zum $(n-1)$-fachen Integral auf der rechten Seite ist nach dem Gesagten (das negative Vorzeichen wegen der umgekehrten Orientierung)

$$-\iint\limits_{\varrho=\varepsilon}\left(\frac{u_\varrho}{\varrho^{n-2}}+(n-2)\frac{u}{\varrho^{n-1}}\right)\frac{1}{\sqrt{a_0}}\,do$$

$$= -\iint\limits_{\varrho=\varepsilon}\left(\frac{u_\varrho}{\varrho^{n-2}}+(n-2)\frac{u}{\varrho^{n-1}}\right)\sqrt{\frac{a}{a_0}}\,d\varphi_1\ldots d\varphi_{n-1}.$$

Da nun $\sqrt{\frac{a}{a_0}} = \varrho^{n-1}\,\Phi(\varphi_1,\ldots,\varphi_{n-1})$ ist, so verschwindet für $\varepsilon\to 0$ das Integral über den ersten Summanden, während das zweite in der Grenze $(n+2)\,E(\xi)\,u(\xi)$ ergibt. Es ist demnach für jeden Punkt (ξ) im Innern des Integrationsgebietes

$$(16)\qquad (n+2)\,E(\xi)\,u(\xi) = -\iiint\limits_G \frac{1}{\varrho^{n-2}}\Delta_2 u\,dV + \iint\limits_F\left(\frac{u_n}{\varrho^{n-2}} - u\frac{\partial\frac{1}{\varrho^{n-2}}}{\partial n}\right)do.$$

Diese Formel stellt jede Lösung der Gleichung $\Delta_2 u = f(x_1,\ldots,x_n)$ dar als das „Potential" einer räumlichen „Massenverteilung" mit der Dichte f, und einer einfachen sowie einer „Doppelbelegung" auf dem Rande. Für Punkte (ξ) außerhalb des Integrationsgebietes wird natürlich

$$(16')\qquad -\iiint\limits_G \frac{1}{\varrho^{n-2}}\Delta_2 u\,dV + \iint\limits_F\left(\frac{u_n}{\varrho^{n-2}} - u\frac{\partial\frac{1}{\varrho^{n-2}}}{\partial n}\right)do = 0;$$

das ist wiederum die bekannte Sprungrelation, auf die sich aber alle übrigen zurückführen lassen.

Wir können diese Formel insbesondere auf Lösungen der Gleichung $\Delta_2 u = 0$ anwenden, so erhalten wir ein Analogon zum bekannten *Mittelwertsatz,* wenn wir für G das durch eine Hyperfläche $\varrho = \text{konst.} = A$ begrenzte Gebiet wählen und statt $\frac{1}{\varrho^{n-2}}$ die am Rande verschwindende Funktion $v = \frac{1}{\varrho^{n-2}} - \frac{1}{A^{n-2}}$ einsetzen. Wir erhalten

$$(n-2)\, E(\xi)\, u(\xi) = -\iint\limits_{\varrho = A} u \frac{\partial \frac{1}{\varrho^{n-2}}}{\partial n}\, do$$

oder ausgerechnet

$$(17) \quad u(\xi) = \frac{1}{E(\xi)} \iint\limits_{\varrho = A} u \frac{1}{\varrho^{n-1}\sqrt{a_0}}\, do = \frac{1}{E(\xi)} \iint\limits_{\varrho = A} u\, \Phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-1}.$$

Der Faktor von u unter dem Integrationszeichen ist beständig positiv und *hängt nicht von* ϱ *ab*; es ist weiter $E(\xi) \iint\limits_{\varrho = A} \Phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-1}$, so daß wir das genaue Analogon zum Mittelwertsatz vor uns haben, der den Funktionswert in einem Punkte (ξ) ausdrückt als Mittelwert der Funktionswerte auf einer beliebigen Hyperfläche Grundlösung = konst. mit diesem Punkt als Mittelpunkt. Nur ist hier die Funktion nicht bloß mit dem Oberflächenelement multipliziert, sondern noch mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{a_0}}$, welcher eben bewirkt, daß das Integral unabhängig wird von der speziellen Fläche der Schar. Im euklidischen Falle ist $a_0 = 1$, und auch in nichteuklidischen Räumen mit konstantem Krümmungsmaß (sog. „projektiven Räumen“) hängt a_0 bloß von ϱ ab; die Flächen $\varrho = \text{konst.}$ sind hier, wie man leicht nachrechnet, Kugeln, so daß die Analogie noch größer wird.

Selbstredend ergibt sich nun in bekannter Weise der Satz von der *Nichtexistenz eines Extremwertes* (im weiteren Sinne) usf. Im Falle von analytischen Koeffizienten folgt auch der *analytische Charakter* der Lösungen und die Möglichkeit der *analytischen Fortsetzung.* Wenn die Koeffizienten für *alle* Wertsysteme $x_1, \ldots, x_n$ den Differenzierbarkeitsannahmen genügen und beschränkt bleiben, so zwar, daß die Grundlösung im Unendlichen von der Ordnung $n-2$ verschwindet, so gilt auch das potentialtheoretische Analogon zum bekannten Satz von Liouville. Herr Sternberg[8]) hat übrigens gezeigt, daß man die Koeffizienten über einen gegebenen Bereich stets so fortsetzen kann, daß die Gleichung außerhalb einer gewissen Kugel mit der Laplaceschen Gleichung übereinstimmt. Für die so fortgesetzte Gleichung gilt der Satz immer.

---

[8]) A. a. O., S. 296–297.

Wir hätten auch von einer *nicht selbstadjungierten* Differentialgleichung

$$(8')\qquad \Delta_2 u + \sum_i b_i u_i + c u = 0$$

ausgehen können. Bezeichnet für den Moment $\frac{1}{\varrho^{n-2}}$ eine im Punkte (ξ) unendlich werdende Grundlösung der zu dieser Gleichung *adjungierten Gleichung*

$$(9')\qquad \Delta_2 v - \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}(b_i \sqrt{g}\, v) + c v = 0,$$

so erhalten wir wie vorhin gemäß (10)

$$(17')\qquad u(\xi) = \frac{1}{E'(\xi)} \iint\limits_{\varrho = A} u \frac{1}{\varrho^{n-1}\sqrt{a_0}}\, do,$$

da ja das Zusatzintegral $\iint\limits_{\varrho=A} N u \left(\frac{1}{\varrho^{n-2}} - \frac{1}{A^{n-2}}\right) do$ verschwindet. Natürlich ist jetzt der Faktor $\frac{1}{\varrho^{n-1}}\sqrt{\frac{a}{a_0}}$ nicht mehr von ϱ unabhängig, und es ist jetzt

$$(15')\qquad E'(\xi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint\limits_{\varrho = \varepsilon} \frac{1}{\varrho^{n-1}\sqrt{a_0}}\, do.$$

Im übrigen ist zu bemerken, daß im Gegensatz zur Gleichung (17) diese Formel nicht unbeschränkt gültig ist, da jetzt die Grundlösung sehr wohl verschwinden kann und in diesem Falle die Transformation auf die neuen Koordinaten $\varrho, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ ungültig wird. Für hinreichend kleine Gebiete (jedenfalls solange die erste Randwertaufgabe lösbar ist) bleibt die Formel bestehen. Sie stellt den allgemeinsten Mittelwertsatz dar und umfaßt jenen von H. Weber[9]) für die spezielle Gleichung $\Delta u + K^2 u = 0$ ($K =$ konst.), bei welcher die Flächen $\varrho =$ konst. natürlich Kugeln sind und der Faktor $\frac{1}{\sqrt{a_0}}$ nur von ϱ abhängt.

Aus der Gleichung (17′) ergibt sich unmittelbar, daß eine Lösung u der Differentialgleichung (8′), die *in einem Bereiche ihr Vorzeichen nicht wechselt, daselbst auch nirgends verschwinden kann,* es sei denn, daß sie identisch Null ist; denn der Integrand wechselt ja in einer gewissen Umgebung eines jeden Punktes sein Vorzeichen nicht und kann daher auch nicht verschwinden. Daraus folgt nach einer Bemerkung von Herrn

---

[9]) Vgl. z. B. Encyklopädie der math. Wiss. 2 A, 7: Sommerfeld, Randwertaufgaben in der Theorie der partiellen Differentialgleichung, S. 541–542; oder auch H. Weber, Über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + K^2 u = 0$, Math. Annalen 1 (1869), S. 1–36.

Lichtenstein der Satz, daß eine (nicht konstante) Lösung dieser Differentialgleichung im Falle, daß $c = 0$, *weder ein Maximum noch ein Minimum (selbst im weiteren Sinne) haben kann.* Würde nämlich eine Lösung u in einem Punkte etwa einen Maximalwert M annehmen, so wäre die Funktion $M - u$, die ja auch eine Lösung der Differentialgleichung ist, in einer gewissen Umgebung des betreffenden Punktes nicht negativ, während der Punkt selbst eine Nullstelle dieser Funktion wäre. Das ist aber, wie eben gezeigt wurde, nicht möglich. Daraus folgen dann auch die Eindeutigkeitssätze für den Fall $c < 0$ und ähnliche Sätze.

§ 4.

Raum- und Oberflächenintegrale.

Wir kommen auf die selbstadjungierte Gleichung $\Delta_2 u = 0$ zurück. Man kann natürlich in Analogie zur Laplaceschen Gleichung „Potentiale" von räumlich oder flächenhaft verteilten „Massen" und von Doppelbelegungen betrachten. Das hat schon Herr Sternberg getan, und hat dabei die bekannten Sprungrelationen wiedergefunden. Er benutzt indessen ziemlich umständliche Abschätzungen, während man auch die äußerst einfachen Beweise von Herrn Erhard Schmidt übertragen kann. Die Analogie geht auch noch weiter, indem auch die Sätze über die analytische Fortsetzbarkeit gelten und im Sinne unserer allgemeinen Maßbestimmung sogar die *Gaußsche geometrische Deutung des „Potentials"* einer homogenen Doppelbelegung erhalten bleibt. Für den ersten Teil dieser Sätze übertragen sich die bekannten Sätze direkt, und es erübrigt sich daher näher darauf einzugehen; als Beispiel sei bloß die Poissonsche Gleichung hergeleitet.

Für unsere Potentiale benutzen wir zweckmäßig nicht eine beliebige Grundlösung, sondern normieren sie mit Herrn Sternberg so, daß das Integral (15) etwa immer gleich 1 wird, d. h. wir benutzen als Grundlösung $K(x;\xi) = \frac{\Gamma(x;\xi)}{E(\xi)}$. Von dieser Grundlösung hat Herr Sternberg[10]) die Symmetrie in x und ξ nachgewiesen, so daß sie auch als Funktion der ξ_i betrachtet der Differentialgleichung $\Delta_2 u$ genügt. Wir haben dann Integrale der Form

$$U(\xi) = \iiint_G \mu(x) K(x;\xi) \, dV, \tag{18}$$

$$V(\xi) = \iint_F \sigma(x) K(x;\xi) \, do, \tag{19}$$

$$W(\xi) = \iint_F \tau(x) \frac{\partial K(x;\xi)}{\partial n} \, do \tag{20}$$

[10]) A. a. O., S. 298.

zu betrachten, wobei μ, σ, τ mit hinreichenden Stetigkeitseigenschaften versehene Verteilungsfunktionen sind. Um etwa die Poissonsche Gleichung für (18) zu beweisen, betrachten wir mit Herrn E. Schmidt eine Hilfsfunktion v, die im Bereiche G der Differentialgleichung $\Delta_2 v = \mu$ genügt.

Es ist dann

$$U(\xi) = \iiint_G \Delta_2 v\, K(x;\xi)\, dV;$$

um die Greensche Formel anwenden zu können, müssen wir zunächst den Punkt (ξ) ausschließen und erhalten mit Rücksicht auf die Beziehungen (15) und $K(x;\xi) = \frac{\Gamma(x;\xi)}{E(\xi)}$ in bekannter Weise

$$u(\xi) = v(\xi) + \iint_F \left(v \frac{\partial K}{\partial n} - K \frac{\partial v}{\partial n}\right) do,$$

wenn F den Rand des Bereiches G bezeichnet. Da das Integral links eine reguläre Lösung der Differentialgleichung $\Delta_2 u = 0$ ist (wobei der Operator natürlich nach den Veränderlichen ξ_i genommen wird), so folgt ohne weiteres $\Delta_2 u = \Delta_2 v = \mu(\xi)$, und das ist die zu beweisende Poissonsche Gleichung

Ebenso übertragen sich die Beweise für die anderen Sprungrelationen und verwandten Sätze.

Wir betrachten nun eine homogene Doppelschicht mit der Dichte 1:

$$W(\xi) = \iint_F \frac{\partial \Gamma(x;\xi)}{\partial n}\, do, \tag{21}$$

wobei F ein hinreichend stetiges, nicht notwendig geschlossenes Flächenstück ist, Γ eine *beliebige* Grundlösung bedeutet und der Punkt (ξ) außerhalb des Flächenstücks F gewählt wurde. Wir wählen als passendes Koordinatensystem etwa das in § 2 definierte und setzen voraus, daß das Flächenstück F von jeder Kurve $\varphi_\alpha = \text{konst.}$ $(\alpha = 1, \ldots, n-1)$ höchstens in einem Punkte geschnitten wird (sonst müßten wir das Flächenstück in einige Teilbereiche zerlegen und unsere Betrachtungen auf jeden einzelnen anwenden). Beschränken wir uns auf einen Bereich, in dem unsere Koordinaten regulär sind, so wird die Hyperfläche F durch die n Gleichungen

$$\varrho = \varrho(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}), \qquad \varphi_\alpha = \varphi_\alpha(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \quad (\alpha = 1, \ldots, n-1)$$

auf die Parameter $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ bezogen. Setzen wir noch

$$D_0 = \frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})}{\partial(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})} \quad \text{usf.},$$

so wird

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial n} = \frac{\partial\left(\frac{1}{\varrho^{n-2}}\right)}{\partial n} = \frac{n-2}{\varrho^{n-1}} \frac{1}{a_0} \frac{D_0}{\sqrt{\frac{1}{a_0} D_0^2 + \sum\limits_{\alpha,\beta=1}^{n-1} a^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta}} = \frac{n-2}{\varrho^{n-1}} \cos(\varrho, n)$$

und

$$do = \sqrt{a_0 a}\sqrt{\frac{1}{a_0} D_0^2 + \sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} a^{\alpha\beta} D_\alpha D_\beta}\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{n-1}.$$

Dabei wurde die Normalenrichtung *umgekehrt,* so daß wir hier im Falle einer geschlossenen Fläche die *innere* Normalenrichtung gewählt haben. Daher wird

$$\text{(22)} \qquad W = (n-2) \iint \frac{1}{\varrho^{n-1}} \sqrt{\frac{a}{a_0}}\, D_0\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{n-1}$$
$$= (n-2) \iint \Phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-1}.$$

Der Integrand hängt, wie im § 2 ausgeführt wurde, nicht von ϱ ab; das Integral wird über denjenigen Teil der Hyperflächen $\varrho = $ konst. erstreckt, auf welches das Flächenstück F durch die Kurven $\varphi_\alpha = $ konst. projiziert wird. Wir erhalten also das Potential der homogenen Doppelschicht als *ein Integral über den betreffenden Teil der Hyperfläche* $\varrho = 1$ (oder überhaupt $\varrho = $ konst.). Im Falle der Laplaceschen Gleichung ist das insbesondere die Einheitskugel, und da $a_0 = 1$ wird, ist der Integrand das Oberflächenelement, so daß das Potential durch den räumlichen Winkel, unter dem das Flächenstück F vom Punkte (ξ) aus gesehen wird, gegeben ist. Im allgemeinen Fall kommt überall das Oberflächenelement mit dem Faktor $\frac{1}{\sqrt{a_0}}$ multipliziert vor, welcher bewirkt, daß der Integrand nicht mehr von ϱ abhängt, und eben dadurch entspricht das Integral (22) vollkommen dem räumlichen Winkel. Speziell im „nichteuklidischen“ Fall wo a_0 nur von ϱ abhängt, haben wir wiederum die Oberfläche der Einheitskugel multipliziert mit einer *reinen Zahl.*

Ist die Hyperfläche F geschlossen und befindet sich der Punkt (ξ) im Innern, so wird $W = (n-2)\, E(\xi)$, während im Äußeren $W = 0$ wird. Das ist die bekannte Sprungrelation. Hätten wir statt Γ die normierte Grundlösung K^* benutzt, so wäre selbstredend $E = 1$.

Man kann ebenso auch die allgemeinere Gaußsche Formel übertragen, die sich auf das Potential

$$U(\xi) = \iiint_G \mu(x)\, K(x; \xi)\, dV$$

bezieht. Beachtet man nämlich, daß für alle Punkte innerhalb des Gebietes G $\Delta_2 U = \mu$ und außerhalb $\Delta_2 U = 0$ ist, so ergibt die Greensche Formel ähnlich wie bei der Laplaceschen Gleichung[11]), daß das Integral

$$\iint_F \frac{\partial U}{\partial n}\, do,$$

[11]) Vgl. z. B. E. Goursat, Cours d'Analyse mathématique **3**, S. 280 (3. Aufl. 1923).

(wobei nun nach ξ_i differenziert und integriert wird), erstreckt über eine beliebige, das Gebiet G nicht schneidende geschlossene Hyperfläche, *gleich ist der von dieser Fläche eingeschlossenen „Gesamtmasse"*, d. h. $\iiint\limits_G \mu\, dV$ bzw. Null. (Der übliche Faktor vom Betrage der Kugeloberfläche fehlt bei uns infolge der Normierung der Grundlösung.)

§ 5.

Sätze von Harnack.

Der erste Harnacksche Satz der Potentialtheorie besagt bekanntlich, daß eine Folge von in einem abgeschlossenen Bereiche regulären Potentialfunktionen gleichmäßig *konvergiert, falls die Randwerte es tun, und daß die Grenzfunktionen wiederum der Laplaceschen Gleichung genügt.* Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem Satz vom Maximum und Minimum, und gilt daher ohne weiteres für die Lösungen der Gleichungen (8'), falls $c \leqq 0$. Herr Lichtenstein[12]) hat aber den Satz auch für die allgemeine Gleichung (8') mit zwei unabhängigen Veränderlichen bewiesen, und sein Beweis kann wörtlich auf den Fall von n Veränderlichen übertragen werden, da er bloß den Satz für Potentialfunktionen und die Greensche Funktion benutzt.

Der zweite Harnacksche Satz lautet: *Wenn eine Folge* (regulärer) *nichtnegativer Potentialfunktionen in einem Punkte konvergiert, so konvergiert sie auch in jedem Punkte des Bereiches und zwar wiederum gegen eine Potentialfunktion.* Man beweist gewöhnlich diesen Satz, indem man aus der Poissonschen Formel durch Abschätzungen zum Hilfssatz gelangt: Sind P und Q zwei beliebige Punkte eines Kreises, so gibt es zwei Konstanten N und M, so daß in unmittelbar verständlicher Bezeichnung die Ungleichung

$$Nu(Q) \leqq u(P) \leqq Mu(Q) \tag{23}$$

gilt für *jede* in diesem Kreise reguläre und positive Potentialfunktion. Aus dieser Ungleichung ergibt sich unmittelbar eine eben solche für den ganzen Bereich, und daraus folgt dann der zu beweisende Satz leicht.

Wir sind nach dem Vorangegangenen imstande, ohne weiteres für die (positiven) Lösungen der *allgemeinsten* (homogenen) Differentialgleichung

$$\Delta_2 u + \sum b_i u_i + cu = 0 \tag{8'}$$

eine Ungleichung wie (23) herzuleiten, und dadurch den Harnackschen Satz zu übertragen.

[12]) L. Lichtenstein, Randwertaufgaben der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. I. Crelles Journ. **142** (1913), S. 1–40, insb. S. 14–15.

Betrachten wir einen willkürlich gewählten Punkt $P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ im Bereiche und die Schar der Hyperflächen $\Gamma(x; \xi) =$ konst. um diesen Punkt, wobei $\Gamma(x; \xi)$ die Grundlösung der *adjungierten* Differentialgleichung $(9')$ ist. Für eine hinreichend kleine Umgebung gilt der verallgemeinerte Mittelwertsatz $(17')$,

$$u(P) = \frac{1}{E'(P)} \iint\limits_{\varrho = A} u \frac{1}{\varrho^{n-1} \sqrt{a_0}} \, do,$$

wobei u eine beliebige Lösung der Differentialgleichung, und

$$do = \sqrt{a} \, d\varphi_1 \ldots d\varphi_{n-1}$$

ist. Andererseits erhalten wir, wenn wir mit $G(x; \mathfrak{x})$ die am Rande $\varrho = A$ verschwindende Greensche Funktion der adjungierten Differentialgleichung[13]) bezeichnen, aus den Greenschen Formeln in bekannter Weise den Funktionswert in einem beliebigen inneren Punkte $Q(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)$

$$(24) \qquad u(Q) = -\frac{1}{(n-2) E'(\mathfrak{x})} \iint\limits_{\varrho = A} u \frac{\partial G(x; \mathfrak{x})}{\partial n} \, do$$

$$= -\frac{1}{(n-2) E'(\mathfrak{x})} \iint\limits_{\varrho = A} u \frac{\partial G(x; \mathfrak{x})}{\partial \varrho} \frac{1}{\sqrt{a_0}} \, do.$$

Der Vergleich dieser beiden Formeln ergibt sofort, daß speziell für den Mittelpunkt ξ die Greensche Funktion

$$G(x; \xi) = -\frac{1}{A^{n-2}} + \frac{1}{\varrho^{n-2}}$$

ist. Nun ist für hinreichend kleine Werte A, auf die wir uns beschränkten, die Grundlösung und somit auch ϱ beständig positiv; dasselbe gilt von der Größe a_0 wegen dem elliptischen Charakter der Differentialgleichung $\left(\frac{1}{a_0}\right.$ ist ja der Koeffizient von u_ϱ in der Schreibweise von $\left.(14)\right)$. Es ist also der Faktor unter dem Integralzeichen (24) für $\mathfrak{x} = \xi$ positiv. Aus Stetigkeitsgründen gibt es daher eine ganze *abgeschlossene* Umgebung U des Punktes (ξ), so daß $-\frac{\partial G(x; \mathfrak{x})}{\partial n} = -\frac{1}{\sqrt{a_0}} \frac{\partial G}{\partial \varrho}$ für *alle* Punkte $(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_n)$ dieser Umgebung und alle Punkte $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ der Hyperfläche $\varrho = A$ wesentlich positiv wird, und dasselbe gilt dann auch von $-\frac{1}{\varrho^{n-1}} \frac{\partial G}{\partial \varrho}$. Da nun die Hyperfläche $\varrho = A$ und ebenso die Umgebung U abgeschlossen sind, muß die Funktion ein *positives* Minimum μ und Maximum M haben.

---

13) Die Existenz dieser Greenschen Funktion ist klar, da wir uns auf hinreichend kleine Umgebungen beschränken.

Setzen wir auch von der Lösungsfunktion u voraus, daß sie nirgends negativ ist, so folgt aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\frac{\mu}{E(\xi)}\iint\limits_{\varrho=A} u\frac{1}{\varrho^{n-1}\sqrt{a_0}}\,do \leqq u(\mathfrak{x}) \leqq \frac{M}{E(\xi)}\iint\limits_{\varrho=A} u\frac{1}{\varrho^{n-1}\sqrt{a_0}}\,do. \tag{25}$$

Das hier auftretende Integral ist das des Mittelwertsatzes (17′) und somit ergibt sich

$$\mu\, u(\xi) \leqq u(\mathfrak{x}) \leqq M u(\xi); \tag{25'}$$

dabei ist $(\mathfrak{x})$ ein *beliebiger* Punkt der Umgebung U, und die Konstanten μ und M hängen *nicht von der besonderen Wahl* der Funktion u ab. Dieselbe Ungleichung gilt für alle positiven Lösungsfunktionen u. Offenbar gilt auch für zwei *beliebige* Punkte $(\mathfrak{x})$ und $(\mathfrak{x}_1)$ des Bereiches U eine Ungleichung

$$\mu_1 u(\mathfrak{x}_1) \leqq u(\mathfrak{x}) \leqq M_1 u(\mathfrak{x})$$

mit $\mu_1 = \frac{\mu}{M}$, $M_1 = \frac{M}{\mu}$. Für *jeden* Punkt (ξ) kann man so eine Umgebung U finden. Nach dem bekannten Borelschen Überdeckungssatz genügen endlich viele dieser Umgebungen zur Überdeckung des ganzen Bereiches, und daraus folgert man, daß es für *jedes* Punktpaar (ξ) und $(\mathfrak{x})$ des Bereiches zwei Zahlen μ_0 und M_0 gibt, so daß die Ungleichung

$$\mu_0 u(\xi) \leqq u(\mathfrak{x}) \leqq M_0 u(\xi) \tag{26}$$

gilt, für *jede* nicht negative Lösungsfunktion. Daraus folgt ohne weiteres, daß jede Folge solcher Lösungsfunktionen im ganzen Bereiche konvergiert (und zwar gleichmäßig), falls sie in einem Punkte (ξ) konvergiert. Aus der Gleichung (24) folgt weiter, daß die Grenzfunktion derselben Differentialgleichung genügt. Es ist also der *zweite Harnacksche Satz allgemein bewiesen für alle nicht negativen (d. h. aber nach § 3 positiven) Lösungsfunktionen der Differentialgleichung* (8′), selbst für Gebiete, für welche die Randwertaufgabe nicht lösbar ist. Im Falle zweier unabhängiger Veränderlicher wurde dieser Satz auf anderem Wege bereits von Herrn Lichtenstein bewiesen[14]).

Kiel, den 5. Februar 1929.

[14]) L. Lichtenstein, Beiträge zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Unendliche Folgen positiver Lösungen. Rendiconti del circolo mat. Palermo **33** (1912), S. 201–211.

(Eingegangen am 1. 3. 1929.)