Über Weierstraßsche Approximation, besonders durch Hermitesche Interpolation*).

Von

Leopold Fejér in Budapest.

Einleitung.

1. Für den Weierstraßschen Approximationssatz, nach welchem man eine beliebige, im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ gegebene stetige Funktion in diesem Intervalle durch ein rationales ganzes Polynom $g(x)$ mit beliebig großer Genauigkeit gleichmäßig approximieren kann, existieren viele Beweise. Sie sind im Pringsheim-Molkschen[1]) Enzyklopädieartikel zusammengestellt, und die verschiedenen Vorzüge der verschiedenen Beweise sind dort treffend hervorgehoben. Von den älteren Beweisen wäre noch der von de la Vallée Poussin, von den neueren der von Dunham Jackson und Serge Bernstein hinzuzufügen.

2. Auch ich habe im Laufe der Zeit drei verschiedene Beweise für den Weierstraßschen Satz gefunden, die ich in den Jahren 1900, 1908 und 1915 veröffentlicht habe. Sie stützen sich unmittelbar auf die Fourier-Tschebyscheffsche, oder auf die Legendresche Reihe, oder endlich auf eine gewisse *Interpolationsreihe* der gegebenen Funktion. Meinen *Ausgangspunkt* bilden also die klassischen *Reihenentwicklungen* der willkürlichen Funktion, und *nicht* gewisse, übrigens wichtige, in der Analysis oder in der theoretischen Physik auftretende s. g. *singuläre Integrale*, oder anders geartete Kunstgriffe. Weiter gebe auch ich immer einfach lautende Herstellungsregeln für die gesuchten Näherungspolynome.

Die *erste* Methode ist mit der *zweiten* — wenn auch jede der beiden ihre interessante Besonderheit hat — eng verwandt; ist doch sowohl die Fouriersche Kosinusreihe als die Legendresche Reihe ein hervorragender

*) Vorgetragen an der Schlesischen Friedrich Wilhelms-Universität zu Breslau am 2. Juli 1929.

[1]) A. Pringsheim, J. Molk, Principes fondamentaux de la théorie des fonctions, Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées, tome 2, vol. 1; insbesondere Fußnote [122]).

Spezialfall der allgemeinen ultrasphärischen Entwicklung der willkürlichen Funktion, d. h. der Entwicklung nach s. g. ultrasphärischen Polynomen der unabhängigen Veränderlichen x.

Um nun diese beiden, in Rede stehenden Methoden in diesen einleitenden Zeilen ganz kurz zu charakterisieren, bemerke ich, daß nicht die *Partialsummen* selbst dieser Reihenentwicklungen, sondern ihre *arithmetischen Mittel* es sind, die jeweils bei einer beliebigen stetigen Funktion zum Ziele führen. Übrigens werde ich über diese Reihenentwicklungsmethode im folgenden nur skizzenhaft einige Worte sagen, und auch dies nur aus dem Grunde, um gewisse Zusammenhänge hervortreten zu lassen. Ausführlicher möchte ich aber von der *dritten* Methode, von der *Interpolationsmethode* sprechen, um so mehr, als ich in diesem Gegenstande in allerletzter Zeit etwas weiter gekommen bin. Hier dienen als Interpolationsabszissen — um es kurz auszudrücken — die Nullstellen der ultrasphärischen Polynome; also insbesondere die s. g. Fourier-Tschebyscheffschen Abszissen, oder die s. g. Legendre-Gaußschen Abszissen. Um auch mein diesbezügliches Resultat hier kurz zu charakterisieren, bemerke ich, daß, wenn eine beliebige stetige Funktion im Intervalle $(-1, +1)$ vorgeschrieben ist, *nicht die gewöhnlichen Lagrangeschen Interpolationspolynome, sondern gewisse höhere, s. g. Hermitesche Interpolationspolynome es sind, die zur Funktion gleichmäßig konvergieren.* Dabei verstehe ich unter Lagrangeschem Interpolationspolynom, wie üblich, dasjenige Polynom von höchstens $n-1$-tem Grade, das an den vorgeschriebenen Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ denselben Wert hat wie die gegebene Funktion, unter Hermiteschem Interpolationspolynom ein Polynom, welches ebenfalls der Bedingung unterworfen ist, daß sein Wert an den Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit dem Funktionswert übereinstimmt, dessen Grad aber *höher als* $(n-1)$ *sein kann.*

Diese Bemerkung zeigt aber auch, daß die dritte Methode mit den zwei ersten verwandt ist; sind es doch die *ultrasphärischen Abszissengruppen* — wie ich sie nennen möchte —, die (hauptsächlich) als passende Interpolationsstellen dienen. Dabei entsprechen die höheren, Hermiteschen Interpolationsgebilde genau den Mittelgebilden bei den erwähnten Reihenentwicklungen.

§ 1.

Approximation einer stetigen Funktion durch eine rationale ganze Funktion mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate, d. h. mit Benutzung der Teilsummen der Legendreschen Reihe der zu approximierenden stetigen Funktion.

3. Es sei $g(x)$ eine beliebige ganze rationale Funktion n-ten Grades mit reellen Koeffizienten. Ist dann $f(x)$ eine gegebene, im Intervalle

$-1 \leqq x \leqq +1$ stetige Funktion von x, dann heißt

$$\int_{-1}^{+1} (f(x) - g(x))^2 \, dx \tag{1}$$

die im Sinne der *Methode der kleinsten Quadrate* genommene Abweichung von $g(x)$ von der Funktion $f(x)$ im Intervalle $(-1, +1)$, oder auch, kurz, die Besselsche Abweichung von $g(x)$ und $f(x)$.

Es gibt nun bekanntlich ein einziges Polynom $g(x)$, für welches die Abweichung (1) minimal wird, und dieses $g(x)$ erhalte ich, wenn ich $f(x)$ in die Legendresche Reihe

$$f(x) \sim c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_n P_n(x) + \ldots \tag{2}$$

entwickle und von dieser unendlichen Entwicklung die Partialsumme mit dem Index n nehme; d. h.

$$g(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_n P_n(x). \tag{3}$$

Hier bezeichnet $P_n(x)$ das n-te Legendresche Polynom.

Die durch unsere Minimumforderung gewonnene Folge von Polynomen

$$g_0(x), g_1(x), \ldots, g_n(x), \ldots \tag{4}$$

konvergiert aber im allgemeinen nicht zu $f(x)$. Z. B. ist für die Funktion

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} (P_{\nu^3}(x) - P_{\nu^3+2}(x)), \tag{5}$$

welche durch die an der rechten Seite stehenden, für $-1 \leqq x \leqq +1$ gleichmäßig und absolut konvergierenden Reihe definiert ist, die Folge (4) an der Stelle $x = +1$ augenscheinlich divergent.

Bilde ich aber, *wieder im Sinne der Methode der kleinsten Quadrate,*

$$g_n^*(x) = \frac{g_0(x) + g_1(x) + \ldots + g_n(x)}{n+1}, \tag{6}$$

und dann weiter

$$g_n^{**}(x) = \frac{g_0^*(x) + g_1^*(x) + \ldots + g_n^*(x)}{n+1}, \tag{7}$$

dann erhalte ich in der Folge der zweiten arithmetischen Mittel der Partialsummen der Legendreschen Reihe (2) von $f(x)$, d. h. in der Folge

$$g_0^{**}(x), g_1^{**}(x), \ldots, g_n^{**}(x), \ldots, \tag{8}$$

die gewünschte, d. h. im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ gleichmäßig zu $f(x)$ konvergierende Folge von rationalen ganzen Funktionen. Es ist sogar noch

$$m \leqq g_n^{**}(x) \leqq M, \tag{9}$$
$$-1 \leqq x \leqq +1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \infty,$$

wo m das Minimum, M das Maximum von $f(x)$ im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ bezeichnet.

Dieses Resultat habe ich im Jahre 1908 veröffentlicht[2]). Ich bemerke, daß bekanntlich T. H. Gronwall später bewiesen hat, daß sogar schon die Folge der ersten arithmetischen Mittel $g_n^*(x)$ unter (6) gleichmäßig zu $f(x)$ konvergiert, wenn auch für sie die Eigenschaft (9) verloren geht, die aber allerdings hier gar nicht gefordert ist. Weiter bemerke ich, daß, nach einer mündlichen Mitteilung von Professor Hilbert im Jahre 1902, Weierstraß selbst einen Beweis seines Approximationssatzes postulierte, der auf die Legendresche Entwicklung (2) der gegebenen Funktion $f(x)$ gegründet wäre.

§ 2.

Approximation einer stetigen Funktion durch eine rationale ganze Funktion mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate, wenn $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ als Dichtigkeitsfunktion genommen wird, d. h. mit Benutzung der Teilsummen der Fourier-Tschebyscheffschen Reihe der zu approximierenden Funktion.

4. Wenn ich statt der Besselschen Abweichung (1) die Mehlersche

$$(10)\qquad \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,(f(x)-g(x))^2\,dx$$

minimisiere, so erhalte ich folgendes Resultat. Man bilde die Fouriersche Kosinusreihe von $f(\cos\theta)$

$$(11)\qquad f(\cos\theta) \sim c_0 + c_1\cos\theta + \ldots + c_n\cos n\theta + \ldots,$$

d. h., in x,

$$(12)\qquad f(x) \sim c_0 T_0(x) + c_1 T_1(x) + \ldots + c_n T_n(x) + \ldots,$$

wo also $T_n(x)$ diejenige g. r. Funktion n-ten Grades bezeichnet, die $\cos n\theta$ durch $\cos\theta$ ausdrückt (das s. g. n-te Tschebyscheffsche Polynom), dann konvergieren im allgemeinen zwar nicht die Partialsummen

$$(13)\qquad g_n(x) = c_0 T_0(x) + c_1 T_1(x) + \ldots + c_n T_n(x),$$

wohl aber ihre arithmetischen Mittel

$$(14)\qquad g_n^*(x) = \frac{g_0(x)+g_1(x)+\ldots+g_n(x)}{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$$

gleichmäßig zu $f(x)$ im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$, und es ist wieder $m \leqq g_n^*(x) \leqq M$.

Diese Methode habe ich im Jahre 1900 veröffentlicht[3]).

[2]) L. Fejér, Sur le développement d'une fonction arbitraire suivant les fonctions de Laplace, Comptes-Rendus, 3 février 1908.

[3]) L. Fejér, Sur les fonctions bornées et intégrables, Comptes Rendus, 10 décembre 1900.

Der Beweis des eben ausgesprochenen Approximationssatzes ist sehr einfach; der des § 1 ist etwas komplizierter, weil ich die merkwürdige Ungleichung

$$P_0(x) + P_1(x) + \dots + P_n(x) \geqq 0, \quad -1 \leqq x \leqq +1, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \infty, \tag{15}$$

nicht entbehren kann. Aber ich wiederhole: es kommt mir nicht so sehr auf die Einfachheit des Beweises, als auf die des *Herstellungsprinzips* und der *Herstellungsregel* an, welche zur Bestimmung der Näherungspolynome dienen.

5. Man kann beanstanden, daß sowohl im definierenden Prinzipe, als in der Herstellungsregel des § 1 und § 2 die *Integration* eine Rolle spielt. In der nun folgenden Interpolationsmethode tritt die Integration nicht auf. Ich betrachte hier nicht jenes Polynom n-ten Grades $g(x)$, für welches die Integralabweichung von $f(x)$ in diesem oder jenem Sinne möglichst klein ist, sondern ein Interpolationspolynom, welches also an $(n+1)$ Stellen x mit $f(x)$ geradezu gleich ist. Will man aber gleichmäßige Konvergenz im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$, so kann man, nach einem wichtigen Satze von G. Faber[4]), bekanntlich mit den Lagrangeschen Parabeln nicht auskommen. Ich betrachte also höhere Interpolationsgebilde, s. g. Hermitesche Parabeln für geeignet gewählte Abszissengruppen; diese bilden ein Analogon zu den arithmetischen Mitteln der früher erwähnten Orthogonalreihen und konvergieren gleichmäßig zur stetigen Funktion $f(x)$.

§ 3.

Die Lagrangesche Interpolationsformel.

6. Es seien $x_1, x_2, \dots, x_n$ voneinander verschiedene Abszissen und $y_1, y_2, \dots, y_n$ Ordinatenwerte; dann lautet die Lagrangesche Formel

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k l_k(x), \tag{16}$$

wo

$$l_k(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x - x_k)}, \tag{17}$$

$$\omega(x) = C(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \tag{18}$$

und $C \neq 0$ eine willkürliche Konstante bezeichnet.

Sie stellt diejenige ganze rationale Funktion von höchstens $(n-1)$-tem Grade dar, die an den Stellen $x_1, x_2, \dots, x_n$ der Reihe nach die Werte

[4]) G. Faber, Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen, Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung (1914), S. 192—210.

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ annimmt. (Es gibt immer eine, aber auch nur eine solche g. r. Funktion.) Dies alles läßt sich leicht beweisen.

Die Polynome $l_k(x)$ nenne ich die *Grundpolynome der Lagrangeschen Interpolation*. Setzt man in die Lagrangesche Formel $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 1$, so erhält man auf Grund des Vorhergehenden

$$\sum_{k=1}^{n} l_k(x) \equiv 1. \tag{19}$$

§ 4.

Die Hermitesche Interpolationsformel.

7. Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ wieder n voneinander verschiedene Abszissenwerte und

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \qquad y_1', y_2', \ldots, y_n' \tag{20}$$

weitere $2n$ gegebene Werte; dann lautet die Hermitesche Interpolationsformel

$$\mathrm{X}(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k h_k(x) + \sum_{k=1}^{n} y_k' \mathfrak{h}_k(x), \tag{21}$$

wo

$$h_k(x) = \left(1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)\right)(l_k(x))^2 = v_k(x)(l_k(x))^2, \tag{22}$$

$$\mathfrak{h}_k(x) = (x - x_k)(l_k(x))^2 \tag{23}$$

bezeichnet. Es ist hier wieder

$$\omega(x) = C(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) \qquad (C \neq 0), \tag{24}$$

$$l_k(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x - x_k)}, \tag{25}$$

und $v_k(x)$ ist augenscheinlich die abgekürzte Bezeichnung des „charakteristischen Linearfaktors" in $h_k(x)$, d. h.

$$v_k(x) = 1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k). \tag{26}$$

Die Hermitesche Interpolationsformel (21) stellt diejenige ganze rationale Funktion von höchstens $(2n-1)$-tem Grade dar, die an den Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Reihe nach die Werte $y_1, y_2, \ldots, y_n$ und deren Ableitung an denselben Stellen der Reihe nach die Werte $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ annimmt. Es gibt immer ein solches Polynom, aber auch nur ein einziges. Dies läßt sich alles leicht beweisen.

Die n Polynome unter (22)

$$h_1(x), h_2(x), \ldots, h_n(x) \tag{27}$$

nenne ich die *Grundpolynome erster Art* und die n Polynome unter (23)

$$(28) \qquad \mathfrak{h}_1(x), \mathfrak{h}_2(x), \ldots, \mathfrak{h}_n(x)$$

nenne ich die *Grundpolynome zweiter Art, der Hermiteschen Interpolation* (21).

8. Setzt man in die Hermitesche Formel (21)

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 1, \quad y'_1 = y'_2 = \ldots = y'_n = 0,$$

so erhält man für die Grundpolynome erster Art die identische Relation

$$(29) \qquad \sum_{k=1}^{n} h_k(x) \equiv 1.$$

Setzt man in (21)

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0, \quad y'_1 = y'_2 = \ldots = y'_n = 1,$$

so erhält man

$$(30) \qquad \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{h}_k(x) \equiv \hbar(x),$$

wo $\hbar(x)$ eben dasjenige Polynom $(2n-1)$-ten Grades bezeichnet, welches an den Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verschwindet und an allen diesen Stellen die Ableitung 1 hat.

§ 5.

Die Treppenparabel und die Wellenparabel.

9. Die Hermitesche Formel (21) zerlegt das zu den Daten $y_1, y_2, \ldots, y_n$, $y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ gehörige Hermitesche Interpolationspolynom in zwei Summanden:

$$(31) \qquad \mathrm{X}(x) = H(x) + \mathfrak{H}(x),$$

wo

$$(32) \qquad H(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k h_k(x),$$

$$(33) \qquad \mathfrak{H}(x) = \sum_{k=1}^{n} y'_k \mathfrak{h}_k(x).$$

Die Polynome $H(x)$ und $\mathfrak{H}(x)$ lassen sich aber auch unabhängig von ihren formelmäßigen Darstellungen (32) und (33) in folgender Weise charakterisieren:

1. $H(x)$ ist dasjenige Polynom von höchstens $(2n-1)$-tem Grade, welches an den Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Werte $y_1, y_2, \ldots, y_n$ annimmt, und dessen Derivierte an diesen Stellen verschwindet. Ich nenne dieses Polynom: das *Treppenpolynom* [die Kurve $y = H(x)$ nenne ich die durch die Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ gehende *Treppenparabel*].

2. $\mathfrak{H}(x)$ ist dasjenige Polynom von höchstens $(2n-1)$-tem Grade, welches an den Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ verschwindet und dessen Derivierte an diesen Stellen die Werte $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ besitzt. Ich kann dieses Polynom vielleicht das *Wellenpolynom* nennen [und die Parabel $y = \mathfrak{H}(x)$ die durch die Punkte $(x_1, 0), (x_2, 0), \ldots, (x_n, 0)$ gehende und die „Neigungen" $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ besitzende *Wellenparabel*].

§ 6.

Das Vorzeichen der Grundpolynome bei der Hermiteschen Interpolation. Die konjugierten Punkte.

10. Von nun an will ich die voneinander immer verschiedenen Abszissen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ausdrücklich reell annehmen und lenke meine Aufmerksamkeit auf das *Vorzeichen der Grundpolynome.*

Ein Blick auf die Formel (17) des Lagrangeschen Grundpolynoms $l_k(x)$ lehrt, daß dieses sein Vorzeichen $(n-1)$-mal ändert, wenn x von $-\infty$ bis $+\infty$ variiert.

Einen ganz anderen Sachverhalt finden wir aber bei den Hermiteschen Grundpolynomen vor.

1. Das Grundpolynom *erster Art* $h_k(x)$ unter (22) hat *höchstens eine Zeichenwechselstelle* und zwar dort, wo

$$v_k(x) = 1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k) = 0 \tag{34}$$

ist, d. h. an der Stelle

$$X_k = x_k + \frac{\omega'(x_k)}{\omega''(x_k)}. \tag{35}$$

Ich nenne diese Zeichenwechselstellen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ die zu den Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gehörigen *konjugierten Stellen.* (Ist für ein k der Wert $\omega''(x_k) = 0$, so ist $X_k = \infty$; in diesem Falle ist $v_k(x) \equiv 1$ und $h_k(x)$ hat überhaupt keine Zeichenwechselstelle.) Die Lage der konjugierten Stellen spielt im folgenden eine entscheidende Rolle. Es ist übrigens

$$X_k = x_k + \frac{1}{2\left(\frac{1}{x_k - x_1} + \cdots + \frac{1}{x_k - x_{k-1}} + \frac{1}{x_k - x_{k+1}} + \cdots + \frac{1}{x_k - x_n}\right)} \tag{36}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n)$$

eine Formel, die wir aber im folgenden nicht gebrauchen werden.

2. Das Grundpolynom *zweiter Art* $\mathfrak{h}_k(x)$ unter (23) hat *eine* Zeichenwechselstelle, nämlich die Stelle

$$x = x_k. \tag{37}$$

§ 7.

Ein Satz über die Treppenparabel.

11. Die Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sollen nun in das Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ fallen. Ich nehme weiter an, daß die konjugierten Punkte $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *außerhalb* dieses Intervalles liegen (d. h. genauer, entweder sei $X_k \geqq 1$ oder $X_k \leqq -1$). Dann sind, mit Rücksicht auf $v_k(x_k) = 1$, die Grundpolynome erster Art $h_k(x)$ unter (22) alle *nichtnegativ* für $-1 \leqq x \leqq +1$. Daraus ergibt sich mit Rücksicht auf (29) und (32) der folgende

Satz. Sind für die im Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ liegenden Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die konjugierten Punkte $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nicht im Innern dieses Intervalls gelegen, dann liegen die Werte des Treppenpolynoms $H(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k h_k(x)$ für $-1 \leqq x \leqq +1$ zwischen dem kleinsten und dem größten der Werte $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

§ 8.

Neue Charakterisierung der Legendre-Gaußschen und Tschebyscheffschen Abszissen, und zwar mit Hilfe der konjugierten Punkte.

12. Im folgenden will ich nun die Abszissen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ganz speziell wählen.

A. Der konjugierte Punkt X_k liege im Mittelpunkt der Strecke, die von x_k bis zum konjugiert *harmonischen* Punkte von x_k reicht, wo -1 und $+1$ als Grundpunkte gedacht sind, d. h.

$$X_k = \frac{x_k + \frac{1}{x_k}}{2} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{38}$$

B. Der konjugierte Punkt X_k liege im konjugierten harmonischen Punkte von x_k, wo wieder -1 und $+1$ als Grundpunkte gedacht sind, d. h.

$$X_k = \frac{1}{x_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{39}$$

In beiden Fällen liegt X_k nicht im Innern des Intervalles $(-1, +1)$, so daß also nach Nr. 11 sämtliche Grundpolynome erster Art $h_k(x)$ im Intervall $-1 \leqq x \leqq +1$ nichtnegativ ausfallen.

Bestimmen wir nun in beiden Fällen die unseren Forderungen entsprechenden Abszissen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, oder, was dasselbe ist, die ganze rationale Funktion n-ten Grades $\omega(x)$.

13. Laut (35) fordern wir im Falle A, daß

$$\frac{x_k + \frac{1}{x_k}}{2} = x_k + \frac{\omega'(x_k)}{\omega''(x_k)} \tag{40}$$

erfüllt sei, für $k = 1, 2, \ldots, n$, d. h. daß

$$(1 - x_k^2)\,\omega''(x_k) - 2\,x_k\,\omega'(x_k) = 0 \tag{41}$$

sei für $k = 1, 2, \ldots, n$. Wir fordern also, daß das Polynom von höchstens n-tem Grade

$$(1 - x^2)\,\omega''(x) - 2\,x\,\omega'(x)$$

an sämtlichen Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des Polynoms $\omega(x)$ verschwinde. Es muß also

$$(1 - x^2)\,\omega''(x) - 2\,x\,\omega'(x) = \text{Konst.}\,\omega(x) \tag{42}$$

sein, woraus wir durch Vergleichung der Koeffizienten von x^n auf beiden Seiten der Gleichung (42) sofort ersehen, daß die Konstante auf der rechten Seite von (42) gleich $-n(n+1)$ ist. Also gilt schließlich

$$(1 - x^2)\,\omega''(x) - 2\,x\,\omega'(x) + n(n+1)\,\omega(x) = 0\,. \tag{43}$$

Das ist die Differentialgleichung des n-ten Legendreschen Polynoms. Also sind im Falle A die $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die s. g. Legendreschen oder Gaußschen Abszissen, d. h. die Wurzeln der Gleichung $P_n(x) = 0$, wo $P_n(x)$ das n-te Legendresche Polynom bezeichnet. Wir haben also das folgende Resultat erhalten:

Für die Wurzeln der Gleichung $P_n(x) = 0$, und nur für diese Punktgruppe, liegt der konjugierte Punkt X_k von x_k für jeden der Werte $k = 1, 2, \ldots, n$ genau in der Mitte der Strecke von x_k bis zum konjugiert harmonischen Punkte von x_k, wenn -1 und $+1$ als Grundpunkte bebetrachtet werden.

14. Durch die Forderung B

$$\frac{1}{x_k} = x_k + \frac{\omega'(x_k)}{\omega''(x_k)} \tag{44}$$

erhalten wir für $\omega(x)$ auf demselben Wege die Differentialgleichung

$$(1 - x^2)\,\omega''(x) - x\,\omega'(x) + n^2\,\omega(x) = 0\,, \tag{45}$$

welchem das n-te Tschebyscheffsche Polynom genügt.

Für die Wurzeln der Gleichung $T_n(x) = \cos(n \arccos x) = 0$, d. h. für die Punktgruppe

$$x_k = \cos(2k - 1)\frac{\pi}{2n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{46}$$

und nur für diese Punktgruppe liegt der konjugierte Punkt X_k von x_k für jeden der Werte $k = 1, 2, \ldots, n$ im konjugiert harmonischen Punkte von x_k, wo wieder -1 und $+1$ als Grundpunkte für das harmonische Paar gedacht sind.

Die Tschebyscheffschen Abszissen lassen sich übrigens so konstruieren: man schlage über der Strecke von -1 bis $+1$ als Durchmesser einen Halbkreis, teile diesen in n gleiche Teilbögen und projiziere die n Mittelpunkte dieser Teilbögen auf den Durchmesser von -1 bis $+1$. Die Projektionspunkte sind die Tschebyscheffschen Abszissenpunkte.

§ 9.

Charakterisierung der allgemeinen ultrasphärischen Abszissen mit Hilfe der konjugierten Punkte.

15. Ich stelle drittens die Forderung:

C. Die konjugierte Stelle X_k sei

$$X_k = \frac{\lambda x_k + \frac{1}{x_k}}{\lambda + 1} \qquad (0 \leqq \lambda \leqq 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n),$$

d. h. der konjugierte Punkt teile die Strecke von x_k bis zu seinem konjugiert harmonischen Paare $\frac{1}{x_k}$ in zwei Teile, deren *Verhältnis*, für jeden der Werte $k = 1, 2, \ldots, n$, dieselbe Größe λ habe, $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$. D. h.

$$\frac{\frac{1}{x_k} - X_k}{X_k - x_k} = \lambda \qquad (0 \leqq \lambda \leqq 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n).$$

Diese Forderung führt, auf dem angegebenen Wege, sofort zur Differentialgleichung der ultrasphärischen Polynome[5])

$$(1 - x^2)\,\omega'' - (\lambda + 1)\,x\,\omega' + n\,(n + \lambda)\,\omega = 0.$$

Der Legendresche Fall A entspricht dem Werte $\lambda = 1$, der Tschebyscheffsche Fall B dem Werte $\lambda = 0$.

Ich bemerke, daß die zum Verhältniswerte λ $(\lambda > 0)$ gehörigen ultrasphärischen Polynome $\omega_n(x)$ in der Potenzreihenentwicklung nach z der erzeugenden Funktion

$$\frac{1}{(1 - 2xz + z^2)^{\frac{\lambda}{2}}} = \omega_0(x) + \omega_1(x)\,z + \ldots + \omega_n(x)\,z^n + \ldots$$

als Koeffizienten auftreten, und daß hier die charakteristische Linearfunktion unter (26) die Form

$$v_k(x) = \frac{1 - (\lambda + 1)\,x x_k + \lambda x_k^2}{1 - x_k^2}$$

hat.

---

5) N. Nielsen, Théorie des fonctions métasphériques, Paris, Gauthier-Villars, 1911. E. Kogbetliantz, Recherches sur les séries ultrasphériques, Journal de Mathématiques pures et appliquées (9) **3** (1924), p. 107—187.

Endlich erwähne ich hier, daß im Falle der Newtonschen Abszissen

$$x_k = -1 + k\frac{2}{n+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

sämtliche konjugierte Punkte X_k in das Intervall $(-1, +1)$ fallen. Eine Ausnahme kommt nur vor, wenn n ungerade ist; dann fällt der der sodann auftretenden Interpolationsstelle $x = 0$ entsprechende konjugierte Punkt ins Unendliche.

16. Die Nummern 12 bis 15 enthalten eine neue Kennzeichnung der ultrasphärischen Abszissen. Es führte zu ihnen die Betrachtung der konjugierten Punkte der Hermiteschen Interpolation. In den §§ 1, 2 sind diese speziellen Abszissengruppen auf einem ganz anderen Wege aufgetreten, nämlich durch die klassische Methode der kleinsten Quadrate. Schließlich erinnere ich noch an einen dritten Weg, auf dem die ultrasphärischen Abszissen unmittelbar hervortreten: es ist dies die klassische Frage nach gewissen günstigsten mechanischen Quadraturen (Gauß, Mehler). Im Reste dieser Arbeit beschränke ich mich nun ausschließlich auf den Grenzfall $\lambda = 0$, d. h. auf die Tschebyscheffschen Abszissen, ohne meine Resultate, die sich auf allgemeine ultrasphärische Abszissen beziehen, zu erwähnen.

§ 10.

Über die wichtigsten Eigenschaften der Grundfunktionen beider Art im Falle Tschebyscheffscher Abszissen.

17. Es seien mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Tschebyscheffschen Abszissen bezeichnet.

Ich erinnere zunächst daran, daß immer

$$\text{(I)} \qquad \sum_{k=1}^{n} h_k(x) = 1$$

ist.

Eine leichte Rechnung zeigt, daß im Falle Tschebyscheffscher Abszissen

$$\text{(II)} \qquad \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{h}_k(x) = \mathfrak{h}(x) = \mathfrak{h}(\cos\theta) = \frac{1}{n}\cos n\theta \cos(n-1)\theta$$
$$= \frac{1}{2n}(\cos\theta + \cos(2n-1)\theta)$$

ist. Diese interessante Gleichung habe ich hier angeführt, werde sie aber beim Konvergenzbeweis nicht benützen.

Wegen $h_k(x) \geqq 0$, für $-1 \leqq x \leqq +1$, ist natürlich auch

$$\text{(III)} \qquad \sum_{k=1}^{n} |h_k(x)| = 1.$$

Um die anderen, zum Konvergenzbeweise nötigen Abschätzungen erhalten zu können, muß ich die Grundpolynome im vorliegenden Tschebyscheffschen Falle etwas näher betrachten. Laut (22) und (23) ist immer

$$(47) \qquad h_k(x) = \left(1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)\right)(l_k(x))^2 = v_k(x)(l_k(x))^2,$$

$$(48) \qquad \mathfrak{h}_k(x) = (x - x_k)(l_k(x))^2.$$

Im Falle Tschebyscheffscher Abszissen ist aber, auf Grund der Gleichung (44),

$$(49) \qquad \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = \frac{x_k}{1 - x_k^2},$$

und, wegen

$$(50) \qquad \omega(x) = T(x) = T(\cos\theta) = \cos n\theta,$$

$$(51) \qquad (\omega'(x_k))^2 = \frac{n^2}{1 - x_k^2}.$$

Also ist, mit Rücksicht auf (47) bis (51),

$$(52) \quad h_k(x) = v_k(x)(l_k(x))^2 = \frac{1 - x x_k}{1 - x_k^2}(l_k(x))^2 = \frac{1}{n^2}(1 - x x_k)\left(\frac{T(x)}{x - x_k}\right)^2$$

und

$$(53) \quad \mathfrak{h}_k(x) = (x - x_k)(l_k(x))^2 = \frac{x - x_k}{v_k(x)} h_k(x) = (x - x_k) \cdot \frac{1 - x_k^2}{1 - x x_k} h_k(x),$$

oder mit anderer Gruppierung der Faktoren

$$(53') \qquad \mathfrak{h}_k(x) = \frac{x - x_k}{1 - x x_k}(1 - x_k^2)\, h_k(x).$$

Aus (52) erhalten wir zunächst, mit Rücksicht auf $|T(x)| = |T(\cos\theta)| = |\cos n\theta| \leqq 1$,

$$(54) \qquad |h_k(x)| = h_k(x) \leqq \frac{2}{(x - x_k)^2} \cdot \frac{1}{n^2},$$

für $-1 \leqq x \leqq +1$, $x \neq x_k$.

Da weiter

$$(55) \qquad \left|\frac{x - x_k}{1 - x x_k}\right| \leqq 1, \qquad \text{für} \quad |x| \leqq 1,$$

so ist, mit Rücksicht auf $|1 - x_k^2| = 1 - x_k^2 \leqq 1$ und auf Grund der Formel (53'),

$$(56) \qquad |\mathfrak{h}_k(x)| \leqq h_k(x), \qquad \text{für} \quad |x| \leqq 1,$$

eine, im Tschebyscheffschen Falle gültige, wichtige Ungleichung.

Durch Summation erhalte ich nun aus (56), mit Rücksicht auf (I),

$$(\text{IV}) \qquad \sum_{k=1}^{n} |\mathfrak{h}_k(x)| \leqq \sum_{k=1}^{n} h_k(x) = 1.$$

18. Die feste Stelle x sei durch ein festes Intervall $(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)$ umgeben. Diesem Intervalle entsprechend teilen wir die Summen $\sum\limits_{k=1}^{n}|h_k(x)|$ und $\sum\limits_{k=1}^{n}|\mathfrak{h}_k(x)|$ in zwei Teile:

$$\sum_{k=1}^{n}|h_k(x)| = \sum_{k=1}^{n} h_k(x) = \sum{}' h_k(x) + \sum{}'' h_k(x), \tag{57}$$

$$\sum_{k=1}^{n}|\mathfrak{h}_k(x)| = \sum{}' |\mathfrak{h}_k(x)| + \sum{}'' |\mathfrak{h}_k(x)|, \tag{58}$$

wo $\sum'$ immer eine Summe bedeutet, die über diejenigen Indizes k zu erstrecken ist, denen ein in das abgeschlossene Intervall $(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)$ fallendes x_k entspricht. $\sum''$ bezeichnet immer eine Summe, die über allen übrigen Indizes k zu erstrecken ist. (Die eine oder andere Summe kann unter Umständen auch leer ausfallen.)

Nun ist, mit Rücksicht auf (I) und $h_k(x) \geqq 0$,

$$\sum{}' |h_k(x)| = \sum{}' h_k(x) \leqq \sum_{k=1}^{n} h_k(x) = 1, \tag{V}$$

und, mit Rücksicht auf (IV),

$$\sum{}' |\mathfrak{h}_k(x)| \leqq \sum{}' h_k(x) \leqq 1. \tag{VI}$$

Weiter ist, mit Rücksicht auf (54),

$$\sum{}'' |h_k(x)| = \sum{}'' h_k(x) \leqq \frac{2}{\varepsilon^2} \sum{}'' \frac{1}{n^2} \leqq \frac{2}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{n}{}' \frac{1}{n^2} = \frac{2}{\varepsilon^2}\, n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{2}{\varepsilon^2}\frac{1}{n}, \tag{VII}$$

und, mit Rücksicht auf (56) und (VII),

$$\sum{}'' |\mathfrak{h}_k(x)| \leqq \sum{}'' h_k(x) \leqq \frac{2}{\varepsilon^2}\,\frac{1}{n}. \tag{VIII}$$

Ich kann aber außerdem noch zeigen, daß im Falle Tschebyscheffscher Abszissen

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=1}^{n} |\mathfrak{h}_k(x)| = 0 \tag{IX}$$

gültig ist, und zwar gleichmäßig im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$. Da nämlich

$$\frac{1-x_k^2}{1-x\,x_k} \leqq \frac{1-|x_k|^2}{1-|x_k|} = 1 + |x_k| \leqq 2,$$

so gilt, mit Rücksicht auf (53), für $|\mathfrak{h}_k(x)|$ außer der Ungleichung (56) auch noch die ebenfalls wichtige Ungleichung

$$|\mathfrak{h}_k(x)| \leqq 2\,|x - x_k|\, h_k(x), \tag{X}$$

aus welcher, mit Rücksicht auf (V), die Abschätzung

$$\sum{}' |\mathfrak{h}_k(x)| \leqq 2 \sum{}' |x - x_k|\, h_k(x) \leqq 2\,\varepsilon \sum{}' h_k(x) \leqq 2\,\varepsilon \tag{VI$'$}$$

geschlossen werden kann.

Aus (VI′), (VIII) und (58) folgt nun

$$\sum_{k=1}^{n} |\mathfrak{h}_k(x)| \leqq 2\varepsilon + \frac{2}{\varepsilon^2}\,\frac{1}{n} \leqq 3\,\varepsilon,$$

wenn nur n gehörig groß ist. Da ε eine beliebig kleine positive Größe bezeichnet, so habe ich (IX) schon bewiesen, d. h. das folgende Resultat erhalten:

Die Summe der absoluten Beträge der Grundpolynome zweiter Art $\mathfrak{h}_k(x)$ konvergiert im Falle Tschebyscheffscher Abszissen zu Null, wenn $n \to \infty$, und zwar gleichmäßig im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$.

Beim Konvergenzbeweis werde ich nicht (IV), sondern (IX) gebrauchen.

§ 11.

Beweis der gleichmäßigen Konvergenz der Hermiteschen Interpolationspolynome zur Funktion, wenn ihre Steilheit in den Tschebyscheffschen Abszissen beschränkt bleibt.

19. Es sei nun $y = f(x)$ eine im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ überall stetige Funktion. Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die zum Index n gehörigen Tschebyscheffschen Abszissen. Es seien weiter $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die Werte von $y = f(x)$ an den Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, und $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ seien *beliebige n Werte, die dem absoluten Betrage nach nicht größer sind als Δ, wo Δ eine beliebig gewählte nichtnegative absolute Konstante bezeichnet, d. h. es sei*

$$y_k = f(x_k), \qquad |y_k'| \leqq \Delta \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{59}$$

(Den oberen Index n, den ich bei allen Größen

$$\begin{matrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_n \\ y_1', & y_2', & \ldots, & y_n' \end{matrix} \tag{60}$$

ansetzen müßte, kann ich ruhig weglassen, ohne ein Mißverständnis zu befürchten.)

Das zu den so definierten Daten (60) gehörige Hermitesche Interpolationspolynom lautet

$$\mathrm{X}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k h_k(x) + \sum_{k=1}^{n} y_k' \mathfrak{h}_k(x) = H_n(x) + \mathfrak{H}_n(x). \tag{61}$$

Ich behaupte nun, daß das *Wellenpolynom*

$$\mathfrak{H}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k' \mathfrak{h}_k(x) \tag{62}$$

mit $n \to \infty$ für $-1 \leqq x \leqq +1$ *gleichmäßig zu* 0 *konvergiert*. Tatsächlich ist

$$(63) \qquad |\mathfrak{H}_n(x)| \leqq \sum_{k=1}^{n} |y_k'| \, |\mathfrak{h}_k(x)| \leqq \varDelta \sum_{k=1}^{n} |\mathfrak{h}_k(x)| \to 0$$

auf Grund der Limesgleichung (IX).

Es bleibt also nur noch übrig das Treppenpolynom

$$(64) \qquad H_n(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k h_k(x)$$

für $n \to \infty$ zu untersuchen. Es sei x eine beliebige Stelle des Intervalls $-1 \leqq x \leqq +1$, und y bezeichne den Wert von $f(x)$ an der Stelle x. Dann ist, mit Rücksicht auf (64) und (I),

$$(65) \qquad H_n(x) - y = \sum_{k=1}^{n} (y_k - y) h_k(x).$$

Es sei nun δ eine beliebige positive Größe, und ε so bestimmt, daß

$$(66) \qquad |f(t) - f(x)| \leqq \delta,$$

wenn

$$(67) \qquad |t - x| \leqq \varepsilon,$$

wo auch der Wert x im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ gelegen sei. Aus (65), (66) und (67) folgt, mit Berücksichtigung von (V) und (VII), unmittelbar

$$(68) \qquad \begin{aligned} |H_n(x) - y| &\leqq \sum_{k=1}^{n} |y_k - y| h_k(x) \\ &= \Sigma' |y_k - y| h_k(x) + \Sigma'' |y_k - y| h_k(x) \\ &\leqq \delta \, \Sigma' h_k(x) + S \, \Sigma'' h_k(x) \leqq \delta + S \cdot \frac{2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

wo S die größte Schwankung von $f(t)$ im Intervalle $-1 \leqq t \leqq +1$ bezeichnet. Also ist

$$(69) \qquad |H_n(x) - y| \leqq 2\delta,$$

wenn nur n gehörig groß ist, und zwar im ganzen Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$. Hiermit ist aber bewiesen, daß im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ das Treppenpolynom $H_n(x)$ gleichmäßig zu $f(x)$ konvergiert, d. h.

$$(70) \qquad \lim_{n=\infty} H_n(x) = f(x)$$

stattfindet. Ich habe soeben bewiesen, daß für $-1 \leqq x \leqq +1$ gleichmäßig

$$(71) \qquad \lim_{n=\infty} \mathfrak{H}_n(x) = 0$$

stattfindet. Also ist, mit Rücksicht auf (61),

$$(72) \qquad \lim_{n=\infty} \mathrm{X}_n(x) = f(x),$$

und zwar gleichmäßig im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$.

Das so erhaltene Theorem läßt sich in folgender Weise formulieren.

Es sei $y = f(x)$ *eine beliebig gegebene, im Intervalle* $-1 \leqq x \leqq +1$ *überall stetige Funktion.* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *sollen die Tschebyscheffschen Abszissen bezeichnen, d. h. es sei*

$$x_k = \cos(2k-1)\frac{\pi}{2n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

und $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *sollen die Werte bezeichnen, die die Funktion* $f(x)$ *an diesen Stellen, der Reihe nach, annimmt, d. h. es sei*

$$y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \quad \ldots, \quad y_n = f(x_n).$$

Durch die Punkte

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n),$$

als Knotenpunkte, geht nun eine n*-fach unendliche Schar von Parabeln von höchstens* $(2n-1)$*-tem Grade. Es sei* $y = \mathsf{X}_n(x)$ *irgendeine Parabel dieser Schar, für welche jedoch die Richtungstangenten in allen Knotenpunkten dem absoluten Betrage nach nicht größer sind als* Δ, *d. h.*

$$|\mathsf{X}_n'(x_1)| \leqq \Delta, \quad |\mathsf{X}_n'(x_2)| \leqq \Delta, \quad \ldots, \quad |\mathsf{X}_n'(x_n)| \leqq \Delta,$$

wo Δ *eine beliebig vorgeschriebene numerische Konstante bezeichnet*[6]). *Dann ist*

$$\lim_{n=\infty} \mathsf{X}_n(x) = f(x),$$

und zwar gleichmäßig im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$.

Für die Interpolationsparabeln $2n$-ten Grades ist dieser Satz *nicht* richtig.

§ 12.

Spezielle Fälle.

20. Nimmt man im vorigen allgemeinen Theoreme, für jedes n, speziell

$$y_1' = y_2' = \ldots = y_n' = 0,$$

so erhält man, daß die von mir Treppenparabeln genannten speziellen Hermiteschen Parabeln für $-1 \leqq x \leqq +1$ gleichmäßig zu $y = f(x)$ konvergieren, d. h. den folgenden Satz (der sich, wie aus dem Vorhergehenden ersichtlich, kürzer direkt beweisen läßt):

---

[6]) Über weitergehende Resultate möchte ich an anderer Stelle berichten. Hier bemerke ich nur, daß, allgemeiner, $\mathsf{X}_n(x)$ immer mit $\lim n = \infty$ im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ gleichmäßig zu $f(x)$ konvergiert, wenn nur der größte unter den n Quotienten

$$|\mathsf{X}_n'(x_k)|\sqrt{1-x_k^2} : \frac{n}{\log n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

mit $\lim n = \infty$ zu 0 konvergiert.

Bezeichnet $H_n(x)$ diejenige ganze rationale Funktion von höchstens $(2n-1)$-tem Grade in x, die an den Tschebyscheffschen Abszissen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ denselben Wert annimmt wie die im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$ beliebig gegebene überall stetige Funktion $f(x)$, deren Derivierte aber an allen diesen Stellen verschwindet, so ist $\lim_{n=\infty} H_n(x) = f(x)$, und zwar gleichmäßig im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$. In Formeln:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)})(1 - x x_k^{(n)}) \left(\frac{T_n(x)}{x - x_k^{(n)}}\right)^2 = f(x),$$

und zwar gleichmäßig für $-1 \leqq x \leqq +1$, wo

$$T_n(x) = \cos n(\arccos x),$$

$$x_k^{(n)} = \cos(2k-1)\frac{\pi}{2n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Während also das Lagrangesche Interpolationspolynom $L_n(x)$ — diejenige ganze rationale Funktion von höchstens $(n-1)$-tem Grade, die an den Tschebyscheffschen Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit unserer Funktion $f(x)$ übereinstimmt — nicht notwendigerweise gleichmäßig zu $f(x)$ konvergiert, konvergiert das Treppenpolynom $H_n(x)$ — das man auch als dasjenige Polynom von höchstens $(2n-1)$-tem Grade charakterisieren kann, welches an den besagten Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, der Reihe nach, die Werte

$$y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \quad \ldots, \quad y_n = f(x_n)$$

doppelt annimmt — für $\lim n = \infty$ immer gleichmäßig zu $f(x)$, im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$.

Diese spezielle, besonders einfache Herstellungsregel für die Bildung Weierstraßscher Approximationspolynome durch Hermitesche Interpolation habe ich im Jahre 1915 veröffentlicht[7]. In der neuen allgemeinen Herstellungsregel im § 11 figurieren nun *beliebige* Neigungswerte $y_1', y_2', \ldots, y_n'$ der Hermiteschen Parabel, die nur der Bedingung der *Beschränktheit* ($|y_k'| \leqq \Delta$ für jedes k und jedes n) unterworfen sein müssen. Nimmt man für diese — um einen anderen speziellen Fall zu erwähnen — den Wert

$$y_1' = y_2' = \ldots = y_n' = 1,$$

so erhält man den Satz, daß unsere Hermite-Parabeln auch dann gleich-

[7]) L. Fejér, a) Interpolatióról (ungarisch), Anzeiger der Ungarischen Akademie der Wissenschaften **34** (1916) (Sitzung vom 15. November 1915); b) Über Interpolation, Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 1916 (Sitzung am 15. Januar 1916). Mit dieser Arbeit sind die §§ 3—12 vorliegender Arbeit zu vergleichen; jene enthält auch wichtige literarische Verweise.

mäßig zu $f(x)$ konvergieren (immer mit Tschebyscheff-Abszissen!), wenn sämtliche Tangenten dieser Parabeln in den Punkten

$$(x_1, f(x_1)), \quad (x_2, f(x_2)), \quad \ldots, \quad (x_n, f(x_n))$$

45^0 mit der Abszissenachse bilden.

Ich glaube, daß man durch zweckmäßige Wahl der „Tangentenverteilung“ in unserem Hermite-Polynome noch gewisse weitere Vorteile wird gewinnen können.

21. Ich erwähne schließlich noch einen dritten, etwas anders gearteten Spezialfall: es habe $f(x)$ selbst im Intervalle $-1 \leqq x \leqq +1$, oder wenigstens für sämtliche Tschebyscheffschen Abszissen, einen *beschränkten* Differentialquotienten $f'(x)$. Dann kann ich $y'_k = f'(x_k)$ wählen. Die Hermitesche Parabel geht in diesem Falle in die *Schmiegungsparabel* $y = S_n(x)$ von $y = f(x)$ über, wo $S_n(x)$ diejenige ganze rationale Funktion von höchstens $(2n-1)$-tem Grade bezeichnet, für die

$$\begin{aligned} &S_n(x_1) = f(x_1), \quad S_n(x_2) = f(x_2), \quad \ldots, \quad S_n(x_n) = f(x_n), \\ &S'_n(x_1) = f'(x_1), \quad S'_n(x_2) = f'(x_2), \quad \ldots, \quad S'_n(x_n) = f'(x_n) \end{aligned}$$

gilt. Unser allgemeiner Satz im § 11 liefert nun den Satz, daß *die Schmiegungsparabel in diesem Falle für $n = \infty$ gleichmäßig zur stetigen Kurve $y = f(x)$ konvergiert (d. h.* $\lim S_n(x) = f(x)$, *gleichmäßig für* $-1 \leqq x \leqq +1$).

Budapest, den 28. Juni 1929.

(Eingegangen am 15. 7. 1929.)