

Werk

Titel: Mathematische Annalen

Ort: Berlin

Jahr: 1930

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN235181684_0102

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0102

LOG Id: LOG_0045

LOG Titel: Der Dimensionsbegriff für Punktmengen in kartesischen Räumen

LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Der Dimensionsbegriff für Punktmengen in kartesischen Räumen.

Von

S. Bochner in München.

Inhaltsverzeichnis.

- § 1. Problemstellung.
 - § 2. Die Dimensionszahl für kompakte Punktmengen.
 - § 3. Ihre wichtigsten Eigenschaften.
 - § 4. Die Dimensionszahl für beliebige Punktmengen.
 - § 5. Die Äquivalenzfrage.
- Anhang über Simplexe und Komplexe:
- § 1. Simplexe.
 - § 2. Konvexe Polyeder.
 - § 3. Komplexe.

§ 1.

Problemstellung.

Die Dimensionstheorie der kartesischen Räume \mathfrak{R}_n ¹⁾ fing an mit dem folgenden Satz²⁾.

Satz von Brouwer. *In einem \mathfrak{R}_n ist es nicht möglich, eine Punktmenge, welche einen inneren Punkt enthält, durch eine topologische³⁾ Abbildung in eine Menge ohne inneren Punkt überzuführen.*

¹⁾ Wegen der Begriffe: kartesischer Raum, Teilraum, Simplex, Komplex usw., verweisen wir auf den Anhang, in welchem der Vollständigkeit wegen verschiedene mehr oder minder geläufige Begriffe und Hilfsbetrachtungen zusammengestellt sind.

²⁾ Es gibt drei direkte Beweise dieses Satzes: a) L. E. J. Brouwer, *Math. Annalen* 70 (1911), S. 161—165; b) H. Lebesgue, *Fund. Math.* 2 (1921), S. 257—285; c) E. Sperner, *Hamburger Abhandl.* 6 (1928), S. 265—272. Der zuletzt genannte Beweis ist außerordentlich einfach.

³⁾ Die Abbildung einer Punktmenge \mathfrak{A} auf eine Punktmenge \mathfrak{A}' heißt topologisch, wenn sie umkehrbar eindeutig und umkehrbar stetig ist. Zwei Punktmengen \mathfrak{A} und \mathfrak{A}' , zwischen denen eine solche Abbildung möglich ist, heißen homöomorph.

Dieser Satz führt zum Dimensionsbegriff, und zwar ergibt er die Berechtigung, dem \mathfrak{R}_n und jeder Menge des \mathfrak{R}_n , welche einen inneren Punkt enthält, die Dimensionszahl n beizulegen. Aber für eine folgerichtige Dimensionierung allgemeiner Mengen in kartesischen Räumen, z. B. einer „Kurve“ in der Ebene, bietet der Satz von Brouwer keine unmittelbare Handhabe.

Wir wollen nun im folgenden zeigen, daß man im engen Anschluß an die Fragestellung und den Gedankengang des Brouwerschen Satzes und unter schärferer Ausnutzung seiner Beweiselemente auch für die allgemeinsten Mengen in kartesischen Räumen einen brauchbaren Dimensionsbegriff aufstellen kann. Dieser Dimensionsbegriff ist demjenigen vollständig äquivalent, welcher der Dimensionstheorie allgemeiner topologischer Räume zugrunde liegt⁴⁾; auf die Äquivalenzfrage werden wir im Schlußparagrafen näher eingehen. Aber ganz unabhängig davon werden wir „direkt“ den folgenden Satz beweisen, in welchem der Brouwersche Satz als Korollar enthalten ist.

Allgemeiner Satz. I. *Einer jeden nicht-leeren Menge eines \mathfrak{R}_n kommt eine der Zahlen 0, 1, 2, 3, ... als ihre Dimension zu.*

II. *Ist die Menge \mathfrak{A} ein Teil der Menge \mathfrak{B} , so ist $\dim \mathfrak{A} \leq \dim \mathfrak{B}$.*

III. *Die Dimension ist eine topologische Invariante, d. h. ist eine Menge \mathfrak{A} eines \mathfrak{R}_n homöomorph³⁾ mit einer Menge \mathfrak{A}' eines $\mathfrak{R}_{n'}$, $n \leq n'$, so ist $\dim \mathfrak{A} = \dim \mathfrak{A}'$. Insbesondere wenn \mathfrak{A} eine Menge eines \mathfrak{R}_n ist, und dieser \mathfrak{R}_n als Teilraum eines Umbettungsraumes $\mathfrak{R}_{n'}$ aufgefaßt wird, so hat \mathfrak{A} dieselbe Dimension als Menge des \mathfrak{R}_n wie als Menge des $\mathfrak{R}_{n'}$.*

IV. *Jede Menge des \mathfrak{R}_n , welche einen inneren Punkt enthält, also insbesondere der \mathfrak{R}_n selbst, ist n -dimensional.*

V. *Jede n -dimensionale Menge des \mathfrak{R}_n enthält einen inneren Punkt.*

Da wir den Dimensionsbegriff ab ovo und allgemeingültig entwickeln wollen, werden wir das, was wir im Anhang, der üblichen Terminologie folgend, einen n -dimensionalen Raum (Simplex, Komplex) genannt haben, bis auf weiteres einen n -gradigen Raum (Simplex, Komplex) nennen. Im Verlauf unserer Überlegungen wird sich herausstellen, daß „Grad“ und „Dimension“ dieselbe Zahl sind, wie man es ja von jedem Dimensionsbegriff verlangen muß.

§ 2.

Die Dimensionszahl für kompakte Punktmengen.

Wir betrachten bis auf weiteres nur solche Punktmengen, welche *kompakt*, d. h. abgeschlossen und beschränkt sind.

⁴⁾ Vgl. K. Menger, Dimensionstheorie, 1928, insbesondere Kap. VIII.

Es sei in einem \mathfrak{R}_n eine solche Menge \mathfrak{A} gegeben. Wir betrachten im \mathfrak{R}_n endlich viele Teilräume gleichen Grades m , in deren Vereinigungsmenge \mathfrak{B} die Menge \mathfrak{A} enthalten ist. Solche Vereinigungsmengen gibt es immer: der \mathfrak{R}_n selbst ist ein \mathfrak{B} . Es liegt nahe, das Minimum der Zahlen m als Dimension von \mathfrak{A} zu erklären. Um aber für „gekrümmte“ und „zipflige“ Mengen keine zu große Dimensionszahl zu erhalten, wollen wir die Menge \mathfrak{A} zuerst etwas „glätten“. Eine solche „Glättung“ kommt durch eine „kleine“ stetige Verrückung zustande, bei welcher auch ausdrücklich zugelassen wird, daß verschiedene Punkte in einen gleichen zusammenrücken dürfen. Wir verstehen (mit Brouwer, loc. cit.) unter einer ε -Deformation, $\varepsilon > 0$, einer Menge \mathfrak{A} des \mathfrak{R}_n eine stetige Abbildung von \mathfrak{A} auf eine andere Menge des \mathfrak{R}_n , bei welcher jeder Punkt um weniger als die (Euklidische) Entfernung ε aus seiner ursprünglichen Lage verschoben wird. Ist $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, so ist jede ε_1 -Deformation auch eine ε_2 -Deformation.

Definition. Die kompakte Menge \mathfrak{A} eines \mathfrak{R}_n heiße (in bezug auf diesen \mathfrak{R}_n) μ -dimensional, wenn μ das Minimum der Zahlen m von der folgenden Beschaffenheit ist: zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine ε -Deformation von \mathfrak{A} auf einen Teil einer Vereinigungsmenge von endlich vielen m -gradigen Teilräumen von \mathfrak{R}_n .

Man sieht leicht ein, daß man zur selben Dimensionszahl kommt, wenn man den Passus „Vereinigungsmenge von endlich vielen m -gradigen Teilräumen“ durch den Passus „Vereinigungsmenge von endlich vielen (nicht notwendig gleichgradigen) Teilräumen von der maximalen Gradzahl m “ ersetzt. Daher ist auf Grund der im Anhang durchgeführten Überlegung (vgl. Anhang § 3, 5.) die obige Definition mit der folgenden für die Anwendung viel handlicheren Formulierung äquivalent.

Definition. Die kompakte Menge \mathfrak{A} eines \mathfrak{R}_n heiße (in bezug auf diesen \mathfrak{R}_n) μ -dimensional, wenn μ das Minimum der Zahlen m ist, für welche es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine ε -Deformation von \mathfrak{A} auf einen Teil⁵⁾ eines m -gradigen Komplexes gibt.

§ 3.

Ihre wichtigsten Eigenschaften.

Jetzt werden wir den allgemeinen Satz beweisen.

Ad I und II. Diese Behauptungen ergeben sich unmittelbar aus der Definition.

⁵⁾ Unter einem Teil eines Komplexes verstehen wir einen echten Teil des Komplexes bzw. den ganzen Komplex.

Ad III. Wir werden ein Schlußverfahren von Brouwer⁶⁾ mit einer geringen Modifikation wiederholen. Es ist leicht einzusehen, daß es genügt, wenn wir folgendes beweisen. Gegeben seien eine kompakte Menge \mathfrak{A} eines \mathfrak{R}_n und eine homöomorphe Menge \mathfrak{A}' eines \mathfrak{R}_n . Wenn es zu jedem $\varepsilon' > 0$ eine ε' -Deformation von \mathfrak{A}' auf einen Teil \mathfrak{A}'' eines Komplexes \mathfrak{R}'' vom Grade $\leq m$ gibt, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine ε -Deformation von \mathfrak{A} auf einen Teil \mathfrak{B} eines Komplexes \mathfrak{R}_1 vom Grade $\leq m$.

Wir gehen von einem festen $\varepsilon' > 0$ und einem dazugehörigen \mathfrak{R}'' aus und nehmen an, daß jeder Simplex von \mathfrak{R}'' einen Durchmesser $\leq \varepsilon'$ hat (vgl. Anhang § 3, Satz). Wir bezeichnen die Eckpunkte von \mathfrak{R}'' mit

$$(1) \quad P_1'', P_2'', \dots, P_\sigma''$$

und ordnen in folgender Weise jedem Punkte P_ν'' einen Punkt Q_ν aus \mathfrak{R}_n zu. Zuerst nehmen wir aus irgendeinem der Simplexe, für welche P_ν'' Eckpunkt ist, irgendeinen Punkt von \mathfrak{A}'' und nennen ihn P_ν''' . Es ist⁷⁾

$$(2) \quad E(P_\nu'', P_\nu''') < \varepsilon'.$$

Die Punkte P_ν''' brauchen nicht untereinander verschieden zu sein. Jedem Punkte P_ν''' ordnen wir in \mathfrak{A}' einen Punkt P_ν' zu, für welchen

$$(3) \quad E(P_\nu''', P_\nu') < \varepsilon',$$

in solcher Weise, daß zusammenfallenden Punkten P_i''' und P_μ''' zusammenfallende Punkte P_i' und P_μ' entsprechen. Dem Punkt P_ν' aus \mathfrak{A}' entspricht vermöge der Homöomorphie ein bestimmter Punkt aus \mathfrak{A} . Dies ist der Punkt Q_ν . Wir wollen jetzt die Zuordnung der Punkte Q_ν zu den Punkten P_ν'' zu einer stetigen Abbildung des Komplexes \mathfrak{R}'' auf einen Komplex \mathfrak{R} vom Grade $\leq m$ erweitern. Wir greifen irgendeinen Simplex \mathfrak{S}'' von \mathfrak{R}'' mit den Ecken

$$(4) \quad P_{\lambda_1}'', P_{\lambda_2}'', \dots, P_{\lambda_\sigma}''$$

heraus, stellen seine Punkte durch die Formel

$$(5) \quad P'' = t_1 P_{\lambda_1}'' + t_2 P_{\lambda_2}'' + \dots + t_\sigma P_{\lambda_\sigma}''$$

dar (vgl. Anhang § 1, 3.) und lassen dem Punkte P'' den Punkt

$$(6) \quad Q = t_1 Q_{\lambda_1} + t_2 Q_{\lambda_2} + \dots + t_\sigma Q_{\lambda_\sigma}$$

entsprechen. Dadurch wird \mathfrak{S}'' auf den eventuell entarteten Simplex mit den Ecken $Q_{\lambda_1}, Q_{\lambda_2}, \dots, Q_{\lambda_\sigma}$ stetig abgebildet. Liegt der Punkt P in verschiedenen \mathfrak{S}'' , so sind seine aus den verschiedenen \mathfrak{S}'' herrührenden Bild-

⁶⁾ Loc. cit. § 2.

⁷⁾ Mit $E(P, Q)$ werden wir die Euklidische Entfernung der Punkte P und Q bezeichnen.

punkte zusammenfallend; dies ist eine Folge davon, daß die Simplexe von \mathfrak{R}'' regulär sind (Anhang § 1, 4.) und nur in vollen Seiten aneinanderstoßen. Die Abbildungen der verschiedenen \mathfrak{S}'' schließen sich daher zu einer stetigen Abbildung von \mathfrak{R}'' auf eine Punktmenge zusammen, die man auf Grund des Satzes im § 3 des Anhangs als einen Komplex \mathfrak{R}_1 vom Grade $\leq m$ auffassen kann. Hierbei geht \mathfrak{U}'' in einen Teil \mathfrak{B} von \mathfrak{R}_1 über. Die auf dem Wege über \mathfrak{U}' und \mathfrak{U}'' zustande kommende Abbildung von \mathfrak{U} auf \mathfrak{B} ist eine (stetige) Deformation von \mathfrak{U} , von der wir nachweisen wollen, daß sie durch passende Wahl von ε' kleiner gemacht werden kann als die vorgeschriebene Zahl $\varepsilon > 0$.

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen der Kompaktheit von \mathfrak{U}' können wir ε' so bestimmen, daß zwei Punkten aus \mathfrak{U}' , deren Abstand $< 4\varepsilon'$ ist, in \mathfrak{U} Punkte entsprechen, deren Abstand $< \frac{1}{2}\varepsilon$ ist. Dem Punkte P aus \mathfrak{U} mögen in \mathfrak{U}' und \mathfrak{U}'' die Punkte P' und P'' entsprechen. Wir nehmen einen \mathfrak{S}'' , mit den Ecken (4), in welchem P'' gelegen ist. Es ist

$$(7) \quad E(P'', P''_{\lambda_s}) < \varepsilon' \quad (s = 1, 2, \dots, \sigma).$$

Aus

$$(8) \quad E(P', P'') < \varepsilon'$$

und (2), (3) und (7) folgt

$$E(P', P'_{\lambda_s}) < 4\varepsilon' \quad (s = 1, 2, \dots, \sigma).$$

Daher ist

$$(9) \quad E(P, Q_{\lambda_s}) < \frac{1}{2}\varepsilon \quad (s = 1, 2, \dots, \sigma).$$

Insbesondere hat man

$$E(Q_{\lambda_r}, Q_{\lambda_s}) < \frac{1}{2}\varepsilon \quad (r, s = 1, 2, \dots, \sigma).$$

Aus (6) folgt, daß das Bild von \mathfrak{S}'' einen Durchmesser $< \frac{1}{2}\varepsilon$ hat, daher ist

$$(10) \quad E(Q, Q_{\lambda_s}) < \frac{1}{2}\varepsilon \quad (s = 1, 2, \dots, \sigma).$$

Aus (9) und (10) erhält man endlich

$$E(P, Q) < \varepsilon.$$

Ad IV. Eine Menge des \mathfrak{R}_n , die einen inneren Punkt enthält, enthält insbesondere einen n -gradigen Würfel \mathfrak{W} . Nach bisher Bewiesenem genügt es nachzuweisen, daß man \mathfrak{W} nicht um weniger als ein beliebiges $\varepsilon > 0$ auf den Teil eines Komplexes vom Grade $\leq n - 1$ deformieren kann. Dies folgt aber sofort aus dem Satz von Brouwer⁸⁾, daß bei jeder Deformation von \mathfrak{W} um weniger als die halbe Kantenlänge die deformierte

⁸⁾ Loc. cit. § 1.

Punktmenge eine offene Teilmenge enthalten muß. Aber ein Komplex im \mathfrak{R}_n vom Grade $\leq n - 1$ enthält keine offene Teilmenge.

Der Beweis des eben herangezogenen Hilfssatzes von Brouwer ist nicht ganz einfach. Wir wollen daher noch ein anderes Schlußverfahren angeben. Neuerdings hat E. Sperner²⁾ einen sehr einfachen und eleganten Beweis für den folgenden Satz von Lebesgue angegeben.

a) Einen m -gradigen Simplex kann man nicht zu jedem $\varepsilon > 0$ auf endlich viele abgeschlossene Teilmengen \mathfrak{Z} vom Durchmesser $< \varepsilon$ aufteilen, von denen je $m + 1$ einen leeren Durchschnitt haben.

b) Einen m -gradigen Komplex \mathfrak{K} kann man zu jedem $\varepsilon > 0$ auf endlich viele abgeschlossene Teilmengen \mathfrak{Z} vom Durchmesser $< \varepsilon$ aufteilen, von denen je $m + 2$ einen leeren Durchschnitt haben.

Zum Absatz b), dessen Formulierung etwas allgemeiner als bei Sperner⁹⁾ ist, wollen wir die Konstruktion der \mathfrak{Z} bei gegebenem $\varepsilon > 0$ wiederholen.

Wir nehmen an, daß die Durchmesser der Simplexe von \mathfrak{K} weniger als $\frac{\varepsilon}{2}$ betragen. Wir greifen einen Simplex $\mathfrak{S}^{(\alpha)}$ von \mathfrak{K} heraus. Sein Grad sei μ . Wir teilen $\mathfrak{S}^{(\alpha)}$, wie bei Sperner, auf $\mu + 1$ abgeschlossene Teilmengen $\mathfrak{Z}^{(\alpha)}$ auf, von denen jede einen der Eckpunkte, aber keinen Punkt der gegenüberliegenden Seite enthält. Diese Konstruktion führen wir für alle Simplexe aus, und vereinigen alle solche $\mathfrak{Z}^{(\alpha)}$, welche einen Eckpunkt von \mathfrak{K} gemeinsam haben, zu einer Menge \mathfrak{Z} . Jedes \mathfrak{Z} hat einen Durchmesser $< \varepsilon$ und enthält nur einen Eckpunkt von \mathfrak{K} . Ein Punkt P von \mathfrak{K} , der in einem μ -gradigen Simplex \mathfrak{S} enthalten ist, kann höchstens in denjenigen $\mu + 1$ Mengen \mathfrak{Z} vorkommen, welche Eckpunkte von \mathfrak{S} enthalten.

Jetzt beweisen wir unsere Behauptung nach Alexandroff¹⁰⁾ wie folgt. Die Menge \mathfrak{U} des \mathfrak{R}_n enthält einen n -gradigen Simplex \mathfrak{B} . Wäre dieser nicht n -dimensional, so könnte man ihn bei vorgegebenem ε auf einen Teil \mathfrak{B}' eines höchstens $(n - 1)$ -gradigen Komplexes ε deformieren. Auf Grund von b) teilen wir \mathfrak{B}' auf abgeschlossene Teilmengen \mathfrak{Z}' auf, deren Durchmesser $< \varepsilon$ ist, so daß der Durchschnitt von $n + 1$ Mengen \mathfrak{Z}' leer ist. Zu jedem \mathfrak{Z}' ordnen wir in \mathfrak{B} als Menge \mathfrak{Z} die Gesamtheit aller derjenigen Punkte zu, deren Deformationsbilder in \mathfrak{Z}' liegen. Der Durchmesser jedes \mathfrak{Z} ist kleiner als $\varepsilon_1 = 3\varepsilon$, überdies haben je $n + 1$ Mengen \mathfrak{Z} einen leeren Durchschnitt. Da ε_1 beliebig klein sein kann, ergibt sich ein Widerspruch gegen a).

⁹⁾ Loc. cit. § 4.

¹⁰⁾ Math. Annalen 98 (1928), S. 617—636, insbesondere § 1 (und die inzwischen erschienene Arbeit in Annals of Math. (2) 30, S. 101—187, insbesondere Kap. I. [Zusatz bei der Korrektur.])

Ad V. Wir brauchen nur zu zeigen: Jede kompakte Menge \mathfrak{A} ohne innere Punkte hat eine Dimension $\leq n - 1$. Hierzu schließen wir \mathfrak{A} in einen abgeschlossenen n -gradigen Würfel \mathfrak{B} ein, und unterteilen \mathfrak{B} in gleichkantige Würfel $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_\varepsilon$ vom Durchmesser $< \varepsilon$. Im Innern eines jeden Würfels \mathfrak{B}_s greifen wir einen nicht zu \mathfrak{A} gehörigen Punkt P_s heraus. Einen solchen gibt es, da \mathfrak{A} nach Voraussetzung keinen innern Punkt enthält. Von P_s als Projektionszentrum projizieren wir jeden in \mathfrak{B}_s gelegenen Punkt von \mathfrak{A} auf die Begrenzung von \mathfrak{B}_s . Hierbei bleiben die Punkte auf der Begrenzung von \mathfrak{B}_s unverändert. Diese Projektionen ergeben zusammengenommen eine ε -Deformation von \mathfrak{A} auf endlich viele $(n - 1)$ -dimensionale Teilräume. Die Dimension von \mathfrak{A} ist also $\leq n - 1$.

Wir bemerken, daß das, was wir bisher den Grad eines Simplexes bzw. Komplexes genannt haben, nichts anderes als seine Dimension ist. Für einen Simplex folgt dies daraus, daß er, wenn er μ -gradig ist, als Punktmenge eines geeigneten \mathfrak{R}_μ aufgefaßt innere Punkte enthält. Für einen μ -gradigen Komplex folgt hieraus nach Behauptung II, daß er mindestens μ -dimensional ist; auf Grund der Definition ist er höchstens μ -dimensional, weil er eine 0-Deformation von sich selbst auf einen μ -gradigen Komplex ist. Also stimmen für einen Komplex der „Grad“ und die „Dimension“ überein. — Den oben zitierten Satz von Brouwer kann man folgendermaßen verallgemeinern. Eine m -dimensionale kompakte Menge \mathfrak{A} eines \mathfrak{R}_m kann nicht für jedes $\varepsilon > 0$ in eine niedrigerdimensionale Menge \mathfrak{A}' ε -deformiert werden. Sonst brauchte man nur noch \mathfrak{A}' seinerseits auf einen Teil eines Komplexes von einer Dimension $< m$ um weniger als ε zu deformieren, um (für jedes $2\varepsilon > 0$) eine 2ε -Deformation von \mathfrak{A} auf einen Teil eines Komplexes von einer Dimension $< m$ zu erhalten.

§ 4.

Die Dimensionszahl für beliebige Punktmenge.

Nunmehr wollen wir die Dimension auch für eine nicht-kompakte Menge \mathfrak{A} eines \mathfrak{R}_n festsetzen. Wir gehen darauf aus, die Dimension von \mathfrak{A} als die kleinste Dimensionszahl einer \mathfrak{A} umhüllenden *kompakten* Menge zu definieren. Wollten wir es wörtlich bei der eben formulierten Dimensionsfestsetzung belassen, so würden sich sofort Unzuträglichkeiten einstellen. Erstens gibt es zu einer unbeschränkten Punktmenge keine beschränkte, also keine kompakte Hülle. Zweitens würden wir für jede überall dicht liegende Punktmenge des Intervalls $0 \leq x \leq 1$ die Dimensionszahl $\mu = 1$ erhalten, was aber für eine abzählbare lineare Punktmenge als eine „zu große“ Dimensionszahl erscheinen würde. Und drittens wäre die Dimension keine topologische Invariante, weil man eine abzählbare lineare Punktmenge auf

den Teil einer kompakten linearen Punktmenge ohne inneren Punkt (das sogenannte Cantorsche Diskontinuum) topologisch abbilden kann, und eine solche Punktmenge nach § 2 die Dimension Null hat. Diese Unzuträglichkeiten scheiden aus, wenn wir folgendes festsetzen.

Definition. Gegeben sei eine Menge \mathfrak{A} in einem \mathfrak{R}_n . Wir betrachten irgendeine zu \mathfrak{A} homöomorphe beschränkte Menge \mathfrak{A}' in irgendeinem \mathfrak{R}_n , und irgendeine kompakte Menge \mathfrak{B}' aus diesem \mathfrak{R}_n , welche \mathfrak{A}' enthält. Unter der Dimension von \mathfrak{A} verstehen wir das Minimum der Dimensionen aller Mengen \mathfrak{B}' .

Man sieht leicht, daß für eine kompakte Menge \mathfrak{A} die „neue“ Dimension mit der „alten“ übereinstimmt. Diese Übereinstimmung beruht auf der (bereits nachgewiesenen) Gültigkeit der Behauptung III für kompakte Mengen.

Jetzt haben wir den allgemeinen Satz für beliebige Punktfolgen nachzuweisen. Ad I ist nur daran zu erinnern, daß man den ganzen \mathfrak{R}_n topologisch auf das Innere eines Würfels im \mathfrak{R}_n abbilden kann, daß also jede Menge \mathfrak{A} des \mathfrak{R}_n jedenfalls auf eine beschränkte Menge (im \mathfrak{R}_n) abgebildet werden kann, daß also jeder Menge unsere Definition tatsächlich eine eindeutige Dimensionszahl zuordnet. Die Behauptungen II, III und IV ergeben sich unmittelbar. Die Behauptung V hingegen bedarf einer näheren Erörterung. Wir führen den Beweis wieder indirekt, indem wir nachweisen, daß jede Punktmenge \mathfrak{A} des \mathfrak{R}_n , welche keinen inneren Punkt enthält, eine Dimension $\leq n - 1$ hat.

Zuerst nehmen wir an, daß \mathfrak{A} nirgends dicht liegt, d. h. daß in der Umgebung eines jeden Punktes von \mathfrak{A} nicht nur ein Punkt, sondern sogar eine n -dimensionale Kugel zur Komplementärmenge von \mathfrak{A} gehört. Wir bilden den \mathfrak{R}_n topologisch auf das Innere eines Würfels \mathfrak{B} in einem neuen \mathfrak{R}_n ab. Die Punktmenge \mathfrak{A} geht hierbei in eine beschränkte nirgends dichte Punktmenge \mathfrak{A}' des neuen \mathfrak{R}_n über. Die kleinste abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{A}'}$ von \mathfrak{A}' ist kompakt und wiederum nirgends dicht. Es ist

$$\dim \mathfrak{A} = \dim \mathfrak{A}' \leq \dim \overline{\mathfrak{A}'} \leq n - 1.$$

Es sei nunmehr \mathfrak{A} beliebig. Durch eventuelle Hinzunahme von Punkten des \mathfrak{R}_n kann man erreichen, daß \mathfrak{A} die Komplementärmenge einer im \mathfrak{R}_n überall dicht liegenden abzählbaren Punktmenge $\mathfrak{C} \equiv (P_1, P_2, P_3, \dots)$ ist. Zum Beweis unserer Behauptung genügt es offenbar, nachzuweisen, daß man eine solche Punktmenge \mathfrak{A} topologisch auf eine nirgends dichte Punktmenge \mathfrak{B} des \mathfrak{R}_n abbilden kann. Solche Abbildungen kann man nach verschiedenen Prinzipien konstruieren; wir wollen *eine* solche Abbildung näher schildern.

also II
ohne den
Beweis
Satz an

Unsere Abbildung¹¹⁾ ist das Resultat von abzählbar vielen sukzessiven Abbildungen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, von denen jede den ganzen \mathfrak{R}_n in sich selbst transformiert. Die durch α_1 hervorgerufenen Bilder von $P, \mathfrak{A}, P, \mathfrak{C}$ bezeichnen wir mit $P^1, \mathfrak{A}^1, P^1, \mathfrak{C}^1$, und allgemein die durch α_{m+1} hervorgerufenen Bilder von $P^m, \mathfrak{A}^m, P^m, \mathfrak{C}^m$ mit $P^{m+1}, \mathfrak{A}^{m+1}, P^{m+1}, \mathfrak{C}^{m+1}$. Bei der Abbildung α_1 entspricht jedem Punkt des \mathfrak{R}_n genau ein Bildpunkt, nur dem Punkt P_1 entspricht eine ganze Punktmenge, die wir das „Loch“ P_1^1 nennen werden. Bei der Abbildung α_2 entspricht jedem Punkt mit Ausnahme von P_1^1 je ein Punkt, also insbesondere dem Loch P_1^1 ein Loch P_2^1 , nur dem Punkt P_2^1 entspricht ein ganzes Loch P_2^2 . Allgemein sind die ersten m von den Gebilden $P_1^m, P_2^m, P_3^m, \dots$ Löcher, die anderen Punkte. Die Abbildung α_m besteht im folgenden. Das dem Punkt P_m^{m-1} zugeordnete Loch P_m^m ist eine abgeschlossene n -dimensionale Kugel, deren Mittelpunkt in P_m^{m-1} gelegen ist, und deren Radius wir mit h_m bezeichnen. Und die Zuordnung von $\mathfrak{R}_n - P_m^{m-1}$ zu $\mathfrak{R}_n - P_m^m$ ist eine topologische Abbildung, die so zustande kommt, daß jeder Punkt P auf dem Strahl durch den Punkt P_m^{m-1} um die Entfernung h_m nach außen verschoben wird. Man rechnet leicht nach, daß hierbei die Entfernung für zwei Punkte, die nicht auf demselben Strahl liegen, vergrößert, also für irgend zwei Punkte jedenfalls nicht verkleinert wird. Von den Zahlen h_m setzen wir voraus, daß für $m = 1, 2, 3, \dots$

$$(11) \quad r_m = h_{m+1} + h_{m+2} + \dots < \frac{1}{2} h_m. \quad (\text{d. h. } h_m \rightarrow 0, r_m \rightarrow 0)$$

Wir greifen einen Punkt P^μ aus \mathfrak{A}^μ heraus, der von $P_{\mu+1}^\mu, P_{\mu+2}^\mu, \dots$ verschieden ist, also bei den sukzessiven Abbildungen $\alpha_{\mu+1}, \alpha_{\mu+2}, \dots$ nie in ein Loch verwandelt wird. Wegen

$$(12) \quad E(P^m, P^{m+k}) \leq h_{m+1} + h_{m+2} + \dots + h_{m+k} < r_m \quad (m \geq \mu)$$

ist die Folge P^m konvergent; den Grenzwert bezeichnen wir mit P^0 . Es ist

$$(13) \quad E(P^m, P^0) \leq r_m.$$

Aus

$$E(P^{m+1}, Q^{m+1}) \geq E(P^m, Q^m)$$

folgt, daß zwei verschiedene Punkte P und Q aus \mathfrak{A} zwei verschiedene Bildpunkte P^0 und Q^0 besitzen. Daher erhalten wir eine umkehrbar eindeutige Abbildung von \mathfrak{A} auf eine Punktmenge \mathfrak{A}^0 . Wir wollen zeigen, daß sie stetig ist. Es ist

$$\begin{aligned} E(P^0, Q^0) &\leq E(P^0, P^m) + E(Q^0, Q^m) + E(P^m, Q^m) \\ &\leq 2r_m + E(P^m, Q^m). \end{aligned}$$

¹¹⁾ Diese Abbildung ist mir von Herrn C. Carathéodory freundlichst vorgeschlagen worden.

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ bestimmen wir ein m , für welches $2r_m < \frac{\varepsilon}{2}$, und bei festgehaltenem Index m und Punkte P bestimmen wir ein $\delta = \delta(\varepsilon)$, so daß aus

$$E(P, Q) < \delta$$

folgt $E(P^m, Q^m) < \frac{\varepsilon}{2}$ und daher

$$E(P^0, Q^0) < \varepsilon.$$

Hiermit ist die Stetigkeit der Abbildung bewiesen. Da bei der Abbildung die Punkte „auseinanderrücken“, ist auch ihre Umkehrung stetig, also die Abbildung topologisch.

Jetzt beachten wir für festes m das Loch P_m^m . Wenden wir auf die Randpunkte P^m der Kugel P_m^m die Formel (12) an, so findet man, unter Berücksichtigung von (11), daß die Kugel vom Radius $\frac{1}{2}h_m$ um den Punkt P_m^{m-1} zu allen Löchern

$$P_m^m, P_m^{m+1}, P_m^{m+2}, \dots$$

und daher auch zur Komplementärmenge \mathfrak{C}^0 von \mathfrak{A}^0 gehört. Es sei jetzt ein fester Punkt P^0 aus \mathfrak{A}^0 und die positive Zahl ε gegeben. Wir bestimmen ein festes μ , so daß

$$r_m < \frac{\varepsilon}{6} \quad \text{für} \quad m \geq \mu.$$

Dann ist wegen (13)

$$(14) \quad E(P^0, P^\mu) < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Nunmehr bestimmen wir ein m , so daß

$$(15) \quad E(P^\mu, P_{m+1}^\mu) < \frac{\varepsilon}{6} \quad \text{und} \quad m \geq \mu. \quad \text{das geht, da } \overset{12}{\circlearrowleft} P_{m+1}^\mu \text{ überalle d. d. d. v}$$

Wegen (12) ist

$$(16) \quad E(P_{m+1}^\mu, P_{m+1}^m) < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Die Relationen (14), (15) und (16) zusammengenommen ergeben

$$E(P_{m+1}^0, P_{m+1}^m) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Der Punkt P_{m+1}^m ist aber der Mittelpunkt einer zu \mathfrak{C}^0 gehörigen Kugel, also ist \mathfrak{A}^0 nirgends dicht im \mathfrak{R}_m .

§ 5.

Die Äquivalenzfrage.

Es erübrigt noch festzustellen, daß unsere Dimensionsdefinition mit der Urysohn-Mengerschen äquivalent ist. Das folgt für kompakte Mengen aus einem wichtigen Satz von Alexandroff¹²⁾ und für allgemeinere Mengen

¹²⁾ Loc. cit.

aus einem sehr schönen Satz von Menger¹³⁾ in Verbindung mit einem Satz von Hurewicz¹³⁾.

Der Satz von Alexandroff gab den Anstoß und die Grundlage zur vorliegenden Betrachtung. Er lautet folgendermaßen: Ist eine kompakte Menge \mathfrak{A} eines \mathfrak{R}_n μ -dimensional (im Urysohn-Mengerschen Sinne), so kann man \mathfrak{A} für jedes $\varepsilon > 0$ in einen μ -dimensionalen Komplex, aber nicht für jedes $\varepsilon > 0$ in einen $(\mu - 1)$ -dimensionalen Komplex ε -deformieren. Diese *Charakterisierung* der Urysohn-Mengerschen Dimension lautet fast ebenso wie unsere *Definition*. Der Unterschied besteht nur darin, daß bei Alexandroff ε -Deformationen auf *volle* Komplexe und bei uns auf *Teile* von Komplexen herangezogen werden. Aber dieser Unterschied ist nicht wesentlich. Denn im Grunde genommen beweist Alexandroff den Satz zuerst unter Zugrundelegung von ε -Deformationen auf Teile von Komplexen und verfeinert ihn hinterher in einer anschließenden Betrachtung zur endgültigen Formulierung. Genau genommen, d. h. dem Beweise nach, bezieht sich die Alexandroffsche Charakterisierung der Dimension nicht auf die Definition von Urysohn und Menger, sondern auf die nachfolgende Definition von Lebesgue: Die kompakte Menge \mathfrak{A} ist μ -dimensional, wenn μ das Minimum der Zahlen m von der folgenden Beschaffenheit ist. Zu jedem $\varepsilon > 0$ kann man \mathfrak{A} auf endlich viele abgeschlossene Punktmengen vom Durchmesser $< \varepsilon$ aufteilen, von denen je $m + 2$ einen leeren Durchschnitt haben. — Dieser Formulierung der Dimension ist ohne weiteres anzusehen, daß die Dimension topologisch invariant ist. Wir hätten daher den Beweis der Behauptung III für kompakte Mengen auch unter Benutzung des Alexandroffschen Satzes führen können.

Die Sätze a) von Hurewicz und b) von Menger lauten: a) Jeder separable metrische Raum endlicher Dimension ist Teil eines kompakten metrischen Raumes gleicher Dimension, b) jeder kompakte metrische Raum endlicher Dimension ist einer Menge eines kartesischen Raumes homöomorph.

Anhang über Simplexe und Komplexe.

§ 1.

Simplexe.

1. Unter dem n -dimensionalen (kartesischen) *Raum* \mathfrak{R}_n , $n = 1, 2, \dots$, verstehen wir die mit der Euklidischen Metrik behaftete Gesamtheit aller Zahlen- n -tupel

$$\xi = (x_1, \dots, x_n).$$

¹³⁾ Menger, loc. cit., Kap. IX.

Zulässige Koordinatentransformationen sind Translationen und orthogonale Transformationen. Wir führen noch den \mathfrak{R}_0 ein: er besteht aus einem einzigen Punkt.

2. Unter einer *Linearform* $L(x)$ des \mathfrak{R}_n verstehen wir einen Ausdruck $l_0 + l_1 x_1 + \dots + l_n x_n$ mit konstanten Koeffizienten l_i . Ein \mathfrak{R}_μ ist *Teilraum* eines \mathfrak{R}_n , wenn er im \mathfrak{R}_n durch ein System von Gleichungen

$$(1) \quad L_\alpha(x) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots)$$

definiert ist. (Durch passende Koordinatenwahl kann man das Gleichungssystem (1), sofern es nicht identisch erfüllt ist, auf die Gestalt bringen:

$$x_{\mu+1} = x_{\mu+2} = \dots = x_n = 0.)$$

Zu jeder Punktmenge \mathfrak{M} im \mathfrak{R}_n gibt es einen „kleinsten“ umfassenden *Teilraum*. Wir bezeichnen ihn mit $\mathfrak{R}(\mathfrak{M})$.

3. In einem \mathfrak{R}_n seien Punkte

$$(2) \quad \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{\mu+1} \quad (\mu \geq 0)$$

gegeben; mit t_ν bezeichnen wir reelle (skalare) Zahlen. Die Gesamtheit der Punkte

$$(3_1) \quad \xi = t_1 \xi_1 + t_2 \xi_2 + \dots + t_{\mu+1} \xi_{\mu+1},$$

$$(3_2) \quad t_1 + \dots + t_{\mu+1} = 1; \quad t_1, t_2, \dots, t_{\mu+1} \geq 0$$

nennen wir den *Simplex*

$$(4) \quad \mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\xi_1, \dots, \xi_{\mu+1})$$

mit den Ecken (2). Jeder mit einem Teil der Ecken von \mathfrak{S} gebildete Simplex, insbesondere jeder Eckpunkt von \mathfrak{S} , heiße eine *Seite* von \mathfrak{S} . Die nachfolgenden Behauptungen über Simplexe sind alle leichte Folgerungen aus der analytischen Formel (3_{1,2}).

4. Die Dimension des Teilraumes $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}(\xi_1, \dots, \xi_{\mu+1}))$, vgl. 2., ist $\leq \mu$. Ist sie $= \mu$, so heiße der Simplex *regulär*, sonst *entartet*. Für einen regulären Simplex sind die Seiten ihrerseits reguläre Simplexe, und jeder Punkt des Simplexes wird durch die Werte der t_ν in *umkehrbar* eindeutiger Weise festgelegt.

5. Einen Simplex kann man rekursiv aus Strecken (d. h. zweieckigen Simplexen) aufbauen. Der $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}(\xi_1, \dots, \xi_\mu)$ sei bereits konstruiert; hieraus entsteht der (4) als Vereinigungsmenge der Strecken, deren *ein* Eckpunkt in $\xi_{\mu+1}$ liegt und deren anderer Eckpunkt \mathfrak{S}_1 durchläuft.

6. Für einen regulären \mathfrak{S} folgt hieraus — unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $\xi_{\mu+1}$ nicht in $\mathfrak{R}(\mathfrak{S}_1)$ gelegen ist —, daß jeder Punkt von \mathfrak{S} , für welchen $t_\nu > 0$, $\nu = 1, 2, \dots, \mu + 1$, ein *innerer* Punkt von \mathfrak{S} in

bezug auf $\mathfrak{R}(\mathfrak{S})$ ist; hingegen ist jeder andere Punkt von \mathfrak{S} Grenzpunkt (d. h. nicht-innerer Punkt) von \mathfrak{S} .

7. Wenn die Punkte $\xi'_1, \dots, \xi'_{\mu+1}$ eines \mathfrak{R}_n bei einer senkrechten Projektion auf einen Teilraum des \mathfrak{R}_n in die Punkte (2) übergehen, so projiziert sich der Simplex $\mathfrak{S}(\xi'_1, \dots, \xi'_{\mu+1})$ in den Simplex (4). Hieraus folgt leicht, daß man einen entarteten Simplex für $\mu \leq n$ (also für genügend großes n) in passender Weise als senkrechte Projektion eines regulären Simplexes auffassen kann. Da aber die (senkrechte) Projektion einer beschränkten abgeschlossenen Punktmenge identisch ist mit der Projektion ihrer Begrenzung, ist ein entarteter Simplex identisch mit der Vereinigungsmenge seiner Seiten. Hieraus findet man durch Schluß von μ auf $\mu + 1$, wo $\mu + 1$ die Eckenzahl bezeichnet:

Jeder entartete Simplex ist die Vereinigungsmenge von regulären Simplexen, nämlich die Vereinigungsmenge seiner regulären Seiten.

§ 2.

Konvexe Polyeder.

Wir betrachten nur abgeschlossene Punktmenge.

1. Eine Punktmenge \mathfrak{A} des \mathfrak{R}_n heißt konvex¹⁴⁾, wenn mit irgend zwei Punkten ξ_1 und ξ_2 auch die Strecke mit den Eckpunkten ξ_1 und ξ_2 zu \mathfrak{A} gehört. An der Darstellungsformel ($\mathfrak{S}_{1,2}$) erkennt man, daß jeder Simplex konvex ist. Aus § 1, 5. folgt, durch Schluß von μ auf $\mu + 1$, daß mit irgendwelchen Punkten (2) auch der Simplex (4) zu \mathfrak{A} gehört.

2. Durch Berücksichtigung von § 1, 6. erhält man hieraus unschwer, daß die konvexe Punktmenge \mathfrak{A} , als Punktmenge des $\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$ betrachtet, innere Punkte enthält. Auf Grund dessen legen wir der Punktmenge \mathfrak{A} eine Dimension bei, nämlich die Dimension des $\mathfrak{R}(\mathfrak{A})$.

3. Wenn man in einer beschränkten konvexen Punktmenge irgendeinen Punkt ξ_0 , etwa einen inneren Punkt, festhält und alle Strecken betrachtet, die in ξ_0 anfangen und in einem Grenzpunkt von \mathfrak{A} endigen, so ist ihre Vereinigungsmenge mit \mathfrak{A} identisch.

Ist ξ_0 ein innerer Punkt und $\bar{\xi}$ ein Grenzpunkt von \mathfrak{A} , so sind die von $\bar{\xi}$ verschiedenen Punkte der Strecke von ξ_0 nach $\bar{\xi}$ innere Punkte von \mathfrak{A} .

4. Gegeben seien auf der Grenze einer konvexen Punktmenge zwei reguläre Simplexe \mathfrak{S}_1 und \mathfrak{S}_2 , deren Durchschnitt \mathfrak{S}_3 eine volle Seite sowohl von \mathfrak{S}_1 als auch von \mathfrak{S}_2 ausmacht (und daher insbesondere ein Simplex ist), und ein Punkt ξ_0 im Innern dieser Punktmenge. Mit ξ_0 als weiterem Eckpunkt und mit der „Basis“ \mathfrak{S}_1 bzw. \mathfrak{S}_2 bilde man gemäß § 1, 5. einen neuen

¹⁴⁾ Zu den elementaren Eigenschaften konvexer Punktmenge vgl. C. Carathéodory, Rend. Circolo Matem. Palermo 32 (1911), S. 1—25, insbesondere Abschnitt I.

Simplex $\bar{\mathcal{E}}_1$ bzw. $\bar{\mathcal{E}}_2$. Der Durchschnitt von $\bar{\mathcal{E}}_1$ und $\bar{\mathcal{E}}_2$ — wir bezeichnen ihn mit $\bar{\mathcal{E}}_3$ — füllt seinerseits je eine volle Seite von $\bar{\mathcal{E}}_1$ und von $\bar{\mathcal{E}}_2$ aus; er entsteht nämlich durch Hinzunahme des Eckpunktes ξ_0 zur „Basis“ \mathcal{E}_3 .

5. In einem \mathfrak{R}_n bilden wir mit endlich vielen Linearformen $L(\xi)$ und $A(\xi)$ das Relationssystem

$$(5_1) \quad L_l(\xi) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots),$$

$$(5_2) \quad A_\lambda(\xi) \geq 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots).$$

Die hierdurch definierte Punktmenge ist konvex. Wir nennen sie ein (konvexes) *Polyeder* \mathfrak{P} . Wir bemerken, daß das Relationssystem $(5_{1,2})$ in ein ähnlich beschaffenes übergeht, 1. wenn man im \mathfrak{R}_n eine (zulässige) Koordinatentransformation vornimmt, 2. wenn man den \mathfrak{R}_n in einen höherdimensionalen \mathfrak{R}_m einbettet (es treten dann $m - n$ Relationen der Gestalt (5_1) hinzu), und 3. wenn man zu einem \mathfrak{P} enthaltenden Teilraum \mathfrak{R}_μ von \mathfrak{R}_n übergeht (es sind dann in einem passenden Koordinatensystem in den $L(\xi)$ und $A(\xi)$ die Koeffizienten von $n - \mu$ Koordinaten durch Nullen zu ersetzen).

6. Wenn man \mathfrak{P} im $\mathfrak{R}(\mathfrak{P})$ betrachtet, so kommen die Gleichungen (5_1) in Wegfall¹⁵⁾, weil solche Gleichungen unser Polyeder auf einen Teilraum von $\mathfrak{R}(\mathfrak{P})$ beschränken würden. Ersetzt man im allgemeinen System $(5_{1,2})$ für irgendein λ die Ungleichung $A_\lambda(\xi) \geq 0$ durch $A_\lambda(\xi) = 0$, so entsteht eine Teilmenge von \mathfrak{P} , welche (sofern sie nicht leer ist) aus lauter Grenzpunkten von \mathfrak{P} besteht und selber ein Polyeder, aber von niedrigerer Dimension als \mathfrak{P} ist. Die Vereinigungsmenge dieser Polyeder umfaßt die gesamte Begrenzung von \mathfrak{P} . Denn jeder Punkt von \mathfrak{P} , für welchen

$$A_\lambda(\xi) > 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots),$$

ist ein innerer Punkt von \mathfrak{P} .

7. Jeder reguläre Simplex ist, wie man unschwer einsieht, ein Polyeder; desgleichen jedes Intervall (also insbesondere jeder Würfel), d. h. jede Punktmenge

$$a_\nu \leq x_\nu \leq b_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

8. Gegeben seien in einem \mathfrak{R}_μ endlich viele μ -dimensionale Polyeder \mathfrak{P}_α^* ($\alpha = 1, 2, \dots$) und endlich viele $(\mu - 1)$ -dimensionale Teilräume $\mathfrak{R}_{\mu-1}^{(\beta)}$ ($\beta = 1, 2, \dots$). Das \mathfrak{P}_α^* werde durch das Relationssystem

$$L_\varrho^{(\alpha)}(\xi) \geq 0 \quad (\varrho = 1, 2, \dots)$$

definiert, vgl. 6.; der $\mathfrak{R}_{\mu-1}^{(\beta)}$ durch die Relation

$$L_\beta(\xi) = 0.$$

¹⁵⁾ Genauer genommen, wenn Formen $L(\xi)$ auftreten, so sind sie identisch null.

Wir bezeichnen die Gesamtheit der Linearformen $L_\rho^{(\alpha)}(\mathfrak{x})$ und $L_\beta(\mathfrak{x})$ für alle ρ, α, β mit $\Phi_1(\mathfrak{x}), \Phi_2(\mathfrak{x}), \dots, \Phi_k(\mathfrak{x})$, und wir betrachten das Relationssystem

$$\pm \Phi_\nu(\mathfrak{x}) \geq 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, k)$$

für alle 2^k Kombinationen der positiven und negativen Vorzeichen. Auf diese Weise entstehen endlich viele Polyeder \mathfrak{P}^{**} , von denen wir zwei Eigenschaften feststellen wollen:

1) Falls ein solches Polyeder \mathfrak{P}^{**} die Dimension μ besitzt (vgl. 2.), so kann es in seinem Innern weder einen Grenzpunkt eines andern \mathfrak{P}^{**} noch einen Punkt eines $\mathfrak{R}_{\mu-1}^{(\beta)}$ enthalten, weil nämlich das Innere der \mathfrak{P}^{**} die schärferen Relationen

$$\pm \Phi_\nu(\mathfrak{x}) > 0 \quad (\nu = 1, 2, \dots, k)$$

erfüllt (vgl. 6.).

2) Jedes \mathfrak{P}_α^* läßt sich als Vereinigungsmenge gewisser Polyeder \mathfrak{P}^{**} auffassen, nämlich der Polyeder

$$\begin{aligned} L_\rho^{(\alpha)}(\mathfrak{x}) &\geq 0 && (\rho = 1, 2, \dots), \\ \pm \Psi_\tau^{(\alpha)}(\mathfrak{x}) &\geq 0 && (\tau = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

wobei wir mit $\Psi_\tau^{(\alpha)}(\mathfrak{x})$ die von $L_\rho^{(\alpha)}(\mathfrak{x})$ ($\rho = 1, 2, \dots$) verschiedenen unter den Linearformen $\Phi_\nu(\mathfrak{x})$ bezeichnen.

§ 3.

Komplexe.

1. Gegeben seien in einem \mathfrak{R}_n zwei Systeme von Polyedern, die Polyeder

$$(6) \quad \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \dots$$

und die Polyeder

$$(7) \quad \mathfrak{P}_1^0, \mathfrak{P}_2^0, \dots$$

Wir sagen, daß die \mathfrak{P}_β^0 durch *Unterteilung* aus den \mathfrak{P}_α hervorgegangen sind, wenn jedes \mathfrak{P}_β^0 Teil eines \mathfrak{P}_α ist, und wenn man jedes \mathfrak{P}_α als Vereinigungsmenge von endlich vielen \mathfrak{P}_β^0 darstellen kann. Eine Unterteilung einer Unterteilung ist wiederum eine Unterteilung.

2. Satz. Gegeben seien in einem \mathfrak{R}_n endlich viele beschränkte (konvexe) Polyeder (6).

Man kann sie in reguläre Simplexe

$$(8) \quad \mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \dots$$

unterteilen, die folgenden zwei Bedingungen zugleich genügen.

A) Der Durchschnitt irgend zweier Simplexe \mathfrak{S}_α und \mathfrak{S}_β ist eine volle Seite sowohl von \mathfrak{S}_α als auch von \mathfrak{S}_β .

B) Der Durchmesser eines jeden Simplexes ist $< \eta$, wo η irgend eine fest gegebene positive Zahl bedeutet.

Beweis. Die maximale Dimensionszahl der Polyeder (6) sei mit μ_0 bezeichnet. Diese Zahl ist, wie man leicht einsieht, eine Invariante des Polyedersystems (6) gegenüber Unterteilungen. Für $\mu_0 = 0$ sind alle \mathfrak{P}_α Punkte, also unser Satz richtig. Wir nehmen an, daß er bereits für $\mu_0 \leq \mu - 1$ bewiesen worden ist, und wollen ihn nunmehr für $\mu_0 = \mu$ beweisen. Den Übergang von (6) zu (8) werden wir in drei sukzessiven Unterteilungen vollziehen.

Erster Schritt. Wir betrachten im \mathfrak{R}_n einen Würfel, der alle \mathfrak{P}_α umschließt, unterteilen ihn in Würfel \mathfrak{B}_ρ , deren jeder einen Durchmesser $< \eta$ hat, und bilden den Durchschnitt eines jeden \mathfrak{P}_α mit einem jeden \mathfrak{B}_ρ . Die Gesamtheit der resultierenden Polyeder, die nunmehr der Bedingung B) genügen, bezeichnen wir wiederum mit

$$(6) \quad \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \dots$$

Zweiter Schritt. Wir konstruieren im \mathfrak{R}_n endlich viele untereinander verschiedene Teilräume

$$(9) \quad \mathfrak{R}_\mu^{(1)}, \mathfrak{R}_\mu^{(2)}, \dots$$

von der Art, daß jedes μ -dimensionale unter den Polyedern (6) in einem $\mathfrak{R}_\mu^{(\nu)}$ enthalten ist. Wir bezeichnen: 1) mit \mathfrak{R}_μ einen festen unter den Teilräumen (9), 2) mit \mathfrak{P}_α^* diejenigen μ -dimensionalen Polyeder aus (6), welche im \mathfrak{R}_μ enthalten sind, und 3) mit $\mathfrak{R}_{\mu-1}^{(\beta)}$ endlich viele Teilräume des \mathfrak{R}_μ , in welchen die Durchschnitte der übrigen Polyeder (6) mit dem \mathfrak{R}_μ enthalten sind. Jetzt wenden wir die Konstruktion aus § 2, 8. an, welche jedes \mathfrak{P}^* in neue Polyeder \mathfrak{P}^{**} unterteilt. Wenn wir jetzt im Polyedersystem (6) jedes μ -dimensionale Polyeder in der angegebenen Weise unterteilen und in der neuen Polyedergesamtheit mehrmals vorkommende nur einmal zählen, so erhalten wir ein Polyedersystem — wir bezeichnen es wiederum mit

$$(6) \quad \mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \dots - ,$$

welches die folgende Eigenschaft besitzt:

E. Jedes μ -dimensionale Polyeder aus (6) enthält in seinem Innern keinen Punkt eines andern Polyeders aus (6).

Dritter Schritt. Diejenigen Polyeder aus (6), die eine Dimension $\leq \mu - 1$ haben, bezeichnen wir mit \mathfrak{P}'' , die anderen mit \mathfrak{P}' . Die Vereinigung der Begrenzungen aller \mathfrak{P}' besteht gemäß § 2, 6. aus Polyedern $\overline{\mathfrak{P}'}$, deren Dimensionen $\leq \mu - 1$ sind. Auf das aus den Polyedern \mathfrak{P}'' und $\overline{\mathfrak{P}'}$ bestehende System können wir nunmehr unsern Satz anwenden: Wir unterteilen diese Polyeder in Simplexe $\tilde{\mathfrak{C}}$, welche die Eigenschaft A) besitzen. Das angestrebte Simplexsystem (8) bauen wir aus zwei Sorten von Simplexen auf, den Simplexen \mathfrak{C}' und den Simplexen \mathfrak{C}'' . Die Simplexe \mathfrak{C}''

sind alle diejenigen Simplexe $\tilde{\mathcal{S}}$, welche Teil eines \mathfrak{P}'' sind. Die Simplexe \mathcal{S}' hingegen sind folgendermaßen definiert: Die Begrenzung eines festen \mathfrak{P}' ist die Vereinigungsmenge von Simplexen $\tilde{\mathcal{S}}$. Wir nehmen im Innern des \mathfrak{P}' einen Punkt ξ_0 an und bilden gemäß § 1, 5. mit ξ_0 als Ecke und jedem der beteiligten $\tilde{\mathcal{S}}$ als „Basis“ einen Simplex \mathcal{S}' . Die Vereinigungsmenge dieser \mathcal{S}' ergibt den \mathfrak{P}' , vgl. § 2, 3. Diese Konstruktion führen wir für alle \mathfrak{P}' aus.

Zum Nachweis der Behauptung A) unterscheiden wir vier Fälle: 1) Die Simplexe \mathcal{S}_α und \mathcal{S}_β sind beide vom Typus \mathcal{S}'' ; 2) es ist \mathcal{S}_α ein \mathcal{S}' und \mathcal{S}_β ein \mathcal{S}'' ; 3) \mathcal{S}_α und \mathcal{S}_β sind beide vom Typus \mathcal{S}' und gehören zum gleichen Polyeder \mathfrak{P}' bzw. 4) zu verschiedenen Polyedern \mathfrak{P}' . Zum Fall 1) erinnern wir an die Definition der \mathcal{S}'' . Zum Fall 2) bemerken wir, daß (vgl. E. und § 2, 3.) der Durchschnitt von \mathcal{S}_α mit \mathcal{S}_β gleich ist dem Durchschnitt der „Basis“ von \mathcal{S}_α mit \mathcal{S}_β , also gleich ist dem Durchschnitt zweier $\tilde{\mathcal{S}}$, und zum Fall 4), daß er gleich ist dem Durchschnitt der „Basis“ von \mathcal{S}_α mit der „Basis“ von \mathcal{S}_β . Endlich zum Fall 3) erinnern wir an § 2, 4.

3. Als sehr spezielle Folgerung aus unserm Satz stellen wir fest, daß man jedes (beschränkte) Intervall (vgl. § 2, 7.) als Vereinigungsmenge von endlich vielen regulären Simplexen vom Durchmesser $< \varepsilon$ darstellen kann.

4. Eine Vereinigungsmenge von endlich vielen regulären Simplexen (8), welche der Bedingung A) genügen, nennen wir einen *Komplex* \mathfrak{K} . Unter den Ecken von \mathfrak{K} verstehen wir die Gesamtheit der untereinander verschiedenen Eckpunkte der Simplexe (8). Auf Grund unseres Satzes kann man eine Punktmenge, welche beschränkt und auf endlich viele Teilräume von der maximalen Dimension m verteilt ist, in einen m -dimensionalen Komplex einschließen.

(Eingegangen am 25. 5. 1929.)