SUB | NIEDERSÄCHSISCHE STAATS- UND UNIVERSITÄTSBIBLIOTHEK GÖTTINGEN

Werk

Titel: Mathematische Annalen
Ort: Berlin
Jahr: 1933
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN235181684_0107
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0107

LOG Id: LOG_0025
LOG Titel: Über die Existenz unabhängiger Axiomensysteme zu unendlichen Satzsystemen
LOG Typ: article

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235181684
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.
Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.
Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Über die Existenz unabhängiger Axiomensysteme zu unendlichen Satzsystemen.

Von

Gerhard Gentzen in Göttingen.

Im folgenden soll die in einer Arbeit von P. Hertz[1]) aufgeworfene Frage behandelt werden:

Gibt es unendliche abgeschlossene Satzsysteme ohne ein unabhängiges Axiomensystem? (Terminologie s. u.).

Ich werde zwei Hauptergebnisse beweisen, nämlich:

I. Es gibt unendliche abgeschlossene Satzsysteme, zu denen kein unabhängiges Axiomensystem existiert.

II. Zu jedem abzählbar unendlichen abgeschlossenen *linearen* Satzsystem läßt sich ein unabhängiges Axiomensystem angeben.

Die Beweise dieser Sätze werden den Inhalt des 2. und 3. Abschnitts der vorliegenden Arbeit bilden, während im 1. Abschnitt die benutzten Ausdrucksweisen erklärt und einige Hilfssätze hergeleitet werden sollen.

Die Kenntnis der Hertzschen Arbeiten wird nicht vorausgesetzt.

1. Abschnitt.

Erklärung der Bezeichnungen, einige Hilfssätze.

Die Bezeichnungen stimmen zum großen Teil mit denen von Hertz überein. Ich definiere sie noch einmal, einerseits um von den Hertzschen Arbeiten unabhängig zu sein, andererseits weil durch die Wahl etwas vereinfachter Schlußregeln vielfach eine andere Fassung der Definitionen erforderlich wurde. Um dem Kenner der Hertzschen Arbeiten die Übersicht zu erleichtern, sind solche Ausdrücke, welche dieselbe Bedeutung haben wie dort, bei ihrer Einführung durch einen Stern gekennzeichnet.

---

[1]) P. Hertz, Über Axiomensysteme für beliebige Satzsysteme, Math. Annalen **101** (1929); bezüglich obiger Frage siehe vor allem § 1 und 7. Weitere Arbeiten von P. Hertz über denselben Gegenstand finden sich in den Math. Annalen **87** (1922) und **89** (1923), sowie den Ann. d. Philos. **7** (1928); diese werden wir im folgenden als H. 1, H. 2, H. 3, die zuvor genannte als H. 4 zitieren.

§ 1.

Die „Sätze".

[Vgl. H. 4[2]), § 1.]

Ein *Satz** hat die Form

$$u_1 u_2 \ldots u_\nu \rightarrow v \qquad (\nu \geqq 1).$$

Die u und v heißen *Elemente**. Man kann sich unter diesen etwa Ereignisse vorstellen und den „Satz" so lesen: Das Eintreten der Ereignisse $u_1, \ldots, u_\nu$ bedingt das Eintreten von v.

Oder man faßt den „Satz" so auf: Ein Elementebereich, der die Elemente $u_1, \ldots, u_\nu$ enthält, enthält auch das Element v.

Man kann sich auch die Elemente als Eigenschaften denken und den „Satz" so deuten: Ein Ding mit den Eigenschaften $u_1, \ldots, u_\nu$ hat auch die Eigenschaft v.

Oder man stellt sich unter den Elementen „Aussagen" im Sinne des Aussagenkalküls vor und liest den „Satz" so: Wenn die Aussagen $u_1, \ldots, u_\nu$ richtig sind, so ist auch die Aussage v richtig.

Unsere Betrachtungen sind von der Art der inhaltlichen Deutung des „Satzes" unabhängig, da wir uns nur um dessen formale Gestalt kümmern werden.

Die u seien voneinander verschieden. Ihre Reihenfolge ist nicht wesentlich, d. h. Sätze, die sich nur durch diese unterscheiden, gelten als gleich.

Doch kann ein u gleich v sein, ein solcher Satz heißt *trivial**.

Indem wir mit einem großen Buchstaben ein System von endlich vielen Elementen, *Komplex** genannt, bezeichnen, können wir einen „Satz" auch so schreiben:

$$K \rightarrow v.$$

Dabei ist also $K = (u_1, u_2, \ldots, u_\nu)$. Dieser Komplex heißt das *Antezedens**, das Element v das *Sukzedens** des Satzes.

Ein Komplex soll nicht leer sein, außer wenn dies ausdrücklich zugelassen wird. LM bedeute die Vereinigungsmenge von L und M.

Ein Satz mit nur einem Antezedenselement heißt *linear**, ein linearer trivialer Satz, der also die Form $v \rightarrow v$ hat, *tautologisch**.

§ 2.

Der „Beweis" eines „Satzes" aus anderen „Sätzen".

(Vgl. H. 4, § 1.)

Man kann aus manchen „Sätzen" andere „Sätze" „beweisen", indem man gewisse „Schlußweisen" auf sie anwendet. Z. B. aus $u \rightarrow v$ und $v \rightarrow w$ kann man schließen: $u \rightarrow w$.

---

[2]) Siehe Anmerkung [1]).

Ein einzelner *Schluß* besteht aus einer Anzahl von Sätzen, den *Prämissen**, und einem weiteren Satz, der *Konklusion**, welcher aus den Prämissen geschlossen wird. Wir wollen zwei solche Schlußweisen einführen, von denen wir in § 4 zeigen werden, daß sie, inhaltlich gedeutet, richtig und ausreichend sind: die „Verdünnung" mit einer Prämisse und den „Schnitt" mit zwei Prämissen.

1. Eine *Verdünnung* (von Hertz „unmittelbarer Schluß" genannt) hat die Form:

$$\frac{L \to v}{M\,L \to v} \qquad \begin{array}{l}\text{Prämisse}\\ \text{Konklusion}\end{array}$$

M darf leer sein. — Wir gebrauchen auch die Ausdrucksweisen: „einen Satz verdünnen", „verdünnter Satz von . . .".

Inhaltlich kann man die Verdünnung als eine Hinzufügung von Voraussetzungen (M) deuten.

2. Ein *Schnitt* hat die Form:

$$\begin{array}{c} \textit{Untersatz:} \qquad \textit{Obersatz:} \\ \dfrac{L \to u \qquad\quad M\,u \to v}{L\,M \to v} \\ \textit{Schnittsatz} \end{array} \qquad \begin{array}{l}\text{Prämissen}\\ \text{Konklusion}\end{array}$$

M darf leer sein. u komme nicht in M vor. u heißt das *Schnittelement*.

Wir sagen auch: „einen Satz (als Untersatz) mit einem anderen Satz (als Obersatz) schneiden".

Zwei Sätze $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ können entweder überhaupt nicht schneidbar sein, oder es kann $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{q}$, doch nicht $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{p}$ schneidbar sein, oder umgekehrt, und schließlich kann sowohl $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{q}$ wie $\mathfrak{q}$ mit $\mathfrak{p}$ schneidbar sein. (In diesem Falle ist der Schnittsatz auf beide Weisen trivial, wie man leicht einsieht.)

Inhaltlich kann man den Schnitt als die Ersetzung einer Voraussetzung (u) durch eine diese umfassende (L) deuten.

Ein Schnitt von zwei linearen Sätzen hat notwendig die Form

$$\frac{u \to v \qquad v \to w}{u \to w}.$$

Der Schnittsatz ist also wiederum linear.

Unter einem *Beweis* eines Satzes $\mathfrak{q}$ aus den Sätzen $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\nu$ ($\nu \geqq 0$) verstehen wir nunmehr eine geordnete Anzahl von Schlüssen (d. h. Verdünnungen und Schnitten[3])), deren letzter $\mathfrak{q}$ als Konklusion besitzt, und in der jede Prämisse entweder zu den $\mathfrak{p}$ gehört oder tautologisch ist, oder mit einer vorangehenden Konklusion übereinstimmt.

---

[3]) Nur insofern als Hertz statt des „Schnittes" den „Syllogismus" benutzt, weicht unsere Definition des „Beweises" (und entsprechend der „Beweisbarkeit") von der seinigen ab. Siehe den nächsten Paragraphen.

Daß wir tautologische Sätze als bewiesen anzunehmen gestatten, wird sich später (s. § 4) als begründet erweisen. Im übrigen gibt unsere Definition eines Beweises genau das wieder, was man inhaltlich darunter versteht.

Ein Satz $\mathfrak{q}$ heißt aus den Sätzen $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\nu$ *beweisbar*, wenn es einen Beweis für $\mathfrak{q}$ aus $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\nu$ gibt.

§ 3.

Die Äquivalenz unseres Beweisbarkeitsbegriffes mit dem von P. Hertz.

(Der Inhalt dieses Paragraphen wird für das folgende nicht gebraucht.)

P. Hertz benutzt statt des „Schnittes" eine etwas kompliziertere Schlußweise, den „Syllogismus" (s. H. 4, S. 462—463). Der Schnitt ist ein spezieller Syllogismus. Da wir im übrigen nicht von den Hertzschen Definitionen abgewichen sind, ist die Äquivalenz unseres Beweisbarkeitsbegriffs mit dem von P. Hertz gesichert, wenn wir zeigen können, daß der Syllogismus sich in einen Beweis in unserem Sinne umformen läßt. Das soll jetzt geschehen.

Der Syllogismus lautet:

$$\begin{array}{ll} \left.\begin{array}{l} L_1 \rightarrow u_1 \\ \quad\vdots \\ L_\nu \rightarrow u_\nu \end{array}\right\} & \text{Untersätze} \\ \qquad\qquad M\, u_1 \ldots u_\nu \rightarrow v & \text{Obersatz} \\ \hline \qquad L_1 \ldots L_\nu\, M \rightarrow v & \text{Konklusion} \end{array}$$

M darf leer sein.

Wir verwandeln ihn zunächst in folgenden, aus einer Reihe von einfacheren Syllogismen bestehenden Beweis:

$$\cfrac{L_\nu \rightarrow u_\nu \qquad \cfrac{\cfrac{L_2 \rightarrow u_2 \qquad \cfrac{L_1 \rightarrow u_1 \qquad M\, u_1 \ldots u_\nu \rightarrow v}{L_1\, M\, u_2 \ldots u_\nu \rightarrow v}}{\vdots}}{L_{\nu-1} \ldots L_1\, M\, u_\nu \rightarrow v}}{L_\nu \ldots L_1\, M \rightarrow v}$$

Jeder einzelne dieser Syllogismen hat bereits die Form eines Schnittes, nämlich

$$\frac{L_\varrho \rightarrow u_\varrho \qquad L_{\varrho-1} \ldots L_1\, M\, u_\varrho \ldots u_\nu \rightarrow v}{L_\varrho\, L_{\varrho-1} \ldots L_1\, M\, u_{\varrho+1} \ldots u_\nu \rightarrow v}.$$

Dies ist nach Definition nur dann kein Schnitt, wenn u_ϱ in

$$L_{\varrho-1} \ldots L_1\, M\, u_{\varrho+1} \ldots u_\nu$$

vorkommt. Dann ist aber die Konklusion ein Verdünnter des Obersatzes.

Also läßt sich der Hertzsche Syllogismus in Schnitte und Verdünnungen zerlegen, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

§ 4.

Die Richtigkeit und Vollständigkeit der Schlußweisen, der Normalbeweis.

(Vgl. H. 3.)

Unsere formale Definition der Beweisbarkeit und überhaupt die Wahl unserer Schlußweisen wird nur dann als zweckmäßig erscheinen, wenn feststeht, daß ein Satz $\mathfrak{q}$ dann und nur dann aus den Sätzen $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\nu$ „beweisbar" ist, wenn er inhaltlich eine Folgerung von diesen darstellt.

Wir werden zeigen können, daß dies in der Tat stimmt, sobald wir den zunächst etwas unklaren Begriff „Folgerung" gemäß einer inhaltlichen Deutung unserer „Sätze" folgendermaßen durch Definition festlegen:

Wir führen erst einen Hilfsbegriff ein:

Wir sagen von einem Komplex von Elementen, daß er einem vorgelegten Satz *genüge** (s. H. 3), wenn er entweder nicht alle Antezedenselemente des Satzes enthält, oder aber alle diese und zugleich das Sukzedens. — Dafür, daß ein Komplex einem Satz *nicht* genügt, ist also notwendig und hinreichend, daß er dessen Antezedens enthält, aber das Sukzedens nicht.

Wir betrachten nun den Komplex K aller (endlich vielen) Elemente von $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_\nu$ und $\mathfrak{q}$ und nennen $\mathfrak{q}$ dann (und nur dann) eine *Folgerung* von $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_\nu$[4]), wenn jeder Teilkomplex von K, der den Sätzen $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_\nu$ genügt, auch $\mathfrak{q}$ genügt.

(Legt man die Auffassung des Aussagenkalküls zugrunde, so tritt an die Stelle eines Teilkomplexes von K eine Verteilung von Wahrheitswerten auf die Elemente von K, bei der die Elemente dieses Teilkomplexes den Wert „wahr", die übrigen den Wert „falsch" erhalten. Bei dieser Auffassung sind die folgenden Beweise ganz entsprechend durchführbar. Auch bei den übrigen obengenannten inhaltlichen Deutungen des „Satz"-Begriffs erweist sich unser Folgerungsbegriff als angemessen.)

Nun lautet der eine Teil der oben ausgesprochenen Behauptung, den wir als die „inhaltliche Richtigkeit" unserer Schlußweisen bezeichnen können, folgendermaßen:

Satz 1[5]). Wenn ein Satz $\mathfrak{q}$ aus den Sätzen $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_\nu$ „beweisbar" ist, so ist er eine „Folgerung" dieser.

Den Beweis[5]) hierfür führen wir in fünf einfachen Schritten:

1. Ein tautologischer Satz ist Folgerung jedes beliebigen Satzes.

---

[4]) Hertz gebraucht die Ausdrucksweise (s. H. 3): „$\mathfrak{q}$ wird von $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_\nu$ impliziert".

[5]) Wenn wir die Worte „Satz" und „Beweis" im üblichen Sinne, als Bestandteile unserer Sprache, gebrauchen, ist damit natürlich etwas ganz anderes gemeint als mit den rein formal eingeführten Begriffen „Satz" und „Beweis" (welche auch bei inhaltlicher Deutung noch wesentlich enger als jene sind); Verwechslungen dürften stets durch den Zusammenhang ausgeschlossen sein.

Das ist klar, da jedem tautologischen Satz jeder beliebige Komplex genügt.

2. Ein Verdünnter eines Satzes ist eine Folgerung desselben.

Das Verdünnungsschema lautete:

$$\frac{L \rightarrow v}{M\,L \rightarrow v}.$$

Ein dem Satz $L \rightarrow v$ genügender Komplex enthält entweder nicht das ganze Antezedens L, also auch nicht das ganze Antezedens ML des verdünnten Satzes, damit genügt er auch diesem; oder er enthält L und zugleich v, dann genügt er ebenfalls dem verdünnten Satz, da er dessen Sukzedens v enthält.

3. Ein Schnittsatz zweier Sätze ist eine Folgerung der beiden.

Das Schnittschema lautete:

$$\frac{L \rightarrow u \qquad M\,u \rightarrow v}{L\,M \rightarrow v}.$$

Ein Komplex, der dem Schnittsatz nicht genügt, müßte nämlich LM enthalten, und v nicht. Enthielte er ferner u, so würde er dem Obersatz nicht genügen, enthielte er u nicht, so genügte er dem Untersatz $L \rightarrow u$ nicht. Wenn also ein Komplex beiden Prämissen genügt, so genügt er auch dem Schnittsatz.

4. Ein Satz, der aus (einer bzw. zwei) Prämissen, welche bereits Folgerungen von $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_\nu$ sind, durch Verdünnung bzw. Schnitt hervorgeht, ist ebenfalls eine Folgerung von $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_\nu$.

Denn da er nach 2., 3. eine Folgerung der Prämissen ist, so würde ein Komplex, der ihm nicht genügte, auch mindestens einer seiner Prämissen nicht genügen, also auch nicht sämtlichen $\mathfrak{p}$.

5. Liege nun ein Beweis für $\mathfrak{q}$ aus $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_\nu$ vor. Jeder der Sätze $\mathfrak{p}$ ist trivialerweise eine Folgerung von $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_\nu$, ebenso nach 1. jeder tautologische Satz; und aus 4. folgt dann, daß jeder Satz des Beweises, speziell also $\mathfrak{q}$, eine Folgerung von $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_\nu$ ist.

Schwieriger ist der Beweis des anderen Teiles unserer Behauptung, den wir als die „inhaltliche Vollständigkeit" unserer Schlußweisen bezeichnen können und den wir so aussprechen:

Wenn ein Satz $\mathfrak{q}$ eine „Folgerung" der Sätze $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_\nu$ ist, so ist er aus diesen „beweisbar"[6]).

Mit Rücksicht auf spätere Anwendungen wollen wir den Satz gleich in wesentlich schärferer Form beweisen, indem wir nämlich zeigen werden, daß

[6]) P. Hertz beweist den analogen Satz für seine Schlußweisen in H. 3. Auf Grund unseres § 3 könnten wir uns hierauf berufen, wir geben jedoch einen neuen Beweis, da wir die dabei zugleich erhaltene „Normalform" des „Beweises" später brauchen werden. Der Hertzsche Beweis führt auf eine „aristotelische Normalform", die für unsere Zwecke nicht geeignet ist.

es sogar immer einen „Beweis“ von einer ganz bestimmten Normalgestalt gibt, die wir sofort angeben werden.

Wir bemerken zunächst, daß, wenn $\mathfrak{q}$ trivial ist, und $\mathfrak{t}$ der tautologische Satz mit gleichem Sukzedens, $\mathfrak{q}$ aus $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_\nu$ durch den Beweis

$$\frac{\mathfrak{t}}{\mathfrak{q}}$$

sofort beweisbar ist.

Wir können uns also fortan auf nicht triviales $\mathfrak{q}$ beschränken.

Unter einem *Normalbeweis* eines nicht trivialen Satzes $\mathfrak{q}$ aus den Sätzen $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_\nu$ $(\nu \geqq 1)$ verstehen wir einen Beweis, der sich in folgender Gestalt schreiben läßt:

$$\cfrac{\cfrac{\mathfrak{r}_{\varrho-1} \qquad \cfrac{\vdots}{\cfrac{\mathfrak{r}_1 \qquad \cfrac{\mathfrak{r}_0 \qquad \mathfrak{s}_0}{\mathfrak{s}_1}}{\cdot}}}{\mathfrak{s}_\varrho}}{\mathfrak{q}}$$

$$\begin{array}{c} \mathfrak{r}_{\varrho-1} \qquad \mathfrak{s}_{\varrho-1} \\ \hline \mathfrak{s}_\varrho \\ \hline \mathfrak{q} \end{array}$$

mit $\varrho \geqq 0$. (Für $\varrho = 0$ ist natürlich die Form $\frac{\mathfrak{s}_0}{\mathfrak{q}}$ gemeint.) Dabei bedeute

$$\frac{\mathfrak{r}_\lambda \qquad \mathfrak{s}_\lambda}{\mathfrak{s}_{\lambda+1}}$$

stets einen Schnitt mit $\mathfrak{r}_\lambda$ als Untersatz, $\mathfrak{s}_\lambda$ als Obersatz, $\mathfrak{s}_{\lambda+1}$ als Schnittsatz.

Es komme kein trivialer Satz vor. Die *Anfangssätze* $\mathfrak{s}_0, \mathfrak{r}_0, \ldots, \mathfrak{r}_{\varrho-1}$ gehören zu den $\mathfrak{p}$. (Nicht alle Sätze $\mathfrak{p}$ brauchen vorzukommen, auch darf derselbe Satz mehrmals auftreten.)

Man sieht: Bei einem Normalbeweis findet eine einzige Verdünnung (die natürlich den Satz $\mathfrak{s}_\varrho$ auch ungeändert lassen kann), und zwar am Ende, statt, vorher nur Schnitte (eventuell keine); und bei diesen gehört stets der *Untersatz* zu den $\mathfrak{p}$. Die Sätze $\mathfrak{s}_0 \ldots \mathfrak{s}_\varrho$, $\mathfrak{q}$ haben alle das gleiche Sukzedens (s. d. Schnittschema). Im ganzen Beweis kommen keine anderen Elemente vor als die von $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_\nu$ und $\mathfrak{q}$, da bei einem Schnitt keine Elemente auftreten können, die nicht schon im Ober- oder Untersatz vorkamen[7]).

[7]) Unser Normalbeweis entspricht ungefähr dem „goklenischen Normalbeweis“ bei Hertz. Entsprechend läßt sich ein Analogon zum „aristotelischen Normalbeweis“ aufstellen, doch gilt für diesen kein dem Satz 2 entsprechender Satz, wie das Beispiel zeigt:

$$\cfrac{e \to a \qquad \cfrac{d \to b \qquad ab \to c}{da \to c}}{ed \to c}$$

mit $\mathfrak{p}_1 = d \to b$, $\mathfrak{p}_2 = ab \to c$, $\mathfrak{p}_3 = e \to a$, $\mathfrak{q} = ed \to c$. Man überlegt sich leicht, daß in diesem Falle kein Beweis (durch Schnitte und Verdünnungen) möglich ist, in dem jeder *Obersatz* zu den $\mathfrak{p}$ gehört.

Nunmehr sprechen wir unsere Behauptung in folgender Form aus:

Satz 2[8]). Wenn ein nicht trivialer Satz $\mathfrak{q}$ eine „Folgerung" der Sätze $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_\nu$ ist, so gibt es einen „Normalbeweis" für $\mathfrak{q}$ aus $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_\nu$.

Beweis. Sei $\mathfrak{q}$ von der Form

$$L \to v.$$

Wir betrachten das System $\mathfrak{S}$ aller derjenigen Sätze, die v als Sukzedens haben, nicht trivial sind, und für die es einen Normalbeweis aus $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_\nu$ ohne Verdünnung (d. h. von der obigen Normalgestalt ohne die am Ende stattfindende Verdünnung) gibt. (Speziell gehören also die Sätze dieser Form unter den $\mathfrak{p}$ selbst zu $\mathfrak{S}$.) Das System $\mathfrak{S}$ ist endlich, da aus den endlich vielen Elementen der $\mathfrak{p}$ überhaupt nur endlich viele Sätze möglich sind und bei Schnitten niemals neue Elemente auftreten.

Gibt es nun in $\mathfrak{S}$ einen Satz, dessen Antezedens ganz in L enthalten (eventuell gleich L) ist, so ist $\mathfrak{q}$ ein Verdünnter dieses Satzes und damit die Behauptung bewiesen.

Das sei nicht der Fall. Alsdann werden wir einen Widerspruch zu der Voraussetzung, daß $\mathfrak{q}$ eine Folgerung von $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_\nu$ sei, nachweisen, nämlich einen Teilkomplex N des Komplexes K der Elemente von $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_\nu$, $\mathfrak{q}$ angeben, der den Sätzen $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_\nu$ genügt, $\mathfrak{q}$ jedoch nicht.

N stellen wir in der Weise her, daß wir eine Reihe von Komplexen

$$M_1, M_2, \ldots, M_\sigma = N$$

konstruieren, deren jeder aus dem vorigen durch Hinzufügen eines Elements entsteht. Als M_1 nehmen wir L, das Antezedens von $\mathfrak{q}$. Wenn M_μ bestimmt ist, erhalten wir $M_{\mu+1}$ folgendermaßen:

Wir wählen aus den $\mathfrak{p}$ einen Satz aus, dem der Komplex M_μ nicht genügt. (Wenn es keinen solchen gibt, s. u.) Dessen Sukzedens gehört also nicht zu M_μ (wohl aber das ganze Antezedens), wir tun es zu M_μ hinzu und erhalten so $M_{\mu+1}$.

Offenbar tritt nach endlich vielen Hinzufügungen der Fall ein, daß der letzte Komplex M_σ, den wir dann als N nehmen, allen $\mathfrak{p}$ genügt. Denn die $\mathfrak{p}$ haben nur endlich viele Elemente, und der Komplex aller dieser Elemente genügt sicher jedem $\mathfrak{p}$.

Wenn wir nun noch zeigen können, daß der so erhaltene Komplex N das Sukzedens v von $\mathfrak{q}$ nicht enthält, dann sind wir fertig, denn dann genügt er $\mathfrak{q}$ nicht, obwohl er allen $\mathfrak{p}$ genügt.

Zu dem Zweck beweisen wir durch Induktion folgende Behauptung:

Jedes M genügt allen Sätzen des Systems $\mathfrak{S}$ und enthält das Element v nicht.

Daraus folgt dann natürlich sofort, daß v in N nicht vorkommt.

[8]) Vgl. Anmerkung [6]).

Zunächst gilt die Behauptung für M_1, d. h. L. L enthält v nicht, sonst wäre $\mathfrak{q}$ trivial. Würde L einem Satz von $\mathfrak{S}$ nicht genügen, so enthielte es dessen Antezedens ganz. Diesen Fall haben wir schon oben ausgeschlossen.

Sei nun die Behauptung für M_τ richtig, für $M_{\tau+1}$ zu beweisen. Es sei $M_{\tau+1} = u M_\tau$, und $O \to u$ derjenige Satz unter den $\mathfrak{p}$, der zur Zufügung von u Anlaß gab. D. h. M_τ genügt diesem nicht. O gehört also ganz zu M_τ. v kommt in M_τ nicht vor (nach Induktionsvoraussetzung), also auch nicht in O. $u \neq v$, denn sonst wäre $O \to u$ ein Satz von $\mathfrak{S}$, dem M_τ nicht genügt. Also enthält auch $M_{\tau+1}$ das Element v nicht.

Gebe es nun einen Satz von $\mathfrak{S}$, dem $M_{\tau+1}$ nicht genügt. Ein solcher muß, da M_τ ihm noch genügt, offenbar die Form haben:

$$Pu \to v.$$

P kann leer sein, u komme darin nicht vor. Pu gehört zu $M_{\tau+1}$, also P bereits zu M_τ. Nun betrachten wir den durch Schnitt von $O \to u$ mit $Pu \to v$ entstehenden Satz

$$OP \to v.$$

Dieser gehört zu $\mathfrak{S}$. Denn für $Pu \to v$ (als Satz von $\mathfrak{S}$) gibt es einen Normalbeweis aus den $\mathfrak{p}$ ohne Verdünnung, und durch Zufügung dieses Schnittes, bei dem $O \to u$, also ein Satz von $\mathfrak{p}$, Untersatz ist, entsteht ein Normalbeweis ohne Verdünnung für $OP \to v$. $OP \to v$ ist ferner nicht trivial, da v in O und P nicht vorkommt.

Damit haben wir einen Satz von $\mathfrak{S}$, dem M_τ nicht genügt (O und P gehören zu M_τ, doch v nicht), also einen Widerspruch, womit Satz 2 bewiesen ist.

Für das spätere brauchen wir vom Inhalt dieses Paragraphen nur zwei einfache Folgerungen von Satz 1 und 2, die wir so aussprechen:

Satz 3. Ist ein nicht trivialer Satz $\mathfrak{q}$ aus den Sätzen $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_\nu$ beweisbar, so gibt es einen Normalbeweis für $\mathfrak{q}$ aus $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_\nu$.

Dies folgt sofort aus Satz 1 und 2 zusammen. Man kann diesen Satz auch ohne den Umweg über den Folgerungsbegriff direkt gewinnen, indem man einen beliebigen Beweis schrittweise in einen Normalbeweis umformt. Wir haben den Umweg gewählt, weil er nicht wesentlich langwieriger ist und wichtige zusätzliche Ergebnisse, nämlich die Richtigkeit und Vollständigkeit unserer Schlußweisen lieferte.

Satz 4. Ist ein nicht tautologischer *linearer* Satz $\mathfrak{q}$ aus den *linearen* Sätzen $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_\nu$ beweisbar, so gibt es unter den $\mathfrak{p}$ eine Reihe von Sätzen der Form

$$u \to v_1, \quad v_1 \to v_2, \; \ldots, \; v_\lambda \to w \qquad (\lambda \geqq 0),$$

wobei $u \to w = \mathfrak{q}$ ist, und $v_1 \ldots v_\lambda$, u, w lauter verschiedene Elemente sind.

Nach Satz 3 gibt es nämlich einen Normalbeweis für $\mathfrak{q}$ aus $\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_\nu$. Dieser muß offenbar so aussehen:

$$\dfrac{u \to x_1 \qquad \dfrac{x_1 \to x_2 \qquad \dfrac{\dfrac{x_{\varrho-1} \to x_\varrho \qquad x_\varrho \to w}{\vdots}}{x_2 \to w}}{x_1 \to w}}{\dfrac{u \to w}{u \to w}}$$

Denn es können nur lineare Sätze in ihm vorkommen, weil $\mathfrak{q}$ und die $\mathfrak{p}$ linear sind und ein Schnitt zweier linearer Sätze wieder einen linearen Satz ergibt. Die zu den $\mathfrak{p}$ gehörigen Anfangssätze

$$u \to x_1, \quad x_1 \to x_2, \quad \ldots, \quad x_{\varrho-1} \to x_\varrho, \quad x_\varrho \to w$$

erfüllen nun schon beinahe die Behauptung; doch brauchen die Elemente u, $x_1, \ldots, x_\varrho$, w nicht alle verschieden zu sein.

Sind nun mehrere von diesen identisch, so lassen wir in dieser Satzreihe die zwischen dem ersten und letzten Auftreten desselben Elements liegenden Sätze weg. So erhalten wir schließlich eine Reihe von Sätzen, bei denen nur noch aneinandergrenzende Elemente gleich sind, diese erfüllt die Behauptung. (Da $u \neq w$ ist, werden bei unserem Verfahren nicht etwa *alle* Sätze gestrichen.)

§ 5.

Systeme von Sätzen.

(Vgl. H. 4, S. 465—466.)

Ein System von Sätzen heißt *hinsichtlich Schnitten abgeschlossen*, wenn jeder mögliche Schnitt zweier Sätze des Systems wieder einen Satz des Systems ergibt.

Ein *abgeschlossenes Satzsystem** zu einem gegebenen Elementenbereich ist ein System von Sätzen, die aus Elementen des Bereichs bestehen, und dem jeder aus Sätzen des Systems beweisbare Satz, wobei Verdünnungen nur mit Elementen des Bereichs zugelassen sind, angehört.

Einem abgeschlossenen Satzsystem gehören offenbar alle aus Elementen des Bereichs zu bildenden trivialen Sätze an. (Denn diese sind bereits aus 0 Sätzen beweisbar.)

Satz 5. Nimmt man zu einem hinsichtlich Schnitten abgeschlossenen System $\mathfrak{S}$ alle mit Elementen des Systems möglichen Verdünnten der Sätze des Systems sowie alle trivialen Sätze (aus diesen Elementen) hinzu, so hat man ein abgeschlossenes Satzsystem $\overline{\mathfrak{S}}$.

Das folgt sofort aus Satz 3. Denn sei $\mathfrak{q}$ ein nicht trivialer, aus $\overline{\mathfrak{S}}$ (d. h. aus Sätzen von $\overline{\mathfrak{S}}$) beweisbarer Satz. Dann ist er natürlich auch aus $\mathfrak{S}$ beweisbar, und der Beweis läßt sich nach Satz 3 mit einer einzigen Verdünnung am Schluß, und nur Sätzen von $\mathfrak{S}$ als Anfangssätzen, führen. Da deren Schnitte Sätze von $\mathfrak{S}$ ergeben, ist q ein Satz von $\overline{\mathfrak{S}}$.

Ein Satzsystem heißt *linear*, wenn jeder Satz des Systems Verdünnter eines ebenfalls zum System gehörigen *linearen* Satzes ist.

Ein *Axiomensystem** zu einem abgeschlossenen Satzsystem ist ein System von Sätzen, die dem Satzsystem angehören und aus denen sich alle Sätze des Satzsystems beweisen lassen.

Ein Satzsystem heißt *unabhängig**, wenn sich keiner seiner Sätze aus anderen beweisen läßt. (Ein solches enthält also keine trivialen Sätze.) Uns interessiert speziell die Unabhängigkeit von Axiomensystemen.

§ 6.

Unabhängigkeit von Axiomensystemen.

Wir werden in diesem Paragraphen einige Tatsachen ohne genauen Beweis anführen, die später nicht benutzt werden, jedoch für das Verständnis des 2. und 3. Abschnitts sehr wesentlich sind. Die Beweise finden sich in H. 4 an den jeweils angegebenen Stellen.

Zu jedem *endlichen* abgeschlossenen Satzsystem gibt es ein unabhängiges Axiomensystem. [H. 4, S. 466[9]).]

Man erhält nämlich ein unabhängiges Axiomensystem, indem man Sätze, die etwa noch aus anderen beweisbar sind, der Reihe nach streicht.

Dieses Streichverfahren kann versagen, wenn das Satzsystem *unendlich* ist. Es kann z. B. vorkommen, daß dabei alle Sätze gestrichen würden. (H. 4, S. 470—471.) Trotzdem kann es ein unabhängiges Axiomensystem geben. (H. 4, S. 471.)

Sehr lehrreich ist das folgende (von Hertz angegebene) Beispiel eines hinsichtlich Schnitten abgeschlossenen Systems $\mathfrak{A}$ linearer Sätze, für das es kein unabhängiges Axiomensystem (in leicht verständlicher Abwandlung dieses von uns nur für abgeschlossene Satzsysteme eingeführten Begriffs) aus linearen Sätzen gibt, während das durch Hinzunahme der (im Elementenbereich möglichen) verdünnten und trivialen Sätze entstehende lineare abgeschlossene Satzsystem $\overline{\mathfrak{A}}$ (s. § 5) trotzdem ein unabhängiges Axiomensystem besitzt (das natürlich nicht aus lauter linearen Sätzen besteht).

Das System $\mathfrak{A}$ besteht aus den Sätzen:

$$\mathfrak{A}_1\colon\quad a_1 \to a_\nu \qquad (\nu > 1),$$

$$\mathfrak{A}_2\colon\quad a_\lambda \to a_\mu \qquad (\lambda > \mu > 1).$$

(H. 4, S. 469—470, 482—483.)

---

[9]) Wir brauchen solche Satzsysteme, die nur aus trivialen Sätzen bestehen, nicht auszuschließen, wenn wir ein leeres Axiomensystem zulassen.

Die Unmöglichkeit eines unabhängigen Axiomensystems beruht auf folgenden zwei Tatsachen (Beweise für diese bei Hertz):

1. Die Sätze von $\mathfrak{A}_2$ müssen aus jedem Axiomensystem von $\mathfrak{A}$ ohne Benutzung von $\mathfrak{A}_1$-Sätzen beweisbar sein.

2. Aus einem $\mathfrak{A}_1$-Satz und den $\mathfrak{A}_2$-Sätzen sind alle $\mathfrak{A}_1$-Sätze mit kleinerem ν beweisbar; doch keiner mit größerem ν.

Aus diesen beiden Tatsachen folgt nämlich: Es müssen mindestens zwei $\mathfrak{A}_1$-Sätze unter den Axiomen vorkommen, und dann wäre der mit kleinerem ν aus anderen Axiomen beweisbar, das Axiomensystem also nicht unabhängig.

Ein ganz entsprechender Sachverhalt liegt bei dem im 2. Abschnitt anzugebenden Beispiel eines *abgeschlossenen* Satzsystems ohne unabhängiges Axiomensystem vor.

Wenn man dagegen das System $\mathfrak{A}$ zu einem linearen abgeschlossenen Satzsystem $\overline{\mathfrak{A}}$ erweitert, so besitzt dieses, wie schon gesagt, ein unabhängiges Axiomensystem. Ein solches ist z. B. (H. 4, S. 482)

$$\begin{array}{rlrl} a_1 & \to a_2 & a_3 & \to a_2 \\ a_2 a_1 & \to a_3 & a_4 & \to a_3 \\ a_3 a_2 a_1 & \to a_4 & a_5 & \to a_4 \\ \ldots & & \ldots & \end{array}$$

Die Unabhängigkeit wird dadurch erreicht, daß statt der $\mathfrak{A}_1$-Sätze Verdünnte von diesen genommen werden, aus denen der zugehörige $\mathfrak{A}_1$-Satz jeweils erst mit Hilfe der vorangehenden (im Schema in der linken Reihe darüberstehenden) Axiome zu beweisen ist, so daß man nun nicht mehr die vorangehenden Axiome aus den späteren (mit Hilfe der $\mathfrak{A}_2$-Sätze) beweisen kann.

Das im 2. Abschnitt zu gebende Beispiel ist so konstruiert, daß dieser Trick nicht anwendbar ist. Das betreffende Satzsystem ist auch nicht linear, und kann es nicht sein, weil *lineare* abgeschlossene Satzsysteme stets ein unabhängiges Axiomensystem besitzen, was im 3. Abschnitt gezeigt werden soll. Dabei wird unter anderem auch der eben genannte Trick, gewisse Verdünnte der linearen Sätze als Axiome zu nehmen, um dadurch Unabhängigkeit zu erreichen, Anwendung finden.

§ 7.

Die „Maximalnetze".

(Der Inhalt dieses Paragraphen wird nur im 3. Abschnitt gebraucht.)

(Vgl. H. 1, Nr. 10—16.)

Bezüglich eines gegebenen abgeschlossenen linearen Satzsystems $\overline{\mathfrak{S}}$ führen wir folgende Begriffe ein:

Ein nicht tautologischer linearer Satz $u \to v$ von $\overline{\mathfrak{S}}$ mit der Eigenschaft, daß auch $v \to u$ zu $\overline{\mathfrak{S}}$ gehört, heißt ein *Netzsatz*.

Ein Element, das in irgendeinem Netzsatz vorkommt, heißt ein *Netzelement.*

Die Menge aller Elemente v zu einem festen Netzelement u, für die $u \rightarrow v$ und $v \rightarrow u$ Sätze von $\overline{\mathfrak{S}}$ sind, heißt ein *Maximalnetz**[10]).

(Ein solches enthält also mindestens zwei Elemente.)

Satz 6. Jedes Netzelement gehört genau einem Maximalnetz an.

Daß es einem angehört, ist klar. Gehöre nun u zwei verschiedenen Maximalnetzen an und seien diese durch v bzw. w bestimmt. (Eins von beiden kann gleich u sein.) Also $u \rightarrow v$, $v \rightarrow u$; $u \rightarrow w$, $w \rightarrow u$ sind Sätze von $\overline{\mathfrak{S}}$. Sei x ein Element, das nur dem einen von beiden angehört, etwa dem durch v bestimmten Maximalnetz. Dann sind $v \rightarrow x$, $x \rightarrow v$ Sätze von $\overline{\mathfrak{S}}$. Nun erhält man durch Schnitte aus diesen und den vorigen Sätzen:

$$w \rightarrow v, \quad w \rightarrow x \quad \text{und} \quad v \rightarrow w, \quad x \rightarrow w.$$

Die Schnittsätze gehören zu $\overline{\mathfrak{S}}$, da dieses System als abgeschlossen vorausgesetzt war.

Also gehört x auch zu dem durch w bestimmten Maximalnetz, im Widerspruch zu der Annahme.

Zusätze: Die Elemente eines Netzsatzes gehören (nach Satz 6) beide demselben Maximalnetz an.

Sind u und v zwei beliebige Elemente desselben Maximalnetzes, so sind $u \rightarrow v$ und $v \rightarrow u$ Sätze von $\overline{\mathfrak{S}}$. (Folgt leicht.)

Ein linearer Satz von $\overline{\mathfrak{S}}$, in dem ein Element Netzelement ist, das andere kein Element desselben Maximalnetzes, heißt ein *Halbnetzsatz.*

2. Abschnitt.

Angabe eines unendlichen abgeschlossenen Satzsystems, das kein unabhängiges Axiomensystem besitzt.

§ 1.

Aufstellung des als Beispiel dienenden Satzsystems $\overline{\mathfrak{A}}$.

Die Elemente des Systems sind

$$b, \quad c, \quad a_1, \quad a_2, \ldots$$

(alle voneinander verschieden).

Wir betrachten zunächst ein System $\mathfrak{A}$ von Sätzen, die wir in zwei Klassen einteilen:

$$\mathfrak{A}_1\colon \quad a_\nu b \rightarrow c \quad \text{für beliebige } \nu,$$
$$\mathfrak{A}_2\colon \quad a_\lambda \rightarrow a_\mu \quad \text{für } \lambda < \mu.$$

[10]) Hertz schließt in den Begriff „Maximalnetz“ noch die zugehörigen Netzsätze mit ein; unsere Aussagen bleiben auch bei dieser Auffassung richtig.

(Diese Einteilung entspricht der in $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ bei dem im 1. Abschnitt, § 6, angegebenen System.)

$\mathfrak{A}$ ist hinsichtlich Schnitten abgeschlossen.

Beweis. Ein Schnitt zweier $\mathfrak{A}_1$-Sätze ist nicht möglich, da c in keinem Antezedens vorkommt.

Ein Schnitt zweier $\mathfrak{A}_2$-Sätze hat die Form:

$$\frac{a_\varrho \to a_\sigma \qquad a_\sigma \to a_\tau}{a_\varrho \to a_\tau}$$

mit $\varrho < \sigma$, $\sigma < \tau$, also $\varrho < \tau$, d. h. der Schnittsatz gehört wieder zu $\mathfrak{A}_2$.

Ein Schnitt eines $\mathfrak{A}_1$- und eines $\mathfrak{A}_2$-Satzes hat die Form (c kann nicht Schnittelement sein, da es in keinem $\mathfrak{A}_2$-Satz vorkommt):

$$\frac{a_\varrho \to a_\sigma \qquad a_\sigma b \to c}{a_\varrho b \to c}.$$

Der Schnittsatz gehört wieder zu $\mathfrak{A}_1$.

Damit ist die Abgeschlossenheit von $\mathfrak{A}$ hinsichtlich Schnitten gezeigt.

Nun nehmen wir zu $\mathfrak{A}_1$ alle nicht trivialen Verdünnten von $\mathfrak{A}_1$-Sätzen (mit Elementen von $\mathfrak{A}$ gebildet) hinzu, dies System nennen wir $\mathfrak{B}_1$; ebenso bezeichnen wir das aus $\mathfrak{A}_2$ durch Hinzunahme aller nicht trivialen Verdünnten von $\mathfrak{A}_2$-Sätzen (mit Elementen von $\mathfrak{A}$) entstehende System als $\mathfrak{B}_2$.

Beide Systeme ($\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$) haben keine Sätze gemeinsam, denn die $\mathfrak{B}_1$-Sätze haben sämtlich c als Sukzedens, die $\mathfrak{B}_2$-Sätze nie.

$\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ zusammen mit den aus den Elementen von $\mathfrak{A}$ zu bildenden trivialen Sätzen bilden nun ein abgeschlossenes unendliches Satzsystem $\overline{\mathfrak{A}}$. (S. Satz 5, 1. Abschnitt, § 5.)

Von diesem System $\overline{\mathfrak{A}}$ wollen wir zeigen, daß es kein unabhängiges Axiomensystem zu ihm gibt.

Für das Verständnis des Folgenden lese man zuerst den Beweis in § 3, alsdann wird der Zweck der einzelnen in § 2 bewiesenen Hilfssätze deutlich.

§ 2.

Einige Hilfssätze über das System $\overline{\mathfrak{A}}$.

Als „Grad" eines $\mathfrak{B}_1$-Satzes bezeichnen wir den kleinsten bei den in seinem Antezedens vorkommenden a auftretenden Index.

(Z. B. $a_3 a_7 a_2 b \to c$ hat den Grad 2.)

Nr. 1. Eine Verdünnung eines $\mathfrak{B}_1$-Satzes mit Systemelementen ergibt einen $\mathfrak{B}_1$-Satz, und zwar nicht von größerem Grade als zuvor, oder einen trivialen Satz, doch nie einen $\mathfrak{B}_2$-Satz.

Nr. 2. Eine Verdünnung eines $\mathfrak{B}_2$-Satzes mit Systemelementen ergibt einen $\mathfrak{B}_2$-Satz oder einen trivialen Satz, doch nie einen $\mathfrak{B}_1$-Satz.

Beide Behauptungen (Nr. 1 und 2) sind leicht als richtig zu erkennen.

Nr. 3. Ein Schnitt von zwei $\mathfrak{B}_1$-Sätzen ist nicht möglich, da beide c als Sukzedens haben und keiner c im Antezedens hat.

Nr. 4. Ein Schnitt von zwei $\mathfrak{B}_2$-Sätzen ergibt einen $\mathfrak{B}_2$-Satz oder einen trivialen Satz.

Denn der Schnittsatz gehört zu $\overline{\mathfrak{A}}$ und kann nicht c als Sukzedens haben.

Nr. 5. Ein Schnitt eines $\mathfrak{B}_1$-Satzes mit einem $\mathfrak{B}_2$-Satz (der also Obersatz ist, s. 1. Abschnitt, § 2) ergibt einen $\mathfrak{B}_2$-Satz oder einen trivialen Satz. (Da im Schnittsatz c nicht Sukzedens ist.)

Ein Schnitt eines $\mathfrak{B}_2$-Satzes mit einem $\mathfrak{B}_1$-Satz ergibt entweder einen trivialen Satz oder einen $\mathfrak{B}_1$-Satz (da c Sukzedens bleibt), und zwar ist dieser nicht von größerem Grad als der Obersatz.

Beweis für die letzte Behauptung: Der Grad des Obersatzes sei μ, d. h. a_μ ist das a mit kleinstem Index, das in ihm vorkommt. Wäre nun der Grad des Schnittsatzes größer, so müßte a_μ das Schnittelement sein. Das heißt der Untersatz hätte die Form:

$$(b)\ (c)\ a_{\nu_1} \ldots a_{\nu_\sigma} \to a_\mu$$

(b und c können vorkommen, brauchen es aber nicht). Dieser ist Verdünnter eines $\mathfrak{A}_2$-Satzes, der also die Form hat:

$$a_{\nu_\varrho} \to a_\mu.$$

Nach Definition der $\mathfrak{A}_2$-Sätze ist dann $\nu_\varrho < \mu$. Nun kommt a_{ν_ϱ} auch im Schnittsatz vor, dieser hat also einen kleineren Grad als μ, entgegen der Annahme.

Nr. 6. Kommt in einem Normalbeweis aus Sätzen von $\overline{\mathfrak{A}}$ ein $\mathfrak{B}_1$-Satz als Anfangssatz vor, so tritt b im Antezedens des Endergebnisses des Beweises auf.

Sei nämlich der $\mathfrak{B}_1$-Satz der Satz $\mathfrak{r}_\nu$ bzw. $\mathfrak{s}_0$ im Schema des Normalbeweises (1. Abschnitt, § 4); dann kann in der Satzreihe $\mathfrak{r}_\nu \mathfrak{s}_{\nu+1} \ldots \mathfrak{s}_\varrho \mathfrak{q}$ bzw. $\mathfrak{s}_0 \ldots \mathfrak{s}_\varrho \mathfrak{q}$ das im Antezedens des $\mathfrak{B}_1$-Satzes vorkommende b niemals verlorengehen; denn es kann b nie Schnittelement sein, da b in keinem nicht trivialen Satz von $\overline{\mathfrak{A}}$ als Sukzedens auftritt.

Nr. 7. Aus allen Sätzen von $\mathfrak{A}_2$ und einem $\mathfrak{B}_1$-Satz sind alle $\mathfrak{B}_1$-Sätze von nicht größerem Grade als dieser beweisbar.

Beweis. Der $\mathfrak{B}_1$-Satz sei:

$$a_{\nu_1} \ldots a_{\nu_\varrho}\ b \to c.$$

Dabei sei bereits ν_1 der Grad, also der kleinste Index.

Nun sind

$$\begin{array}{c} a_{\nu_1} \to a_{\nu_2} \\ a_{\nu_1} \to a_{\nu_3} \\ \vdots \\ a_{\nu_1} \to a_{\nu_\varrho} \end{array}$$

Sätze von $\mathfrak{A}_2$. Schneidet man den ersten mit dem $\mathfrak{B}_1$-Satz, den zweiten mit dem Schnittsatz, den dritten mit dem hierdurch erhaltenen Schnittsatz, usw., so entsteht schließlich

$$a_{\nu_1}\, b \to c.$$

(Ist $\varrho = 1$, so steht dies sofort da und die Zwischenbetrachtung fällt weg.)

Dies ist der (eindeutig bestimmte) $\mathfrak{A}_1$-Satz von demselben Grad wie der ursprüngliche $\mathfrak{B}_1$-Satz. Aus ihm folgen nun leicht alle $\mathfrak{A}_1$-Sätze kleineren Grades:

Sei nämlich $\mu < \nu_1$, so ist $a_\mu \to a_{\nu_1}$ ein $\mathfrak{A}_2$-Satz, und dessen Schnitt mit dem $\mathfrak{A}_1$-Satz ergibt: $a_\mu b \to c$, den $\mathfrak{A}_1$-Satz vom Grade μ.

Aus den $\mathfrak{A}_1$-Sätzen folgen durch Verdünnungen die $\mathfrak{B}_1$-Sätze derselben Grade, womit der Hilfssatz Nr. 7 voll bewiesen ist.

§ 3.

Beweis der Unmöglichkeit eines unabhängigen Axiomensystems für $\overline{\mathfrak{A}}$.

Das geht jetzt sehr rasch, da die Hilfssätze alles Wesentliche schon enthalten. (Vgl. 1. Abschnitt, § 6.)

Wir nehmen an, es gäbe ein unabhängiges Axiomensystem $\mathfrak{C}$ von $\overline{\mathfrak{A}}$. Diejenigen Axiome, die $\mathfrak{B}_2$-Sätze sind, mögen das System $\mathfrak{C}_2$ bilden.

Behauptung: Aus $\mathfrak{C}_2$ sind bereits alle $\mathfrak{A}_2$-Sätze beweisbar. Dies folgt ohne weiteres aus § 2, Nr. 6. Denn jeder $\mathfrak{A}_2$-Satz soll aus den Axiomen beweisbar sein, der Beweis läßt sich in Normalform bringen (Satz 3), und dann kann nach § 2, Nr. 6, kein $\mathfrak{B}_1$-Satz Anfangssatz sein, da ja b im Ergebnis nicht auftritt.

Aus $\mathfrak{C}_2$ ist kein $\mathfrak{B}_1$-Satz beweisbar. (Nach Satz 3 und § 2, Nr. 2 und 4.)

Also muß das Axiomensystem $\mathfrak{C}$ mindestens einen $\mathfrak{B}_1$-Satz enthalten.

Nun ergibt Satz 3 und § 2, Nr. 3, 4, 5, 1 und 2:

Aus $\mathfrak{C}_2$ und einem $\mathfrak{B}_1$-Axiom ist kein $\mathfrak{B}_1$-Satz von größerem Grade beweisbar (als das Axiom ihn hat). Es gibt aber $\mathfrak{B}_1$-Sätze beliebig großen Grades. Also muß noch ein zweiter $\mathfrak{B}_1$-Satz von größerem Grade als der erste Axiom sein. ($\mathfrak{C}$ muß sogar unendlich viele $\mathfrak{B}_1$-Sätze enthalten; doch brauchen wir diese Tatsache nicht.)

Nunmehr folgt aus § 2, Nr. 7:

Das erste $\mathfrak{B}_1$-Axiom ist aus dem zweiten zusammen mit den Axiomen $\mathfrak{C}_2$ (aus denen ja alle $\mathfrak{A}_2$-Sätze folgen) beweisbar.

Also ist das Axiomensystem nicht unabhängig.

3. Abschnitt.

Aufstellung eines unabhängigen Axiomensystems für ein gegebenes abzählbar unendliches abgeschlossenes lineares Satzsystem.

§ 1.

Übersicht über das Verfahren.

Ein beliebiges abzählbar unendliches abgeschlossenes lineares Satzsystem $\overline{\mathfrak{S}}$ sei gegeben.

Wir werden (in § 2) ein Teilsystem $\mathfrak{T}$ von $\overline{\mathfrak{S}}$ herstellen, von dem wir nachweisen werden, daß es ein Axiomensystem von $\overline{\mathfrak{S}}$ (§ 3), und zwar ein unabhängiges (§ 4) ist.

Bei der Aufstellung von $\mathfrak{T}$ gehen wir aus von dem System $\mathfrak{S}$ der nicht tautologischen linearen Sätze von $\overline{\mathfrak{S}}$. Dies ist ein Axiomensystem von $\overline{\mathfrak{S}}$, im allgemeinen natürlich kein unabhängiges.

Wir werden zunächst aus den Netzsätzen (1. Abschnitt, § 7) von $\mathfrak{S}$ Axiome auswählen, die dann bereits einen Teil von $\mathfrak{T}$ darstellen (§ 2, Nr. 1).

Da man die Elemente eines Maximalnetzes sozusagen alle als gleichbedeutend ansehen kann (man kann sie in einem Satz durch einander ersetzen, ohne seine Zugehörigkeit zu $\overline{\mathfrak{S}}$ zu ändern), so genügt es ferner, aus jedem Maximalnetz ein Vertreterelement auszuwählen und unter den Halbnetzsätzen von $\mathfrak{S}$ nur noch solche zu betrachten, deren Netzelemente Vertreter sind[11]). (§ 2, Nr. 2, 1. Schritt.)

Der dann folgende 2. und 3. Schritt (§ 2, Nr. 2) stellen den Kern des Verfahrens dar. Im 3. Schritt werden an Stelle der linearen Sätze, von denen ausgegangen wurde, gewisse Verdünnte als Axiome (zu $\mathfrak{T}$) genommen; in ähnlicher Weise wie bei dem im 1. Abschnitt, § 6, beschriebenen Beispiel. Da dies allein nicht ausreicht, um die Unabhängigkeit der Axiome zu gewährleisten, geht der 2. Schritt voran, in welchem Sätze gestrichen und umgeordnet werden.

§ 2.

Aufstellung des Axiomensystems $\mathfrak{T}$.

Nr. 1. Auswahl von Axiomen aus den Netzsätzen.

Man betrachte die in irgendeiner fest gewählten Abzählung der Sätze von $\mathfrak{S}$ vorkommenden Netzsätze, diese bilden eine Reihe $\mathfrak{P}_1$. Die Reihe $\mathfrak{P}_1$ gehe man durch und ändere sie so ab:

Ist ein Satz aus vorangehenden (in der schon abgeänderten Reihe) beweisbar, so wird er weggelassen. Ist das nicht der Fall, so bleibt der Satz,

---

[11]) Ein analoges Verfahren für endliche Systeme wird von Hertz in H. 1, Nr. 36, 42, 43 angewandt.

er heiße $u \to v$, stehen, und es wird gleich der Satz $v \to u$, der nach Definition der Netzsätze auch zu $\mathfrak{P}_1$ gehört, danebengeschrieben.

So entsteht eine neue Reihe $\mathfrak{P}_2$, diese stellt bereits einen Teil von $\mathfrak{T}$ dar.

Nr. 2. Herstellung der übrigen Axiome.

1. Schritt. (Vertreterauswahl aus den Halbnetzsätzen.)

Man ordnet jedem Maximalnetz (bezüglich $\overline{\mathfrak{S}}$) dasjenige von seinen Elementen, das in der Abzählung der Sätze von $\mathfrak{S}$ als erstes vorkommt, als „Vertreterelement" zu. Nun geht man die Reihe der Sätze von $\mathfrak{S}$ durch und läßt jeden Halbnetzsatz fort, der ein Netzelement enthält, das nicht der Vertreter seines Maximalnetzes ist. Ferner werden alle Netzsätze weggelassen. (Diese wurden ja schon unter Nr. 1 gesondert betrachtet.) Die übrigbleibenden Sätze von $\mathfrak{S}$ bilden eine Reihe, die wir $\mathfrak{Q}_1$ nennen.

2. Schritt. (Streichung und Umordnung von Sätzen.)

Man gehe die Reihe $\mathfrak{Q}_1$ durch und ändere sie so ab:

Man komme zu einem Satz $u \to v$.

Ist er aus schon vorangehenden, in der abgeänderten Reihe, beweisbar, so wird er weggelassen.

Ist das nicht der Fall und gibt es unter den vorangehenden (in der neuen Reihe) einen Satz der Form $u \to w$ und zugleich irgendwo in $\mathfrak{Q}_1$ den Satz $w \to v$, so wird statt $u \to v$ zunächst $w \to v$ hingeschrieben.

Gibt es mehrere solche Möglichkeiten, so wählt man diejenige aus, die durch den ersten vorangehenden Satz, der diese Eigenschaft hat, bestimmt wird.

Der neu hingeschriebene Satz wird alsdann ebenfalls auf dieselbe Eigenschaft untersucht und eventuell wieder durch einen anderen ersetzt, usw. Dabei kann nie ein Satz auftreten, welcher aus den ihm in der (durch die Abänderung von $\mathfrak{Q}_1$ entstandenen) Reihe vorangehenden Sätzen allein beweisbar ist; denn dann träfe das gleiche offenbar auf den Satz zu, für den er hingeschrieben wurde, usf. bis zu $u \to v$ selbst, für den das nicht der Fall sein sollte.

Das Ersetzungsverfahren führt nach einer Anzahl von Ersetzungen stets auf einen Satz, der die betreffende Eigenschaft nicht mehr besitzt, diesen läßt man stehen (eventuell schon $u \to v$ selbst).

Wäre das nämlich nicht der Fall, so müßte irgendwann bei den Ersetzungen ein schon dabei vorgekommener Satz, z. B. $w \to v$, wiederkehren. [Weil das Sukzedens (v) stets dasselbe bleibt und das Antezedens nach der Ersetzungsregel stets gleich einem Sukzedens eines der endlich vielen (in der Reihe) vorangehenden Sätze ist.]

Die Folge der sich ersetzenden Sätze von $w \to v$ bis zur ersten Wiederkehr von $w \to v$ laute:

$$w \to v, \quad x_1 \to v, \quad \ldots, \quad x_\nu \to v, \quad w \to v$$

($\nu \geqq 1$, denn $w \to v$ kann nicht sofort durch sich selbst ersetzt werden, da $w \to w$ nicht in $\mathfrak{Q}_1$ vorkommt). D. h. es gehen in der Reihe u. a. die Sätze voran:

$$w \to x_1, \quad x_1 \to x_2, \ldots, \quad x_{\nu-1} \to x_\nu, \quad x_\nu \to w.$$

Aus diesen (ohne den ersten) ist nun der Satz $x_1 \to w$ beweisbar; dieser gehört also, nebst $w \to x_1$, zu $\mathfrak{S}$; demnach wären beide Netzsätze. Es sollte aber in $\mathfrak{Q}_1$ kein Netzsatz vorkommen; wir haben also einen Widerspruch.

Die durch den 2. Schritt aus $\mathfrak{Q}_1$ entstehende Reihe nennen wir $\mathfrak{Q}_2$.

3. Schritt. (Verdünnung gewisser Sätze.)

Man gehe die Reihe $\mathfrak{Q}_2$ durch und ändere sie so ab:

Man komme zu einem Satz $u \to v$.

Gibt es unter den in $\mathfrak{Q}_2$ (also diesmal nicht „in der schon geänderten Reihe") vorangehenden Sätzen keinen mit u als Antezedenselement, so bleibt $u \to v$ ungeändert stehen. Gibt es jedoch solche Sätze, so seien dies die Sätze:

$$u \to w_1, \ldots, u \to w_\nu. \qquad (\nu \geqq 1)$$

Alsdann wird $u \to v$ ersetzt durch den verdünnten Satz:

$$u w_1 \ldots w_\nu \to v.$$

(Kein w ist gleich v, da sonst in $\mathfrak{Q}_2$ zweimal $u \to v$ vorkäme, was nach dem 2. Schritt unmöglich ist. Also ist $u w_1 \ldots w_\nu \to v$ ein nicht trivialer Satz von $\overline{\mathfrak{S}}$.)

Die so entstehende Reihe nennen wir $\mathfrak{Q}_3$.

Die Reihen $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{Q}_3$ bilden zusammen das System $\mathfrak{T}$. Offenbar gilt: Die Sätze von $\mathfrak{T}$ gehören zu $\overline{\mathfrak{S}}$.

§ 3.

Das System $\mathfrak{T}$ ist ein Axiomensystem von $\overline{\mathfrak{S}}$.

Nr. 1. Jeder Netzsatz von $\mathfrak{S}$ ist aus $\mathfrak{P}_2$ beweisbar.

Dies ist trivial, denn von den Netzsätzen ($\mathfrak{P}_1$) wurden nur solche weggelassen, die aus anderen, schon als Axiome genommenen, beweisbar waren.

Nr. 2. Jeder Nicht-Netzsatz von $\mathfrak{S}$ ist aus $\mathfrak{Q}_1$ zusammen mit $\mathfrak{P}_2$ beweisbar.

Dies ist nur zu zeigen für die beim 1. Schritt weggelassenen Halbnetzsätze. [Es beruht natürlich auf der durch die Netzsätze ausgedrückten „Äquivalenz" der Netzelemente mit ihren Vertretern (vgl. § 1).]

Sei $u \to v$ ein solcher Halbnetzsatz, u ein nicht „vertretendes" Netzelement, v kein Netzelement oder ein Vertreter. w sei der Vertreter des Maximalnetzes, zu dem u gehört ($w \neq u, v$). Nun sind $u \to w$ und $w \to u$ Netzsätze, also, nach Nr. 1, aus $\mathfrak{P}_2$ beweisbar. Aus $w \to u$ und $u \to v$ folgt $w \to v$, dies ist also auch ein Satz von $\mathfrak{S}$, und zwar ein in $\mathfrak{Q}_1$ vorkommender Halbnetzsatz. Aus diesem und $u \to w$ folgt umgekehrt $u \to v$, womit dieser Satz aus $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ bewiesen ist.

Ganz analog schließt man, wenn das Sukzedens oder beide Elemente nicht vertretende Netzelemente sind.

Nr. 3. Jeder Satz von $\mathfrak{Q}_1$ ist aus $\mathfrak{Q}_2$ beweisbar.

Dies geht sofort aus dem Verfahren des 2. Schritts hervor. Denn jeder hierbei weggelassene Satz war aus den in $\mathfrak{Q}_2$ vorangehenden, eventuell mit Einschluß eines an seine Stelle getretenen Satzes, beweisbar.

Nr. 4. Jeder Satz von $\mathfrak{Q}_2$ ist aus $\mathfrak{Q}_3$ beweisbar.

Für den ersten Satz von $\mathfrak{Q}_2$ ist dies trivial (da er auch der 1. Satz von $\mathfrak{Q}_3$ ist). Sei es für die ersten μ Sätze von $\mathfrak{Q}_2$ bewiesen. Ist der $\mu + 1$-te Satz beim 3. Schritt nicht verdünnt worden, so ist es auch für ihn bewiesen. Andernfalls habe er die Form $u \to v$ und sei beim 3. Schritt in

$$u w_1 \ldots w_\nu \to v \qquad (\nu \geqq 1)$$

umgewandelt worden. Dann sind also

$$u \to w_1, \ldots, u \to w_\nu$$

vorangehende Sätze in $\mathfrak{Q}_2$ (unter den ersten μ). Diese sind nach Induktionsvoraussetzung bereits aus $\mathfrak{Q}_3$ beweisbar. Nun folgt aus ihnen und

$$u w_1 \ldots w_\nu \to v$$

durch ν Schnitte offenbar $u \to v$. (Analog wie im 2. Abschnitt, § 2, Nr. 7.)

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Nr. 5. Aus 2, 3, 4 und 1 folgt, daß jeder Satz von $\mathfrak{S}$ aus $\mathfrak{T}$ beweisbar ist. Also gilt dasselbe für jeden Satz von $\overline{\mathfrak{S}}$.

§ 4.

Das System $\mathfrak{T}$ ist unabhängig.

Nr. 1. Kein Satz von $\mathfrak{P}_2$ ist aus den übrigen Axiomen beweisbar.

Sei $u \to v$ ein Satz von $\mathfrak{P}_2$, der aus anderen Sätzen von $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{Q}_3$ beweisbar wäre. Statt der Sätze von $\mathfrak{Q}_3$ kann man die entsprechenden in $\mathfrak{Q}_2$ (d. h. die, aus denen sie beim 3. Schritt entstanden sind) nehmen, denn jene folgen aus diesen durch Verdünnung. Alsdann hat man lauter lineare Sätze. Nun gibt es nach Satz 4 unter diesen eine Reihe von Sätzen der Form

$$u \to w_1, \quad w_1 \to w_2, \ldots, w_{\nu-1} \to w_\nu, \quad w_\nu \to v$$

($\nu \geqq 1$). Da neben $u \to v$ als Netzsatz auch $v \to u$ zu $\overline{\mathfrak{S}}$ gehört, so auch die aus diesem und der aufgeschriebenen Reihe beweisbaren Sätze

$$w_1 \to u, \quad w_2 \to w_1, \ldots, w_\nu \to w_{\nu-1}, \quad v \to w_\nu.$$

Also sind alle diese Sätze Netzsätze, d. h.

$$u \to w_1, \; w_1 \to w_2, \ldots, w_\nu \to v$$

gehören zu $\mathfrak{P}_2$ (und keiner zu $\mathfrak{Q}_2$). Nach Konstruktion von $\mathfrak{P}_2$ treten dort alle Sätze paarweise auf. Wir betrachten das in $\mathfrak{P}_2$ als letztes auftretende von den $\nu + 2$ Paaren

$$u \to v,\ v \to u;\quad u \to w_1,\ w_1 \to u;\ \ldots;\ w_\nu \to v,\ v \to w_\nu.$$

Dieses steht mit der Bildung von $\mathfrak{P}_2$ im Widerspruch, da seine beiden Sätze aus den übrigen Paaren, die ihm vorangehen, beweisbar sind.

Nr. 2. Kein Satz von $\mathfrak{Q}_3$ ist aus den übrigen Axiomen beweisbar.

Es bedeute $\mathfrak{q}_{2\nu}$ bzw. $\mathfrak{q}_{3\nu}$ bzw. $\mathfrak{p}_{2\nu}$ den ν-ten Satz in der Reihe $\mathfrak{Q}_2$ bzw. $\mathfrak{Q}_3$ bzw. $\mathfrak{P}_2$. Es ist also stets $\mathfrak{q}_{3\nu}$ ein Verdünnter von $\mathfrak{q}_{2\nu}$, gemäß dem 3. Schritt.

Sei nun der Satz $\mathfrak{q}_{3\nu}$ aus anderen Sätzen von $\mathfrak{T}$ beweisbar. Dann ist jeder Satz von $\mathfrak{S}$ aus $\mathfrak{T}$ ohne Benutzung des Axioms $\mathfrak{q}_{3\nu}$ beweisbar, z. B. der Satz $\mathfrak{q}_{2\nu}$. Dieser laute $u \to v$. Er sei aus den Axiomen

$$\mathfrak{p}_{2\lambda},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{2\mu},\quad \mathfrak{q}_{3\varrho},\ \ldots,\ \mathfrak{q}_{3\sigma},$$

und zwar nicht aus wenigeren von diesen, was natürlich stets erreichbar ist, beweisbar. (Unter ihnen komme $\mathfrak{q}_{3\nu}$ nicht vor.)

Wie unter Nr. 1 schließen wir, daß $u \to v$ aus den linearen Sätzen

$$\mathfrak{p}_{2\lambda},\ \ldots,\ \mathfrak{p}_{2\mu},\quad \mathfrak{q}_{2\varrho},\ \ldots,\ \mathfrak{q}_{2\sigma}$$

beweisbar ist (doch brauchen jetzt nicht mehr alle zum Beweis notwendig zu sein), und daß sich unter diesen eine Reihe von Sätzen der Form

$$u \to w_1,\ w_1 \to w_2,\ \ldots,\ w_\tau \to v$$

angeben läßt (Satz 4). Jetzt ersetze man alle darin vorkommenden Netzelemente durch ihre Vertreter. Dabei gehen die Sätze von $\mathfrak{Q}_2$ in sich über, die von $\mathfrak{P}_2$ in tautologische Sätze. (Denn beide Elemente eines $\mathfrak{P}_2$-Satzes gehören jeweils zu demselben Maximalnetz und haben demnach denselben Vertreter.) Läßt man letztere weg, so bleibt offenbar wieder eine Satzreihe der Form

$$u \to x_1,\ x_1 \to x_2,\ \ldots,\ x_\varkappa \to v$$

stehen, und zwar sind dies nur noch Sätze von $\mathfrak{Q}_2$. ($\varkappa \geqq 1$, denn stände nur $u \to v$ da, so käme dieser Satz in $\mathfrak{Q}_2$ zweimal vor, das ist nach dem 2. Schritt unmöglich.)

$u \to x_1$ sei, ohne Beschränkung, der Satz $\mathfrak{q}_{2\varrho}$. Nun ist $x_1 \to v$ ($x_1 \neq v$) ein Satz von $\mathfrak{S}$, da beweisbar, und zwar von $\mathfrak{Q}_1$. Damit folgt aus der Regel des 2. Schrittes, daß $u \to x_1$ nicht *vor* $u \to v$ in $\mathfrak{Q}_2$ vorkommt, denn dann wäre $u \to v$ durch einen anderen Satz (zunächst $x_1 \to v$) ersetzt worden. Also kommt $u \to x_1$ in $\mathfrak{Q}_2$ *später* als $u \to v$. Demnach lautet der aus $u \to x_1$ beim 3. Schritt entstandene Satz $\mathfrak{q}_{3\varrho}$ so:

$$u \ldots v \ldots \to x_1$$

nach Konstruktion des 3. Schrittes. Dafür schreiben wir

$$vK \to x_1.$$

Nach Annahme ist nun der Satz $u \to v$ ($\mathfrak{q}_{2\nu}$) aus

$$\mathfrak{p}_{2\lambda}, \ldots, \mathfrak{p}_{2\mu}, \quad \mathfrak{q}_{3\varrho}, \ldots, \mathfrak{q}_{3\sigma},$$

und zwar nicht ohne $vK \to x_1$ ($\mathfrak{q}_{3\varrho}$) beweisbar. Das kann aber nicht stimmen. Ein Satz mit v im Antezedens kann kein unvermeidbarer Bestandteil eines Beweises für einen Satz mit v als Sukzedens sein. Das läßt sich folgendermaßen einsehen:

Nach Satz 3 müßte es einen Normalbeweis für $u \to v$ geben, in welchem $vK \to x_1$ unter den Anfangssätzen vorkommt. Die Sätze $\mathfrak{s}$ im Schema des Normalbeweises (s. 1. Abschnitt, § 4) hätten alle das Sukzedens v. Also müßte $vK \to x_1$ zu den $\mathfrak{r}$ gehören. Alsdann würde er mit einem der $\mathfrak{s}$ geschnitten. Da nun v nicht das Schnittelement wäre, so käme v im Antezedens und Sukzedens des Schnittsatzes vor, dieser wäre also trivial, und triviale Sätze sollten im Normalbeweis nicht vorkommen.

Damit haben wir einen Widerspruch, die Unabhängigkeit des Axiomensystems $\mathfrak{T}$ ist also bewiesen.

(Eingegangen am 6. 2. 1932.)