Notice historique sur la notion de parallélisme absolu.

Von

E. Cartan in Paris.

M. Einstein, à qui j'avais signalé certains de mes travaux contenant la notion de variété riemannienne à parallélisme absolu, a bien voulu me demander d'écrire une notice historique sur cette notion, envisagée du point de vue géométrique. Je le fais d'autant plus volontiers qu'à côté des questions de priorité, qui n'intéressent après tout qu'un petit nombre de personnes, il existe plusieurs problèmes que j'aurai ainsi l'occasion de signaler et dont la solution est susceptible d'intéresser les physiciens. Je m'étendrai de préférence sur l'aspect géométrique des questions, laissant à l'arrière-plan les développements analytiques correspondants.

I.

1. La notion de parallélisme absolu (Fernparallelismus) dans une variété riemannienne peut être conçue indépendamment de toute idée métrique. Supposons la variété à n dimensions. Deux vecteurs infiniment petits d'origines différentes seront dits *parallèles* (ou plutôt *équipollents*) si, pour ces deux vecteurs, n formes de Pfaff linéairement indépendantes

$$ {}^iL = {}^ih_k\, dx^k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) $$

sont numériquement égales chacune à chacune. On a naturellement le même parallélisme absolu si l'on substitue aux n formes ${}^iL$ n combinaisons linéaires indépendantes à coefficients *constants* de ces formes.

M. Weitzenböck a en 1923 (*4* [1]), p. 320), et même en 1921 (*1*, p. 51), défini une certaine dérivation covariante par rapport à un système de n formes de Pfaff linéairement indépendantes. Mais on ne peut voir dans cette opération purement formelle la première apparition de la notion

[1]) Les nombres en italique renvoient aux articles cités dans l'index bibliographique, placé à la fin de la notice.

de parallélisme absolu. Ricci, dans sa méthode de calcul sur les n-uples de congruences orthogonales, qui remonte à 1895, utilise au fond, dans l'étude des variétés riemanniennes, un système de n expressions de Pfaff; c'est aussi ce qu'on fait toutes les fois qu'en Géométrie différentielle on se sert de systèmes de référence mobiles *locaux*. Il y a là une méthode générale qui est en soi tout à fait étrangère à la notion de parallélisme absolu [2]).

2. Cette notion est au contraire explicitement introduite en 1923 dans un mémoire (*5a*) consacré au développement d'une théorie générale, que j'avais esquissée l'année précédente dans deux notes des *Comptes Rendus* (*2* et *3*), et que j'ai exposée ensuite sous ses divers aspects géométriques dans plusieurs articles ou conférences (*6*, *9*, *19*).

Cette théorie fait correspondre à chaque espace à groupe fondamental, au sens de F. Klein (espace euclidien, espace affine, espace projectif, etc.), des espaces *non holonomes*, également à groupe fondamental (espace à connexion euclidienne, affine, projective, etc.). Les espaces de Riemann, tels qu'on les conçoit dans la théorie classique, rentrent dans la classe plus générale des espaces à connexion euclidienne, dont le groupe fondamental est le groupe des déplacements euclidiens.

Un espace général à connexion euclidienne peut être conçu comme formé d'une infinité de morceaux infiniment petits d'espace euclidien, avec une loi de raccord permettant d'intégrer deux morceaux contigus dans un seul et même espace euclidien. Voici, d'une manière plus précise, la nature de cette loi de raccord. Considérons deux points infiniment voisins A et A', ainsi que deux systèmes de référence rectangulaires locaux (R_A) et $(R_{A'})$ attachés à ces points. Un observateur placé en A pourra s'imaginer être dans un espace euclidien, et il saura, la loi de raccord étant connue, localiser dans cet espace euclidien le point A' et le repère $(R_{A'})$; autrement dit, il connaîtra les coordonnées rectangulaires de A' par rapport à (R_A), ce qui revient à connaître le ds^2 de l'espace, et les angles que font les axes de $(R_{A'})$ avec ceux de (R_A), ce qui revient à connaître la loi de transport par parallélisme. Il connaîtra par suite l'angle d'un vecteur quelconque issu de A' avec un vecteur quelconque issu de A. Si l'on imagine une suite continue d'observateurs échelonnés le long d'un arc de courbe AB, l'observateur placé en A sera donc capable de localiser de proche en proche dans un même espace euclidien (espace

[2]) Cela ne veut pas dire que les recherches de M. Weitzenböck n'aient aucune portée géométrique, car elles sont immédiatement utilisables dans la théorie analytique du parallélisme absolu, une fois cette notion géométrique acquise. Voir les mémoires *4*, *10*, *11*, *12*, *15*, *21*, *23* qui contiennent les développements analytiques de la théorie de M. Weitzenböck. Cf. note [5]) du n° 7.

euclidien tangent en A) les différents points de AB et les différents vecteurs issus de ces points; on pourra dire qu'il saura *développer* sur son espace euclidien la ligne AB et la portion de l'espace qui avoisine immédiatement cette ligne.

L'observateur A sera averti qu'il n'est pas dans un vrai espace euclidien s'il essaie, en suivant deux chemins différents ACB et $AC'B$, de localiser dans son espace euclidien le point B et les vecteurs issus de B. Suivant le chemin suivi, il n'attribuera pas, *dans son espace euclidien*, la même position au point B, pas plus qu'il n'attribuera aux vecteurs issus de B la même orientation. La rotation que lui paraissent avoir subie les vecteurs en passant d'un chemin à l'autre constitue la *courbure* associée au cycle $BC'ACB$; la translation qui amène en coïncidence les deux positions différentes attribuées au point B constitue la *torsion* associée à ce même cycle; le vecteur qui répresente cette translation est le *vecteur de torsion* du cycle. Si le cycle est infiniment petit, la courbure se traduit analytiquement par le tenseur bien connu à quatre indices, la torsion par le tenseur à trois indices Λ_{ij}^{k} utilisé par M. Einstein. La condition nécessaire et suffisante pour que le tenseur de torsion soit nul est que le transport par parallélisme soit celui qui a été défini en 1917 par M. Levi-Civita (*geodätische Übertragung* de M. Schouten).

Tout ce qui précède s'étend, *mutatis mutandis*, aux espaces à connexion affine.

3. Revenons maintenant au parallélisme absolu. J'ai démontré (*5a*, p. 368), ce qui n'est pas absolument évident, que si la courbure associée à tout cycle *infiniment petit* est nulle (espace sans courbure), l'espace est doué d'un parallélisme absolu; autrement dit, un vecteur issu d'un point A, transporté parallèlement à lui-même de proche en proche de A en B, donne toujours le même vecteur final (pourvu toutefois que les chemins intermédiaires suivis soient réductibles les uns aux autres par déformation continue). Si l'on choisit en un point A un système de référence formé de n vecteurs indépendants et si l'on prend en un point quelconque M le système de référence formé des n vecteurs parallèles aux premiers, la connexion affine de l'espace est complètement définie (*5a*, p. 368; *5c*, p. 20) par les n formes de Pfaff ω^i qui représentent les projections d'un vecteur infiniment petit sur les axes de coordonnées locaux attachés à l'origine du vecteur[3]).

---

[3]) Le vecteur de torsion associé à un cycle ne peut se définir avec précision que si l'on choisit l'origine du cycle, à moins que le cycle ne soit infiniment petit. Il en est autrement s'il y a un parallélisme absolu (*16*, p. 37). Avec les notations du n° 1, le vecteur de torsion associé à un cycle fini est celui qui a pour composantes,

La démonstration, qui est donnée dans le cas général d'un espace à connexion affine, est naturellement valable dans le cas particulier d'un espace à connexion euclidienne; on obtient alors les espaces riemanniens à parallélisme absolu de M. Einstein. J'ai du reste signalé, toujours dans le même mémoire (*5a*, p. 404—409; cf. *6*, p. 301—302) l'exemple le plus simple d'un tel espace: c'est, pour $n=2$, celui de la surface terrestre, supposée sphérique, où l'on regarde comme parallèles deux directions qui font le même angle avec l'aiguille aimantée; le vecteur de torsion est ici tangent aux cercles méridiens.

Il est intéressant de remarquer que la première théorie de la relativité de M. Einstein repose sur la notion d'espace riemannien sans torsion, alors que la théorie actuelle repose sur celle d'espace riemannien sans courbure.

4. Faisons ici la remarque évidente qu'on peut passer d'un espace à connexion affine sans courbure à un espace riemannien à parallélisme absolu en prenant comme forme différentielle quadratique fondamentale la somme des carrés des n expressions de Pfaff ω^i, les n vecteurs de coordonnées devenant unitaires et rectangulaires, — ou encore une forme quadratique à coefficients *constants* arbitraires construite avec les ω^i, les n vecteurs de coordonnées formant une figure invariable de grandeur et de forme. Inversement on peut arriver au parallélisme absolu le plus général d'un espace de Riemann donné en décomposant son ds^2 en une somme de n carrés.

5. Dans le cas d'un espace à connexion *affine*, le tenseur de torsion Λ_{ij}^k se décompose (*5c*, p. 30—33) en deux tenseurs *irréductibles*. L'un est le vecteur $\Lambda_{ik}^k = \varphi_i$ de M. Einstein, qui a une signification purement affine. L'autre peut être interprété géométriquement: il est nul dans le cas et dans le cas seulement où le vecteur de torsion associé à un cycle élémentaire est situé dans l'élément plan de ce cycle; les espaces correspondants sont les espaces à connexion *semi-symétrique* de M. J. A. Schouten [4]).

---

par rapport aux vecteurs de référence choisis, les n intégrales $\int {}^i h_k\, dx^k$ étendues au cycle. Le théorème général de la conservation de la courbure et de la torsion (*5a*, p. 373—375), qui comprend en particulier les identités de Bianchi, revient ici à un théorème classique de H. Poincaré (Acta Math. **9** (1887), p. 321); géométriquement, il signifie que la somme géométrique des vecteurs de torsion associés aux éléments d'une surface fermée est nulle.

[4]) Les connexions affines que j'ai introduites rentrent dans des connexions encore plus générales dues à M. Schouten (Math. Zeitschr. **13** (1922), p. 56—81); mais le point de vue de M. Schouten est différent du mien. Pour lui le transport parallèle (*lineare Übertragung*) est la notion géométrique essentielle; pour moi, elle n'est qu'un moyen qui tient aux propriétés particulières de l'espace affine et qui ne peut plus s'utiliser, au moins directement, pour établir la notion d'espace à connexion projective (ou conforme, etc.).

Si l'espace est à connexion *euclidienne*, le second tenseur de torsion cesse d'être irréductible (*5c*, p. 50—52); en particulier dans le cas, important pour la relativité, où n est égal à 4, l'un des deux tenseurs irréductibles dans lesquels il se décompose est un *vecteur* ψ_i, *qui a ainsi une signification essentiellement métrique* (*5c*, p. 69—71). Avec les notations ordinaires, on a

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(g_{j\alpha}\Lambda^{\alpha}_{kh} + g_{k\alpha}\Lambda^{\alpha}_{hj} + g_{h\alpha}\Lambda^{\alpha}_{jh}\right),$$

les indices i, j, k, h formant une permutation *paire* des indices 1, 2, 3, 4.

6. La dérivation covariante par rapport à un système de n expressions de Pfaff a été, après M. Weitzenböck, découverte de nouveau par M. G. Vitali (*7* et *8*) en 1924. Mais cet auteur lui attache une signification géométrique et reconnaît la possibilité d'en déduire une connexion affine, qu'il démontre être sans courbure. Le théorème réciproque, que j'avais démontré en 1923, a été démontré de nouveau par M. E. Bortolotti en 1927 dans le cas d'une connexion euclidienne (*17*). Depuis, le parallélisme absolu a été considéré par différents auteurs, dont on trouvera la liste, probablement incomplète, dans l'index bibliographique.

7. Je voudrais maintenant donner un aperçu rapide des principaux problèmes qu'on s'est posés relativement au parallélisme absolu.

Plaçons-nous d'abord au point de vue strictement *affine*. Nous avons montré, M. Schouten et moi (*13*), en 1926, que dans l'espace représentatif des transformations d'un groupe fini et continu, il existait deux parallélismes absolus remarquables. Si l'on désigne pour abréger par T_x la transformation générale du groupe, de paramètres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, les expressions ω^i qui définissent le premier parallélisme absolu sont les paramètres de la transformation infinitésimale $T_x^{-1} T_{x+dx}$; celles qui définissent le second parallélisme sont les paramètres de la transformation infinitésimale $T_{x+dx} T_x^{-1}$.[5]) Les vecteurs de torsion correspondant à ces deux parallélismes sont égaux et opposés, et les quantités Λ^k_{ij} ne sont, au signe près, que les *constantes de structure* c_{ijk} de S. Lie.

---

[5]) Les expressions de Pfaff ω^i jouent un rôle important dans ma théorie de la structure des groupes continus, théorie d'où découle une méthode générale de Géométrie différentielle par l'utilisation d'un système de référence mobile. J'ai d'autre part [Ann. Ec. Norm. 25 (1908), p. 60—83] ramené la recherche des invariants différentiels d'un système différentiel quelconque vis-à-vis d'un groupe de transformations continu, *fini ou infini*, à la recherche des invariants d'un système de n expressions de Pfaff indépendantes à n variables vis-à-vis du groupe général de ces n variables. La solution n'exige, comme opérations analytiques, que la dérivation covariante d'un scalaire par rapport au système donné d'expressions de Pfaff et la formation du *covariant bilinéaire* (rotationnel) d'une expression de Pfaff.

8. Ces espaces de groupes présentent un intérêt physique. En effet, avec la nouvelle théorie de M. Einstein, il est naturel d'appeler *homogène* un Univers où les vecteurs de torsion associés à deux éléments de surface *parallèles* sont eux-mêmes *parallèles,* c'est à dire où le transport parallèle conserve la torsion. Or (*13*, p. 813; *16*, p. 50—51) les seuls espaces à parallélisme absolu jouissant de cette propriété sont les espaces représentatifs des groupes.

On peut encore les caractériser autrement (*16*). Appelons *translation infinitésimale*, dans un espace à parallélisme absolu, une transformation ponctuelle par laquelle les différents points de l'espace décrivent des vecteurs infiniment petits équipollents. On peut associer à la connexion affine sans courbure définie par le parallélisme absolu donné une seconde connexion affine, comportant en général courbure et torsion; il suffit (*16*, p. 52—53) de convenir que deux vecteurs d'origines infiniment voisines sont parallèles (au second sens) s'ils se déduisent l'un de l'autre par la translation infinitésimale qui amène en coïncidence leurs deux origines. La torsion de cette nouvelle connexion est toujours égale et opposée à celle de la première. Pour que la nouvelle connexion soit, elle aussi, sans courbure, il faut et il suffit que l'espace donné soit un espace de groupe (*16*, p. 53): les deux parallélismes absolus de cet espace se déduisent alors l'un de l'autre par le procédé qui vient d'être indiqué.

9. Quel que soit le ds^2 qu'on attribue à un espace de groupe pour en faire un espace riemannien *homogène* à parallélisme absolu, le vecteur φ_i est toujours le même, *et il se trouve que son rotationnel est toujours nul, ce qui exclurait donc l'Electromagnétisme de tout Univers homogène.* Cette conclusion serait en défaut si l'on pouvait définir le potentiel électromagnétique au moyen du vecteur ψ_i (n° 5); mais nous sortons là du domaine de la Géométrie. Remarquons simplement qu'en principe les phénomènes mécaniques sont de nature purement affine, tandis que les phénomènes életromagnétiques sont de nature essentiellement métrique; il peut donc paraître assez naturel de chercher à représenter le potentiel électromagnétique par un vecteur non purement affine.

10. Un autre problème dont nous nous sommes également occupés, M. Schouten et moi, en 1926 (*14*) se rapporte exclusivement aux espaces riemanniens à parallélisme absolu. Est-il possible, dans un espace riemannien donné par son ds^2, de définir un parallélisme absolu tel que les géodésiques de ce parallélisme se confondent avec les géodésiques riemanniennes? On peut formuler ce problème de bien d'autres manières. Par exemple on peut, en s'appuyant sur un théorème général que j'ai démontré en 1923 (*5a*, p. 408), se demander s'il est possible de trouver un parallélisme

absolu tel que le vecteur de torsion associé à un élément de surface quelconque soit normal à cet élément. On peut encore se demander dans quels cas la connexion affine associée au parallélisme absolu suivant le procédé indiqué au n° 8 conserve les longueurs des vecteurs. Enfin on peut rattacher la question à un problème de Mécanique classique: est-il possible, étant donné un système matériel à n degrés de liberté, de choisir des *caractéristiques des vitesses* p_i telles que les mouvements spontanés du système soient donnés par les équations $\frac{dp_i}{dt} = 0$ [6]); c'est ce qui se présente par exemple si l'on considère un corps solide mobile autour d'un point fixe O, l'ellipsoïde d'inertie relatif à O étant une sphère, et si l'on prend pour caractéristiques des vitesses les composantes p, q, r de la rotation instantanée autour de O.

11. Nous avons réussi à résoudre complètement le problème, du moins dans le cas où le ds^2 donné est *défini*. Si l'on se borne aux solutions *irréductibles*, dont toutes les autres se déduisent facilement, on trouve

1° les espaces représentatifs des groupes simples clos, doués d'un ds^2 intrinsèquement lié à la structure du groupe, le parallélisme absolu étant l'un quelconque des deux parallélismes absolus attachés au groupe;

2° l'espace elliptique à 7 dimensions, qui admet deux familles *continues* de parallélismes absolus satisfaisant aux conditions voulues; une étude de ces parallélismes a été faite par M. Vaney (*26*).

En particulier l'espace elliptique (ou l'espace sphérique) à trois dimensions rentre dans la première catégorie: les deux parallélismes absolus dont il est question plus haut ont été signalés depuis longtemps par Clifford. Cet espace est l'espace représentatif du groupe des rotations de l'espace ordinaire; au point de vue mécanique, ses différents points représentent les différentes positions d'un corps solide mobile autour d'un point fixe; les deux parallélismes admettent alors une interprétation cinématique remarquable (*6*, p. 305—308). On voit que les parallélismes de Clifford, qui formaient un chapitre tout à fait isolé de la Géométrie, sont maintenant rattachés à une théorie très générale comprenant, malgré l'opposition apparente des deux notions, le parallélisme de M. Levi-Civita et les parallélismes de Clifford.

12. Les espaces riemanniens dont il vient d'être question rentrent dans une catégorie plus générale, celle des espaces dans lesquels le transport parallèle conserve la courbure et la torsion; ils admettent alors un

---

[6]) Ce problème de Mécanique a fait l'objet des recherches de M. Georg Hamel [Zeitschr. für Math. u. Phys. **50** (1904), p. 1—53], qui avait trouvé une partie des solutions indiquées ci-dessous (n° 11).

groupe transitif de déplacements rigides laissant également invariantes la courbure et la torsion. Réciproquement si un espace riemannien, envisagé du point de vue classique, admet un groupe transitif de déplacements rigides, c'est-à-dire laissant invariant le ds^2, on peut toujours (du moins si le ds^2 est défini), définir dans cet espace une connexion euclidienne telle que le transport parallèle correspondant conserve la courbure et la torsion. Le vecteur φ_i a, là encore, son rotationnel toujours nul. Il est vrai que, dans les applications possibles à la théorie de la relativité, le ds^2 est indéfini; mais même dans ce cas, pour $n = 4$, la conclusion subsiste. Les espaces sans torsion dans lesquels le transport parallèle conserve la courbure jouent un rôle important en Géométrie, mais ils sortent tout à fait du cadre de cette notice [7]).

Index bibliographique.

1. R. Weitzenböck, Neuere Arbeiten der algebraischen Invariantentheorie, Differentialinvarianten, Enzyklopädie **3** (3), Heft 6, 1922.

2. E. Cartan, Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion, Comptes rendus **174** (1922), p. 593–595.

3. E. Cartan, Sur les espaces généralisés et la théorie de la relativité, id. **174** (1922), p. 734–737.

4. R. Weitzenböck, Invariantentheorie (Groningen, Noordhoff, 1923).

5. E. Cartan, Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée, *a*) Annales Ec. Norm. **40** (1923), p. 325–412; *b*) id. **41** (1924), p. 1–25; *c*) id. **42** (1925), p. 17–88.

6. E. Cartan, Les récentes généralisations de la notion d'espace, Bull. Sc. Math. **48** (1924), p. 294–320.

7. G. Vitali, Una derivazione covariante formata coll' ausilio di n sistemi covarianti del 1° ordine, Atti Soc. Ligustica Sc. & Lett. 2 (1924), p. 248–253.

8. G. Vitali, Intorno ad una derivazione covariante nel calcolo assoluto, id. **4** (1925), p. 287–291.

9. E. Cartan, La théorie des groupes et les recherches récentes de Géométrie différentielle, L'Enseignement math. 1924/25, p. 1–18; Revista mat. hispano-americana 1927, p. 1–13; Proc. Int. Math. Congress Toronto 1924, **1** (1928), p. 85–94.

10. G. F. C. Griss, Differentialinvarianten von Systemen von Vektoren, Dissert., Amsterdam 1925.

11. R. Weitzenböck, Über Differentialinvarianten von kovarianten Tensoren, Proc. Akad. Amsterdam **29** (1926), p. 400–403.

12. R. Weitzenböck, Über Differentialinvarianten eines speziellen schiefsymmetrischen Tensors p_{ik} im R_4, id. **29** (1926), p. 404–409.

13. E. Cartan and J. A. Schouten, On the Geometry of the Group-manifold of simple and semi-simple groups, id. **29** (1926), p. 803–815.

---

[7]) On pourra consulter, sur d'autres problèmes de géométrie qu'on peut rattacher au parallélisme absolu, une note toute récente de M. E. Bortolotti (*25*).

14. E. Cartan and J. A. Schouten, On Riemannian Geometries admitting an absolute parallelism, id. **29** (1926), p. 933–946.

15. M. Euwe, Differentiaalinvarianten van twee covariante vectorvelden met vier veranderlijken, Dissert., Amsterdam 1926.

16. E. Cartan, La Géométrie des groupes de transformations, Journal Math. pures et appl. **6** (1927), p. 1–119.

17. E. Bortolotti, Parallelismi assoluti nelle V_n riemanniane, Atti Istit. Veneto **86** (1926/27), p. 456–465.

18. E. Bortolotti, On metric connexions with absolute parallelism, Proc. Akad. Amsterdam **30** (1927), p. 216–218.

19. E. Cartan, La théorie des groupes et la Géométrie, L'Enseignement math. **26** (1927), p. 200–225.

20. L. P. Eisenhart, Non-Riemannian Geometry, Amer. Math. Soc. Colloq. Publications VIII, New-York 1927.

21. W. Euwe, Differentiaalinvarianten en partieele differentiaalvergelijkingen uit de tensorrekening, Dissert., Amsterdam 1927.

22. A. Einstein, Riemann-Geometrie mit Aufrechterhaltung des Fernparallelismus, Sitzungsber. Berlin 1928, XVII, p. 217–221.

23. R. Weitzenböck, Differentialinvarianten in der Einsteinschen Theorie des Fernparallelismus, id. 1928, XXVI.

24. E. Bortolotti, Parallelismo assoluto nelle varietà a connessione affine, e nuove vedute sulla relatività, Accad. Sc. Bologna, 27 gennaio 1929.

25. E. Bortolotti, Stelle di congruenze e parallelismo assoluto, basi geometriche di una recente teoria di Einstein, Atti R. Accad. Lincei **9** (1929), p. 530–538.

26. F. Vaney, Le parallélisme absolu dans les espaces elliptiques réels à 3 et 7 dimensions et le principe de trialité dans l'espace elliptique à 7 dimensions (Thèse; Paris, Gauthier-Villars, 1929).

(Eingegangen am 19. 8. 1929.)