Über korrespondierende Punkte der Steinerschen Fläche vierter Ordnung und die Hauptpunkte derselben.

Von

Ólafur Daníelsson in Reykjavík (Island).

Es sei F eine Steinersche Fläche vierter Ordnung, T ihr Knotenpunkt, und d_1, d_2, d_3 ihre Doppelgeraden. Ein Punkt einer Doppelgeraden soll als zwei „einander gegenüberliegende Punkte" bezeichnet werden, deren je einer als jedem der beiden durch die Doppelgeraden gehenden Mäntel der Fläche angehörend aufgefaßt wird. Die Fläche hat vier singuläre Berührungsebenen, von welchen sie in den Punkten je eines Kegelschnittes berührt wird[1]). Diese Ebenen sollen die „Hauptebenen" der Fläche heißen, und die Berührungskegelschnitte werden als „Hauptkegelschnitte" bezeichnet.

Auf jeder Doppelgeraden gibt es zwei uniplanare Punkte, die mit ihren gegenüberliegenden Punkten zusammenfallen. Die Berührungsebenen der Fläche in diesen Punkten bilden ein vollständiges Vierkant, dessen Diagonalstrahlen die Doppelgeraden sind. Die vier Kanten schneiden die Fläche in Punkten, die ich die „Hauptpunkte" der Fläche nennen will. Es sollen nun die folgenden Sätze bewiesen werden:

1. Wenn X' ein Punkt der Fläche ist und man die Ebenen ξ_1, ξ_2 und ξ_3 durch X' und je eine der Doppelgeraden d_1, d_2 und d_3 legt, wird jede dieser Ebenen die Fläche in einem Punkte der Doppelgeraden berühren. *Die Berührungsebenen in den gegenüberliegenden Punkten gehen dann auch durch einen Punkt X'' der Fläche.* X' und X'' werden „korrespondierende Punkte" genannt.

2. Der Tangentenkegel vierter Ordnung eines Punktes der Fläche hat mit ihr die Berührungskurve gemein, und außerdem eine Kurve vierter Ordnung zweiter Art, die „Restkurve" des Punktes. *Die Restkurven zweier korrespondierenden Punkte liegen auf einer Fläche zweiter Ordnung.* Solche Kurven werden als „einander ergänzende Kurven" bezeichnet.

3. *Die Hauptpunkte der Fläche fallen mit ihren korrespondierenden Punkten zusammen. Jede Fläche zweiter Ordnung, die durch eine Haupttangentenkurve der Fläche geht, geht auch durch die vier Hauptpunkte der Fläche.*

4. *Die Restkurven der Hauptpunkte sind ebene Kurven vierter Ordnung mit drei Spitzen.* Ihre Ebenen werden „Nebenebenen" genannt.

5. *Die Berührungsebene in einem Hauptpunkte enthält die Schnittlinie der Nebenebene und der „zugehörigen" Hauptebene.*

Diese Sätze lassen sich mittels der gewöhnlichen Abbildung[1]) der Fläche leicht beweisen, indem man das Dreieck ABC (Fig. 1), auf welches die Doppelgeraden abgebildet werden, als Koordinatendreieck, und das Bild eines Hauptkegelschnittes als Einheitslinie $(x_1 + x_2 + x_3 = 0)$ nimmt. Die vier Geraden $x_1 \pm x_2 \pm x_3 = 0$ (die Geraden f, g, h und k, Fig. 1) stellen dann die vier Hauptkegelschnitte dar[1]). K ist der Einheitspunkt $(1:1:1)$ und die Hauptpunkte der Fläche sind auf die Punkte $1:\pm 1:\pm 1$ (die Punkte F, G, H und K) abgebildet.

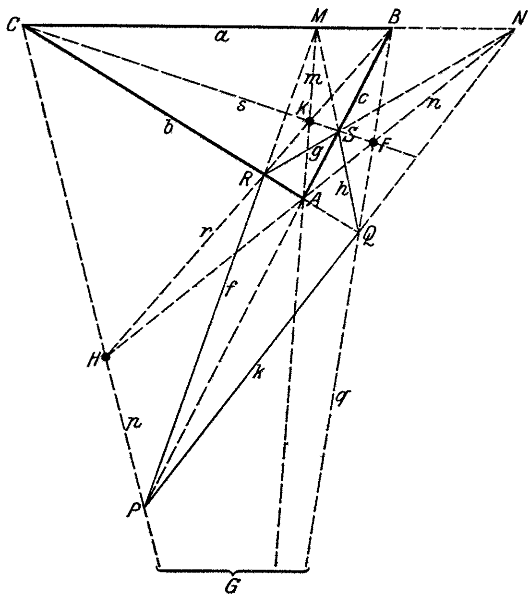

Fig. 1.

Die Punkte einer Koordinatenlinie (z. B. der Geraden a, mit der Gleichung $x_1 = 0$) sind einander paarweise zugeordnet und bilden somit eine Involution. Jedes Paar einer solchen Involution stellt einander gegenüberliegende Punkte der entsprechenden Doppelgeraden dar. Die Doppelpunkte dieser Involution sind die Punkte $0:1:1$ und $0:1:-1$, denn sie stellen die uniplanaren Punkte der Doppelgeraden d_1 dar, weil die Hauptkegelschnitte durch je drei der uniplanaren Punkte gehen. Ein solches Punktepaar hat somit die Koordinaten $0:1:t$ und $0:1:\frac{1}{t}$.

Jeder Kegelschnitt, der die Koordinatenlinien in solchen Paaren schneidet, muß eine ebene Kurve der Fläche darstellen. Ein solcher Kegelschnitt hat

---

[1]) Siehe z. B. Reye: Die Geometrie der Lage (1892). Dritte Abteilung, S. 146—152.

die Gleichung

$$\text{(I)} \qquad \alpha(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2\alpha_1 x_2 x_3+2\alpha_2 x_3 x_1+2\alpha_3 x_1 x_2=0 \text{ [2]},$$

indem die Wurzeln der Gleichung

$$\alpha(x_2^2+x_3^2)+2\alpha_1 x_2 x_3=0$$

einander reziprok sind:

$$\frac{x_2}{x_3}=t, \frac{1}{t}.$$

Dasselbe Verfahren kann auf die Schnittkurve der Fläche mit einer Fläche zweiter Ordnung angewandt werden. Das Bild dieser Kurve soll eine Kurve vierter Ordnung sein, und diese Kurve soll durch neun Punkte vollständig bestimmt sein, und weiter soll sie die Koordinatenlinien in Punktepaaren der oben erwähnten Involution schneiden. Eine solche Kurve hat die Gleichung

$$\begin{aligned}\text{(II)} \quad \alpha(x_1^4+x_2^4+x_3^4)&+\alpha_1(x_2^3 x_3+x_3^3 x_2)+\alpha_2(x_3^3 x_1+x_1^3 x_3)\\ &+\alpha_3(x_1^3 x_2+x_2^3 x_1)+\beta_1 x_2^2 x_3^2+\beta_2 x_3^2 x_1^2+\beta_3 x_1^2 x_2^2\\ &+\gamma_1 x_1^2 x_2 x_3+\gamma_2 x_2^2 x_3 x_1+\gamma_3 x_3^2 x_1 x_2=0,\end{aligned}$$

denn diese Gleichung enthält neun Konstanten, und die Kurve schneidet die Gerade $x_1=0$ in Punkten, deren Koordinaten durch die Gleichung

$$\alpha(x_2^4+x_3^4)+\alpha_1(x_2^3 x_3+x_3^3 x_2)+\beta_1 x_2^2 x_3^2=0$$

bestimmt sind, und die Wurzeln dieser Gleichung sind paarweise reziprok:

$$\frac{x_2}{x_3}=s,\ t,\ \frac{1}{s},\ \frac{1}{t}.$$

Der erste Satz leuchtet nun sofort ein. Es sei P' ein Punkt der Fläche und P_1 sein Bild in der Ebene (Fig. 2). Die Koordinaten von P_1 seien $p_1:p_2:p_3$. Weiter sei P'' der Punkt der Fläche, dessen Bild P_2 die Koordinaten $\frac{1}{p_1}:\frac{1}{p_2}:\frac{1}{p_3}$ hat. Legt man nun eine Ebene durch P' und die Doppelgerade d_1 (in a, mit der Gleichung $x_1=0$, abgebildet), so stellt die Gerade AP_1 die Schnittkurve dieser Ebene mit der Fläche dar. Die Gerade AP_2

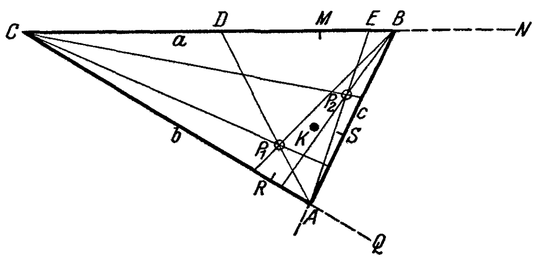

Fig. 2.

[2]) Salmon, A Treatise on the Analytic Geometry of three dimensions 2 (1915), S. 213.

dagegen ist das Bild der Schnittkurve der Fläche mit der Ebene $P''d_1$. Die Geraden AP_1 und AP_2 schneiden die Koordinatenlinie $x_1 = 0$ in den Punkten $0 : p_2 : p_3$ und $0 : \frac{1}{p_2} : \frac{1}{p_3}$, und diese Punkte machen ein Paar der oben erwähnten Involution mit den Doppelpunkten $0:1:1$ und $0:1:-1$ aus. Die Ebenen $P'd_1$ und $P''d_1$ berühren daher die Fläche in einander gegenüberliegenden Punkten. P' und P'' sind dann korrespondierende Punkte.

Der allgemeine Kegelschnitt

$$\text{(III)} \quad \varphi_1 \equiv a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2 a_{23} x_2 x_3 + 2 a_{31} x_3 x_1 + 2 a_{12} x_1 x_2 = 0$$

stellt eine Kurve vierter Ordnung zweiter Art dar, und der Kegelschnitt

$$\text{(IV)} \quad \varphi_2 \equiv \frac{1}{a_{11}} x_1^2 + \frac{1}{a_{22}} x_2^2 + \frac{1}{a_{33}} x_3^2 + 2 \frac{a_{23}}{a_{22} a_{33}} x_2 x_3 + 2 \frac{a_{31}}{a_{33} a_{11}} x_3 x_1 + 2 \frac{a_{12}}{a_{11} a_{22}} x_1 x_2 = 0$$

ihre ergänzende Kurve. Denn diese zwei Bildkurven schneiden die Koordinatenlinien in der oben erwähnten Involution. Siehe z. B. die Schnittpunkte der Kegelschnitte mit der Geraden $x_1 = 0$. Diese ergeben sich aus den Gleichungen

$$a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2 a_{23} x_2 x_3 = 0$$

und

$$\frac{1}{a_{22}} x_2^2 + \frac{1}{a_{33}} x_3^2 + 2 \frac{a_{23}}{a_{22} a_{33}} x_2 x_3 = 0 .$$

Die letztere dieser Gleichungen kann aus der ersteren erhalten werden, indem man x_2 mit $\frac{1}{x_2}$ und x_3 mit $\frac{1}{x_3}$ vertauscht, und die Behauptung ist bewiesen. Auch kann das Produkt $\varphi_1 \varphi_2$ in der Form (II) geschrieben werden, was einen anderen Beweis der Behauptung liefert.

Das Bild eines ebenen Schnittes

$$\alpha (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2 \beta_1 x_2 x_3 + 2 \beta_2 x_3 x_1 + 2 \beta_3 x_1 x_2 = 0$$

zerfällt in die zwei Geraden

$$\alpha (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) \left(\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} \right) = 0 ,$$

wenn die Ebene die Fläche berührt.

Die Gerade

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0$$

berührt im Punkte $a_1^2 p_1 : a_2^2 p_2 : a_3^2 p_3$ den dem Koordinatendreieck eingeschriebenen Kegelschnitt

$$\sqrt{p_1 x_1} + \sqrt{p_2 x_2} + \sqrt{p_3 x_3} = 0 ,$$

wenn $a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 = 0$, d. h. wenn die Gerade $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ durch den Punkt $p_1 : p_2 : p_3$ geht. Es sei P' der durch $p_1 : p_2 : p_3$ abgebildete Punkt. Jede Berührungsebene durch P' berührt dann die in $\sqrt{p_1 x_1} + \sqrt{p_2 x_2} + \sqrt{p_3 x_3} = 0$ abgebildete Kurve. Diese Kurve ist demnach die Restkurve des Punktes P'. Sie ist vierter Ordnung, zweiter Art und berührt die Doppelgeraden der Fläche. Der im Punkte $\frac{1}{p_1} : \frac{1}{p_2} : \frac{1}{p_3}$ abgebildete zu P' korrespondierende Punkt P'' hat die in dem Kegelschnitt $\sqrt{\frac{x_1}{p_1}} + \sqrt{\frac{x_2}{p_2}} + \sqrt{\frac{x_3}{p_3}} = 0$ abgebildete Kurve zur Restkurve. Nun stellen aber die Kegelschnitte $\sqrt{p_1 x_1} + \sqrt{p_2 x_2} + \sqrt{p_3 x_3} = 0$ und $\sqrt{\frac{x_1}{p_1}} + \sqrt{\frac{x_2}{p_2}} + \sqrt{\frac{x_3}{p_3}} = 0$ zwei einander ergänzende Kurven dar, wie man sofort einsieht, indem man die Gleichungen auf die rationalen Formen:

$$p_1^2 x_1^2 + p_2^2 x_2^2 + p_3^2 x_3^2 - 2 p_2 p_3 x_2 x_3 - 2 p_3 p_1 x_3 x_1 - 2 p_1 p_2 x_1 x_2 = 0$$

und

$$\frac{1}{p_1^2} x_1^2 + \frac{1}{p_2^2} x_2^2 + \frac{1}{p_3^2} x_3^2 - 2 \cdot \frac{1}{p_2 p_3} x_2 x_3 - 2 \cdot \frac{1}{p_3 p_1} x_3 x_1 - 2 \cdot \frac{1}{p_1 p_2} x_1 x_2 = 0$$

bringt, denn diese Gleichungen sind mit den Gleichungen (III) und (IV) identisch, wenn $a_{ii} = p_i^2$ und $a_{ih} = -p_i p_h$ ist $(i, h = 1, 2, 3)$. Die Gleichungen stellen somit einander ergänzende Kurven dar, und der zweite Satz ist bewiesen.

Die Punkte $p_1 : p_2 : p_3$ und $\frac{1}{p_1} : \frac{1}{p_2} : \frac{1}{p_3}$ fallen nur in den vier Punkten $1 : \pm 1 : \pm 1$ zusammen. Diese Punkte stellen die *Hauptpunkte* der Fläche dar.

Der Kegelschnitt

$$\frac{x_1^2}{k_1} + \frac{x_2^2}{k_2} + \frac{x_3^2}{k_3} = 0$$

ist, wenn $k_1 + k_2 + k_3 = 0$, dem Vierseit $x_1 \pm x_2 \pm x_3 = 0$ eingeschrieben, und stellt somit eine Haupttangentenkurve der Fläche dar. Die ergänzende Kurve der Haupttangentenkurve hat dann ihr Bild im Kegelschnitte

$$k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + k_3 x_3^2 = 0.$$

Man hat nur in den Gleichungen (III) und (IV) $a_{ii} = \frac{1}{k_i}$ und $a_{ih} = 0$ $(i, h = 1, 2, 3)$ zu setzen. Ein solcher Kegelschnitt geht aber durch die Punkte $1 : \pm 1 : \pm 1$, weil $k_1 + k_2 + k_3 = 0$. Die Flächen zweiter Ordnung durch die Haupttangentenkurven gehen demnach auch durch die Hauptpunkte.

Wenn die Punkte $p_1 : p_2 : p_3$ und $\frac{1}{p_1} : \frac{1}{p_2} : \frac{1}{p_3}$ in den Punkten $1 : \pm 1 : \pm 1$ zusammenfallen, fallen ihre Restkurven in den ebenen Kurven

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \pm 2 x_2 x_3 \pm 2 x_3 x_1 \pm 2 x_1 x_2 = 0$$

— wo die Vorzeichen so zu wählen sind, daß das Produkt der drei letzten Glieder negativ ist — zusammen. Die die Restkurven enthaltenden Flächen zweiter Ordnung arten somit zu Doppelebenen aus. Diese „Nebenebenen" schneiden die Fläche in Kurven vierter Ordnung mit drei Spitzen. Nun enthält eine Hauptebene drei uniplanare Punkte der Doppelgeraden, und eine Nebenebene die drei übrigen. Sie sind „einander zugehörig". Eine Nebenebene wird von der zugehörigen Hauptebene in der Doppeltangente ihrer Schnittkurve geschnitten, weil jede Gerade einer Hauptebene eine Doppeltangente der Fläche ist. Die Schnittkurve der Nebenebene ist aber der Umriß der Fläche, wenn man den Hauptpunkt, dessen Restkurve die Schnittkurve ist, als Augenpunkt nimmt. Die Ebene durch den Augenpunkt und die Doppeltangente des Umrisses muß aber eine Berührungsebene der Fläche im Hauptpunkte sein, und damit ist der letzte Satz bewiesen.

Reykjavík, im Dezember 1928.

(Eingegangen am 1. 2. 1929.)