

Werk

Titel: Mathematische Annalen

Ort: Berlin

Jahr: 1930

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN235181684_0102

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0102

LOG Id: LOG_0042

LOG Titel: Über die Reduzibilität von Polynomen im Körper der reellen Zahlen

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Über die Reduzibilität von Polynomen im Körper der reellen Zahlen.

Von

Karl Dörge in Köln.

Um den in dieser Arbeit bewiesenen Satz als Verallgemeinerung einfacher bekannter Theoreme erscheinen zu lassen, knüpfen wir an die Frage nach der Realität der Wurzeln der quadratischen Gleichung an. Der Verallgemeinerung zu Liebe formulieren wir den hier vorliegenden Sachverhalt in folgender etwas umständlicher Form: In $f(x) = a_0 x^2 + a_1 x + a_2$ betrachte man a_0, a_1, a_2 als reelle Parameter. Die Punkte des reellen dreidimensionalen Parameterraumes mit den Koordinaten a_0, a_1, a_2 , in welchen $f(x)$ im Körper der reellen Zahlen zerfällt, sind dann durch eine algebraische Ungleichung — nämlich $4a_0 a_2 - a_1^2 \leq 0$ — charakterisiert. Der Bereich, in welchem f reduzibel ist, wird von dem Bereich, in welchem f irreduzibel ist, getrennt durch die Punktmenge der Punkte, in welchen f das positiv oder negativ genommene Quadrat eines reellen Polynoms wird.

Es sei nun f ein Polynom von den Veränderlichen x_1, \dots, x_m . Die Koeffizienten seien Polynome mit reellen Koeffizienten der reellen Parameter t_1, \dots, t_s . Unter Q verstehe man die Menge der Punkte des s -dimensionalen Parameterraumes, für welche f oder $-f$ das Quadrat eines reellen Polynoms in x_1, \dots, x_m wird. Es ist leicht zu sehen, daß diese Punktmenge Q algebraisch bestimmt ist. Es wird zunächst bewiesen, daß die Punkte des reellen s -dimensionalen Parameterraumes, für welche f im Körper der reellen Zahlen zerfällt, durch Systeme algebraischer Gleichungen und Ungleichungen zwischen den Koeffizienten a_i von f , also auch zwischen den t_σ , charakterisiert sind. Damit wird dann der folgende Satz bewiesen:

Die Punktmenge Q zerlegt den s -dimensionalen Parameterraum in durch sie getrennte Bereiche. Greift man irgendeinen derartigen Bereich heraus, so ist darin entweder f für jeden Punkt im Reellen reduzibel bis

auf höchstens die Punkte, in denen sich der Grad von f erniedrigt, oder f ist in jedem Punkt des Bereiches irreduzibel bis auf höchstens die Punkte auf gewissen angegebenen algebraischen Flächen¹⁾).

Bei Polynomen einer Veränderlichen von mindestens drittem Grade z. B. haben alle Gebiete denselben Charakter. In allen ihren Punkten, wo nicht Graderniedrigung eintritt, muß f im Reellen zerfallen. Das Polynom $t x^2 + (t - 1) y^4$ ist in $0 \leq t \leq 1$ reduzibel, in $t < 0$ und $t > 1$ irreduzibel. Die Grenzpunkte dieser Gebiete sind 0 und 1, wo f ein Quadrat wird.

Aus dem Satze kann z. B. gefolgert werden: Wenn f nie ein Quadrat wird²⁾, so ist es entweder im ganzen Raume im Reellen reduzibel bis auf höchstens die Punkte, wo Graderniedrigung eintritt, oder es ist im ganzen Raume irreduzibel bis auf höchstens die Punkte auf angegebenen algebraischen Ausnahmeflächen.

Die Anregung zu der Note habe ich durch das algebraische Kriterium für absolute Irreduzibilität von E. Noether (Math. Annalen 85) bekommen. Ich benutze nicht nur die Sätze, sondern auch die Methoden von E. Noether.

1. $f(x_1, \dots, x_m)$ sei ein Polynom mit Koeffizienten aus dem Körper K . Der Grad sei h . Man setze $d = 2h$. Dann unterwerfe man die x der Transformation $x_\mu = \xi^{d^{m-\mu}}$, $[\mu = 1, 2, \dots, m]$. f geht dadurch über in ein Polynom der einen Veränderlichen ξ . Man nenne es $F(\xi)$. Die Reduzibilität von f in K läßt sich dann in gewissem Sinne auf die Reduzibilität von F zurückführen³⁾. Dazu betrachte man im Körper K die Zerlegung

$$F(\xi) = F_1(\xi) \cdot F_2(\xi).$$

Die in F_1 und in F_2 wirklich auftretenden Exponenten entwickle man als d -adische Zahlen. Wenn die dabei vorkommenden Koeffizienten der Potenzen von d sämtlich ihrem Betrage nach kleiner als $\frac{d}{2}$ sind, sagen wir, die Faktoren F_1 und F_2 hätten induzierte Exponenten. Dann gilt der Satz: f zerfällt dann und nur dann in K , wenn F in zwei Faktoren mit induzierten Exponenten in K zerfällt. Ferner erhält man aus einer Zerlegung von F in Faktoren mit induzierten Exponenten eine Zerlegung von f , in deren Faktoren als Koeffizienten gerade die Koeffizienten der Faktoren von F auftreten.

¹⁾ Hierbei ist der uneigentliche Fall zugelassen, daß der Raum durch Q nicht zerlegt wird, also einen einzigen Bereich bildet. Randpunkte dürfen dem Bereiche angehören.

²⁾ Z. B. wenn die bei den verschiedenen Numerierungen der Veränderlichen x_μ sich ergebenden höchsten Glieder und das absolute Glied nirgends sämtlich übereinstimmende Vorzeichen haben, wie z. B. in $x^k - y^k + U(x, y)$, wo U in x und in y höchstens den Grad $k-1$ hat.

³⁾ Vgl. die Note von E. Noether.

Im folgenden lege man in den Veränderlichen x irgendeine feste Reihenfolge zugrunde, der Einfachheit halber etwa die Reihenfolge nach den Indizes: x_1, x_2, \dots, x_m . Man kann dann die Glieder von f nach irgendeinem Prinzip, etwa nach fallenden Exponenten, ordnen. Dann schreibe man

$$f(x_1, \dots, x_m) = a_0 \Pi_0 + \dots + a_L \Pi_L = \sum_{\lambda=0}^L a_\lambda \Pi_\lambda, \text{ unter } \Pi_0, \dots, \Pi_L \text{ die}$$

Potenzprodukte der x_1, \dots, x_m verstanden. Wir setzen im folgenden immer $a_0 \neq 0$ voraus. Der Grad von $F(\xi)$ sei N . Das höchste Glied von F ist dann $a_0 \xi^N$.

Definition. f zerfällt im Körper K halb, wenn es in einem Erweiterungskörper von K in zwei Faktoren $f_1 \cdot f_2$ zerfällt derart, daß in den f_k [$k=1, 2$] die höchsten und die konstanten Koeffizienten zu K gehören.

Der Begriff des Halbzerfallens von f läßt sich nun natürlich wieder zurückführen auf einen gewissen Begriff des Halbzerfallens von $F(\xi)$. Dazu sage man:

Definition. F zerfällt in K halb, wenn es in einem Erweiterungskörper von K derart in zwei Faktoren $F_1 \cdot F_2$ zerfällt, daß

1. F_1 und F_2 nur induzierte Exponenten enthalten,
2. die höchsten und die konstanten Koeffizienten von F_1 und F_2 zu K gehören.

Der Bequemlichkeit halber normiere man F , indem man mit a_0^{N-1} multipliziert, dann $\xi' = a_0 \xi$ setzt und schließlich statt ξ' wieder ξ schreibt. Zu $F(\xi)$ gehört dann ein bestimmtes Polynom $F^*(\xi)$, dessen Koeffizienten statt der a_λ jetzt noch mit Potenzen von a_0 multipliziert sind. Offenbar zerfällt F dann und nur dann halb in K , wenn F^* in K halbzerfällt. Ferner zerfällt offenbar f dann und nur dann halb in K , wenn F in K halbzerfällt, also dann und nur dann, wenn F^* in K halbzerfällt.

Wir interessieren uns in Zukunft natürlich nicht für das Halbzerfallen von f , sondern für das Zerfallen von f . Es besteht aber folgender Zusammenhang: Man unterwerfe die Veränderlichen x_μ unter Benutzung irgendwelcher Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ aus K der Transformation $x_\mu = x'_\mu + \alpha_\mu$ [$\mu = 1, 2, \dots, m$].

Aus dem durch Division von f mit a_0 normierten Polynom $f^*(x_\mu)$ entsteht dann ein neues Polynom $\hat{f}^*(x'_\mu)$. Wenn f^* in dem⁴⁾ algebraisch abgeschlossenen Erweiterungskörper von K zerfällt, so betrachte man dort sämtliche Zerlegungen von f^* in normierte Faktoren. Aus diesen Zer-

⁴⁾ Unter dem algebraisch abgeschlossenen Erweiterungskörper von K verstehen wir etwa den kleinsten algebraisch abgeschlossenen Erweiterungskörper von K .

legungen erhält man offenbar durch die Transformation $x_\mu = x'_\mu + \alpha_\mu$ sämtliche Zerlegungen von $\hat{f}^*(x'_\mu)$ in normierte Faktoren. Gehört so zu einer Zerlegung $f^* = \hat{f}_1^* \cdot \hat{f}_2^*$ die Zerlegung $\hat{f}^* = \hat{f}_1^* \cdot \hat{f}_2^*$, so ist offenbar der absolute Koeffizient von \hat{f}_1^* der Wert $f_1^*(\alpha_\mu)$ und der absolute Koeffizient von \hat{f}_2^* ist $f_2^*(\alpha_\mu)$. Aus einem Zerfallen von f^* in K folgt mithin gewiß das Halbzerfallen von $\hat{f}^*(x'_\mu)$ in K . Umgekehrt folgt aus dem Halbzerfallen von $\hat{f}^*(x'_\mu)$ in K in die Faktoren $\hat{f}_1^* \cdot \hat{f}_2^*$, daß $f_1^*(\alpha_\mu)$ und $f_2^*(\alpha_\mu)$ zu K gehören.

Daraus aber ergibt sich: f^* zerfällt dann und nur dann in K , wenn $f^*(x_\mu + \alpha_\mu)$ für genügend viele und genügend verteilte Systeme α_μ aus K in K halbzerfällt, und zwar ist notwendig und hinreichend, daß nach Bestimmung einer genügend großen Anzahl S , die allein durch die Grade von f bestimmt werden kann, für die Systeme $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, in welchen α_μ unabhängig voneinander die Reihe $0, 1, \dots, S-1$ durchlaufen, $f^*(x_\mu + \alpha_\mu)$ in K halbzerfällt⁵⁾. Kehrt man zu den Polynomen vor der Normierung zurück, so ergibt sich: f zerfällt dann und nur dann in K , wenn nach Bestimmung einer hinreichend großen Zahl S , die allein durch die Grade von f relativ zu den m Veränderlichen x_μ bestimmt werden kann, $f(x_\mu + \alpha_\mu)$ für alle S^m Systeme von Zahlen α_μ , in welchen die α_μ unabhängig voneinander ganzzahlig von 0 bis $S-1$ variieren, als Polynom von den x_μ in K halbzerfällt.

2. Um eine Bedingung für das Halbzerfallen von f in K zu erhalten, genügt es, das Halbzerfallen von F^* in K zu betrachten. Dazu nehme man für irgendein festes ϱ der Reihe $1, 2, \dots, N-1$ irgendeine Zerlegung von F^* in einem Erweiterungskörper von K , wobei man die Faktoren als normiert annehme:

$$F^* = F_1^* \cdot F_2^*,$$

$$F_1^* = \xi^e + c_1 \xi^{e-1} + \dots + c_e, \quad F_2^* = \xi^{N-e} + e_1 \xi^{N-e-1} + \dots + e_{N-e}.$$

Die N Wurzeln von F seien $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$. Sie verteilen sich auf die Faktoren F_1 und F_2 . Man wähle die Bezeichnung etwa so, daß F_1 die Wurzeln ξ_1, \dots, ξ_e und F_2 die Wurzeln ξ_{e+1}, \dots, ξ_N hat. Daß diese Zerlegung von F^* dann ein Halbzerfallen von F^* liefert, bedeutet: Gewisse der c , nämlich die, welche zu nicht induzierten Exponenten gehören, etwa $c_{\alpha_1}, \dots, c_{\alpha_x}$, und ebenso gewisse der e , etwa $e_{\beta_1}, \dots, e_{\beta_\sigma}$ sollen verschwinden und außerdem soll c_e — und dann von selbst e_{N-e} — zu K gehören. Das kann aber auch so ausgedrückt werden: Der mit den neuen Veränderlichen $u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots, w, \delta$ gebildete Ausdruck

$$-u_1 c_{\alpha_1} + u_2 c_{\alpha_2} + \dots + u_x c_{\alpha_x} + v_1 e_{\beta_1} + v_2 e_{\beta_2} + \dots + v_\sigma e_{\beta_\sigma} + w(c_e - \delta)$$

⁵⁾ Vgl. den Hilfssatz in Teil II der Note „Bemerkung zum Hilbertschen Irreduzibilitätssatz“, Math. Annalen 102, S. 521–530.

soll für eine Zahl δ aus K verschwinden. Auf diese Form, aufgefaßt als Ausdruck in den ξ_1, \dots, ξ_N wende man alle $N!$ Permutationen der ξ_1, \dots, ξ_N an. Man erhält dann weitere Formen in denselben Veränderlichen u, v, w, δ . Man bilde deren Produkt. Dieses ist ein Polynom $\Phi_\rho(u, v, w, \delta)$ von u, v, w, δ , dessen Koeffizienten jetzt wegen ihrer Symmetrie in den ξ_1, \dots, ξ_N Polynome von den Koeffizienten von F^* , also auch von den Koeffizienten a_λ mit ganzen rationalen Koeffizienten sind. Zu jedem ρ der Reihe $1, 2, \dots, N-1$ gehört also ein $\Phi_\rho(u, v, w, \delta)$. Man nehme hier der Einfachheit halber für die verschiedenen ρ etwa dieselben Unbestimmten u, v, w, δ , deren Anzahl man von vornherein hinreichend groß annehme. Die Bedingung für das Halbzerfallen von f in K ist dann: $\Phi(\delta) = 0$ soll bei veränderlichen u, v, w eine Lösung δ in K haben.

Setzt man $w = 0$, so entsteht aus Φ ein Polynom Ψ , welches nur noch von u, v abhängt. Das Verschwinden von Ψ ist dann offenbar die notwendige und hinreichende Bedingung für das Zerfallen von f in dem algebraisch abgeschlossenen Erweiterungskörper von K .

In ähnlicher Weise kann man eine Form Ψ_3 von Unbestimmten $u_1, u_2, \dots, v_1, v_2, \dots, p_1, p_2, \dots$ konstruieren mit Koeffizienten, welche Polynome der a_λ mit ganzen rationalen Koeffizienten sind derart, daß $\Psi_3 = 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß f in dem algebraisch abgeschlossenen Erweiterungskörper von K in mindestens drei Faktoren zerfällt.

Durch die S^m Transformationen $x_\mu = x'_\mu + \alpha_\mu$, $\alpha_\mu = 0, 1, \dots, S-1$ entstehen aus f S^m Polynome f_σ . Zu jedem f_σ gehört ein bestimmtes $\Phi(\delta)$, man nenne es $\Phi_\sigma(\delta)$. Notwendig und hinreichend für das Zerfallen von f in K ist dann: Jedes Φ_σ [$\sigma = 1, 2, \dots, S^m$] soll in K eine Wurzel δ haben.

3. An Stelle des beliebigen Körpers K betrachte man jetzt den Körper aller reellen Zahlen, R . Dann wähle man ein festes σ . Die Koeffizienten von Φ_σ , aufgefaßt als Polynom der u, v, w , sind Polynome von δ mit reellen Koeffizienten. Man bezeichne sie etwa mit $P_k(\delta)$ [$k = 1, 2, \dots, K$] und setze $\sum_{k=1}^K (P_k(\delta))^2 = Q_\sigma(\delta)$. Die Bedingung für das Zerfallen von f in R ist dann die: Jedes $Q_\sigma(\delta)$ [$\sigma = 1, 2, \dots, S^m$] soll eine reelle Wurzel δ haben.

Ob bei festem σ das Polynom $Q_\sigma(\delta)$ eine reelle Wurzel hat, ist nun durch Gleichungen und Ungleichungen zwischen den Koeffizienten von Q_σ bestimmt, wie aus den bekannten Sätzen über die Anzahl der reellen Wurzeln von Polynomen folgt. Genauer gilt folgendes: Man kann zu $Q_\sigma(\delta)$ eine endliche Anzahl von Systemen Σ_{σ_τ} [$\tau = 1, \dots, \tau_\sigma$] bestimmen, von denen jedes aus einer endlichen Anzahl von algebraischen Gleichungen und algebraischen

Ungleichungen⁶⁾ zwischen den Koeffizienten von Φ_σ , also zwischen den Koeffizienten von f besteht, mit folgender Eigenschaft: Dafür, daß $Q_\sigma(\delta)$ eine reelle Wurzel hat, ist notwendig und hinreichend, daß für irgendein τ alle Gleichungen und Ungleichungen von $\Sigma_{\sigma\tau}$ gleichzeitig erfüllt sind. Daraus ergibt sich weiter: Notwendig und hinreichend für das Zerfallen von f in R ist, daß für jedes σ ein System $\Sigma_{\sigma\tau}$ existiert, dessen Gleichungen und Ungleichungen gleichzeitig erfüllt sind.

Offenbar kann man dann auch ohne Unterscheidung der σ von vornherein endlich viele Systeme P_ζ von je endlich vielen algebraischen Relationen zwischen den Koeffizienten von f angeben, so daß für das Zerfallen von f in R notwendig und hinreichend ist, daß für irgendein ζ sämtliche Relationen von P_ζ gleichzeitig erfüllt sind.

Diese Bedingung hat sich ergeben unter der — allerdings einzigen — Einschränkung, die wir bisher durchweg gemacht haben, nämlich daß a_0 , der Koeffizient des höchsten Gliedes von f , nicht verschwindet. Ein Satz gleichen Wortlautes ergibt sich nun nachträglich auch, wenn man diese Einschränkung fallen läßt.

Statt P_ζ schreibe man nämlich jetzt $P_{\zeta_0}^0$ ($\zeta_0 = 1, 2, \dots, Z_0$). Entsprechend erhält man, wenn man $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0$ annimmt, ein System algebraischer Relationen $P_{\zeta_1}^1$ [$\zeta_1 = 1, \dots, Z_1$] gleicher Bedeutung, für $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$ ein System $P_{\zeta_2}^2$ usw. Vor jede Relation von $P_{\zeta_0}^0$ schreibe man nun noch formal $a_0^2 > 0$, was durch $\begin{pmatrix} a_0^2 > 0 \\ P_{\zeta_0}^0 \end{pmatrix}$ angedeutet werde. Man erhält dann ein System von algebraischen Relationen, das mit $S_{\zeta_0}^0$ bezeichnet werden möge.

Vor jede Relation von $P_{\zeta_1}^1$ setze man die beiden Relationen $a_0 = 0$, $a_1^2 > 0$, was durch $\begin{pmatrix} a_0 = 0 \\ a_1^2 > 0 \\ P_{\zeta_1}^1 \end{pmatrix}$ angedeutet werde. Das System von Relationen, das man so erhält, nenne man $S_{\zeta_1}^1$. Entsprechend erhält man $S_{\zeta_2}^2$: $\begin{pmatrix} a_0 = 0 \\ a_1 = 0 \\ a_2^2 > 0 \\ P_{\zeta_2}^2 \end{pmatrix}$ usw. Mithin gilt

Satz I: *Notwendig und hinreichend für das Zerfallen von f in R ist, daß irgendeines der endlich vielen $Z_0 + Z_1 + \dots$ Systeme S_ϑ , $\vartheta = 1, 2, \dots, H$, [$Z_0 + Z_1 + \dots = H$] von algebraischen Gleichungen und Ungleichungen zwischen den Koeffizienten von f gleichzeitig erfüllt ist.*

⁶⁾ Unter einer algebraischen Ungleichung verstehen wir eine Behauptung, daß ein Polynom positiv oder negativ oder nicht positiv oder nicht negativ ist.

Unter einer algebraischen Relation verstehen wir eine algebraische Gleichung oder eine algebraische Ungleichung.

Es liegt also prinzipiell gerade so, wie bei der Frage nach der Existenz reeller Wurzeln von Polynomen mit einer einzigen Unbekannten, natürlich rechnerisch viel komplizierter.

Im $L + 1$ -dimensionalen Raume der reellen Parameter a_0, \dots, a_L gibt es also endlich viele algebraische Flächen, nämlich die, welche man erhält, wenn man die Relationen, die in irgendeinem der H Systeme S_β vorkommen, durch Ersetzen der etwa vorkommenden Ungleichheitszeichen durch Gleichheitszeichen sämtlich zu Gleichungen macht, derart, daß man von einem Punkt, in welchem f reduzibel ist, zu einem Punkt, in welchem f irreduzibel ist, nur gelangen kann durch Passieren einer derselben.

Wir werden jetzt diese Flächen genauer zu charakterisieren suchen.

4. Statt die Koeffizienten a_i selbst als unabhängige Veränderliche anzunehmen, nehmen wir allgemeiner an, sie seien Polynome der unabhängigen Parameter t_1, \dots, t_s mit reellen Koeffizienten. Nun behandeln wir zunächst den Fall eines einzigen Parameters t . Den allgemeinen Fall führen wir auf diesen zurück.

Es mögen also die Koeffizienten a_i Polynome mit reellen Koeffizienten von t sein, $a_0(t) \neq 0$.

Aus den algebraischen Flächen in den a_i werden jetzt Polynome in t . Sie verschwinden nicht sämtlich identisch in t , weil $(a_0(t))^2$ vorkommt. Die höchstens endlich vielen reellen Nullstellen der nicht identisch verschwindenden unter ihnen teilen offenbar die reelle t -Achse ein in endlich viele Strecken, so daß jede von ihnen entweder nur Punkte enthält, wo f in R reduzibel ist, oder nur Punkte, wo f in R irreduzibel ist. Es kann sein, daß zu dieser Einteilung gar nicht alle Punkte, die man erhalten hat, erforderlich sind. Dann streiche man sie fort. Die übrigen Punkte nenne man die Grenzpunkte der Einteilung. Sie sind durch f eindeutig bestimmt.

$A(t)$ sei der Körper aller algebraischen Funktionen von t . Er ist algebraisch abgeschlossen. Macht man die Betrachtung von 1. und 2. statt mit dem beliebigen K jetzt mit $A(t)$, so ist mithin $\Psi(u, v) = 0$ die Bedingung dafür, daß f in $A(t)$ in mindestens zwei Faktoren zerfällt, $\Psi_3(u, v, p) = 0$ die Bedingung dafür, daß es in mindestens drei Faktoren zerfällt. Bei reell oder komplex spezialisiertem t ist ferner für solche t , für welche $a_0(t) \neq 0$ ist, $\Psi(u, v) = 0$ und $\Psi_3(u, v, p) = 0$ die Bedingung dafür, daß f im Körper $R(i)$ aller reellen und komplexen Zahlen in mindestens zwei bzw. drei Faktoren zerfällt. Dann unterscheiden wir bzgl. $A(t)$ drei Fälle:

$$(I) \quad \Psi(u, v) \neq 0.$$

Dann gibt es höchstens endlich viele reelle Punkte t , an welchen Ψ verschwindet. Außerdem gibt es nur endlich viele Stellen, an welchen $a_0(t)$

verschwindet. Höchstens an diesen endlich vielen Stellen, an welchen Ψ oder a_0 verschwindet, kann f in $R(i)$, also erst recht nur hier in R zerfallen. Wir haben dies geschlossen, indem wir eine bestimmte Reihenfolge der Veränderlichen x_μ ausgezeichnet hatten. Zu dem entsprechenden Ergebnis hätten wir mit jeder anderen Reihenfolge gelangen müssen. Daher gilt der Satz: Ist $\Psi(u, v) \neq 0$, so kann f höchstens an den endlich vielen reellen Stellen t zerfallen, an welchen $\Psi(u, v)$ verschwindet, oder bei jeder der $m!$ möglichen zugrunde gelegten Reihenfolgen x_{a_1}, \dots, x_{a_m} der Veränderlichen das Leitglied herausfällt, d. h. aber, an welchen Graderniedrigung eintritt. Das Verschwinden von $\Psi(u, v)$ für reelles t ist gleichbedeutend mit dem Verschwinden des Polynoms $\hat{\Psi}(a_\lambda)$, welches entsteht, indem man die Summe der Quadrate aller Koeffizienten von $\Psi(u, v)$ bildet.

Es sei jetzt

$$(II) \quad \Psi(u, v) = 0, \quad \Psi_3(u, v, p) = 0.$$

Dann enthält f an jeder reellen Stelle t , an welcher $a_0(t) \neq 0$ ist, in $R(i)$ mindestens drei Faktoren. Da neben jedem komplexen Faktor der konjugiert komplexe Faktor auftritt, muß dann an jeder reellen Stelle t f auch in R zerfallen bis auf höchstens die Stellen, an welchen $a_0(t)$ verschwindet.

Legt man eine andere Reihenfolge der Veränderlichen x_μ zugrunde, so erhält man ein neues Ψ und ein neues Ψ_3 . Offenbar müssen aber auch diese beiden verschwinden. Daher kann man allgemein schließen: f zerfällt an allen reellen Punkten, außer höchstens an denjenigen, wo Graderniedrigung eintritt.

$$(III) \quad \Psi(u, v) = 0, \quad \Psi_3(u, v, p) \neq 0.$$

Diejenigen der endlich vielen reellen Punkte t , an welchen $a_0(t)$ verschwindet, bezeichne man mit τ_1, τ_2, \dots , die, an welchen Ψ_3 verschwindet, mit τ'_1, τ'_2, \dots . In jedem reellen Punkte, der kein τ ist, enthält dann f in $R(i)$ mindestens zwei Faktoren; wenn der Punkt auch kein τ' ist, genau zwei Faktoren.

f zerfällt nun in $A(t)$ in zwei Faktoren:

$$(x) \quad f(x_\mu) = (\varphi_0 II_0 + \dots + \varphi_K II_K) \cdot (\psi_0 II'_0 + \dots + \psi_{K'} II'_{K'}).$$

Durch Spezialisieren von t in den φ und ψ erhält man aus dieser Zerlegung Zerlegungen von f bei numerischem t . Da f bis auf die endlich vielen τ, τ' genau zwei Faktoren enthält, folgt, daß man bei eindeutiger Festlegung eines Zweiges der φ, ψ , derart daß die Zerlegung (x) stattfindet, bereits sämtliche Zerlegungen von f an allen Stellen außer den τ, τ' bekommt. Wir nehmen also in Zukunft bei numerischer Betrachtung an,

daß die φ, ψ bei anzugebenden Normierungen von φ_0 und ψ_0 eindeutige Zweige der durch sie dargestellten algebraischen Funktionen sind.

Wir sehen uns nun die endlich vielen Grenzpunkte t , durch die wir die ganze reelle t -Achse eingeteilt haben, einzeln an:

III. 1. t_0 sei Grenzpunkt zwischen zwei reduziblen Strecken⁷⁾. Die φ und ψ normiere man so, daß $\varphi_0 = 1$ ist. Die φ und ψ müssen dann in einer ganzen Umgebung von t_0 außer höchstens an der Stelle t_0 selbst reelle Werte haben. Wenn t_0 nun kein τ ist, sind die φ und ψ an der Stelle t_0 stetig. Daher ist an der Stelle t_0 :

$$f_{t_0} = [(\lim \varphi_0) II_0 + \dots + (\lim \varphi_K) II_K] \cdot [(\lim \psi_0) II'_0 + \dots + (\lim \psi_{K'}) II'_{K'}].$$

Wegen $\alpha_0(t_0) \neq 0$ ist hier $\lim \varphi_0 \cdot \lim \psi_0 \neq 0$, ferner sind sämtliche Limites reell, also zerfällt f in R . Ein Grenzpunkt zwischen reduziblen Strecken muß mithin ein τ sein, α_0 muß also dort verschwinden; also da man dies wieder für jede Reihenfolge der x_u schließen kann, muß Graderniedrigung eintreten.

III. 2. t_0 sei Grenzpunkt zwischen einer irreduziblen und einer reduziblen Strecke. Man operiere nun in so kleinen Umgebungen u um t_0 , daß darin außer etwa t_0 kein weiteres τ, τ' vorkommt. \mathfrak{S} und \mathfrak{R} seien die Teile von u , welche in die irreduzible bzw. die reduzible Strecke hineinfallen. In \mathfrak{S} kann α_0 dann nicht das Vorzeichen wechseln. Dann normiere man φ_0 so, daß in \mathfrak{S} gilt:

$$\text{wenn in } \mathfrak{S} \alpha_0 > 0: \quad \varphi_0 = \sqrt{\alpha_0(t)}, \quad \psi_0 = \sqrt{\alpha_0(t)},$$

$$\text{wenn in } \mathfrak{S} \alpha_0 < 0: \quad \varphi_0 = i \sqrt{-\alpha_0(t)}, \quad \psi_0 = i \sqrt{-\alpha_0(t)}.$$

Offenbar sind dann die φ und ψ in \mathfrak{S} konjugiert komplex, wenn $\alpha_0 > 0$, sie sind bis auf den Faktor -1 konjugiert komplex, wenn $\alpha_0 < 0$. In \mathfrak{R} sind die φ bis auf einen etwaigen gemeinsamen komplexen Faktor reell, ebenso die ψ . Ferner sind bei dieser Normierung, da t_0 , wie aus der Betrachtung von \mathfrak{S} folgt, keine Unendlichkeitsstelle der φ und ψ ist, die φ und ψ an der Stelle t_0 stetig. Daher gilt an der Stelle t_0 die Zerlegung

$$f_{t_0} = [(\lim \varphi_0) II_0 + \dots + (\lim \varphi_K) II_K] \cdot [(\lim \psi_0) II'_0 + \dots + (\lim \psi_{K'}) II'_{K'}].$$

Nimmt man diese Limites zunächst bei Annäherung an t_0 aus \mathfrak{S} heraus, so folgt, daß die Faktoren entweder konjugiert komplex sind, oder daß der eine Faktor das -1 -fache des konjugiert komplexen des anderen Faktors ist, also an der Stelle t_0 gilt entweder

$$f = f_1 \bar{f}_1 \quad \text{oder} \quad f = \bar{f}_1 (-\bar{f}_1).$$

⁷⁾ Wir nennen eine Strecke kurz reduzibel, wenn f in jedem ihrer Punkte reduzibel ist. Entsprechend nennen wir sie irreduzibel, wenn f in ihr überall irreduzibel ist.

Nimmt man aber die Limes durch Annäherung von t_0 aus \mathfrak{R} heraus, so folgt, daß an der Stelle t_0 f_1 und \bar{f}_1 durch Herausnahme zweier konstanter Faktoren C_1, C_2 aus f_1 bzw. \bar{f}_1 reell werden. Man kann dasselbe dann auch erreichen, indem man $C_2 = \bar{C}_1$ wählt, da $C_1 C_2$ reell sein muß. $\frac{f_1}{C_1}$ und $\frac{\pm f_1}{C_2}$ sind dann aber reell und bis auf das Vorzeichen konjugiert komplex, also reell und bis auf das Vorzeichen gleich, etwa gleich $\pm f_3$. Dann hat man an der Stelle t_0 eine Zerlegung

$$f = C_1 \bar{C}_1 f_3^2 \quad \text{oder} \quad f = C_1 \bar{C}_1 (-f_3^2),$$

d. h.
$$f = (\sqrt{C_1 \bar{C}_1} f_3)^2 \quad \text{oder} \quad f = -(\sqrt{C_1 \bar{C}_1} f_3)^2.$$

Mithin ist f an der Stelle t_0 das Quadrat oder das negativ genommene Quadrat eines reellen Polynoms oder, was dasselbe ist, das Quadrat eines Polynoms⁸⁾.

III. 3. Schließlich sei t_0 Grenzpunkt zwischen zwei irreduziblen Strecken. Mithin zerfällt f an der Stelle t_0 in reelle Faktoren. Daraus schließt man genau wie in III. 2, daß f an der Stelle t_0 in zwei konjugiert komplexe Faktoren, multipliziert mit ± 1 zerfällt. Wenn f dann an der Stelle t_0 nur in zwei Faktoren zerfällt, ergibt sich genau wie in III. 2, daß an der Stelle t_0 f das Quadrat eines Polynoms ist. Daher erhält man: Entweder ist f bei t_0 ein Quadrat oder f zerfällt an der Stelle t_0 in mindestens drei Faktoren. Dafür ist, wenn $a_0(t_0) \neq 0, \Psi_3 = 0$ notwendig und hinreichend. Mit Ψ_3 kann man wieder wie in 4. I zur Quadratsumme der Koeffizienten von Ψ_3 übergehen.

Wenn man die Betrachtungen aus 2. für algebraisch abgeschlossene Körper, wie es E. Noether tut, mit homogenisierten Polynomen durchführt, so erhält man allgemeiner statt unseres Ψ_3 und $\hat{\Psi}_3$ ein Ψ_3^* und ein $\hat{\Psi}_3^*$, dessen Verschwinden notwendig und hinreichend dafür ist, daß f in $R(i)$ mindestens drei Faktoren enthält, außer wenn Graderniedrigung eintritt. Man erhält dann etwas schärfer, daß f bei t_0 entweder ein Quadrat ist oder Graderniedrigung eintritt, oder $\hat{\Psi}_3^*$ verschwindet. Dabei ist $\hat{\Psi}_3^* = 0$ bei nicht eintretender Graderniedrigung für das Zerfallen in R notwendig und hinreichend.

5. Hängt f nicht nur von einem Parameter t , sondern von s Parameter t_1, \dots, t_s ab, so gelten die abgeleiteten Sätze zunächst nur, wenn man alle bis auf einen Parameter festhält. Daraus folgt aber sofort zusammengefaßt folgendes allgemeine Resultat: $f(x_1 \dots x_m)$ sei ein Polynom von

⁸⁾ Hierbei muß — und diese Festsetzung treffe man auch für das Folgende — das Polynom f an solchen Stellen, an denen es sich auf eine Konstante reduziert, als ein Quadrat dann und nur dann angesehen werden, wenn es in jeder Umgebung der Stelle das Quadrat eines — nicht konstanten — Polynoms ist.

x_1, \dots, x_m . Die Koeffizienten seien Polynome von s reellen Parametern t_1, \dots, t_s . Geordnet nach fallenden Potenzen für irgendeine feste Reihenfolge der x_μ sei

$$f = a_0 \Pi_0 \dots + a_L \Pi_L = \sum_{i=0}^L a_i \Pi_i, \quad a_0 \neq 0.$$

Die Punkte des reellen s -dimensionalen t -Raumes, in welchen f das Quadrat eines Polynoms wird — f ist dann von selbst das ± 1 -fache des Quadrates eines reellen Polynoms — bilden die Punktmenge Q , die, worauf am Schluß hingewiesen wird, im wesentlichen algebraisch bestimmt ist. Die Punkte, in welchen f bei nicht verschwindendem a_0 mindestens drei komplexe Teiler enthält, bilden eine algebraische Fläche $\hat{\Phi}_3(a_i) = 0$. Die Punkte, in denen Graderniedrigung in f eintritt, sind selbstverständlich algebraisch bestimmt, denn die Quadratsumme von gewissen a_i soll verschwinden. Man nenne diese Quadratsumme G und erhält die Fläche $G = 0$. Schließlich brauchen wir noch die algebraische Fläche $\hat{\Phi} = 0$, deren Konstruktion oben angegeben ist, und die bei nicht verschwindendem a_0 angibt, daß f in $R(i)$ zerfällt. Dann gilt folgender

Satz II: *Es sind nur folgende drei Fälle für das Zerfallen in R möglich:*

A) *f ist im ganzen Raume bis auf eine höchstens $s-1$ -dimensionale⁹⁾ Punktmenge reduzibel. Dann ist f höchstens für die Punkte der Fläche $G = 0$ irreduzibel.*

B) *f ist im ganzen Raume bis auf eine höchstens $s-1$ -dimensionale Punktmenge irreduzibel. Dann ist f , wenn $\hat{\Phi} \not\equiv 0$ in den $t_1 \dots t_s$, höchstens an den Punkten der Fläche $\hat{\Phi} = 0$, und wenn $\hat{\Phi} \equiv 0$ höchstens an den Punkten der Fläche $a_0 = 0$ oder $\hat{\Phi}_3 = 0$ und den Punkten der Punktmenge Q reduzibel. Reduzibilität tritt wirklich ein an den Punkten von Q ; an den Punkten von $\hat{\Phi}_3 = 0$, wenn $a_0 \neq 0$.*

C) *f sei für eine s -dimensionale Punktmenge reduzibel und für eine s -dimensionale Punktmenge irreduzibel. Die Punktmenge Q zerlegt dann den ganzen Raum in durch sie getrennte Bereiche derart, daß für jeden einzelnen derselben folgendes gilt:*

Entweder ist f in allen Punkten des Bereiches reduzibel bis auf höchstens die Punkte $G = 0$ oder es ist in allen Punkten des Bereiches irreduzibel bis auf höchstens die Punkte von $a_0 = 0$ und $\hat{\Phi}_3 = 0$. Reduzibilität tritt wirklich ein, wenn $a_0 \neq 0$, aber $\hat{\Phi}_3 = 0$. In den Punkten von Q , die diese Bereiche begrenzen, tritt wirklich Reduzibilität ein.

⁹⁾ Eine Punktmenge im t_1, \dots, t_s -Raume heißt höchstens $s-1$ -dimensional, wenn sie nur aus Randpunkten besteht. Sie heißt s -dimensional, wenn sie einen Punkt und eine ganze Umgebung desselben enthält.

Zusatz: Statt $\hat{\Phi}_3 = 0$ gibt es eine Fläche $\hat{\Phi}_3^* = 0$, so daß man an Stelle des Paares von Gleichungen $a_0 = 0$, $\hat{\Phi}_3 = 0$ in B) und C) auch die Gleichungen $G = 0$, $\hat{\Phi}_3^* = 0$ mit sonst gleichem Wortlaute hätte schreiben können.

Schließlich werde noch eine Bemerkung über die algebraische Bestimmtheit der Punktmenge Q angeknüpft. Es ist klar, daß bei nichtverschwindendem a_0 das Polynom f dann und nur dann ein Quadrat ist, wenn F in zwei gleiche Faktoren mit induzierten Exponenten zerfällt. Dazu müssen also gewisse der c und e verschwinden, die übrigen aber, soweit sie gleiche Indizes haben, übereinstimmen. Es ist klar, daß diese Bedingungen entsprechend den Schlüssen von 2. auf algebraische Gleichungen führen.

Durch Benutzung der E. Noetherschen Methode, welche mit homogenisierten Polynomen operiert, erhält man ein System algebraischer Gleichungen, welches nur versagt, wenn Graderniedrigung eintritt.

Schließlich werde noch folgender leicht zu beweisender Zusatz ohne Beweis angegeben.

2. Zusatz: Es gibt, wie soeben angedeutet, eine algebraische Gleichung $Q(a_1) = 0$, die bei nichtverschwindendem a_0 die Bedingung dafür ist, daß f ein Quadrat ist. Unter Q_0 verstehe man die Gesamtheit der Punkte, in denen bei nichtverschwindendem a_0 das Polynom $Q(a_1)$ verschwindet, und die Gesamtheit aller Häufungspunkte derselben. Ferner nehme man zu Q_0 die Punkte der Fläche $a_0 = 0$ dann und nur dann hinzu, wenn f nach Fortlassen des höchsten Gliedes identisch in den t_v das Quadrat eines Polynoms von den x_μ wird. Diese Punktmenge Q_0 — im allgemeinen ein echter Teil von Q — reicht aus, um die Bereiche verschiedenen Charakters, von denen in dem einen f bis auf algebraische Ausnahmepunkte reduzibel, in dem anderen bis auf algebraische Ausnahmepunkte irreduzibel ist, voneinander zu trennen. An den übrigen Punkten in Q , die mithin nicht zu Q_0 gehören, muß f zerfallen, aber es können dort nicht Gebiete mit verschiedenem Charakter aneinander stoßen.