Auf die Riemann-Metrik und den Fern-Parallelismus gegründete einheitliche Feldtheorie.

Von

A. Einstein in Berlin.

In der folgenden Arbeit soll die von mir seit einem Jahre entwickelte Theorie so dargestellt werden, daß sie von jedem Kenner der allgemeinen Relativitätstheorie bequem verstanden werden kann. Die folgende Darstellung ist nötig, weil die Lektüre der früheren Arbeiten durch seither gefundene Zusammenhänge und Verbesserungen unnötigen Zeitverlust bedingen würde. Der Gegenstand ist so dargestellt, wie es mir für ein bequemes Eindringen am zweckmäßigsten erscheint. Insbesondere durch die Herren Weitzenböck und Cartan erfuhr ich, daß die Behandlung von Kontinua der hier in Betracht kommenden Gattung an sich nicht neu sei. Herr Cartan war so freundlich, eine Abhandlung über die Geschichte des hier in Betracht kommenden mathematischen Gegenstandes zu verfassen, damit durch sie der Inhalt meiner Darstellung ergänzt werde; dieselbe ist in dieser Zeitschrift unmittelbar nach der meinigen abgedruckt. Ich sage Herrn Cartan auch an dieser Stelle für seinen wertvollen Beitrag meinen besten Dank. Was an der vorliegenden Abhandlung das Wichtigste und jedenfalls neu ist, das ist die Auffindung der einfachsten Feldgesetze, welchen eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Fern-Parallelismus unterworfen werden kann. Auf die Frage der physikalischen Bedeutung der Theorie gehe ich nur kurz ein.

§ 1.

Die Struktur des Kontinuums.

Da die Dimensionszahl in den folgenden Überlegungen keine Rolle spielt, legen wir ein n-dimensionales Kontinuum zugrunde. Um den Tatsachen der Metrik und der Gravitation gerecht zu werden, nehmen wir die Existenz einer Riemann-Metrik an. In der Natur existieren aber auch die elektromagnetischen Felder, welche durch die Riemann-Metrik nicht dargestellt werden können. Es entsteht die Frage: Wie können wir unserem Riemannschen Raume in logisch natürlicher Weise noch eine weitere Struktur zuschreiben, derart, daß das Ganze einheitlichen Charakter hat?

Das Kontinuum ist in der Umgebung jedes Punktes P (pseudo-)euklidisch. Es existiert in jedem Punkte ein lokales kartesisches Koordinatensystem (bzw. orthogonales n-Bein), in bezug auf welches der pythagoreische Satz gilt. Die Orientierung dieser n-Beine spielt in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit keine Rolle. Wir wollen nun annehmen, daß zwischen diesen elementaren euklidischen Räumen auch noch eine Richtungsbeziehung herrscht. Wir wollen annehmen, daß es vermöge der Raumstruktur wie in der euklidischen Geometrie sinnvoll sei, von einer Parallel-Orientierung sämtlicher lokaler n-Beine zu sprechen (was in einem Raume mit *nur* metrischer Struktur sinnlos wäre). Wir denken uns die orthogonalen n-Beine im folgenden stets in Parallel-Orientierung. Die an sich willkürliche Orientierung des lokalen n-Beines in *einem* Punkte P bestimmt dann die Orientierung der lokalen n-Beine in allen Punkten des Kontinuums eindeutig. Unsere Aufgabe besteht nun zunächst darin, ein solches Kontinuum mathematisch zu beschreiben, sodann aber darin, die einfachsten beschränkenden Gesetze aufzustellen, welchen ein solches Kontinuum unterworfen werden kann. Wir tun dies in der Hoffnung, so die allgemeinen Naturgesetze abzuleiten, wie die frühere allgemeine Relativitätstheorie dies für die Gravitation unter Zugrundelegung einer bloß metrischen Raumstruktur versucht hat.

§ 2.

Mathematische Beschreibung der Raumstruktur.

Das lokale n-Bein besteht aus n aufeinander senkrechten Einheitsvektoren, deren auf ein beliebiges Gaußsches Koordinatensystem bezogene Komponenten h_s^{ν} seien. Hier wie immer soll ein unterer lateinischer Index die Zugehörigkeit zu einem bestimmten Bein des n-Beins, ein griechischer Index je nach seiner oberen oder unteren Stellung den kontravarianten bzw. kovarianten Transformationscharakter der betreffenden Größe bezüglich einer Änderung des Gaußschen Koordinatensystems zum Ausdruck bringen.

Die allgemeine Transformationseigenschaft der h_s^{ν} ist folgende. Dreht man alle Lokalsysteme bzw. n-Beine in gleicher Weise, was ja erlaubt ist, und führt man zugleich ein neues Gaußsches Koordinatensystem ein, so besteht zwischen den neuen und alten h_s^{ν} das Transformationsgesetz

$$h_s^{\nu'} = \alpha_{st} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\alpha}} h_t^{\alpha}, \tag{1}$$

wobei die konstanten Koeffizienten α_{st} ein orthogonales System bilden:

(2) $$\alpha_{sa}\alpha_{sb} = \alpha_{as}\alpha_{bs} = \delta_{ab} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } a = b, \\ 0, & \text{wenn } a \neq b. \end{cases}$$

Das Transformationsgesetz (1) läßt sich ohne weiteres auf Gebilde verallgemeinern, deren Komponenten beliebig viele lokale und Koordinaten-Indizes haben. Solche Gebilde nennen wir Tensoren. Hieraus ergeben sich die algebraischen Gesetze der Tensoren unmittelbar (Addition, Multiplikation, Verjüngung nach lateinischen und griechischen Indizes).

Die $h_s{}^\nu$ nennen wir die Komponenten des Fundamentaltensors. Hat ein Vektor im Lokalsystem die Komponenten A_s, bezüglich des Gaußschen Systems die Koordinaten A^ν, so gilt nach der Bedeutung der $h_s{}^\nu$:

(3) $$A^\nu = h_s{}^\nu A_s$$

oder — nach den A_s aufgelöst —

(4) $$A_s = h_{s\nu} A^\nu.$$

Der Tensorcharakter der normierten Unterdeterminanten $h_{s\nu}$ der $h_s{}^\nu$ ergibt sich aus (4). $h_{s\nu}$ sind die kovarianten Komponenten des Fundamentaltensors. Zwischen den $h_{s\nu}$ und $h_s{}^\nu$ gelten die Beziehungen

(5) $$h_{s\mu} h_s{}^\nu = \delta_\mu{}^\nu \begin{cases} = 1, & \text{wenn } \mu = \nu, \\ = 0, & \text{wenn } \mu \neq \nu, \end{cases}$$

(6) $$h_{s\mu} h_t{}^\mu = \delta_{st}.$$

Wegen der Orthogonalität des Lokalsystems gilt für den Betrag des Vektors

(6) $$A^2 = A_s{}^2 = h_{s\mu} h_{s\nu} A^\mu A^\nu = g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu;$$

also sind

(7) $$g_{\mu\nu} = h_{s\mu} h_{s\nu}$$

die Koeffizienten der Metrik.

Der Fundamentaltensor gestattet (vgl. (3) und (4)), lokale Indizes in Koordinatenindizes zu verwandeln und umgekehrt (durch Multiplikation und Verjüngung), so daß es nur eine Formfrage bedeutet, mit Tensoren welchen Indexcharakters man operieren will.

Es ist klar, daß auch die Beziehungen gelten

(3a) $$A_\nu = h_{s\nu} A_s,$$

(4a) $$A_s = h_s{}^\nu A_\nu.$$

Es gilt ferner die Determinanten-Relation

(8) $$g = |g_{\sigma\tau}| = |h_{\alpha\sigma}|^2 = h^2,$$

so daß die Invariante des Volumelementes $\sqrt{g}\,d\tau$ die Form $h\,d\tau$ annimmt.

Dem besonderen Charakter der Zeit wird bei unserem 4-dimensionalen Kontinuum von Raum und Zeit am bequemsten dadurch Rechnung getragen, daß die x^4-Koordinate (sowohl lokal als allgemein) rein imaginär genommen wird und ebenso alle Tensorkomponenten mit einer ungeraden Zahl von Indizes 4.

§ 3.

Differentialrelationen.

Bezeichnen wir mit δ den Zuwachs, den die Komponenten eines Vektors oder Tensors bei „Parallelverschiebung" im Sinne von Levi-Civita beim Übergang zu einem unendlich benachbarten Punkte des Kontinuums erfahren, so ist nach dem obigen

$$0 = \delta A_s = \delta\left(h_{s\alpha} A^\alpha\right) = \delta\left(h_s{}^\alpha A_\alpha\right). \tag{9}$$

Die Auflösung der Klammern ergibt

$$h_{s\alpha}\,\delta A^\alpha + A^\alpha h_{s\alpha,\beta}\,\delta x^\beta = 0,$$
$$h_s{}^\alpha\,\delta A_\alpha + A_\alpha h_s{}^\alpha{}_{,\beta}\,\delta x^\beta = 0,$$

wobei das Komma im zweiten Gliede gewöhnliche Differentiation nach x^β bedeutet. Durch Auflösen dieser Gleichungen erhält man

$$\delta A^\sigma = -A^\alpha \Delta_\alpha{}^\sigma{}_\beta\,\delta x^\beta, \tag{10}$$

$$\delta A_\sigma = \quad A_\alpha \Delta_\sigma{}^\alpha{}_\beta\,\delta x^\beta, \tag{11}$$

wobei gesetzt ist

$$\Delta_\alpha{}^\sigma{}_\beta = h_s{}^\sigma h_{s\alpha,\beta} = -h_{s\alpha} h_s{}^\sigma{}_{,\beta}. \tag{12}$$

(Die letzte Umformung beruht auf (5).)

Dies Gesetz der Parallelverschiebung ist im Gegensatz zur Riemann-Geometrie im allgemeinen nicht symmetrisch. Ist es symmetrisch, so besteht die euklidische Geometrie; denn man hat dann

$$\Delta_\alpha{}^\sigma{}_\beta - \Delta_\beta{}^\sigma{}_\alpha = 0$$

oder

$$h_{s\alpha,\beta} - h_{s\beta,\alpha} = 0.$$

Dann ist aber

$$h_{s\alpha} = \frac{\partial \psi_s}{\partial x_\alpha}.$$

Wählt man die ψ_s als neue Variable x_s', so ist

$$h_{s\alpha} = \delta_{s\alpha}, \tag{13}$$

was die Behauptung beweist.

Kovariante Differentiation. Die lokalen Komponenten A_s eines Vektors sind invariant bezüglich einer beliebigen Koordinatentransformation. Daraus folgt sofort der Tensorcharakter der Differentialquotienten

$$A_{s,\alpha}. \tag{14}$$

Ersetzt man dies auf Grund von (4a) durch

$$(h_s{}^{\sigma} A_{\sigma})_{,\alpha},$$

so ergibt sich hieraus der Tensorcharakter von

$$h_s{}^{\sigma} A_{\sigma,\alpha} + A_{\sigma} h_s{}^{\sigma}{}_{,\alpha},$$

also auch (nach Multiplikation mit $h_{s\tau}$) von

$$A_{\tau,\alpha} + A_{\sigma} h_s{}^{\sigma}{}_{,\alpha} h_{s\tau}$$

und von

$$A_{\tau,\alpha} - A_{\sigma} h_s{}^{\sigma} h_{s\tau,\alpha}$$

oder gemäß (16) von

$$A_{\tau,\alpha} - A_{\sigma} \Delta_{\tau}{}^{\sigma}{}_{\alpha}.$$

Dies bezeichnen wir als kovariante Ableitung $(A_{\tau;\alpha})$ von A_{τ}.

Wir haben so als Gesetz der kovarianten Differentiation

$$A_{\sigma;\tau} = A_{\sigma,\tau} - A_{\alpha} \Delta_{\sigma}{}^{\alpha}{}_{\tau} \tag{15}$$

gewonnen. Analog folgt aus (3) auch die Formel

$$A^{\sigma}{}_{;\tau} = A^{\sigma}{}_{,\tau} + A^{\alpha} \Delta_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\tau}. \tag{16}$$

Nun ergibt sich analog das kovariante Differentiationsgesetz für beliebige Tensoren. Wir erläutern es durch das Beispiel:

$$A_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\tau;\varrho} = A_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\tau,\varrho} + A_{\alpha}{}^{\alpha}{}_{\tau} \Delta_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\varrho} - A_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\alpha} \Delta_{\tau}{}^{\alpha}{}_{\varrho}. \tag{17}$$

Da sich vermittels des Fundamentaltensors $h_s{}^{\alpha}$ lokale (lateinische) Indizes in Koordinaten- (griechische) Indizes umwandeln lassen, so steht es frei, bei der Formulierung irgendwelcher Tensorbeziehungen die lokalen oder die Koordinaten-Indizes zu bevorzugen. Ersterer Weg wurde von den italienischen Kollegen (Levi-Civita, Palatini) bevorzugt, während ich mich vorzugsweise der Koordinatenindizes bedient habe.

Divergenz. Durch Verjüngung des kovarianten Differentialquotienten erhält man wie in dem auf die Metrik allein gegründeten absoluten Differentialkalkül die Divergenz. Z. B. erhält man aus (21) durch Verjüngung nach den Indizes σ und ϱ den Tensor

$$A_{\alpha\tau} = A_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\tau;\sigma}.$$

In früheren Arbeiten habe ich noch andere Divergenzoperatoren eingeführt, bin aber davon abgekommen, jenen Operatoren eine besondere Bedeutung zuzuschreiben.

Kovariante Differentialquotienten des Fundamentaltensors. Man findet aus den abgeleiteten Formeln leicht, daß die kovarianten Ableitungen und Divergenzen des Fundamentaltensors verschwinden. Es ist z. B.

$$h_{s\ ;\tau}^{\ \nu} \equiv h_{s\ ,\tau}^{\ \nu} + h_s^{\ \alpha} \Delta_{\alpha\ \tau}^{\ \nu} \equiv \delta_{st}(h_{t\ ,\tau}^{\ \nu} + h_t^{\ \alpha} \Delta_{\alpha\ ,\tau}^{\ \nu}) \tag{18}$$
$$\equiv h_s^{\ \alpha}(h_{t\alpha} h_{t\ ,\tau}^{\ \nu} + \Delta_{\alpha\ \tau}^{\ \nu}) \equiv h_s^{\ \alpha}(-\Delta_{\alpha\ \tau}^{\ \nu} + \Delta_{\alpha\ \tau}^{\ \nu}) \equiv 0.$$

Analog beweist man auch

$$h_{s\ ;\tau}^{\ \nu} \equiv g^{\mu\nu}_{\ \ ;\tau} \equiv g_{\mu\nu;\tau} \equiv 0. \tag{18a}$$

Ebenso verschwinden natürlich die Divergenzen $h_{s\ ;\nu}^{\ \nu}$ und $g^{\mu\nu}_{\ \ ;\nu}$.

Differentiation von Tensorprodukten. Wie in dem geläufigen Differentialkalkül läßt sich der kovariante Differentialquotient eines Tensorproduktes aus den Differentialquotienten der Faktoren ausdrücken. Sind $S_{\cdot}^{\ \cdot}$ und $T_{\cdot}^{\ \cdot}$ Tensoren von beliebigem Indexcharakter, so ist

$$(S_{\cdot}^{\ \cdot} T_{\cdot}^{\ \cdot})_{;\alpha} = S_{\cdot\ ;\alpha}^{\ \cdot} T_{\cdot}^{\ \cdot} + T_{\cdot\ ,\alpha}^{\ \cdot} S_{\cdot}^{\ \cdot}. \tag{19}$$

Hieraus und aus dem Verschwinden des kovarianten Differentialquotienten des Fundamentaltensors folgt, daß man diesen nach Belieben mit dem Differentiationszeichen (;) vertauschen kann.

„Krümmung“. Aus der Hypothese des „Fern-Parallelismus“ bzw. aus Gleichung (9) ergibt sich die Integrabilität des Verschiebungsgesetzes (10) bzw. (11). Daraus folgt

$$0 \equiv -\Delta_{\varkappa\ \lambda;\mu}^{\ \iota} \equiv -\Delta_{\varkappa\ \lambda,\mu}^{\ \iota} + \Delta_{\varkappa\ \mu,\lambda}^{\ \iota} + \Delta_{\sigma\ \lambda}^{\ \iota} \Delta_{\varkappa\ \mu}^{\ \sigma} - \Delta_{\sigma\ \mu}^{\ \iota} \Delta_{\varkappa\ \lambda}^{\ \sigma}. \tag{20}$$

Diese Bedingungen müssen die Δ erfüllen, damit sie sich gemäß (12) durch die Größen h ausdrücken lassen. Man sieht aus (20), daß die gesetzliche Charakterisierung bei einer Mannigfaltigkeit der hier betrachteten Art eine ganz andersartige sein muß als gemäß der früheren Theorie. Zwar existieren gemäß der neuen Theorie alle Tensoren der früheren Theorie, im besonderen auch der aus den Christoffel-Symbolen gebildete Riemannsche Krümmungstensor. Aber es existieren gemäß der neuen Theorie einfachere und näherliegende tensorielle Bildungen, welche bei der Formulierung der Feldgesetze herangezogen werden können.

Der Tensor Λ. Differenzieren wir einen Skalar φ zweimal kovariant, so erhalten wir gemäß (15) den Tensor

$$\varphi_{,\sigma,\tau} - \varphi_{,\alpha} \Delta_{\sigma\ \tau}^{\ \alpha}.$$

Durch Vertauschen von σ und τ entsteht ein neuer Tensor und durch Subtraktion beider der Tensor

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}(\Delta_{\sigma\ \tau}^{\ \alpha} - \Delta_{\tau\ \sigma}^{\ \alpha}).$$

Hieraus folgt sofort der Tensorcharakter von

$$\Lambda_{\sigma\ \tau}^{\ \alpha} = \Delta_{\sigma\ \tau}^{\ \alpha} - \Delta_{\tau\ \sigma}^{\ \alpha}. \tag{21}$$

Es existiert also gemäß dieser Theorie ein Tensor, der nur die Komponenten $h_{s\alpha}$ des Fundamentaltensors und dessen erste Differentialquotienten enthält. Daß sein Verschwinden die Gültigkeit der euklidischen Geometrie zur Folge hat, wurde schon früher bewiesen (vgl. (13)). Eine naturgemäße gesetzliche Bestimmung eines derartigen Kontinuums wird also in Bedingungen für diesen Tensor bestehen.

Durch Verjüngen des Tensors Λ entsteht der Vektor

$$\varphi_\sigma = \Lambda_{\sigma\ \alpha}^{\ \alpha}, \tag{22}$$

von dem ich früher annahm, daß er in dieser Theorie die Rolle des elektromagnetischen Potentials spiele. Von dieser Auffassung bin ich aber neuerdings abgekommen.

Vertauschungsregel der Differentiation. Differentiiert man einen beliebigen Tensor $T_{\cdot}^{\ \cdot}$ zweimal kovariant, so gilt die wichtige Vertauschungsregel

$$T_{\cdot\ ;\sigma;\tau}^{\ \cdot} - T_{\cdot\ ;\tau;\sigma}^{\ \cdot} \equiv - T_{\cdot\ ;\alpha}^{\ \cdot} \Lambda_{\sigma\ \tau}^{\ \alpha}. \tag{23}$$

Beweis. Ist T ein Skalar (Tensor ohne griechischen Index), so folgt der Satz mühelos aus (15). Auf diesen Spezialfall wollen wir den allgemeinen Beweis des Satzes gründen.

Wir bemerken hierzu zunächst, daß es gemäß der hier behandelten Theorie Parallel-Vektorfelder gibt. Es sind dies Vektorfelder, welche in allen Lokalsystemen dieselben Komponenten haben. Ist (a^α) bzw. (a_α) ein solches Vektorfeld, so erfüllt es die Bedingung

$$a^{\alpha}_{\ ;\sigma} = 0 \quad \text{bzw.} \quad a_{\alpha;\sigma} = 0,$$

wie leicht zu beweisen ist.

Unter Benutzung solcher Parallel-Vektorfelder läßt sich die Vertauschungsregel ohne Mühe auf diejenige für einen Skalar zurückführen. Wir führen der einfachen Schreibweise wegen den Beweis für einen Tensor T^λ mit nur einem Index. Ist φ ein Skalar, so folgt aus den Definitionsgleichungen (16) und (21) zunächst

$$\varphi_{;\sigma;\tau} - \varphi_{;\tau;\sigma} \equiv - \varphi_{;\alpha} \Lambda_{\sigma\ \tau}^{\ \alpha}.$$

Setzen wir in diese Gleichung für φ den Skalar $a_\lambda T^\lambda$ ein, wobei a_λ ein Parallel-Vektorfeld ist, so läßt sich bei jeder kovarianten Differentiation a_λ mit dem Differentiationszeichen vertauschen, so daß a_λ in allen Gliedern als Faktor erscheint. Man erhält also

$$[T^{\lambda}_{\ ;\sigma;\tau} - T^{\lambda}_{\ ;\tau;\sigma} + T^{\lambda}_{\ ;\alpha} \Lambda_{\sigma\ \tau}^{\ \alpha}]\, a_\lambda \equiv 0.$$

Da diese Identität für beliebige Wahl von a_λ an einer ins Auge gefaßten Stelle bestehen muß, so folgt das Verschwinden der eckigen Klammer, womit der Beweis geliefert ist. Die Verallgemeinerung auf Tensoren mit beliebig vielen griechischen Indizes liegt auf der Hand.

Identitäten für den Tensor Λ. Addiert man die drei Identitäten, welche aus (20) durch zyklische Vertauschung von $\varkappa$, λ, μ hervorgehen, so ergibt sich durch passende Zusammenfassung der Glieder mit Rücksicht auf (21) zunächst

$$0 \equiv (\Lambda_{\varkappa}{}^{\iota}{}_{\lambda,\mu} + \Lambda_{\lambda}{}^{\iota}{}_{\mu,\varkappa} + \Lambda_{\mu}{}^{\iota}{}_{\varkappa,\lambda}) + (\Delta_{\sigma}{}^{\iota}{}_{\varkappa} \Lambda_{\lambda}{}^{\sigma}{}_{\mu} + \Delta_{\sigma}{}^{\iota}{}_{\lambda} \Lambda_{\mu}{}^{\sigma}{}_{\varkappa} + \Delta_{\sigma}{}^{\iota}{}_{\mu} \Lambda_{\varkappa}{}^{\sigma}{}_{\lambda}).$$

Diese Identität formen wir dadurch um, daß wir statt der gewöhnlichen Ableitungen des Tensors Λ die kovarianten Ableitungen einführen (gemäß (17)); wir erhalten so die Identität

$$(24)\qquad 0 \equiv (\Lambda_{\varkappa}{}^{\iota}{}_{\lambda;\mu} + \Lambda_{\lambda}{}^{\iota}{}_{\mu;\varkappa} + \Lambda_{\mu}{}^{\iota}{}_{\varkappa;\lambda}) + (\Lambda_{\varkappa}{}^{\iota}{}_{\alpha} \Lambda_{\lambda}{}^{\alpha}{}_{\mu} + \Lambda_{\lambda}{}^{\iota}{}_{\alpha} \Lambda_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\varkappa} + \Lambda_{\mu}{}^{\iota}{}_{\alpha} \Lambda_{\varkappa}{}^{\alpha}{}_{\lambda}).$$

Sie ist die Bedingung dafür, daß sich die Λ in der angegebenen Weise durch die h ausdrücken lassen.

Durch Verjüngen dieser Gleichung nach den Indizes ι und μ erhält man ferner die Identität

$$0 \equiv \Lambda_{\varkappa}{}^{\alpha}{}_{\lambda;\alpha} + \varphi_{\lambda;\varkappa} - \varphi_{\varkappa;\lambda} - \varphi_{\alpha} \Lambda_{\varkappa}{}^{\alpha}{}_{\lambda}$$

oder

$$(25)\qquad \Lambda_{\varkappa}{}^{\alpha}{}_{\lambda;\alpha} \equiv \varphi_{\varkappa,\lambda} - \varphi_{\lambda,\varkappa},$$

wobei φ_λ die Abkürzung für $\Lambda_{\lambda}{}^{\alpha}{}_{\alpha}$ ist (22).

§ 4.

Die Feldgleichungen.

Die gesuchten einfachsten Feldgleichungen werden Bedingungen sein, denen der Tensor $\Lambda_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu}$ zu unterwerfen ist. Da die Zahl der h-Komponenten n^2 ist und von diesen wegen der allgemeinen Kovarianz n unbestimmt bleiben müssen, so wird die Zahl der voneinander unabhängigen Feldgleichungen $n^2 - n$ sein müssen. Andererseits ist klar, daß eine Theorie desto befriedigender ist, je mehr sie die Möglichkeiten einschränkt (ohne mit Erfahrungen in Widerspruch zu treten). Die Zahl Z der Feldgleichungen soll also möglichst groß sein. Ist $\bar{Z}$ die Zahl der zwischen diesen bestehenden Identitäten, so muß $Z - \bar{Z}$ gleich $n^2 - n$ sein.

Gemäß der Vertauschungsregel der Differentiation ist

$$(26)\qquad \Lambda_{\underline{\mu}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\nu};\nu;\alpha} - \Lambda_{\underline{\mu}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\nu};\alpha;\nu} - \Lambda_{\underline{\mu}}{}^{\sigma}{}_{\underline{\tau};\alpha} \Lambda_{\sigma}{}^{\alpha}{}_{\tau} \equiv 0.$$

Hierbei bedeuten die Striche unter einem Index das „Heraufziehen“ bzw. „Herunterziehen“ eines Index, also z. B.

$$\Lambda_{\underline{\mu}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\nu}} \equiv \Lambda_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\gamma}\, g^{\mu\beta} g^{\nu\gamma},$$

$$\Lambda_{\mu}{}^{\underline{\alpha}}{}_{\nu} \equiv \Lambda_{\mu}{}^{\beta}{}_{\nu}\, g_{\alpha\beta}.$$

Die Identität (26) schreiben wir nun in der Form

(26a) $$G^{\mu\alpha}{}_{;\alpha} - F^{\mu\nu}{}_{;\nu} + \Lambda_{\underline{\mu}}{}^{\sigma}{}_{\underline{\tau}} F_{\sigma\tau} \equiv 0,$$

wobei gesetzt ist

(27) $$G^{\mu\alpha} \equiv \Lambda_{\underline{\mu}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\nu};\nu} - \Lambda_{\underline{\mu}}{}^{\sigma}{}_{\underline{\tau}} \Lambda_{\sigma}{}^{\alpha}{}_{\tau},$$

(28) $$F^{\mu\nu} \equiv \Lambda_{\underline{\mu}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\nu};\alpha}.$$

Nun setzen wir als *Feldgleichungen* an:

(29) $$G^{\mu\alpha} = 0,$$

(30) $$F^{\mu\alpha} = 0.$$

Diese Gleichungen scheinen eine unerlaubte Überbestimmung zu enthalten. Denn ihre Anzahl ist $n^2 + \frac{n(n-1)}{2}$, während von ihnen vorläufig nur bekannt ist, daß sie den n Identitäten (26a) genügen.

Aus der Identität (25) in Verbindung mit (30) geht aber hervor, daß die $\varphi_\varkappa$ von einem Potential ableitbar sind. Wir setzen demgemäß

(31) $$F_\varkappa \equiv \varphi_\varkappa - \frac{\partial \lg \psi}{\partial x^\varkappa} = 0.$$

(31) ist mit (30) völlig äquivalent. Die Gleichungen (29), (31) sind zusammen $n^2 + n$ Gleichungen für die $n^2 + 1$ Funktionen $h_{s\nu}$ und ψ. Zwischen diesen Gleichungen besteht aber außer (26a) noch ein weiteres System von Identitäten, das wir nun ableiten wollen.

Bezeichnet $\underline{G}^{\mu\alpha}$ den antisymmetrischen Teil von $G^{\mu\alpha}$, so erhält man durch unmittelbares Ausrechnen aus (27)

(32) $$2\underline{G}^{\mu\alpha} \equiv - S_{\mu}{}^{\nu}{}_{\alpha;\nu} + \tfrac{1}{2} S_{\underline{\sigma}}{}^{\mu}{}_{\underline{\tau}} \Lambda_{\sigma}{}^{\alpha}{}_{\tau} - \tfrac{1}{2} S_{\underline{\sigma}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\tau}} \Lambda_{\sigma}{}^{\mu}{}_{\tau} + F^{\mu\alpha},$$

wobei zur Abkürzung der in allen Indizes antisymmetrische Tensor

(33) $$S_{\underline{\mu}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\nu}} = \Lambda_{\underline{\mu}}{}^{\alpha}{}_{\underline{\nu}} + \Lambda_{\underline{\alpha}}{}^{\nu}{}_{\underline{\mu}} + \Lambda_{\underline{\nu}}{}^{\mu}{}_{\underline{\alpha}}$$

eingeführt ist. Durch Ausrechnen des ersten Gliedes von (32) ergibt sich

(34) $$2\underline{G}^{\mu\alpha} \equiv - S_{\underline{\mu}}{}^{\nu}{}_{\underline{\alpha},\nu} - S_{\underline{\mu}}{}^{\sigma}{}_{\underline{\alpha}} \Lambda_{\sigma}{}^{\nu}{}_{\nu} + F^{\mu\alpha}.$$

Nun ist aber mit Rücksicht auf die Definition von F_k (31)

$$\Delta_{\sigma}{}^{\nu}{}_{\nu} - \Delta_{\nu}{}^{\nu}{}_{\sigma} \equiv \Lambda_{\sigma}{}^{\nu}{}_{\nu} \equiv \varphi_\sigma \equiv F_\sigma + \frac{\partial \lg \psi}{\partial x^\sigma}$$

oder

$$\Delta^{\ \nu}_{\sigma\ \nu} = \frac{\partial \lg \psi h}{\partial x^\sigma} + F_\sigma . \tag{35}$$

(34) nimmt daher die Form an

$$h\psi(2\underline{G}^{\mu\alpha} - F^{\mu\alpha} + S_{\underline{\mu}\ \underline{\alpha}}^{\ \sigma} F_\sigma) \equiv - \frac{\partial}{\partial x^\sigma}(h\psi S_{\underline{\mu}\ \underline{\alpha}}^{\ \sigma}). \tag{34b}$$

Wegen der Antisymmetrie folgt hieraus das gesuchte System identischer Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}[h\psi(2\underline{G}^{\mu\alpha} - F^{\mu\alpha} + S_{\underline{\mu}\ \underline{\alpha}}^{\ \sigma} F_\sigma)] \equiv 0 . \tag{36}$$

Dies sind an sich n Identitäten, von welchen aber nur $n-1$ voneinander unabhängig sind, indem wegen der Antisymmetrie $[\ ]_{,\alpha,\mu} \equiv 0$ unabhängig davon gilt, was für $G^{\mu\alpha}$ und F_μ eingesetzt wird.

In den Identitäten (26a) und (36) ist $F^{\mu\alpha}$ durch F_μ ausgedrückt zu denken gemäß der aus (31) folgenden Beziehung

$$F_{\mu\alpha} \equiv F_{\mu,\alpha} - F_{\alpha,\mu} . \tag{31a}$$

Wir sind nun in der Lage, die Kompatibilität der Feldgleichungen (29), (30) bzw. (29), (31) zu beweisen.

Zunächst ist zu zeigen, daß die um die Zahl der (unabhängigen) Identitäten verminderte Zahl der Feldgleichungen um n kleiner ist als die Zahl der Feldvariablen. Wir haben

Zahl der Gleichungen (29), (31):	$n^2 + n$,
Zahl der (unabhängigen) Identitäten:	$n + n - 1$,
Zahl der Feldvariablen:	$n^2 + 1$,

$$(n^2 + n) - (n + n - 1) = (n^2 + 1) - n.$$

Die Zahl der Identitäten ist also gerade die richtige. Damit begnügen wir uns aber nicht, sondern beweisen folgenden

Satz. *Sind in einem Schnitt $x^n =$ konst. alle Differentialgleichungen erfüllt und außerdem überall $(n^2+1) - n$ derselben (passend ausgewählt), so sind alle $n^2 + n$ Gleichungen von selbst überall erfüllt.*

Beweis. Es seien alle Gleichungen im Schnitte $x^n = a$ erfüllt, außerdem überall die Gleichungen, welche dem Nullsetzen von

$$\begin{array}{lll} F_1 & \ldots F_{n-1} & F_n \\ G^{11} & \ldots G^{1\,n-1} & \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ G^{n-1\,1} & \ldots G^{n-1\,n-1} & \end{array}$$

entsprechen. Aus (31a) folgt zunächst, daß dann die $F^{\mu\alpha}$ überall verschwinden. Nun folgert man aus (36), daß in dem benachbarten Schnitte

$x^n = a + da$ auch die antisymmetrischen $\underline{G}^{\mu\alpha}$ für $\alpha = n$ verschwinden müssen[1]). Ferner folgt dann analog aus (26a), daß außerdem noch die symmetrischen $\underline{\underline{G}}^{\mu\alpha}$ für $\alpha = n$ für den Nachbarschnitt $x^n = a + da$ verschwinden müssen. Durch Wiederholung dieser Schlußweise folgt die Behauptung.

§ 5.

Erste Näherung.

Wir betrachten nun ein Feld, welches sich von einem euklidischen mit gewöhnlichem Parallelismus nur unendlich wenig unterscheidet. Dann können wir setzen

$$h_{s\nu} = \delta_{s\nu} + \bar{h}_{s\nu}, \tag{37}$$

wobei die $\bar{h}_{s\nu}$ unendlich klein erster Ordnung sind und kleine Größen höherer Ordnung vernachlässigt werden. Dann ist gemäß (5) bzw. (6) zu setzen

$$h_s^{\ \nu} = \delta_{s\nu} - \bar{h}_{\nu s}. \tag{38}$$

Die Feldgleichungen (29), (30) lauten in erster Näherung

$$\bar{h}_{\alpha\mu,\nu,\nu} - \bar{h}_{\alpha\nu,\nu,\mu} = 0, \tag{39}$$

$$\bar{h}_{\alpha\mu,\alpha,\nu} - \bar{h}_{\alpha\nu,\alpha,\mu} = 0. \tag{40}$$

Gleichung (40) ersetzen wir durch

$$\bar{h}_{\alpha\nu,\alpha} = \chi_{,\nu}. \tag{40a}$$

Wir behaupten nun, daß es eine infinitesimale Koordinatentransformation $x^{\nu\prime} = x^\nu - \xi^\nu$ gibt, welche die Größen $\bar{h}_{\alpha\nu,\nu}$ und $\bar{h}_{\alpha\nu,\alpha}$ sämtlich zum Verschwinden bringt.

Beweis. Man beweist zunächst, daß

$$\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \xi^\mu_{\ ,\nu}. \tag{41}$$

Hieraus

$$\bar{h}'_{\alpha\nu,\nu} = h_{\alpha\nu,\nu} + \xi^\alpha_{\ ,\nu,\nu},$$
$$\bar{h}'_{\alpha\nu\alpha} = \bar{h}_{\alpha\nu\alpha} + \xi^\alpha_{\ ,\alpha,\nu}.$$

Die rechten Seiten verschwinden mit Rücksicht auf (40a), wenn die Gleichungen erfüllt sind

$$\begin{aligned} \xi^\alpha_{\ ,\nu,\nu} &= -\bar{h}_{\alpha\nu,\nu}, \\ \xi^\alpha_{\ ,\alpha} &= -\chi. \end{aligned} \tag{42}$$

---

[1]) Es verschwinden für $x^n = a$ die $\dfrac{\partial G^{\mu n}}{\partial x^n}$.

Diese $n+1$ Gleichungen für die n Größen ξ^α sind aber kompatibel, weil gemäß (40a)

$$(-\overline{h}_{\alpha\nu,\nu})_{,\alpha} - (-\chi)_{,\nu,\nu} = 0 .$$

Bei der neuen Koordinatenwahl lauten die Feldgleichungen

$$\begin{aligned} \overline{h}_{\alpha\mu,\nu\nu} &= 0, \\ \overline{h}_{\alpha\mu,\alpha} &= 0, \\ \overline{h}_{\alpha\mu,\mu} &= 0 . \end{aligned}$$

Spalten wir nun die $\overline{h}_{\alpha\mu}$ gemäß den Gleichungen

$$\begin{aligned} \overline{h}_{\alpha\mu} + \overline{h}_{\mu\alpha} &= \overline{g}_{\alpha\mu}, \\ \overline{h}_{\alpha\mu} - \overline{h}_{\mu\alpha} &= a_{\alpha\mu}, \end{aligned}$$

wobei $\delta_{\alpha\mu} + \overline{g}_{\alpha\mu}$ $(= g_{\mu\nu})$ in erster Näherung die Metrik bestimmen, so nehmen die Feldgleichungen die übersichtliche Form an

$$\overline{g}_{\alpha\mu,\sigma,\sigma} = 0, \tag{44}$$

$$\overline{g}_{\alpha\mu,\mu} = 0, \tag{45}$$

$$a_{\alpha\mu,\sigma,\sigma} = 0, \tag{46}$$

$$a_{\alpha\mu,\mu} = 0. \tag{47}$$

Die Auffassung liegt nahe, daß die $\overline{g}_{\alpha\mu}$ das Gravitationsfeld, die $a_{\alpha\mu}$ das elektromagnettsche Feld in erster Näherung darstellen. (44), (45) entsprechen der Poissonschen Gleichung, (46), (47) den Maxwellschen Gleichungen des leeren Raumes. Es ist interessant, daß die Feldgesetze der Gravitation von denen des elektromagnetischen Feldes separiert erscheinen, wie es der Erfahrung von der Unabhängigkeit beider Felder entspricht. In Strenge kommt aber nach dieser Theorie keinem dieser Felder eine Sonderexistenz zu.

Bezüglich der Kovarianz der Gleichungen (44) bis (47) gilt folgendes. Für die $h_{s\mu}$ gilt allgemein das Transformationsgesetz

$$h'_{s\mu} = \alpha_{st} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\mu'}} h_{t\sigma} .$$

Wählt man die Koordinatentransformation linear und orthogonal sowie konform der Drehung der Lokalsysteme, also

$$x^{\mu'} = \alpha_{\mu\sigma} x^\sigma, \tag{48}$$

so ergibt sich als Transformationsgesetz

$$h'_{s\mu} = \alpha_{st} \alpha_{\mu\sigma} h_{t\sigma}, \tag{49}$$

also genau dasselbe wie für Tensoren in der speziellen Relativitätstheorie. Da dasselbe Transformationsgesetz wegen (48) für die $\delta_{s\mu}$ gilt, so gilt es auch für die Größen $\overline{h}_{\alpha\mu}$, $\overline{g}_{\alpha\mu}$ und $a_{\alpha\mu}$. Bezüglich solcher Transformationen sind die Gleichungen (44) bis (47) kovariant.

Schlußbemerkung.

Der große Reiz der hier dargelegten Theorie liegt für mich in ihrer Einheitlichkeit und in der hochgradigen (erlaubten) Überbestimmung der Feldvariablen. Auch habe ich zeigen können, daß die Feldgleichungen in erster Näherung auf Gleichungen führen, welche der Newton-Poissonschen Theorie der Gravitation sowie der Maxwellschen Theorie des elektromagnetischen Feldes entsprechen. Trotzdem bin ich noch weit davon entfernt, die physikalische Gültigkeit der abgeleiteten Gleichungen behaupten zu können. Der Grund liegt darin, daß mir die Ableitung von Bewegungsgesetzen für die Korpuskeln noch nicht gelungen ist.

(Eingegangen am 19. 8. 1929.)