# Eine Bemerkung über die Unzerlegbarkeit von Polynomen.

Von

Bartel L. van der Waerden in Groningen (Niederlande).

Aus den Behauptungen auf S. 744 der Abhandlung von G. Hermann über die Frage der endlichvielen Schritte in der Theorie der Polynomideale[1]) könnte man entnehmen, daß es nicht nur bei endlichen, sondern auch bei unendlichen Erweiterungen von (sagen wir etwa) dem Körper $\Gamma$ der rationalen Zahlen möglich sei, zu entscheiden, ob ein Polynom $f(x)$ im Körper irreduzibel sei. Beim Beweis wird aber eine petitio principii benutzt, nämlich, daß es möglich sei, von jedem endlichen Erweiterungskörper $\Lambda$ von $\Gamma$ zu entscheiden, ob im vorgelegten unendlichen Körper ein zu $\Lambda$ äquivalenter Unterkörper vorhanden ist. Wie man das aber in endlichvielen Schritten entscheiden soll, wird nicht gesagt.

Aus dem Folgenden wird sich ergeben, daß ein allgemeines Irreduzibilitätskriterium für Polynome $f(x)$ in unendlichen, aber „explizite-bekannten" (in einem später zu erklärenden Sinn) Erweiterungskörpern des rationalen Zahlkörpers $\Gamma$ *unmöglich* ist, es sei denn, daß es der Beweistheorie gelingen wird, die Entscheidbarkeit einer jeden Frage von der Art „Gibt es ein $n$ mit der Eigenschaft $E(n)$?" darzutun. $E(n)$ soll eine Eigenschaft der natürlichen Zahl $n$ sein, deren Gültigkeit für jedes $n$ in endlichvielen Schritten feststellbar ist.

Ein Körper $K$ soll *explizite-bekannt* heißen, wenn seine Elemente Symbole aus einem bekannten abzählbaren Vorrat von unterscheidbaren Symbolen sind, deren Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division sich in endlichvielen Schritten ausführen lassen. „Explizite-bekannt" ist z. B. ein Körper $\Gamma(\theta_1, \theta_2, \ldots)$, wo jedes $\theta_\nu$ entweder eine Unbestimmte oder eine Wurzel einer bestimmten in $\Gamma(\theta_1, \ldots, \theta_{\nu-1})$ irreduziblen Gleichung ist.

[1]) Math. Annalen **95** (1926), S. 736–788.

Behauptung. *Solange man keine allgemeine Methode hat, jedes Problem von der Art „Gibt es ein $n$ mit der Eigenschaft $E(n)$?“ zu lösen, solange kann es auch keine allgemeine Methode der Faktorzerlegung von Polynomen $f(x)$ mit Koeffizienten aus einem explizite-bekannten Körper geben.*

Beweis[2]). Gesetzt, es gäbe eine allgemeine Methode, jedes Polynom mit Koeffizienten aus einem Körper $\Gamma(\theta_1, \theta_2, \ldots)$ in Faktoren zu zerlegen; dann ist zu zeigen, daß man auch jede Frage „Gibt es ein $n$ mit der Eigenschaft $E(n)$?“ lösen kann. Es sei eine Eigenschaft $E(n)$ vorgelegt. Wir konstruieren den Körper $\Gamma(\theta_1, \theta_2, \ldots)$, wo $\Gamma$ der Körper der rationalen Zahlen ist,

$\theta_n = \sqrt{-1}$, wenn $n$ die kleinste Zahl mit der Eigenschaft $E(n)$,

$\theta_n = \sqrt{p_n}$ sonst, wo $p_n$ die $n$-te Primzahl ist.

Daß dieser Körper explizite-bekannt ist, ist unmittelbar einzusehen. Ebenso, daß das Polynom $x^2 + 1$ in ihm unzerlegbar ist oder nicht, je nachdem es ein $n$ mit der Eigenschaft $E(n)$ gibt. Die nach Voraussetzung mögliche Entscheidung über die Irreduzibilität des Polynoms $x^2 + 1$ gibt also zugleich Aufschluß über die Existenz eines $n$ mit der Eigenschaft $E(n)$.

Daß die gemachte Voraussetzung wesentlich ist, sieht man so: Wäre das allgemeine Entscheidungsproblem für Fragen der Art „Gibt es ein $n$ mit der Eigenschaft $E(n)$?“ gelöst, so würde man wenigstens für die Körper $\Gamma(\theta_1, \theta_2, \ldots)$ das Irreduzibilitätsproblem ohne weiteres lösen können, denn ein Polynom $f(x)$ ist dann und nur dann in $\Gamma(\theta_1, \theta_2, \ldots)$ zerlegbar, wenn es ein $n$ gibt mit der Eigenschaft, daß $f(x)$ im Körper $\Gamma(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ zerlegbar ist, und diese Eigenschaft $E(n)$ ist für jedes $n$ nach der Kroneckerschen Methode (siehe G. Hermann, a. a. O.) entscheidbar.

---

[2]) Bei der Bildung des Beispiels, das den wesentlichen Inhalt dieses Beweises ausmacht, hätte ich mich natürlich auch auf eine bestimmte Eigenschaft $E(n)$, etwa ein bestimmtes bis jetzt noch nicht beobachtetes Vorkommnis in der Dezimalbruchentwicklung von $\pi$, stützen können. Ich habe das vermieden, weil die Voraussetzung der Unentscheidbarkeit eines solchen Existenzproblems nicht nur völlig unberechtigt, sondern auch für den Beweis zu einem gewissen Grade unwesentlich ist. Wesentlich ist nur die Voraussetzung einer Unentscheidbarkeit überhaupt, eines „Ignorabimus“ in bezug auf Existenzprobleme der genannten Art.

(Eingegangen am 14. 10. 1929.)