Über das Dämpfungsproblem der mathematischen Physik, mit einer Anwendung auf die Akustik großer Räume[1]).

Von

M. J. O. Strutt in Eindhoven (Niederlande).

Durch die Arbeiten von Poincaré, Fredholm, Hilbert u. a. sind die Entwicklungssätze für Eigenwertaufgaben mit reellen, symmetrischen Kernen, also *reellen* Eigenwerten im weiten Umfange sichergestellt. Die anschließende und in der Physik für die Debijesche Theorie der spezifischen Wärme und die Jeanssche Theorie der Hohlraumstrahlung wichtige Aufgabe der asymptotischen Berechnung von Eigenwerten für beliebige Gebiete wurde von Weyl mittels der Theorie der Integralgleichungen und von Courant durch Anwendung der Variationsrechnung gelöst. Auch für akustische Probleme ist diese asymptotische Kenntnis der Eigenwerte, wie Sommerfeld dartat, prinzipiell wichtig.

In Wirklichkeit sind die in der mathematischen Physik auftretenden Schwingungsaufgaben vielfach mit Dämpfung behaftet, was sich stets in einem Ausklingen angeregter freier Schwingungen kundtut.

Die namentlich für die Akustik wichtige Aufgabe der Berechnung dieser An- und Abklingungsvorgänge, sowie der unter Zwang sich einstellenden stationären Amplituden führt auf Entwicklungsprobleme, die über den durch die oben erwähnten Arbeiten behandelten Bereich hinausgreifen.

W. Sabine [2]) hat in der experimentellen Akustik einen Satz entdeckt, der für die Konstruktion von Räumen von grundlegender Bedeutung ist. Er lautet, daß die *Nachhalldauer eines genügend großen Raumes lediglich von der gesamten Oberfläche des dämpfenden Materiales und vom Volumen abhängt, nicht aber von der Form.* Es liegt nahe, diesen Satz dem von Lorentz ausgesprochenen und von Weyl bewiesenen an die Seite zu stellen,

---

[1]) Mathematische Bearbeitung eines Vortrages, der in der «Nederlandsche Natuurkundige Vereeniging» zu Amsterdam am 26. Januar 1929 gehalten wurde.

[2]) Collected Papers, S. 34.

nachdem asymptotisch die reellen Eigenwerte eines Raumes nur vom Volumen abhängen. Der Sabinesche Satz, der bisher nur durch Reflexionsbetrachtungen, denen unübersehbare Phasenverhältnisse anhaften, bewiesen wurde, stellt sich als eine asymptotische Eigenschaft der *komplexen* Eigenwerte *gedämpfter* Schwingungsprobleme heraus.

Im Gegensatz zur reichen Literatur über ungedämpfte Aufgaben ist jene über gedämpfte Probleme auffallend arm. O. Faber[3]) hat in einer grundlegenden Arbeit für eindimensionale Gebiete Entwicklungssätze aufgestellt und asymptotisch die Eigenwerte berechnet. Seine Beweisführung stützt sich wesentlich auf die asymptotische Kenntnis der Eigenfunktionen und der Greenschen Funktion für die eindimensionale Aufgabe. Für mehrere Dimensionen besitzen wir diese Kenntnis nicht und ist also ein vom Faberschen abweichender, allgemein gehaltener Rechnungsgang notwendig. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, gestützt auf eine einzige Integralgleichung, sowohl die asymptotische Berechnung der komplexen Eigenwerte, des Verhaltens der Eigenfunktionen vorzunehmen, als die Entwicklungssätze für gedämpfte Schwingungsaufgaben abzuleiten. Die Form der hier gegebenen Entwicklungen weicht von derjenigen Fabers ab. Anschließend wird als Anwendung der oben erwähnte Sabinesche Satz bewiesen.

I. Asymptotisches Verhalten der Eigenwerte und Eigenfunktionen.

Das *Dämpfungsproblem der mathematischen Physik* kann folgendermaßen formuliert werden. Gesucht ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$(1)\qquad L[u] \equiv \frac{\partial}{\partial x}\left(p(xyz)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{\partial u}{\partial z}\right) - q(xyz)\,u$$
$$= \varrho(xyz)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + w(xyz)\frac{\partial u}{\partial t} \qquad [p > 0],$$

welche auf der Gebietsgrenze eines ganz im Endlichen gelegenen Gebietes der Gleichung

$$(2)\qquad \sigma(xyz)\,u + \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (n \text{ äußere Normale})$$

genügt. Über die Begrenzung des Gebietes machen wir dabei die Voraussetzung, daß sie aus endlich vielen stetigen Flächen zusammengesetzt sei. Um das Problem zu einem vollständig bestimmten zu machen sind noch zwei Anfangsbedingungen für einen fest gewählten Punkt $t = t_0$ vorzugeben. Doch stellen wir dieses Anfangswertproblem und die zu ihrer Lösung notwendigen Entwicklungssätze bis Abschnitt 3 zurück.

---

[3]) Diss. Straßburg 1914 (Ref. v. Mises). Vgl. auch A. C. Dixon, Proc. London math. Soc. (2) **3** (1905), S. 83, sowie T. J. I'A. Bromwich, ibid. (2) **15** (1914) S. 444—446.

Wir setzen:

$$u = v(xyz)\, e^{-j\sqrt{\lambda}\, t} \qquad (j = \sqrt{-1}),$$

wodurch (1) sich schreibt:

$$L(v) + \varrho\lambda v + jw\sqrt{\lambda}\, v = 0. \tag{1a}$$

Man erkennt leicht, daß diese Separation die einzig mögliche ist.

Gesucht sind also zunächst die Eigenwerte und Eigenfunktionen der homogenen Randaufgabe (1a), (2).

Unter Benutzung einer Greenschen Funktion

$$G(xyz, \xi\eta\zeta),$$

die den Bedingungen:

a) G genügt überall im Gebiet der Gleichung (1a) mit $\lambda = 0$ in xyz und in $\xi\eta\zeta$ außer im Punkte $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$;

b) G genügt auf der Gebietsgrenze der Gleichung (2), außer für $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$;

c) Im Punkte $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$ verhält G sich so, daß ihre Normalableitung, integriert über einer kleinen Kugelfläche K um diesen Punkt herum die Bedingung

$$\lim_{K\to 0} \iint_K \frac{\partial G}{\partial n}\, dK = -\frac{1}{p}$$

befriedigt;

d) G ist eine stetige Funktion von xyz und $\xi\eta\zeta$

genügt, läßt sich diese Randaufgabe als eine lineare homogene Integralgleichung:

$$\begin{aligned} v(xyz) = \lambda \iiint G(xyz, \xi\eta\zeta)\, \varrho(\xi\eta\zeta)\, v(\xi\eta\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \\ + j\sqrt{\lambda} \iiint G(xyz, \xi\eta\zeta)\, w(\xi\eta\zeta)\, v(\xi\eta\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \end{aligned} \tag{3}$$

schreiben [4]).

Vorausgesetzt, daß ϱ durchweg positiv ist:

$$\varrho > 0,$$

kann man statt (3) schreiben:

$$\begin{aligned} v &= \lambda \iiint G\varrho v \left[1 + j\frac{w}{\varrho\sqrt{\lambda}}\right] d\xi\, d\eta\, d\zeta \\ &= \lambda \left\{ \iiint G\varrho v\, d\xi\, d\eta\, d\zeta + O\left(\frac{1}{\sqrt{|\lambda|}}\right) \right\}. \end{aligned} \tag{3a}$$

Aus (3a) geht hervor, daß die Eigenwerte und Eigenfunktionen von (3) bis auf Glieder der Ordnung $|\lambda^{-\frac{1}{2}}|$, wie man durch Störungsrechnung be-

[4]) Aus (3) ist abzuleiten, daß die Eigenfunktionen v_i *nicht orthogonal* im gewöhnlichen Sinne zueinander sind.

weist, für $\lim |\lambda| \to \infty$ mit den reellen Eigenwerten und Eigenfunktionen der Gleichung

$$v = \lambda \iiint G \varrho v \, d\xi \, d\eta \, d\zeta, \tag{4}$$

zusammenfallen.

Insbesondere gelten also asymptotisch für die Eigenwerte von (3) die von Weyl und Courant abgeleiteten Formeln.

Aus (3a) geht hervor, daß die Eigenwerte von (3) sich asymptotisch schreiben

$$+\sqrt{\lambda} = \alpha + j\beta, \tag{5}$$

wo

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| = O\left(\frac{1}{\alpha}\right).$$

Diese Gleichungen gestatten, asymptotisch auch den *Dämpfungsteil* β der Eigenwerte zu berechnen. Ich werde dies für eine, zwei und drei Dimensionen ausführen.

a) Eine Dimension.

Ohne Dämpfung gilt hier für die Eigenwerte von (4):

$$\lim_{n \to \infty} \lambda = \alpha^2 = \frac{n^2 \pi^2}{\left(\int \sqrt{\frac{\varrho}{p}}\, dx\right)^2} + O(1) \quad (n \text{ ganze Zahl}). \tag{6}$$

Mit Dämpfung ist nach (3a) ϱ zu ersetzen durch

$$\varrho \left(1 + j \frac{w}{\varrho \sqrt{\lambda}}\right),$$

also $\sqrt{\varrho}$ durch

$$\sqrt{\varrho} \left(1 + j \frac{w}{2 \varrho \sqrt{\lambda}}\right),$$

so daß aus (6) unter Benutzung von (5) folgt:

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta j = \frac{n^2 \pi^2}{\left(\int \sqrt{\frac{\varrho}{p}}\, dx + \frac{j}{2\alpha} \int \frac{w}{\sqrt{\varrho p}}\, dx\right)^2} = \alpha^2 - j\alpha \frac{\int \frac{w}{\sqrt{\varrho p}}\, dx}{\int \sqrt{\frac{\varrho}{p}}\, dx},$$

also:

$$\lim_{\alpha \to \infty} \beta = -\frac{1}{2} \frac{\int \frac{w}{\sqrt{\varrho p}}\, dx}{\int \sqrt{\frac{\varrho}{p}}\, dx} + O\left(\frac{1}{\alpha}\right). \tag{7}$$

Hiermit haben wir Fabers Formeln wiedergefunden.

b) Zwei Dimensionen.

Aus den Eigenwerten von (4) ohne Dämpfung

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \lambda = \alpha^2 = \frac{4n\pi}{\iint \frac{\varrho}{p}\, dx\, dy} + O(\alpha \ln \alpha) \tag{8}$$

schließt man ähnlich wie oben:

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta j = \alpha^2 - j\alpha \frac{\iint \frac{w}{p}\, dx\, dy}{\iint \frac{\varrho}{p}\, dx\, dy},$$

also:

$$\lim_{\alpha\to\infty} \beta = -\frac{1}{2} \frac{\iint \frac{w}{p}\, dx\, dy}{\iint \frac{\varrho}{p}\, dx\, dy} + O\left(\frac{\ln \alpha}{\alpha}\right). \tag{9}$$

c) Drei Dimensionen.

Hier liefert die Abschätzung

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \lambda^{\frac{3}{2}} = \alpha^3 = \frac{6\pi^2 n}{\iiint \left(\frac{\varrho}{p}\right)^{\frac{3}{2}} dx\, dy\, dz} + O(\alpha^2 \ln \alpha) \tag{10}$$

in ähnlicher Weise

$$\lim_{\alpha\to\infty} \beta = -\frac{1}{2} \frac{\iiint \frac{w}{p} \sqrt{\frac{\varrho}{p}}\, dx\, dy\, dz}{\iiint \left(\frac{\varrho}{p}\right)^{\frac{3}{2}} dx\, dy\, dz} + O\left(\frac{\ln \alpha}{\alpha}\right). \tag{11}$$

Die Formeln (3) bis (11) lösen das in diesem Abschnitt gestellte Problem. Ihre Betrachtung erlaubt, sofort asymptotisch die komplexen Eigenwerte von (3) für beliebig viele Dimensionen hinzuschreiben.

II. Die allgemeine Greensche Funktion.

Wir machen im folgenden einen wesentlichen Gebrauch von der verallgemeinerten Greenschen Funktion (Resolvente oder Grundlösung), die zuerst von Poincaré[5]) eingeführt wurde, und definieren sie als eine Funktion

$$K(xyz, \xi\eta\xi, \lambda),$$

welche die nachfolgenden Bedingungen erfüllt:

a) Sie genügt in xyz und in $\xi\eta\zeta$ der Gleichung (1a) im ganzen Gebiet außer für $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$;

[5]) Rendiconti del Circolo matematico di Palermo 8 (1894), S. 189.

b) K genügt der Bedingung (2) wieder mit Ausnahme des Punktes $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$;

c) Im Punkte $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$ verhält K sich so, daß ihre Normalableitung, integriert über einer kleinen Kugelfläche F um diesen Punkt herum der Bedingung

$$\lim_{F \to 0} \oiint_F \frac{\partial K}{\partial n} dF = -\frac{1}{p}$$

genügt;

d) K ist eine stetige Funktion von $x y z$ und $\xi \eta \zeta$.

Diese Greensche Funktion läßt sich mit Hilfe der früher eingeführten gewöhnlichen Greenschen Funktion G bestimmen aus der Gleichung

$$(12) \quad \begin{aligned} K(x y z, \xi \eta \zeta, \lambda) = {} & G(x y z, \xi \eta \zeta) + \lambda \iiint G(x y z, \mathfrak{x} \mathfrak{y} \mathfrak{z}) \, \varrho(\mathfrak{x} \mathfrak{y} \mathfrak{z}) \\ & \times K(\mathfrak{x} \mathfrak{y} \mathfrak{z}, \xi \eta \zeta, \lambda) \, d\mathfrak{x} \, d\mathfrak{y} \, d\mathfrak{z} + j \sqrt{\lambda} \iiint G(x y z, \mathfrak{x} \mathfrak{y} \mathfrak{z}) \\ & \times w(\mathfrak{x} \mathfrak{y} \mathfrak{z}) \, K(\mathfrak{x} \mathfrak{y} \mathfrak{z}, \xi \eta \zeta, \lambda) \, d\mathfrak{x} \, d\mathfrak{y} \, d\mathfrak{z}, \end{aligned}$$

wie man durch Operieren mit L beweist und die unter Heranziehung der Fredholmschen Theorie erlaubt, die Existenz und den meromorphen Charakter von K einzusehen, sobald man die Existenz von G als bewiesen annimmt. Analog, wie (3) gestattete, auf (3a) und (4) zu schließen, erhellt aus (12), daß K asymptotisch für $\lim |\lambda| \to \infty$ zusammenfallen wird mit der verallgemeinerten Greenschen Funktion K^*, die der Differentialgleichung

$$L[K^*] + \lambda \varrho K^* = L[G]$$

genügt und somit zu (1a) mit $w = 0$ gehört, welche Funktion K^* sich, wie bekannt, in eine konvergente bilineare Reihe nach den Eigenfunktionen von (4) entwickeln läßt[6]):

$$(13) \qquad K^*(x y z, \xi \eta \zeta, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{v_i(x y z) \, v_i(\xi \eta \zeta)}{(\lambda_i - \lambda) \iiint \varrho \, v_i^2 \, dx \, dy \, dz}.$$

Wir schließen, daß die Entwicklung von K für sehr große $|\lambda|$ in (13) übergehen muß bis auf einen Fehler der Ordnung $|\lambda^{-\frac{1}{2}}|$.

Hiermit ist die Grundlage geschaffen für die Anwendung des Cauchyschen Residuensatzes (Partialbruchzerlegung) zur Entwicklung der Funktion K nach ihren Polen in der komplexen λ-Ebene.

Durch Betrachtung der asymptotischen Eigenwertabschätzungen des vorigen Abschnittes erhellt, daß sich in dieser Ebene von einem gewissen $|\lambda|$ an eine nach Unendlich gehende Folge von Konturen k_n angeben läßt, die keinen Eigenwert treffen.

---

[6]) Z. B. A. Sommerfeld, Phys. Zeitschr. **11** (1910), S. 1057.

Um zu beweisen, daß die Cauchysche Formel

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_{k_n} \frac{K(xyz,\xi\eta\zeta,\mu)}{\mu-\lambda}\,d\mu = K(xyz,\xi\eta\zeta,\lambda)+\sum_{i=1}^{n}\frac{R(\lambda_i)}{\lambda-\lambda_i},$$

wo $R(\lambda_i)$ das Residuum von K für $\lambda=\lambda_i$ bedeutet und die Summe über alle innerhalb k_n gelegenen Pole zu erstrecken ist, gilt, muß gezeigt werden, daß alle Pole von K einfach sind.

Wegen der Symmetrie von G in (12) läßt sich für K leicht eine Integralgleichung mit symmetrischem Kern:

$$K(xyz,\xi\eta\zeta,\lambda)\sqrt{\varrho(xyz)+j\frac{w(xyz)}{\sqrt{\lambda}}} = G(xyz,\xi\eta\zeta)\sqrt{\varrho(xyz)+j\frac{w(xyz)}{\sqrt{\lambda}}}$$

$$+\lambda\iiint G(xyz,\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})\sqrt{\varrho(xyz)+j\frac{w(xyz)}{\sqrt{\lambda}}}$$

$$\times\sqrt{\varrho(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})+j\frac{w(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})}{\sqrt{\lambda}}}\left\{K(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z},\xi\eta\zeta,\lambda)\cdot\sqrt{\varrho(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})+j\frac{w(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})}{\sqrt{\lambda}}}\right\}d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y}\,d\mathfrak{z}$$

anschreiben. Nach einem bekannten Satze kann jetzt

$$K(xyz,\xi\eta\zeta,\lambda)\sqrt{\varrho(xyz)+j\frac{w(xyz)}{\sqrt{\lambda}}}$$

nur einfache Pole haben. Gleiches gilt also von $K(xyz,\xi\eta\zeta,\lambda)$.

Weiter muß, um die Partialbruchzerlegung durchzuführen, bewiesen werden, daß die linke Seite der Cauchyschen Gleichung nach Null strebt für $n\to\infty$.

Hierzu genügt es, zu zeigen, daß die Entwicklung

$$K(xyz,\xi\eta\zeta,\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{R(\lambda_i)}{\lambda_i-\lambda}$$

für $|\lambda|\to\infty$ zu Recht besteht. Denn, da in der Cauchyschen Gleichung $|\lambda|$ innerhalb k_n liegt, ist $|\lambda|\to\infty$ identisch mit $n\to\infty$. Das *asymptotische* Bestehen der letzten Gleichung zieht also das Verschwinden der linken Seite in Cauchys Formel für $n\to\infty$ nach sich. Wir haben aber oben gezeigt, daß die Entwicklung von K für $|\lambda|\to\infty$ in (13) übergehen muß, womit die *allgemeine* Existenz der zuletzt angeschriebenen Entwicklung für K bewiesen ist[7]).

---

[7]) Das Verschwinden der linken Seite der Cauchyschen Gleichung für $n\to\infty$ und somit $|\mu|\to\infty$, das den Kernpunkt unserer Überlegung bildet, läßt sich einfach direkt folgendermaßen beweisen.

Für $|\mu|\to\infty$ schließt man aus Gleichung (12):

$$\lim_{|\mu|\to\infty} K(xyz\xi\eta\zeta\mu)=K^*(xyz\xi\eta\zeta\mu)\{1+O|\mu^{-\frac{1}{2}}|\},$$

wo K^* die im Text angegebene Bedeutung hat.

(Fortsetzung der Fußnote [7]) auf nächster Seite.)

III. Bilinearformeln und Entwicklungssatz.

Zur Berechnung von $R(\lambda_i)$ überlegen wir, daß nach der Fredholmschen Theorie $K(xyz, \xi\eta\zeta, \lambda)$ gegeben ist durch den Quotienten zweier ganzer transzendenter Funktionen von λ, wobei der Nenner nur von λ abhängt. Für $\lambda \to \lambda_i$ strebt dieser Nenner wie $\lambda_i - \lambda$ nach Null, woraus hervorgeht, daß das Residuum $R(\lambda_i)$ von K für $\lambda \to \lambda_i$ bestimmt wird durch die zur Gleichung (12) gehörige homogene Integralgleichung.

Da $G(xyz, \xi\eta\zeta)$ ein reeller symmetrischer Kern ist, müssen auch $K(xyz, \xi\eta\zeta, \lambda)$ und $R(xyz, \xi\eta\zeta, \lambda_i)$ symmetrisch in xyz und $\xi\eta\zeta$ sein. Dann folgt aber, daß die Gleichung

$$R(xyz, \xi\eta\zeta, \lambda_i) = \lambda_i \iiint G(xyz, \mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})\,\varrho(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})\,R(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}, \xi\eta\zeta, \lambda_i)$$
$$\times d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y}\,d\mathfrak{z} + j\sqrt{\lambda_i}\iiint G(xyz, \mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})\,w(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})\,R(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}, \xi\eta\zeta, \lambda_i)\cdot d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y}\,d\mathfrak{z}$$

nur die Lösungen

$$R(xyz, \xi\eta\zeta, \lambda_i) = c_i v_i(xyz)\, v_i(\xi\eta\zeta),$$

wo v_i Eigenfunktionen von (3) sind, haben kann. Unsere noch übrigbleibende Aufgabe ist jetzt, die Koeffizienten c_i, die für jedes endliche λ_i notwendig beschränkt sind, zu berechnen.

Indessen werden wir zunächst den Entwicklungssatz erledigen und erst ganz zuletzt die Berechnung von c_i, bei der man vorteilhaft vom Entwicklungssatz Gebrauch machen kann, vornehmen.

Das Ergebnis der bisherigen Betrachtungen kann dahin zusammengefaßt werden, *daß die verallgemeinerte Greensche Funktion* $K(xyz, \xi\eta\zeta, \lambda)$ *der Gleichung* (1a) *in eine konvergente bilineare Reihe*

$$K(xyz, \xi\eta\zeta, \lambda) = \sum_i \frac{c_i v_i(xyz)\, v_i(\xi\eta\zeta)}{\lambda_i - \lambda} \tag{14}$$

Für K^* gilt aber wegen des Bestehens der konvergenten Bilinearreihe (13) sicher:

$$\lim_{n\to\infty} \oint_{k_n} \frac{K^*(xyz\xi\eta\zeta\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu = 0.$$

Folglich ist auch

$$\lim_{n\to\infty} \oint_{k_n} \frac{K(xyz\xi\eta\zeta\mu)}{\lambda-\mu}\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \oint_{k_n} \frac{K^*(1+O\,|\,\mu^{-\frac{1}{2}}|)}{\lambda-\mu}\,d\mu = 0, \quad \text{q. e. d.}$$

Ich möchte hier bemerken, daß dieses asymptotische Verschwinden des Konturintegrales den Schlüssel enthält zur Erweiterung des sogenannten Heavisideschen Theorems auf kontinuierliche Systeme, welche von T. J. I'A. Bromwich in seiner bekannten Arbeit „Normal Coordinates in Dynamical Systems" (Proc. London Mathem. Soc. (2) **15** (1916), S. 420) auf anderem Wege versucht worden ist, aber nach seiner eigenen Angabe sogar für eine Dimension nicht streng durchgeführt werden konnte.

nach den Eigenfunktionen von (3) *entwickelt werden kann. Insbesondere besagt* (14), *daß für die Greensche Funktion* $G(xyz, \xi\eta\zeta)$ *im gewöhnlichen Sinne auch bei Eigenwertproblemen mit Dämpfung die Formel*

$$(15) \qquad G(xyz, \xi\eta\zeta) = \sum_i \frac{c_i v_i(xyz) v_i(\xi\eta\zeta)}{\lambda_i}$$

gültig ist, wo v_i *und* λ_i *Eigenfunktionen und Eigenwerte von* (3) *darstellen*[8]).

Wenn man für die Gleichung (1a) mit $w = 0$ beweisen könnte, daß (13) und die hieraus für $\lambda = 0$ hervorgehende Bilinearreihe für G *gleichmäßig* konvergieren, würde durch unsere Überlegungen auch die gleichmäßige Konvergenz von (14) und (15) folgen. Da aber die gleichmäßige Konvergenz von (13) für mehr als eine Dimension *nicht* bewiesen ist, können wir auch nur auf die gleichmäßige Konvergenz von (14) und (15) für eine Dimension schließen[9]).

Die Aufgabe, eine Funktion F nach den Eigenfunktionen von (3) zu entwickeln, läßt sich lösen, wenn für F die Operation:

$$L[F] + \lambda\varrho F + j\sqrt{\lambda}\, w F = -f$$

zu einer Funktion f führt, die, mit einer Eigenfunktion v_i von (3) multipliziert und über das ganze Gebiet integriert, für jedes i ein beschränktes Ergebnis liefert:

$$\left| \iiint f(xyz)\, v_i(xyz)\, dx\, dy\, dz \right| < M.$$

Dies ist insbesondere erfüllt, wenn f selber beschränkt, also F zweimal stetig nach xyz differenzierbar ist.

Für eine solche Funktion F kann man mit Hilfe von K schreiben:

$$(17) \quad F(xyz) = \iiint K(xyz, \xi\eta\zeta, \lambda) f(\xi\eta\zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = \sum_i \frac{c_i f_i v_i(xyz)}{\lambda_i - \lambda},$$

mit

$$f_i = \iiint f(xyz)\, v_i(xyz)\, dx\, dy\, dz.$$

Die Rechtfertigung der gliedweisen Integration von (14) muß, da die gleichmäßige Konvergenz von (14) nicht feststeht, indirekt stattfinden, dadurch, daß die gleichmäßige Konvergenz von (17) bewiesen wird.

---

[8]) Für mehr als eine Dimension konvergieren die Reihen (14) und (15) nicht mehr für $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$.

[9]) Wohl beweist man leicht, daß die Lösung von (12) sich in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe:

$$K(xyz, \xi\eta\zeta, \lambda) = G(xyz, \xi\eta\zeta) + \lambda \sum_i \frac{c_i v_i(xyz) v_i(\xi\eta\zeta)}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)}$$

entwickeln läßt, wo v_i und λ_i Eigenfunktionen und Eigenwerte von (3) sind.

Hierzu überlegen wir wieder, daß die Eigenfunktionen v_i und Eigenwerte λ_i von (1a) für $i \to \infty$ in jene von (4) übergehen mit einem Fehler der Ordnung $|\lambda^{-\frac{1}{2}}|$. Die Reihe:

$$F = \sum_i \frac{f_i^* v_i^* (x y z)}{\lambda_i^* \iiint \varrho (v_i^*)^2 \, dx \, dy \, dz}, \tag{17a}$$

wo

$$L[F] = -f^*; \qquad F = \iiint G(xyz, \xi\eta\xi) f^*(\xi\eta\zeta) \, d\xi \, d\eta \, d\zeta;$$
$$f_i^* = \iiint f^*(xyz) \, v_i^*(xyz) \, dx \, dy \, dz$$

und v_i^* und λ_i^* Eigenfunktionen und Eigenwerte von (4) sind, konvergiert absolut und gleichmäßig. Hieraus schließen wir auf die absolute und gleichmäßige Konvergenz von (17) für jedes endliche λ. Andrerseits ist (17) nichts anderes als die Cauchysche Partialbruchzerlegung von F, so daß wir bewiesen haben, *daß jede zweimal stetig differenzierbare Funktion F in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe nach den Eigenfunktionen v_i von* (1a), (2) *entwickelt werden kann gemäß* (17).

In Fabers früher erwähnter Arbeit steht in (17) in unsrer Bezeichnung $\sqrt{\lambda_i} - \sqrt{\lambda}$ im Nenner und dementsprechend etwas andere c_i, die aber λ nicht enthalten. Obwohl Fabers Form der unsrigen äquivalent ist, erlaubt sie nicht, den Sabineschen Satz unmittelbar einzusehen, im Gegensatz zur vorliegenden.

Die Gleichung (17) genügt, die in der mathematischen Physik bei Anfangsaufgaben und linearen nicht homogenen Randaufgaben (erzwungene Schwingung) auftretenden Entwicklungsfragen zu erledigen,

Bei der Berechnung von c_i, die wir zum Schluß dieses Abschnittes vornehmen, machen wir von (16) Gebrauch und schreiben v_i an die Stelle von F:

$$L[v_i] + \lambda \varrho v_i + j \sqrt{\lambda} w v_i = -f = (\lambda - \lambda_i) \varrho v_i + j (\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda_i}) w v_i,$$

wodurch in (17) die Größen f_i

$$f_i = (\lambda_i - \lambda) \left\{ \iiint \varrho v_i^2 \, dx \, dy \, dz + \frac{j}{\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda_i}} \iiint w v_i^2 \, dx \, dy \, dz \right\}$$

werden. Hiernach lassen wir λ sich dem Werte λ_i unbeschränkt nähern:

$$\lambda \to \lambda_i,$$

wodurch alle f_i nach Null streben. Aus (17) erhellt, daß alle Reihenglieder verschwinden, außer dem Gliede mit dem Zeiger i, so daß (17) sich schreibt:

$$v_i = c_i v_i \left\{ \iiint \varrho v_i^2 \, dx \, dy \, dz + \frac{j}{2\sqrt{\lambda_i}} \iiint w v_i^2 \, dx \, dy \, dz \right\}. \tag{18}$$

Aus (18) geht sofort hervor:

$$(19) \qquad c_i = \left\{ \iiint \varrho v_i^2 \, dx\, dy\, dz + \frac{j}{2\sqrt{\lambda_i}} \iiint w v_i^2 \, dx\, dy\, dz \right\}^{-1},$$

womit der noch fehlende Koeffizient in der Entwicklung (14) gefunden ist.

Die entstehende Reihe (14), (19) erlaubt, nachträglich den bereits früher aus (12) gezogenen Schluß zu verifizieren, nachdem die Entwicklung (14) von K asymptotisch in die Entwicklung (13) von K^* übergeht.

IV. Über die Akustik großer Räume.

Experimentell werden die akustischen Verhältnisse von Räumen oft durch die Nachhalldauer charakterisiert. Diese ist gegeben durch die Zeit, welche die Schallintensität in einem bis zum stationären Zustand mit einem Ton, dessen Wellenlänge klein ist gegenüber den Raumdimensionen, angeblasenen Raume braucht, um bis zur Hörbarkeitsschwelle herabzusinken. Die Messungen werden dahin reduziert, daß im Ergebnis die Anfangsintensität ein bestimmtes Vielfaches, etwa das Millionenfache der Schwellenintensität beträgt. Sabines in der Einleitung erwähnte Satz besagt, daß die so gemessene Nachhalldauer in genügend großen Räumen nur von der gesamten Oberfläche des dämpfenden Materiales, jeweils mit einer Dämpfungskonstanten multipliziert, und dem Volumen abhängt, und zwar der zuerst genannten Größe umgekehrt, der zuletzt genannten direkt proportional ist. Diesen Satz beabsichtige ich hier im Limes, für ein Verhältnis der erregenden Wellenlänge zu Raumdimensionen, das nach Null strebt, abzuleiten.

In Räumen ist bei akustischen Problemen, wie eben erwähnt, die Dämpfung nicht stetig über das ganze Gebiet verteilt, sondern nur an der Gebietsbegrenzung vorhanden. Unsre erste Aufgabe ist, zu untersuchen, wie eine solche Dämpfungsverteilung sich in unsren Formeln kundtut.

Zunächst zeigt die Betrachtung etwa der Courantschen Ableitung von (6), (8) und (10), daß ein Parameter in den Randbedingungen, also ein Abändern von (2) in irgendwelche andere homogene Randbedingungen, keinen Einfluß auf diese asymptotische Schätzung hat.

Folglich kann auch die Ableitung von (7), (9) und (11) in derselben Weise wie oben durchgeführt werden und muß nachträglich in diesen Formeln durch einen Grenzprozeß, der Poincarés „Méthode de Balayage“ für Potentialaufgaben nachgebildet ist, dem Umstand Rechnung getragen werden, daß w im Raume überall verschwindet, während doch β endlich bleibt.

Man kann dies einfach dadurch erreichen, daß etwa das Raumintegral im Zähler von (11) auf ein zwischen der Grenze und einer sich der Grenze eng anschmiegenden Fläche eingeschlossenes Gebiet erstreckt wird. Ist dn das Längenelement normal zu diesen Flächen, df das Element der Flächen selber, so schreibt sich das genannte Integral:

$$\iint df \int dn \frac{w}{p} \sqrt{\frac{\varrho}{p}}.$$

Läßt man die zwei Flächen genügend eng zusammenrücken, so sind im Intervall senkrecht zu und zwischen diesen Flächen ϱ und p konstant. Wir machen nun auch w in diesem Intervall konstant und gleich

$$\frac{r}{\varepsilon},$$

wenn ε den senkrechten Abstand bei den Flächen bezeichnet[10]. Durch diese Schreibweise findet man an Stelle von (11):

$$\text{(11a)} \qquad \lim_{\alpha \to \infty} \beta = -\frac{1}{2} \frac{\iint \frac{r}{p} \sqrt{\frac{\varrho}{p}}\, df}{\iiint \left(\frac{\varrho}{p}\right)^2 dx\, dy\, dz} + O\left(\frac{\ln \alpha}{\alpha}\right).$$

Analoge Gleichungen wie (11a) lassen sich im ein- und zweidimensionalen Fall anschreiben.

Schließlich möchte ich noch bemerken, daß w und r beliebige *beschränkte* für großes $|\lambda|$ schwach veränderliche Funktionen von λ sein können, ohne daß sich an den vorhergegangenen Überlegungen etwas Wesentliches ändert. Hierdurch sind wir im akustischen Problem in der Lage, irgendeine passende Annahme über die Art der Dämpfung zu machen; z. B. fällt die Dämpfung an porösen Wänden in den Bereich unsrer Formeln.

Zum Beweis des Sabineschen Satzes ist es zunächst notwendig, die stationäre in einem Raume sich unter der Einwirkung einer rein periodischen Schallquelle einstellende Amplitude des Geschwindigkeitspotentiales Φ zu berechnen. Hierzu haben wir die Differentialgleichung:

$$L[\Phi] + \lambda \varrho \Phi + j \sqrt{\lambda}\, w \Phi = -F,$$

wo F die Quellenverteilung repräsentiert und w das oben besprochene Verhalten zeigt, etwa unter der Randbedingung (2) zu lösen. Die stationäre Φ-Amplitude ergibt sich hierbei aus der Entwicklungsformel (17) des vorigen Abschnittes zu

$$\Phi = \sum_i \frac{c_i v_i(xyz)}{\lambda_i - \lambda} \iiint F v_i\, dx\, dy\, dz.$$

---

[10]) Dieses Unendlichwerden von w hat auf die Schätzung (3a) keinen Einfluß, da dort nur das *Integral* über w in Frage kommt.

Zieht man noch die Zeitabhängigkeit des Geschwindigkeitspotentiales sowie der erregenden Quellenverteilung:

$$\Phi_0 = \Phi\, e^{-j\sqrt{\lambda}\, t},$$
$$F_0 = F\, e^{-j\sqrt{\lambda}\, t}$$

in Betracht, so ergibt sich für Φ_0 und $\frac{\partial \Phi_0}{\partial t}$ zur Zeit $t = t_0$:

$$(20) \quad \begin{cases} (\Phi_0)_{t=t_0} = e^{-j\sqrt{\lambda}\, t_0} \sum\limits_i \frac{c_i \iiint F v_i\, dx\, dy\, dz}{\lambda_i - \lambda} v_i(xyz); \\ \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial t}\right)_{t=t_0} = -j\sqrt{\lambda}\, e^{-j\sqrt{\lambda}\, t_0} \sum\limits_i \frac{c_i F_i}{\lambda_i - \lambda} v_i(xyz). \end{cases}$$

Zur Zeit $t = t_0$ soll die erregende Quelle ihre Tätigkeit einstellen. Dann bestimmt sich das Abklingen von Φ_0 in der Folgezeit aus

$$(21) \quad \Phi_0 = \sum_i A_i v_i(xyz)\, e^{(\beta_i + j\alpha_i)(t-t_0)} + \sum_i B_i v_i^*(xyz)\, e^{(\beta_i - j\alpha_i)(t-t_0)}.$$

(Stern bedeutet konjugiert komplexen Wert.)

Die Koeffizienten A_i und B_i sind aus den Anfangsbedingungen (20) zu berechnen.

Mein Ziel ist, zu zeigen, daß alle A_i und B_i unterhalb einem gewissen, sehr großen Indexwert i beliebig wenig von Null verschieden sind, falls $|\lambda| \to \infty$ wächst. Wenn dies der Fall ist, zeigt (21), daß das Abklingen von Φ_0, da β_i für $i \to \infty$ von i unabhängig wird und durch (11) bzw. (11a) gegeben ist, in einem durch die zuletzt genannten Gleichungen bestimmten Tempo stattfindet, d. h. nur vom Raumvolumen und vom Dämpfungsintegral in der vom Sabineschen Satze geforderten Weise abhängt. Andrerseits ist klar, daß A_i und B_i die eben genannte Bedingung erfüllen, wenn in beiden Gleichungen (20) die Koeffizienten von v_i unterhalb einem gewissen, sehr großen i absolut beliebig klein werden für $|\lambda| \to \infty$. Zunächst ist hierzu notwendig, von der Quellenverteilung F zu fordern, daß die Integrale

$$\left| \iiint F(xyz)\, v_i(xyz)\, dx\, dy\, dz \right|$$

für beliebiges i unterhalb einer festen Schranke M bleiben. Unter dieser Voraussetzung erfüllen aber, wie sofort ersichtlich, die Koeffizienten von v_i in (20) die eben genannte Bedingung, denn

$$\left| \frac{1}{\lambda_i - \lambda} \right| \quad \text{bzw.} \quad \left| \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda_i - \lambda} \right|$$

weichen für $|\lambda| \to \infty$ bis zu einem festen, sehr großen i beliebig wenig von Null ab.

Der Sabinesche Satz ist hiermit asymptotisch als richtig nachgewiesen.

Es ist klar, daß sich dem Sabineschen nachgebildete Sätze in der Elektrodynamik und der Mechanik formulieren lassen. Allgemein kann man sagen:

Wird ein in bezug auf „elastische“ Eigenschaften homogenes Kontinuum, dessen freie Schwingungen durch (1) *beschrieben werden, bis zum stationären Zustand durch eine periodische Quelle zu Schwingungen angeregt, derart, daß die größte Wellenlänge noch klein zur größten Eigenwellenlänge des Kontinuums ist, so ist die vom Augenblick des Aussetzens der Quelle gemessene Abklingungszeit der gesamten Dämpfung umgekehrt, dem Volumen direkt proportional und unabhängig von der Gestalt des Kontinuums, der Art der Quelle, des Ortes der Messung und von dem erregenden Tone.*

Der Satz läßt sich auch beweisen für Kontinua mit Gleichungen vierter Ordnung (Platte).

Ein ähnlicher Satz gilt beim Wecken eines Systems aus dem Ruhezustande durch eine periodische Quelle hoher Frequenz. Der Anlaufvorgang ist dabei dem Abklingungsvorgang komplementär.

Eindhoven (Niederlande), Januar 1929,
Natuurkundig Laboratorium der N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken.

(Eingegangen am 22. 2. 1929.)