Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie.

Von

Gerhard Gentzen in Göttingen.

Als *„reine Zahlentheorie“* bezeichne ich die Theorie der natürlichen Zahlen ohne Verwendung von Hilfsmitteln aus der Analysis, wie z. B. von irrationalen Zahlen oder unendlichen Reihen.

Das Ziel der vorliegenden Abhandlung ist, die *Widerspruchsfreiheit* der reinen Zahlentheorie zu beweisen, oder richtiger gesagt, auf gewisse Grundlagen allgemeiner Art zurückzuführen.

Wie ein solcher Widerspruchsfreiheitsbeweis überhaupt möglich ist, und aus welchen Gründen er notwendig oder wenigstens sehr angebracht ist, das wird im I. Abschnitt erörtert.

Die ganze Abhandlung kann ohne besondere Vorkenntnisse gelesen werden.

Einteilung:

I. Abschnitt.

Betrachtungen über Sinn und Möglichkeit von Widerspruchsfreiheitsbeweisen.

In § 1 behandle ich die Frage, warum Widerspruchsfreiheitsbeweise *notwendig* sind, in § 2, wie solche *möglich* sind[1]). Ich will hierbei die Problemlage, die vielen Lesern bereits bekannt sein wird, besonders im Hinblick auf die für die folgenden Abschnitte wichtigen Gesichtspunkte kurz wiedergeben.

[1]) Ausführlichere und sehr lesenswerte Darlegungen zu diesen Fragen enthält der Aufsatz von D. Hilbert, Über das Unendliche, Math. Annalen 95 (1926), S. 161–190.

§ 1.
Die Antinomien der Mengenlehre und ihre Bedeutung für die gesamte Mathematik[2]).

1. 1. Die Mathematik gilt als die sicherste von allen Wissenschaften. Daß sie zu Ergebnissen führen könne, die einander widersprechen, erscheint unmöglich. Dieser Glaube an die unbedingte Sicherheit der mathematischen Beweise erlitt einen starken Stoß durch *die etwa um 1900 entdeckten* „*Antinomien* (oder „Paradoxien") der Mengenlehre". Es zeigte sich nämlich, daß in diesem Randgebiet der Mathematik Widersprüche auftreten, ohne daß ein eindeutig feststellbarer Fehler in den dahinführenden Schlüssen zu erkennen wäre.

Besonders lehrreich ist die „*Russellsche Antinomie*", auf die ich im folgenden etwas näher eingehen will.

1. 2. Eine Menge ist die Gesamtheit irgendwelcher Gegenstände („Elemente der Menge"). Auch eine „leere Menge", die überhaupt keine Elemente hat, wird zugelassen. Wir teilen nun die Mengen ein in „Mengen 1. Art", das sind solche Mengen, die *sich selbst* als Element enthalten, und „Mengen 2. Art", das sind solche, die sich selbst *nicht* als Element enthalten.

Nun betrachten wir die Menge $\mathfrak{M}$, welche als Elemente die sämtlichen Mengen 2. Art hat. Gehört diese Menge $\mathfrak{M}$ nun selber zur 1. oder zur 2. Art? Beides erweist sich als widersinnig: Gehörte sie nämlich zur 1. Art, d. h. enthielte sie sich selbst als Element, so widerspräche das ihrer Definition, wonach ihre Elemente sämtlich Mengen 2. Art sein sollten. Nehmen wir nun an, die Menge $\mathfrak{M}$ gehöre zur 2. Art, d. h. sie enthalte sich selbst nicht als Element. Da sie jedoch nach ihrer Definition sämtliche Mengen 2. Art als Elemente hat, so müßte sie in diesem Falle doch auch sich selbst als Element enthalten, und damit sind wir abermals zu einem Widerspruch gelangt.

1. 3. Das ist die *Russellsche Antinomie*, welche zeigt, wie sich bereits durch ganz wenige, freilich etwas verzwickte Schlüsse ein offenkundiger Widerspruch ergeben kann.

Welche *Bedeutung* hat nun diese Tatsache für die *gesamte Mathematik?*

Man wird zunächst geneigt sein, den angeführten Gedankengang überhaupt nicht der *Mathematik* zuzurechnen, mit der Begründung, daß der Begriff „Menge von irgendwelchen Gegenständen" zu unbestimmt sei, um als mathematischer Begriff gelten zu können.

---

[2]) Vgl. hierzu auch: H. Weyl, Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik, Math. Zeitschr. 10 (1921), S. 39—79; und A. Fraenkel, Zehn Vorlesungen über die Grundlegung der Mengenlehre (oder auch die entsprechenden Abschnitte in Fraenkels Lehrbuch der Mengenlehre).

Um diesem Einwand zu begegnen, können wir uns auf ganz spezielle, rein *mathematische* Gegenstände beschränken, indem wir etwa folgende Festsetzung treffen:

Als Elemente einer „Menge“ werden nur zugelassen 1. beliebige natürliche Zahlen (1, 2, 3, 4 usw.); 2. beliebige Mengen, welche aus zugelassenen Elementen bestehen.

Beispiel: Folgende drei Elemente bilden eine zulässige Menge: 1. die Zahl 4; 2. die Menge aller natürlichen Zahlen; 3. die Menge, deren zwei Elemente die Zahl 3 und die Menge aller natürlichen Zahlen sind.

Unter Benutzung dieses rein *mathematischen* Mengenbegriffs können wir nun wie oben (1.2) schließen und erhalten *denselben Widerspruch.*

1.4. Daß wir als Ausgangsgegenstände gerade die *natürlichen Zahlen* genommen haben, spielt offenbar für das Zustandekommen der Antinomie gar keine Rolle. Wir werden also nicht etwa sagen können, daß sich damit ein Widerspruch im Bereich der *natürlichen Zahlen* offenbart, sondern wir werden richtiger die verwendeten *logischen Schlüsse* als fehlerhaft ansehen müssen.

1.5. Als nächstes wird man darum versuchen, in dem Gedankengang der Antinomie einen *bestimmten Fehler* ausfindig zu machen. Man wird etwa so sagen: Die Menge $\mathfrak{M}$ wurde definiert unter Bezugnahme auf die Gesamtheit *aller* Mengen (diese wurden ja eingeteilt in Mengen 1. und 2. Art, und $\mathfrak{M}$ aus den Mengen 2. Art gebildet). Danach wurde sie selbst dieser Gesamtheit zugerechnet, nämlich die Frage aufgeworfen, ob sie der 1. oder 2. Art angehört. Dieses Verfahren ist aber *zirkelhaft*; man darf nicht einen Gegenstand mittels einer Gesamtheit definieren und ihn dann selbst dieser Gesamtheit zurechnen, so daß er gewissermaßen an seiner eigenen Definition mitbeteiligt wäre („circulus vitiosus“).

Die *richtige* Auffassung der Menge $\mathfrak{M}$ wäre vielmehr diese:

Wenn eine *bestimmte Gesamtheit* von Mengen gegeben ist, so kann man diese einteilen in Mengen 1. und 2. Art. Wenn man nun aber die Mengen 2. Art (oder auch 1. Art) zu einer Menge $\mathfrak{M}$ zusammenfaßt, so ist diese Menge etwas *vollkommen neues*, was nicht wieder jener Gesamtheit zugerechnet werden kann.

1.6. Daß zunächst die zur Antinomie führenden Schlußweisen richtig erscheinen, beruht auf der Vorstellung, daß der Begriff „Menge“ etwas „*an sich*“ bestimmtes sei (und somit die Gesamtheit aller Mengen eine von vornherein bestimmte, abgeschlossene Gesamtheit darstelle); die eben durchgeführte Kritik stellt dem die Vorstellung gegenüber, daß Mengen nur „*konstruktiv*“, aufeinander aufbauend, immer wieder neu gebildet werden können.

1.7. Könnte man somit glauben, mit der Antinomie einigermaßen fertig geworden zu sein, so ergibt sich nun eine neue Schwierigkeit:

Das eben als unzulässig erklärte Schlußverfahren (der circulus vitiosus) wird in ganz ähnlicher Form bereits *in der Analysis* angewandt, sogar schon bei den üblichen Beweisen von einigen ganz einfachen Sätzen, z. B. des Satzes: „Eine in einem abgeschlossenen Intervall stetige Funktion, die an beiden Endpunkten verschiedenes Vorzeichen hat, besitzt in dem Intervall eine Nullstelle."

Die für diese Feststellung wesentlichen Schlüsse im Beweise des Satzes sind folgende:

Man teilt die Gesamtheit der Punkte in dem Intervall in Punkte 1. und 2. Art ein, und zwar wird ein Punkt zur 1. Art gerechnet, wenn die Funktion rechts von ihm bis zum Ende des Intervalls überall gleiches Vorzeichen hat, zur 2. Art, wenn dies nicht der Fall ist. Der durch diese Einteilung definierte Grenzpunkt ist dann die Nullstelle. Diese gehört selbst zu den Punkten des Intervalls. Damit haben wir den „circulus vitiosus": Die betreffende reelle Zahl wird definiert unter Bezugnahme auf die *Gesamtheit* der reellen Zahlen (in einem Intervall), und wird dann selbst dieser *Gesamtheit zugerechnet.*

Trotzdem wird man diese Schlußweise in der Analysis für *richtig* halten, und das etwa so begründen: Die betreffende Zahl wird ja nicht *neu geschaffen* durch ihre angegebene Definition, sie ist vielmehr *an sich* schon vorhanden innerhalb der Gesamtheit von reellen Zahlen und wird nur durch eine allerdings auf die Gesamtheit bezogene Erklärung aus dieser *herausgegriffen.*

Aber genau dasselbe kann man doch auch bei der oben angeführten Antinomie sagen: Die Menge $\mathfrak{M}$ sei *an sich* von vornherein in der (durch die Definition unter 1.3 erklärten) Gesamtheit aller Mengen schon vorhanden, und werde eben durch die (unter 1.2 gegebene) Erklärung aus dieser Gesamtheit herausgegriffen!

Gewiß bestehen trotzdem beträchtliche *Unterschiede* zwischen den bei der Antinomie und den bei dem Beweise aus der Analysis benutzten Schlußweisen. Es fragt sich nur, ob man diese für ausreichend halten darf, um die letzteren als sicher anzusehen — schließlich sind ja bisher in der Analysis noch keine Widersprüche aufgetreten — oder ob man die Ähnlichkeit mit der Antinomie für hinreichend ansehen soll, um den entsprechenden Schluß in der Analysis als unzulässig zu erklären. Hierin gehen die *Meinungen* der Mathematiker, die sich mit diesen Fragen beschäftigt haben, *auseinander.*

1.8. Man kann noch *andere* in der Mathematik gebräuchliche Schlußweisen auf Grund gewisser entfernterer Analogien zu den bei den Antinomien auftretenden Schlüssen *anfechten.* Besonders weit gehen hierin die „*Intuitionisten*“ (Brouwer), die sogar gegen Schlußweisen, die in der *Zahlentheorie* vorkommen, Einwendungen machen, nicht nur weil diese vielleicht zu *Widersprüchen* führen könnten, sondern weil die mit ihrer Hilfe erhaltenen Sätze keinen sachlichen *Sinn* mehr hätten, also wertlos wären. Ich werde hierauf ausführlich zurückkommen (§ 9—11 und 17.3).

Weniger weit gehen die „*Logizisten*“ (Russell). Sie ziehen eine Grenze zwischen erlaubten und unerlaubten Schlußweisen, wobei die Antinomien herausfallen, indem dabei ein unerlaubter circulus vitiosus verwendet wird. Der oben angegebene ähnliche Schluß in der Analysis wurde ursprünglich ebenfalls verboten („verzweigte Typentheorie“), später aber wieder zugelassen.

1.9. Insgesamt ergibt sich also folgendes Bild:

Die in der Mengenlehre, einem Randgebiet der Mathematik, auftretenden Widersprüche (Antinomien) gaben Anlaß, die Richtigkeit gewisser auch in der sonstigen Mathematik gebräuchlicher Schlußweisen anzuzweifeln. Verschiedene Versuche, eine Abgrenzung zwischen erlaubten und unerlaubten Schlußweisen vorzunehmen, haben zu verschiedenen Grenzziehungen geführt.

Um diesem unbefriedigenden Zustand ein Ende zu machen, stellte Hilbert folgendes *Programm* auf:

Die *Widerspruchsfreiheit* der gesamten Mathematik, soweit sich diese als widerspruchsfrei herausstellt, soll auf exakt mathematischem Wege *bewiesen* werden. Dieser Beweis soll unter Verwendung von solchen Schlußweisen geführt werden, die von jeglicher Anfechtbarkeit frei sind („finite“ Schlußweisen).

Wie ein solcher Widerspruchsfreiheitsbeweis überhaupt denkbar ist, werde ich in § 2 näher auseinandersetzen.

Im weiteren Verlauf der Arbeit führe ich dann einen derartigen Widerspruchsfreiheitsbeweis für die *reine Zahlentheorie* durch. Diese enthält durchaus schon Schlußweisen, die bei scharfer Kritik zu Bedenken Anlaß geben. Näheres hierüber im III. Abschnitt. Auf eines will ich schon hier hinweisen: *Die* Schlußweisen, die sich als allenfalls bedenklich herausstellen, kommen in den wirklichen zahlentheoretischen Beweisen *kaum vor* (11.4); man darf also nicht auf Grund der großen *Evidenz dieser Beweise* einen Widerspruchsfreiheitsnachweis für überflüssig halten.

§ 2.

Wie sind Widerspruchsfreiheitsbeweise möglich?

2.1. *Allgemeines über Widerspruchsfreiheitsbeweise.*

2.11. Die Widerspruchsfreiheit von *Geometrien* pflegt man durch Zurückführung auf ein *arithmetisches* Modell zu beweisen. Die Widerspruchsfreiheit der *Arithmetik* wird also hierbei *vorausgesetzt.* In ähnlicher

Weise lassen sich einige Teile der Arithmetik auf andere abbilden, z. B. die Theorie der komplexen Zahlen auf die der reellen Zahlen.

Es bleibt letztlich die Widerspruchsfreiheit der Theorie der *natürlichen* Zahlen (reine Zahlentheorie) und der Theorie der *reellen* Zahlen (Analysis), die jene als Teil enthält, zu beweisen; sowie schließlich der Mengenlehre, soweit diese widerspruchsfrei ist.

2.12. Diese Aufgabe ist eine *grundsätzlich andere* und schwierigere als die erwähnten Zurückführungen durch Abbildung der Gegenstände einer Theorie auf die Gegenstände einer anderen Theorie. Betrachten wir die Verhältnisse bei den *natürlichen* Zahlen etwas näher:

Diese lassen sich offenbar auf keinen *einfacheren Gegenstandsbereich* mehr abbilden. Es handelt sich aber auch gar nicht um die Widerspruchsfreiheit des *Zahlenbereiches* selbst, d. h. der durch die „Axiome" (z. B. die „Peanoschen Axiome" der Zahlentheorie) festgelegten Grundbeziehungen zwischen den Zahlen. Die Widerspruchsfreiheit dieser Axiome zu beweisen, ohne dabei etwas ihnen gleichwertiges schon vorauszusetzen, erscheint undenkbar. Es handelt sich vielmehr um die Widerspruchsfreiheit des *logischen Schließens* in seiner Anwendung auf die natürlichen Zahlen (*ausgehend* von deren *Axiomen*), wie es in den *Beweisen* der Zahlentheorie stattfindet. Denn gerade das logische Schließen führte ja in seiner weitestgehenden Anwendung zur Antinomie (1.4). So allgemeine Begriffsbildungen wie die der beliebigen Mengen von Mengen (1.3) rechnen wir freilich nicht zur *Zahlentheorie*. Zur reinen Zahlentheorie gehören lediglich *endliche* Mengen (von natürlichen Zahlen etwa). Nimmt man *unendliche* Mengen von natürlichen Zahlen hinzu, so gelangt man bereits zu den reellen Zahlen und damit zur *Analysis*. Das ist die grundsätzliche *Abgrenzung zwischen reiner Zahlentheorie und Analysis*.

Von hier aus gelangt man dann zur *Mengenlehre*, indem man den Begriff „Menge" noch weiter ausdehnt.

Wie kann man nun die *Widerspruchsfreiheit* der *Arithmetik beweisen?*

2.2. „*Beweistheorie*".

2.21. Die Behauptung, daß eine mathematische Theorie *widerspruchsfrei* sei, stellt eine Aussage über die in der Theorie möglichen *Beweise* dar. Sie besagt ja, daß keiner dieser Beweise auf einen Widerspruch führt. Will man also Widerspruchsfreiheit beweisen, so muß man die in einer Theorie möglichen Beweise selbst zu *Gegenständen* einer neuen „Meta-Theorie" machen. Die Theorie beliebiger mathematischer Beweise als Gegenstände wird „*Beweistheorie*", oder „Metamathematik", genannt.

2.22. Ein *Beispiel eines Lehrsatzes der Beweistheorie* ist das „*Dualitätsprinzip*" in der projektiven Geometrie:

Dieses besagt (in der Ebene) ungefähr, daß man aus einem Satz über Punkte und Geraden wieder einen richtigen Satz erhält, wenn man in ihm das Wort „Punkt“ durch „Gerade“ und das Wort „Gerade“ durch „Punkt“ ersetzt. Beispielsweise ergibt der Satz: „Zu zwei voneinander verschiedenen Geraden gibt es genau einen Punkt, der mit beiden Geraden inzidiert (d. h. auf ihnen liegt)“ als duales Gegenstück den Satz: „Zu zwei voneinander verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, die mit beiden Punkten inzidiert (d. h. durch sie geht)“.

Das Dualitätsprinzip wird so *begründet*: Die Axiome der projektiven Geometrie der Ebene sind so beschaffen, daß die duale Umformung eines Axioms jeweils wieder ein Axiom ergibt. Wenn nun irgendein Satz aus diesen Axiomen abgeleitet worden ist, so kann man in dem ganzen Beweis das Wort „Punkt“ durch „Gerade“, das Wort „Gerade“ durch „Punkt“ ersetzen, und erhält damit einen *Beweis* für den *dualen* Satz.

Diese Begründung ist offenbar der *Beweistheorie* zuzurechnen, sie hat ja den „Beweis eines Satzes“ zum Gegenstand.

(Dieses Beispiel zeigt auch, daß die Beweistheorie die eigentliche Mathematik zu fördern vermag.)

2. 2 3. *Die „Formalisierung“ der mathematischen Beweise.*

Gegenstände der Beweistheorie sollen die in der eigentlichen Mathematik geführten *Beweise* sein. Nun pflegt man diese Beweise mit *Worten* der *Sprache* auszudrücken. Diese haben den Nachteil, daß es viele verschiedene Redewendungen für *dieselbe* Aussage gibt, daß Willkür in der Anordnung der Worte besteht, manchmal auch *Zweideutigkeit*. Daher empfiehlt es sich, um eine exakte Behandlung der Beweise zu ermöglichen, diesen zunächst eine einheitliche, eindeutig festgelegte Form zu geben. Das geschieht durch die „Formalisierung“ der Beweise: Die Worte der Sprache werden durch bestimmte *Zeichen* ersetzt, die logischen Schlußweisen durch formale Regeln zur Bildung von neuen formal dargestellten Aussagen aus schon bewiesenen.

Im II. Abschnitt werde ich eine solche *Formalisierung* für die *reine Zahlentheorie* durchführen.

Das Beispiel des Dualitätsprinzips (2. 2 2) zeigte deutlich die Schwierigkeiten, die sich für die Beweistheorie ohne Formalisierung ergeben: Der sprachliche Ausdruck des Satzes „zu zwei voneinander verschiedenen Geraden gibt es genau einen Punkt, der mit beiden Geraden inzidiert“ mußte künstlich so gewählt werden, daß die Ersetzung von „Punkt“ durch „Gerade“ und umgekehrt wieder einen verständlichen Satz ergibt. Man hat auch bei dem Beweise des Dualitätsprinzips das Gefühl, daß dieser kein richtig strenger Beweis sei. Um ihn dazu zu machen, wäre eben die exakte Formalisierung der Aussagen und Beweise (für den Bereich der projektiven Geometrie) notwendig.

2. 3. *Die beim Widerspruchsfreiheitsbeweis zu benutzenden Schlußweisen; der Satz von Gödel.*

2. 3 1. Wie ist nun ein Widerspruchsfreiheitsbeweis, etwa für die reine Zahlentheorie, mit Hilfe der Beweistheorie zu führen?

Man wird zunächst genau angeben müssen, was unter einem formalisierten „zahlentheoretischen Beweis" zu verstehen ist. Alsdann hat man *nachzuweisen*, daß es unter allen möglichen solchen „Beweisen" keinen geben kann, der auf einen „Widerspruch" führt. (Dies ist eine einfache, an jedem vorgelegten „Beweis" sofort nachprüfbare Eigenschaft von „Beweisen".)

Ein solcher Widerspruchsfreiheitsbeweis wäre nun wieder ein *mathematischer Beweis*, in dem gewisse Schlüsse und Begriffsbildungen verwendet würden. Diese müssen als sicher (insbesondere als widerspruchsfrei) bereits *vorausgesetzt* werden. Ein „*absoluter Widerspruchsfreiheitsbeweis*" ist also *nicht möglich*. Ein Widerspruchsfreiheitsbeweis kann lediglich die Richtigkeit gewisser Schlußweisen auf die Richtigkeit anderer Schlußweisen *zurückführen*.

Man wird also verlangen müssen, daß in einem Widerspruchsfreiheitsbeweis nur solche Schlußweisen benutzt werden, die im Vergleich zu den Schlußweisen der Theorie, deren Widerspruchsfreiheit man beweist, als erheblich *sicherer* gelten können.

2. 3 2. Von größter Bedeutung für diesen Punkt ist der folgende, von K. Gödel bewiesene beweistheoretische *Satz*[3]): „Es ist nicht möglich, die Widerspruchsfreiheit einer formal gegebenen (abgegrenzten) Theorie, welche die reine Zahlentheorie in sich enthält (und bereits dieser selbst), mit den gesamten Hilfsmitteln der betreffenden Theorie selbst nachzuweisen (vorausgesetzt, daß diese Theorie wirklich widerspruchsfrei ist)".

Daraus folgt also, daß man, um die Widerspruchsfreiheit etwa der reinen Zahlentheorie zu beweisen, für diesen Beweis keineswegs mit einem *Teil* der in der reinen Zahlentheorie verwendbaren Beweismittel auskommt, ja nicht einmal mit *allen* diesen Beweismitteln. Ist dann aber überhaupt noch eine wirkliche *Zurückführung* möglich?

Nun, es bleibt ja durchaus denkbar, daß man die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie nachweisen kann mit Hilfsmitteln, die zum Teil nicht mehr der reinen Zahlentheorie angehören, aber trotzdem als *sicherer* gelten können als die bedenklichen Bestandteile der reinen Zahlentheorie selbst.

---

[3]) K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, Monatsh. f. Math. u. Phys. 38 (1931), S. 173—198.

2. 4. Im folgenden (II.—IV. Abschnitt) werde ich einen Widerspruchsfreiheitsbeweis für die reine Zahlentheorie durchführen. Dabei werden in der Tat Hilfsmittel Anwendung finden, die nicht der reinen Zahlentheorie angehören (16. 2). Es gibt in der Literatur[4]) bereits verschiedene Widerspruchsfreiheitsbeweise, die alle im wesentlichen bis zu dem gleichen Punkte führen, nämlich zur Erledigung der reinen Zahlentheorie mit Ausnahme der Schlußweise der „vollständigen Induktion", die bekanntlich eine in der Zahlentheorie sehr wichtige, häufig angewandte Schlußweise ist. Die durch meinen Beweis geleistete Einbeziehung der vollständigen Induktion macht bestimmte Schwierigkeiten (16. 2).

II. Abschnitt.

Die Formalisierung der reinen Zahlentheorie.

Wie ich unter 2. 2 3 auseinandergesetzt habe, empfiehlt es sich für die beweistheoretische Behandlung einer mathematischen Theorie, dieser eine genau formal festgelegte Gestalt zu geben. Um also die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie zu beweisen, führe ich zunächst eine solche *Formalisierung der reinen Zahlentheorie* durch[5]).

Diese Aufgabe zerfällt in zwei Teile:

1. Die Formalisierung der in der reinen Zahlentheorie vorkommenden *Aussagen* (§ 3).

2. Die Formalisierung der in der reinen Zahlentheorie verwendeten *Beweismittel*, d. h. Schlußweisen und Begriffsbildungen (§ 4—6).

§ 3.

Die Formalisierung der in der reinen Zahlentheorie vorkommenden Aussagen.

3. 1. *Vorbereitende Erläuterungen.*

3. 1 1. Eine Formalisierung der mathematischen Aussagen ist auch außerhalb der Beweistheorie nichts grundsätzlich Neues. Vielmehr findet schon von jeher in der Mathematik eine fortschreitende Formalisierung,

---

[4]) W. Ackermann, Begründung des „tertium non datur" mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchsfreiheit, Math. Ann. **93** (1925), S. 1—36; J. von Neumann, Zur Hilbertschen Beweistheorie. Math. Zeitschr. **26** (1927), S. 1—46; J. Herbrand, Sur la non-contradiction de l'Arithmétique, Journ. f. d. reine u. angew. Math. **166** (1932), S. 1—8; G. Gentzen, Untersuchungen über das logische Schließen, Math. Zeitschr. **39** (1935), S. 176—210, 405—431.

[5]) Es gibt schon verschiedene solche Formalisierungen, an die sich die hier vorgeführte mehr oder weniger anschließt.

d. h. Ersetzung der Sprache durch mathematische Symbole, statt. So gibt es Aussagen, die man ganz in Zeichen schreibt, z. B. $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$, in Worten etwa: „Das Produkt aus der Summe und der Differenz der Zahlen a und b ist gleich der Differenz der Quadrate beider Zahlen". Dagegen wird die Aussage „Wenn $a = b$ ist, so ist $b = a$" im allgemeinen noch unter Benutzung von Worten dargestellt. Völlig formalisiert, wird sie geschrieben: $a = b \supset b = a$.

3.12. Die Wortverbindung „wenn $\mathfrak{A}$ gilt, so gilt $\mathfrak{B}$", formal geschrieben: $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, ist ein Beispiel einer *Verknüpfung von Aussagen* zur Bildung einer neuen Aussage. Weitere *Aussagenverknüpfungen* werden dargestellt durch die Zeichen &, $\vee$, $\neg$, $\forall$ und $\exists$ mit folgenden Bedeutungen: $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{B}$ bedeutet „$\mathfrak{A}$ gilt *und* $\mathfrak{B}$ gilt", $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$: „$\mathfrak{A}$ gilt *oder* $\mathfrak{B}$ gilt" (d. h. *mindestens eine* der beiden Aussagen ist gültig), $\neg\, \mathfrak{A}$: „$\mathfrak{A}$ gilt *nicht*", $\forall\, \mathfrak{x}\, \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$: „$\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ gilt für *alle* $\mathfrak{x}$", $\exists\, \mathfrak{x}\, \mathfrak{A}(\mathfrak{x})$: „*es gibt* ein $\mathfrak{x}$, sodaß $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ gilt".

3.13. Als *Beispiel* gebe ich den „Goldbachschen Satz" („jede gerade natürliche Zahl ist als Summe von zwei Primzahlen darstellbar") in formaler Gestalt an:

$$\forall x\, \{2 \mid x \supset \exists y\, \exists z\, [y + z = x \,\&\, (\mathrm{Prim}\, y \,\&\, \mathrm{Prim}\, z)]\}.$$

Dabei bedeute Prim a „a ist eine Primzahl"; $a \mid b$, wie üblich, „a ist ein Teiler von b". Alle *Variablen* sollen sich nur auf natürliche (= positive ganze) Zahlen beziehen.

3.14. Die Zeichen $=$, Prim und $\mid$ sind „*Prädikatzeichen*"; ein solches Zeichen stellt, nach Einsetzen von Zahlen in seine „Argumentstellen" eine *Aussage* dar. Das Zeichen $+$ ist ein „*Funktionszeichen*"; ein solches stellt, nach Einsetzen von Zahlen in seine Argumentstellen, wieder eine *Zahl* dar.

Das formale Abbild einer *Aussage* nennen wir allgemein eine „*Formel*". (Wie man ja auch in der Mathematik z. B. $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$ eine „Formel", freilich in speziellerem Sinne, nennt.)

Nach diesen Erläuterungen gebe ich nun eine genaue Kennzeichnung derjenigen formalen Ausdrücke, die in der formalisierten Zahlentheorie zur Darstellung von Aussagen zugelassen sein sollen.

3.2. *Genaue Abgrenzung des Begriffs „Formel"* [6]).

3.21. Zur Bildung von Formeln dienen folgende Arten von *Zeichen*:

---

[6]) Da die Bezeichnung „Formel" ganz allgemein fur formalisierte Aussagen gelten soll, wäre der hier erklärte Sonderfall richtiger etwa als „zahlentheoretische Formel" zu bezeichnen. Da in der vorliegenden Arbeit keine anderen „Formeln" auftreten, kann dieser Zusatz unterbleiben. Entsprechendes gilt für die Begriffe „Term", „Funktionszeichen" usw.

3.2 1 1. Zeichen für *bestimmte natürliche Zahlen*: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ..., kurz „Zahlzeichen“ genannt. (Zeichen für *andere* Zahlen brauchen wir nicht.)

3.2 1 2. *Variable* für *natürliche Zahlen*: Diese teile ich ein in *freie* und *gebundene* Variable (s. u.). Als Variable können beliebige noch nicht anders verwendete Zeichen dienen; es ist nur jeweils anzugeben, ob ein solches Zeichen eine freie oder gebundene Variable sein soll.

3.2 1 3. Zeichen für *bestimmte Funktionen*, kurz „Funktionszeichen“ genannt: $+$, $\cdot$ und weitere nach Bedarf (siehe 6.1).

3.2 1 4. Zeichen für *bestimmte Prädikate*, kurz „Prädikatzeichen“ genannt: $=$, $<$, Prim, $|$ und weitere nach Bedarf (siehe 6.1).

3.2 1 5. Zeichen zur *Verknüpfung* von *Aussagen*: &, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\forall$, $\exists$.

3.2 2. Abgrenzung des Begriffs *Term* (formaler Ausdruck für eine — bestimmte oder unbestimmte — *Zahl*):

3.2 2 1. *Zahlzeichen* (3.2 1 1) und *freie Variable* (3.2 1 2) sind Terme.

3.2 2 2. Sind $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{t}$ Terme, so sind auch $\mathfrak{s}+\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{s}\cdot\mathfrak{t}$ Terme; entsprechend lassen sich auch mit etwaigen weiterhin eingeführten *Funktionszeichen* (3.2 1 3) weitere Terme bilden.

3.2 2 3. *Keine weiteren* Ausdrücke, als solche, die gemäß 3.2 2 1 und 3.2 2 2 gebildet sind, sind Terme.

3.2 2 4. *Beispiel eines Terms*: $[(a+2)^3\cdot b]+4$; a und b seien freie Variable.

Klammern dienen in bekannter Weise zur Vermeidung von Mehrdeutigkeiten bezüglich der Zusammenfassung der einzelnen Zeichen.

3.2 3. Nunmehr grenze ich den Begriff *Formel* (formales Abbild einer zahlentheoretischen *Aussage*) ab:

3.2 3 1. Ein *Prädikatzeichen* (3.2 1 4), dessen „Argumentstellen“ durch irgendwelche *Terme* (3.2 2) ausgefüllt sind, ergibt eine Formel.

Beispiel: $(2+a)\cdot 4 < b$.

3.2 3 2. Ist $\mathfrak{A}$ eine Formel, so ist auch $\neg\mathfrak{A}$ eine Formel. Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Formeln, so sind auch $\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}\supset\mathfrak{B}$ Formeln.

3.2 3 3. Aus einer Formel entsteht wieder eine Formel, wenn man eine darin vorkommende freie Variable durchgängig durch eine noch nicht vorkommende gebundene Variable $\mathfrak{x}$ ersetzt und zugleich $\forall\mathfrak{x}$ oder $\exists\mathfrak{x}$ vor die ganze Formel schreibt.

3.2 3 4. *Keine weiteren* Ausdrücke, als solche, die gemäß 3.2 3 1, 3.2 3 2 und 3.2 3 3 gebildet sind, sind *Formeln*.

3.2 4. Durch *Klammern* ist, genau wie bei den Termen, dafür zu sorgen, daß der Aufbau der Formel gemäß 3.2 3 2, 3.2 3 3 eindeutig ersichtlich ist.

Beispiele von Formeln: Siehe 3.1 3, 3.1 1, 3.2 3 1.

Der *inhaltliche Sinn* einer Formel ergibt sich aus den Erläuterungen unter 3.1. Es sei noch hinzugefügt, daß eine Formel mit *freien Variablen* eine „*unbestimmte*“ Aussage darstellt, welche erst zu einer „*bestimmten*“ wird, wenn man für die freien Variablen Terme ohne freie Variable, z. B. Zahlzeichen, einsetzt[7]).

Minimalterm heißt ein Term, der aus *einem* Funktionszeichen mit *Zahlzeichen* in den Argumentstellen besteht, z. B.: $1 + 3$.

Minimalformel heißt eine Formel, die aus *einem* Prädikatzeichen mit *Zahlzeichen* in den Argumentstellen besteht, z. B.: $4 = 12$.

Transfinit heißt eine Formel, in der mindestens ein $\forall$- oder $\exists$-Zeichen vorkommt.

3.25. *Deutsche* und *griechische* Buchstaben verwende ich als „Mitteilungszeichen“, d. h. als Variable der beweistheoretischen Betrachtungen über die Zahlentheorie.

3.3. *Reicht nun unser Formelbegriff zur Darstellung aller in der reinen Zahlentheorie vorkommenden Aussagen aus?*

Streng genommen, ist diese Frage zu verneinen. Es kommen in der reinen Zahlentheorie durchaus Aussagen vor (Beispiele folgen), die mit den formulierten Mitteln nicht unmittelbar formal dargestellt werden können. Wir dürfen diese jedoch ruhig unberücksichtigt lassen, wenn es nur jeweils *gleichwertige* Aussagen gibt, die in unserem Formalismus darstellbar sind.

Hierfür ein paar wichtige *Beispiele:*

3.31. Ich habe als *Gegenstände* der Zahlentheorie nur die *natürlichen Zahlen* berücksichtigt. Nun spielen aber auch die übrigen *ganzen Zahlen,* sowie gelegentlich die *Brüche,* in der Zahlentheorie eine Rolle. Es ist aber nicht schwer, nach irgendeinem Schema alle Aussagen, die von ganzen Zahlen oder auch von Brüchen handeln, in Aussagen über natürliche Zahlen *umzudeuten,* indem man davon ausgeht, daß sich die negativen Zahlen den positiven, die Brüche den Paaren von ganzen Zahlen *zuordnen* lassen. (Ein Beispiel: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ deutet man als $a \cdot d = c \cdot b$.) Nimmt man zu den Gegenständen der Zahlentheorie ferner *endliche Mengen* von natürlichen Zahlen, ganzen Zahlen oder Brüchen hinzu (z. B. die „vollständigen Restsysteme“), so kann man ebenfalls durch geeignete, in diesem Falle

---

[7]) Ich will nicht, wie es sonst in der formalen Logik üblich ist, eine solche Formel als „für beliebige eingesetzte Zahlen gültig“ deuten, da in mathematischen Beweisen die freien Variablen in allgemeinerem Sinne benutzt werden; siehe etwa 4.53. Man sollte hier, wie auch bei gebundenen $\exists$-Variablen, sinngemäßer von „Unbestimmten“ als von „Variablen“ sprechen, doch ist die Bezeichnung „Variable“ nun einmal allgemein üblich geworden.

freilich kompliziertere, Umdeutungen alle Aussagen auf Aussagen über natürliche Zahlen zurückführen. Das gleiche gilt für Aussagen über diophantische Gleichungen u. dgl. als Gegenstände.

Ich will diese Umdeutungsmethoden hier nicht näher auseinandersetzen; es liegen keine grundsätzlichen Schwierigkeiten (insbesondere für den Widerspruchsfreiheitsbeweis) darin, und ihre Durchführbarkeit ist von jedem, der sich etwas eingehender mit diesen Dingen beschäftigt hat, leicht einzusehen (siehe auch 17. 2).

Läßt man *unendliche Mengen* von natürlichen, ganzen oder gebrochenen Zahlen zu, so ist eine solche Umdeutung i. allg. nicht mehr möglich; diese sind eben schon Gegenstände der *Analysis* (vgl. 2. 1 2). So pflegt man ja die reellen Zahlen selbst als gewisse unendliche Mengen von rationalen Zahlen zu definieren.

3. 3 2. *Funktionen* und *Prädikate* kommen in der Zahlentheorie in mannigfacher Form vor. Dem habe ich bei der Formeldefinition Rechnung getragen, indem ich unter 3. 2 1 3 und 3. 2 1 4 „weitere Zeichen nach Bedarf“ zuließ. Näheres über die Einführung von beliebigen Funktionen und Prädikaten folgt in § 6.

3. 3 3. Was schließlich die *Aussagenverknüpfungen* anbetrifft, so gibt es da beispielsweise folgende gebräuchliche Redewendungen:

„Die Aussage $\mathfrak{A}$ gilt *dann und nur dann*, wenn die Aussage $\mathfrak{B}$ gilt.“ Diese Verknüpfung stellen wir natürlich so dar: $(\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A})$ & $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$.

„Es gibt *genau eine* Zahl $\mathfrak{x}$, auf welche die Aussage $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ zutrifft.“ Dafür schreiben wir: $\exists \mathfrak{x} [\mathfrak{A}(\mathfrak{x}) \,\&\, \forall \mathfrak{y} (\mathfrak{A}(\mathfrak{y}) \supset \mathfrak{y} = \mathfrak{x})]$, was offenbar dasselbe besagt. (Für $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ sind geeignete gebundene Variable zu wählen; $\mathfrak{A}(\mathfrak{y})$ sei der aus $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ bei Ersetzung von $\mathfrak{x}$ durch $\mathfrak{y}$ entstehende Ausdruck.)

„Es gibt *unendlich viele* Zahlen $\mathfrak{x}$, auf welche die Aussage $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ zutrifft.“ Das bedeutet nichts anderes als: „Zu jeder Zahl gibt es eine Zahl, die größer als sie ist, und auf die $\mathfrak{A}$ zutrifft“; und in dieser Gestalt ist die Aussage in unserem Formalismus darstellbar.

„Die *Anzahl* der Zahlen $\mathfrak{x}$, auf welche die Aussage $\mathfrak{A}(\mathfrak{x})$ zutrifft, *ist* n.“ Diese Aussage — mit unbestimmt gelassenem n — läßt sich in unserem Formalismus nur erheblich umschrieben darstellen, etwa so: Man nimmt die *endlichen Mengen* von natürlichen Zahlen als Gegenstände hinzu, und sagt statt der genannten Aussage: „Es gibt eine Menge von natürlichen Zahlen, deren Elementezahl n ist, und für die weiter gilt: Auf jedes ihrer Elemente trifft die Aussage $\mathfrak{A}$ zu, und jede Zahl, auf die $\mathfrak{A}$ zutrifft, gehört zu der Menge.“ Dabei ist „Elementezahl“ eine *Funktion*, „zugehören“ ein *Prädikat*, beide sind zuvor zu definieren. Der Begriff der *endlichen Menge* kann schließlich wieder gemäß 3. 3 1 *umschrieben* werden.

So gibt es noch vielerlei sprachliche Redewendungen, die sich alle auf unmittelbar formalisierbare Ausdrucksweisen zurückführen lassen.

3. 3 4. Ich komme auf die Frage der Vollständigkeit des Formalismus in ganz allgemeinem Sinne im Anschluß an den Widerspruchsfreiheitsbeweis zurück (17. 1).

§ 4.

Beispiel eines Beweises aus der reinen Zahlentheorie.

4. 1. Ich schreite jetzt zur Formalisierung der in der reinen Zahlentheorie verwendeten *Beweismittel.* D. h.: Ich habe möglichst vollständig alle in den Beweisen der reinen Zahlentheorie verwendeten *Schlußweisen* und *Begriffsbildungsmethoden* anzugeben, und zugleich für diese eine *formal* festgelegte Gestalt vorzuschreiben, die alle Verschiedenheiten der sprachlichen Darstellung vermeidet.

Erst wenn sich daraufhin eine genaue formale Definition dafür geben läßt, was unter einem rein-zahlentheoretischen „*Beweis*" zu verstehen ist, können wir mit der *Beweistheorie* der reinen Zahlentheorie beginnen.

Ich werde zunächst in diesem § ein *Beispiel* eines zahlentheoretischen *Beweises* angeben und die einzelnen *Schlußweisen* an Hand von Beispielen aus dem Beweis nach bestimmten Gesichtspunkten *einteilen.* In § 5 werde ich dieselben dann allgemein genau formulieren.

In § 6 behandle ich schließlich die *Methoden der Begriffsbildung* und die damit zusammenhängenden zahlentheoretischen „*Axiome*".

4. 2. Als Beispiel eines Beweises aus der reinen Zahlentheorie wähle ich den allbekannten *Euklidschen Beweis* für den Satz: „Es gibt *unendlich viele Primzahlen.*"

Ich gebe den Beweis zunächst kurz *in Worten* an, in einer etwas für den vorliegenden Zweck zugeschnittenen Fassung.

Im folgenden (im ganzen § 4) verwende ich die Buchstaben a, b_1, b_2, c, d, l, m, n als *freie Variable*, die Buchstaben z, y als *gebundene Variable* (für natürliche Zahlen).

Der zu beweisende Satz lautet genauer: „Zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine größere, welche Primzahl ist."

Sei nun a eine beliebige natürliche Zahl. Dann ist zu zeigen, daß es eine Primzahl gibt, die größer als a ist. Wir betrachten die Zahl $a! + 1$. Ist sie eine *Primzahl*, so erfüllt sie bereits die Behauptung. Ist sie *keine* Primzahl, so hat sie einen Teiler b_1 (außer 1 und sich selbst). Dieser ist größer als a, denn die Zahlen von 2 bis a können in $a! + 1$ nicht aufgehen, da die Division stets den Rest 1 ergibt. Ist b_1 eine

Primzahl, so erfüllt *sie* die Behauptung. Ist sie keine Primzahl, so hat sie ebenfalls einen Teiler b_2 außer 1 und sich selbst. Dieser geht auch in $a! + 1$ auf, da b_1 darin aufgeht. Also ist b_2 ebenfalls größer als a. Durch dauernde Wiederholung dieses Gedankengangs erhalten wir eine Reihe von Zahlen: $a! + 1, b_1, b_2, \ldots$, die immer kleiner werden. Die Reihe muß also irgendwann ein Ende nehmen, d. h. die letzte Zahl ist dann eine *Primzahl*, die Teiler von $a! + 1$ und größer als a ist. Damit ist die Existenz einer Primzahl, die größer als a ist, nachgewiesen. Da a eine ganz *beliebige* natürliche Zahl war, so folgt: Zu *jeder* natürlichen Zahl gibt es eine größere, welche Primzahl ist. Das war zu zeigen.

4.3. Ich habe bei dem Beweis verschiedene einfache Sätze als bereits *bekannt* vorausgesetzt. Diese könnte man durch weitere Beweise auf noch einfachere Tatsachen *zurückführen*, doch kommt es mir darauf jetzt nicht an, sondern vor allem auf *die Schlüsse*, die in dem gezeigten Beweisgang selbst auftreten.

Dabei ist zu berücksichtigen, daß wir durch Übung gewohnt sind, *ganze Schlußreihen auf einmal* durchzuführen, ohne daß wir uns noch jedes *einzelnen* darin enthaltenen Schlusses bewußt sind. Um also die eigentlichen *Elementarschlüsse* herauszufinden, will ich den Euklidschen Beweis jetzt noch einmal durchgehen und bei einigen Teilen des Beweises *alle darin enthaltenen Einzelschlüsse* ans Licht bringen. Zugleich werde ich die einzelnen nacheinander vorkommenden *Aussagen* gemäß § 3 *formalisieren.*

4.4. *Ausführliche Zergliederung des Euklidschen Beweises.*

Der Beweis enthält, etwas versteckt, eine „vollständige Induktion" (siehe die Stelle: „durch dauernde Wiederholung dieses Gedankengangs ..."). Die übliche *Normalform* der Schlußweise durch vollständige Induktion ist diese: Man beweist die Gültigkeit einer Aussage für die Zahl 1; man zeigt ferner, daß die Aussage, wenn sie für eine beliebige natürliche Zahl n gilt, auch für $n + 1$ gültig ist; alsdann gilt diese Aussage für jede beliebige natürliche Zahl.

Ich will auch die hier auftretende verkappte vollständige Induktion auf diese Normalform bringen; dazu wähle ich folgende Aussage als „Induktionsaussage", für eine Zahl m ausgesprochen: „Entweder gibt es unter den Zahlen von 1 bis m eine Primzahl, die größer als a ist, oder alle diese Zahlen, außer 1, gehen nicht in $a! + 1$ auf." Formal:
$$\{\exists z [z \leqq m \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)]\} \vee \forall y [(y > 1 \,\&\, y \leqq m) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)].$$
Der Beweis verläuft nun so:

4.41. Zunächst ist die Induktionsaussage für $m = 1$ zu beweisen. Hier ist ihr zweiter Teil ganz von selbst erfüllt, da es überhaupt keine Zahlen, die größer als 1 und kleiner oder gleich 1 sind, gibt. Ausführlich: Für beliebiges c gilt $\neg\, (c > 1 \,\&\, c \leqq 1)$; dies setzen wir als bekannt voraus.

Dann gilt auch $(c > 1 \,\&\, c \leqq 1) \supset \neg\, c \,|\, (a! + 1)$, sowie, da c *beliebig* war, $\forall y\,[(y > 1 \,\&\, y \leqq 1) \supset \neg\, y \,|\, (a! + 1)]$. Daraus folgt ferner, gemäß der Bedeutung des $\vee$ (3. 1 2), die gesamte Induktionsaussage für $m = 1$, nämlich: $\{\exists z\,[z \leqq 1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)]\} \vee \forall y\,[(y > 1 \,\&\, y \leqq 1) \supset \neg\, y \,|\, (a! + 1)]$.

4. 4 2. Nun kommt der „*Induktionsschritt*" an die Reihe, d. h.: Wir nehmen an, die Induktionsaussage sei für eine beliebige Zahl n bereits bewiesen, es gelte also

$\{\exists z\,[z \leqq n \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)]\} \vee \forall y\,[(y > 1 \,\&\, y \leqq n) \supset \neg\, y \,|\, (a! + 1)]$;

alsdann ist sie für $n + 1$ als gültig zu erweisen. Das geschieht folgendermaßen:

Auf Grund der Induktionsannahme sind *zwei Fälle* möglich:

$$1.\ \exists z\,[z \leqq n \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)],$$
$$2.\ \forall y\,[(y > 1 \,\&\, y \leqq n) \supset \neg\, y \,|\, (a! + 1)].$$

Im ersten Falle ergibt sich ohne weiteres, was ich nicht näher ausführe, $\exists z\,[z \leqq n + 1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)]$. Damit ist in diesem Falle bereits die Induktionsaussage für $n + 1$, nämlich

$$\{\exists z\,[z \leqq n + 1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)]\}$$
$$\vee \forall y\,[(y > 1 \,\&\, y \leqq n + 1) \supset \neg\, y \,|\, (a! + 1)],$$

bewiesen.

Behandeln wir nun den *zweiten* Fall:

$$\forall y\,[(y > 1 \,\&\, y \leqq n) \supset \neg\, y \,|\, (a! + 1)].$$

Es gilt $(n + 1) \,|\, (a! + 1) \vee \neg\, (n + 1) \,|\, (a! + 1)$. Demgemäß können wir *zwei Unterfälle* unterscheiden:

1. *Unterfall:* $(n + 1) \,|\, (a! + 1)$. Alsdann ergibt sich $\mathrm{Prim}\,(n + 1) \,\&\, (n + 1) > a$, was ich nur kurz zeige, da hierbei nur solche Schlußweisen Anwendung finden, für die wir schon Beispiele in den übrigen Teilen des Beweises haben:

$n + 1$ ist eine *Primzahl*; denn hätte sie einen Teiler außer 1 und sich selbst, so wäre dieser kleiner als $n + 1$ und teilte auch $a! + 1$, das widerspräche aber unserer Annahme $\forall y\,[(y > 1 \,\&\, y \leqq n) \supset \neg\, y \,|\, (a! + 1)]$. $n + 1$ ist ferner *größer als* a; denn die Zahlen von 2 bis a gehen in $a! + 1$ nicht auf, da die Division stets den Rest 1 ergibt. Also gilt in der Tat $\mathrm{Prim}\,(n + 1) \,\&\, (n + 1) > a$; ferner ist $n + 1 \leqq n + 1$, also gilt $n + 1 \leqq n + 1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\, n + 1 \,\&\, n + 1 > a)$, folglich auch

$$\exists z\,[z \leqq n + 1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)],$$

und damit

$$\{\exists z\,[z \leqq n + 1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)]\}$$
$$\vee \forall y\,[(y > 1 \,\&\, y \leqq n + 1) \supset \neg\, y \,|\, (a! + 1)].$$

2. *Unterfall:* $\neg\, (n + 1) \,|\, (a! + 1)$. d sei eine beliebige Zahl, und zwar sei $d > 1 \,\&\, d \leqq n + 1$. Aus $d \leqq n + 1$ folgt, was als bekannt angenommen werde, $d \leqq n \vee d = n + 1$.

Sei zunächst $d \leqq n$; nun gilt $\forall y\, [(y > 1 \,\&\, y \leqq n) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)]$, also insbesondere $(d > 1 \,\&\, d \leqq n) \supset \neg\, d \mid (a! + 1)$. Aus $d > 1$ zusammen mit $d \leqq n$ ergibt sich $d > 1 \,\&\, d \leqq n$, mit dem vorigen zusammen also $\neg\, d \mid (a! + 1)$.

Ist dagegen $d = n + 1$, so folgt wegen $\neg\, (n + 1) \mid (a! + 1)$ ebenfalls $\neg\, d \mid (a! + 1)$.

Somit gilt überhaupt $\neg\, d \mid (a! + 1)$, als Folgerung aus der Annahme $d > 1 \,\&\, d \leqq n + 1$. Also können wir schreiben: $(d > 1 \,\&\, d \leqq n + 1) \supset \neg\, d \mid (a! + 1)$, und weiter, da d eine beliebige Zahl war,

$$\forall y\, [(y > 1 \,\&\, y \leqq n + 1) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)],$$

somit wiederum

$$\{\exists z\, [z \leqq n + 1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)]\}$$
$$\vee\ \forall y\, [(y > 1 \,\&\, y \leqq n + 1) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)].$$

Damit haben wir in allen Fällen die Induktionsaussage für $n + 1$ erhalten, womit der *Induktionsschritt beendet* ist.

4.43. Nunmehr läßt sich der Beweis rasch *zu Ende führen:*

Mittels vollständiger Induktion ergibt sich die Gültigkeit der Induktionsaussage für *beliebige* Zahlen. Wir benötigen sie nur für die Zahl $a! + 1$:

$$\{\exists z\, [z \leqq a! + 1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)]\}$$
$$\vee\ \forall y\, [(y > 1 \,\&\, y \leqq a! + 1) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)].$$

Der *zweite* Fall ergibt insbesondere

$$(a! + 1 > 1 \,\&\, a! + 1 \leqq a! + 1) \supset \neg\, (a! + 1) \mid (a! + 1).$$

Nun gilt $a! + 1 > 1 \,\&\, a! + 1 \leqq a! + 1$, was wir als bekannt annehmen; also ergibt sich $\neg\, (a! + 1) \mid (a! + 1)$. Andrerseits gilt natürlich $(a! + 1) \mid (a! + 1)$, wir erhalten also einen *Widerspruch*, d. h. der zweite Fall kann unmöglich eintreten; formal:

$$\neg\, \forall y\, [(y > 1 \,\&\, y \leqq a! + 1) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)].$$

Es bleibt nur der *erste* Fall übrig, d. h.: $\exists z\, [z \leqq a! + 1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)]$. Sei l eine solche Zahl, gelte also $l \leqq a! + 1 \,\&\, (\mathrm{Prim}\, l \,\&\, l > a)$. Insbesondere gilt dann $\mathrm{Prim}\, l \,\&\, l > a$, daraus folgt $\exists z\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > a)$. Nun war a eine ganz *beliebige* natürliche Zahl, daher gilt dies für *alle* natürlichen Zahlen, d. h. $\forall y\, \exists z\, (\mathrm{Prim}\, z \,\&\, z > y)$. Das ist das *Endergebnis* des Euklidschen Beweises.

4.5. *Einteilung der einzelnen Schlußweisen an Hand von Beispielen aus dem Euklidschen Beweis.*

Wir wollen jetzt unser Augenmerk auf die einzelnen Schlüsse lenken, die in dem vorgeführten Beweisgang vorkommen. Da ergibt sich fast von selbst die folgende *Einteilung* derselben:

Zu jeder der Aussagenverknüpfungen $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\forall$ und $\exists$ gibt es gewisse ihr *zugehörige* Schlußweisen. Diese lassen sich weiterhin einteilen in Schlußweisen, durch welche die betreffende Verknüpfung *eingeführt* wird, und solche Schlußweisen, durch welche dieselbe Verknüpfung aus einer Aussage *beseitigt* wird. Ich gebe als *Beispiele* für jeden einzelnen Fall einen Schluß aus dem Euklidschen Beweis an:

4.51. Eine $\forall$-*Einführung* liegt vor am Ende des Beweises, nämlich: Nachdem für eine beliebige Zahl a bewiesen war $\exists z(\text{Prim}\, z \,\&\, z > a)$, wurde gefolgert $\forall y \exists z(\text{Prim}\, z \,\&\, z > y)$.

Eine $\forall$-*Beseitigung* fand statt unter 4.42, 2. Unterfall, indem aus $\forall y[(y > 1 \,\&\, y \leqq n) \supset \neg\, y\,|\,(a!+1)]$ auf $(d > 1 \,\&\, d \leqq n) \supset \neg\, d\,|\,a!+1)$ geschlossen wurde.

4.52. Eine $\&$-*Einführung* (aus 4.42, 2. Unterfall): Die beiden Aussagen $d > 1$ und $d \leqq n$ ergaben zusammen die Aussage $d > 1 \,\&\, d \leqq n$.

Eine $\&$-*Beseitigung* (aus 4.43): Von $l \leqq a! + 1 \,\&\, (\text{Prim}\, l \,\&\, l > a)$ wurde auf $\text{Prim}\, l \,\&\, l > a$ geschlossen.

4.53. Eine $\exists$-*Einführung* (aus 4.43): Aus $\text{Prim}\, l \,\&\, l > a$ wurde gefolgert $\exists z(\text{Prim}\, z \,\&\, z > a)$.

Eine $\exists$-*Beseitigung* (aus 4.43): Es galt die Aussage

$$\exists z[z \leqq a! + 1 \,\&\, (\text{Prim}\, z \,\&\, z > a)].$$

Daraus wurde geschlossen $l \leqq a! + 1 \,\&\, (\text{Prim}\, l \,\&\, l > a)$, worin l irgendeine der Zahlen, die es auf Grund der vorigen Aussage *gibt*, bedeuten sollte.

4.54. Eine $\vee$-*Einführung* (aus 4.41): Von

$$\forall y[(y > 1 \,\&\, y \leqq 1) \supset \neg\, y\,|\,(a! + 1)]$$

wurde auf

$$\{\exists z[z \leqq 1 \,\&\, (\text{Prim}\, z \,\&\, z > a)]\} \vee \forall y[(y > 1 \,\&\, y \leqq 1) \supset \neg\, y\,|\,(a! + 1)]$$

geschlossen.

Eine $\vee$-*Beseitigung* (aus 4.42): Es galt

$$\{\exists z[z \leqq n \,\&\, (\text{Prim}\, z \,\&\, z > a)]\}$$
$$\vee \forall y[(y > 1 \,\&\, y \leqq n) \supset \neg\, y\,|\,(a! + 1)].$$

Hieraus ergab sich die *Fallunterscheidung*: Erster Fall:

$$\exists z[z \leqq n \,\&\, (\text{Prim}\, z \,\&\, z > a)],$$

zweiter Fall:

$$\forall y[(y > 1 \,\&\, y \leqq n) \supset \neg\, y\,|\,(a! + 1)].$$

Die Fallunterscheidung wurde dadurch beendet, daß in beiden Fällen schließlich dieselbe Aussage

$$\{\exists z[z \leqq n + 1 \,\&\, (\text{Prim}\, z \,\&\, z > a)]\}$$
$$\vee \forall y[(y > 1 \,\&\, y \leqq n + 1) \supset \neg\, y\,|\,(a! + 1)]$$

gefolgert werden konnte.

4.55. Eine $\supset$-*Einführung* (aus 4.42, 2. Unterfall): Ausgehend von der Annahme $d > 1 \,\&\, d \leqq n + 1$ waren wir zu dem Ergebnis gelangt: $\neg\, d\,|\,(a! + 1)$. Also galt: $(d > 1 \,\&\, d \leqq n + 1) \supset \neg\, d\,|\,(a! + 1)$.

Eine $\supset$-*Beseitigung* (aus 4.4 2, 2. Unterfall): Aus $d > 1 \mathbin{\&} d \leqq n$ und $(d > 1 \mathbin{\&} d \leqq n) \supset \neg\, d \mid (a! + 1)$ wurde auf $\neg\, d \mid (a! + 1)$ geschlossen.

4.5 6. Für die *Negation* ($\neg$) liegen die Verhältnisse nicht so einfach; es gibt hier nämlich eine Reihe von verschiedenen Schlußweisen, die sich nicht klar in $\neg$-Einführungen und $\neg$-Beseitigungen scheiden. Ich komme darauf noch zurück (5. 2 6). Nur ein wichtiges Beispiel aus dem Euklidschen Beweis sei hier angeführt, nämlich ein „*Widerlegungs*"-Schluß (aus 4. 4 3): $\neg\, \forall y [(y > 1 \mathbin{\&} y \leqq a! + 1) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)]$ wurde daraus geschlossen, daß die *Annahme* $\forall y [(y > 1 \mathbin{\&} y \leqq a! + 1) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)]$ auf einen *Widerspruch* führte, nämlich auf die Aussage $\neg\, (a! + 1) \mid (a! + 1)$, während andererseits $(a! + 1) \mid (a! + 1)$ beweisbar ist.

§ 5.

Die Formalisierung der in der reinen Zahlentheorie vorkommenden Schlußweisen.

5. 1. *Vorbemerkungen.*

Meine nächste Aufgabe ist nun, die an Beispielen aufgezeigten verschiedenen Arten von Schlußweisen in ihrer *allgemeinen Fassung* zu formulieren.

Die Feststellung der Einzelschlußweisen ist nicht ganz *eindeutig.* Doch scheint mir die von mir gewählte, auf die Einteilung in *Einführungen* und *Beseitigungen* der einzelnen *Aussagenverknüpfungen* gegründete Festsetzung derselben besonders naheliegend und natürlich zu sein.

Wie sieht nun die *allgemeine Fassung* einer Schlußweise aus?

Z. B. als allgemeine Form der &-*Beseitigung* wird man geneigt sein, einfach die folgende festzusetzen: Wenn eine Aussage der Form $\mathfrak{A} \mathbin{\&} \mathfrak{B}$ bewiesen ist ($\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien beliebige Formeln), so ist auch $\mathfrak{A}$ (bzw. $\mathfrak{B}$) gültig.

Da ist aber noch etwas zu beachten: Ein mathematischer Beweis ist im allgemeinen nicht so einfach gebaut, daß er von *gültigen* Aussagen zu immer neuen *gültigen* Aussagen, durch Anwendung der Schlüsse, fortschreitet. Es kommt vielmehr auch vor, daß eine Aussage als gültig *angenommen* wird und weitere Aussagen daraus *gefolgert* werden, deren Gültigkeit also von der Gültigkeit dieser Annahme *abhängt.* Beispiele aus dem Euklidschen Beweis: Die „Widerlegung" (4. 5 6), die $\supset$-Einführung (4. 5 5), der Induktionsschritt bei der vollständigen Induktion (4. 4 2).

Um die *Bedeutung* irgendeiner in einem Beweis vorkommenden *Aussage vollständig* zu bezeichnen, muß man also jeweils angeben, von welchen etwa gemachten *Annahmen* sie *abhängig* ist.

Dazu setze ich fest, daß im formalisierten Beweis zu jeder (formalisierten) Aussage $\mathfrak{B}$ die (formalisierten) *Annahmen* $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu$, von denen sie abhängt, *hinzugeschrieben* werden sollen, und zwar in folgender Form:

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B};$$

zu lesen: Unter den Annahmen $\mathfrak{A}_1, \ldots \mathfrak{A}_\mu$ gilt $\mathfrak{B}$. Einen solchen Ausdruck nenne ich eine „Sequenz“[8]). Wenn *keine* Annahmen vorliegen, schreibe man $\rightarrow \mathfrak{B}$.

Ein Beispiel aus dem Euklidschen Beweis: Die Aussage $\neg\, d \mid (a! + 1)$ aus 4.42, 2. Unterfall, ist in ihrer Abhängigkeit von Annahmen durch folgende *Sequenz* darzustellen:

$$\forall y\, [(y > 1 \,\&\, y \leqq n) \supset \neg\, y \mid (a! + 1)],\ \neg\, (n + 1) \mid (a! + 1),$$
$$d > 1 \,\&\, d \leqq n + 1 \ \rightarrow\ \neg\, d \mid (a! + 1).$$

Da nun im formalisierten Beweis *jede Aussage* des ursprünglichen Beweises durch eine *Sequenz* dargestellt wird, können die *Schlußweisen* auch gleich für *Sequenzen* formuliert werden.

Unser obiges Beispiel, die &-Beseitigung, wäre jetzt so zu fassen: „Wenn die Sequenz $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_\mu \rightarrow \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ bewiesen ist ($\mu \geqq 0$), so ist auch $\mathfrak{G}_1, \ldots, \mathfrak{G}_\mu \rightarrow \mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{G}_1, \ldots \mathfrak{G}_\mu \rightarrow \mathfrak{B}$ gültig.“

Im folgenden werde ich in gleicher Weise auch für die übrigen Schlußweisen allgemeine Schemata angeben.

5.2. *Genaue allgemeine Formulierung der einzelnen Schlußweisen.*

5.21. Abgrenzung des Begriffs *Sequenz*[9]) (formaler Ausdruck für die Bedeutung einer *Aussage in einem Beweis* in ihrer Abhängigkeit von etwaigen Annahmen):

Eine *Sequenz* ist ein Ausdruck von der Form

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_\mu \rightarrow \mathfrak{B},$$

wobei für $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_\mu$ und $\mathfrak{B}$ beliebige *Formeln* (3.23) stehen dürfen. Die Formeln $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_\mu$ nenne ich *Vorderformeln*, $\mathfrak{B}$ die *Hinterformel* der

---

[8]) Man könnte hierfür eine einzige Formel von der Gestalt

$$(\ldots((\mathfrak{A}_1 \,\&\, \mathfrak{A}_2) \,\&\, \ldots) \,\&\, \mathfrak{A}_\mu) \supset \mathfrak{B}$$

schreiben. Dadurch würde aber die ursprüngliche Struktur des mathematischen Beweises verwischt; in dem Beweis trat ja die durch diese Formel dargestellte Aussage „wenn $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2 \ldots$ und $\mathfrak{A}_\mu$ gelten, so gilt $\mathfrak{B}$“, gar nicht ausdrücklich auf, sondern nur die einzelnen Aussagen $\mathfrak{A}_1 \ldots \mathfrak{A}_\mu$ als Annahmen, die Aussage $\mathfrak{B}$ als eine Folgerung aus diesen Annahmen.

[9]) In meiner Arbeit „Untersuchungen über das logische Schließen“ brauchte ich das Wort „Sequenz“ in einer allgemeineren Bedeutung, die ich aber hier nicht benötige. Für Leser jener Arbeit sei ferner erwähnt, daß der hier entwickelte Schlußweisenformalismus im wesentlichen dem dortigen „Kalkül *NK*“ entspricht. Auch der „Kalkül *LK*“ eignet sich für den Widerspruchsfreiheitsbeweis. Dieser wird dann sogar teilweise einfacher, doch weniger „natürlich“.

Sequenz. Es ist zulässig, daß überhaupt keine *Vorderformeln* da sind, dann hat die Sequenz die Gestalt: $\rightarrow \mathfrak{B}$. Eine *Hinterformel* soll aber immer vorhanden sein.

5.22. Abgrenzung des Begriffs *Herleitung* (formales Abbild eines *Beweises*):

Eine Herleitung besteht aus einer Anzahl von aufeinanderfolgenden Sequenzen, von denen jede entweder eine „Grundsequenz" ist oder aus irgendwelchen vorangehenden Sequenzen durch eine „*Strukturänderung*" oder durch Anwendung einer „*Schlußregel*" hervorgeht. Die Erklärung der einzelnen Begriffe folgt gleich.

Die *letzte Sequenz* einer Herleitung enthält keine Vorderformeln, ihre Hinterformel heißt die *Endformel* der Herleitung. (Diese stellt die durch den Beweis *bewiesene Aussage* dar.)

5.23. Erklärung des Begriffs *Grundsequenz*:

Ich unterscheide „logische" und „mathematische" Grundsequenzen.

Eine *logische Grundsequenz* ist eine Sequenz von der Form $\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$, wobei $\mathfrak{D}$ eine beliebige Formel sein kann. (Eine solche tritt bei der Formalisierung eines Beweises *dann* auf, wenn in dem Beweis eine *Annahme* $\mathfrak{D}$ *gemacht* wird.)

Eine *mathematische Grundsequenz* ist eine Sequenz von der Form $\rightarrow \mathfrak{E}$, wobei die Formel $\mathfrak{E}$ ein „mathematisches Axiom" darstellt. Was insbesondere unter einem *zahlentheoretischen* „*Axiom*" zu verstehen ist, werde ich in § 6 erläutern.

5.24. Erklärung des Begriffs *Strukturänderung*:

Folgende Arten von Umformungen einer Sequenz heißen *Strukturänderungen* (weil sie nur die Struktur der Sequenz, unabhängig von der Bedeutung der einzelnen Formeln, betreffen):

5.241. *Vertauschen* zweier Vorderformeln;

5.242. *Weglassen* einer Vorderformel, die gleich einer anderen Vorderformel ist;

5.243. *Zufügen* einer beliebigen Formel zu den Vorderformeln;

5.244. Ersetzung einer *gebundenen Variablen* innerhalb einer Formel im ganzen Wirkungsbereich eines $\forall$- oder $\exists$-Zeichens durch eine andere, in der Formel noch nicht vorkommende gebundene Variable. —

Durch Änderungen gemäß 5.241, 5.242 und 5.244 wird offenbar die Bedeutung der betreffenden Sequenz nicht geändert; denn für diese macht es nichts aus, in welcher Reihenfolge man die Annahmen nennt und ob man ein und dieselbe Annahme mehrfach anführt, sowie schließlich, was für Zeichen man als gebundene Variable verwendet. Alle diese Änderungsmöglichkeiten sind also rein *formaler Natur* und inhaltlich belanglos; nur wegen der Besonderheiten der Formalisierung müssen sie ausdrücklich erwähnt werden.

Eine Strukturänderung gemäß 5.243 bedeutet, daß man zu einer Aussage eine beliebige *Annahme hinzufügen* darf, von der sie, neben etwaigen anderen Annahmen, abhängen soll. Dies scheint zunächst etwas sonderbar; doch wird man z. B., wenn eine Aussage *richtig* ist, nicht umhin können, zuzugeben, daß sie dann auch unter der Voraussetzung einer *beliebigen Annahme* gültig ist. (Wollte man etwa verlangen, daß dies nur im Falle einer „tatsächlichen Abhängigkeit“ behauptet werden dürfe, so würden sich erhebliche Schwierigkeiten durch die Möglichkeit von Beweisen, in denen eine Annahme nur *scheinbar* benutzt wird, ergeben.)

5.25. Erklärung des Begriffs *Schlußregel* (formales Gegenstück einer *Schlußweise*):

Wir brauchen insgesamt dreizehn Schlußregeln.

5.250. Die dabei verwendeten deutschen und griechischen *Buchstaben* haben folgende *Bedeutungen*:

Für $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ dürfen beliebige Formeln stehen; für $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ bzw. $\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ eine beliebige Formel von dieser Gestalt, alsdann bedeutet $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ bzw. $\mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ diejenige Formel, die aus $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ entsteht, wenn man die gebundene Variable $\mathfrak{x}$ durch eine beliebige freie Variable $\mathfrak{a}$ bzw. einen beliebigen Term $\mathfrak{t}$ ersetzt; für Γ, Δ, Θ dürfen beliebige, evtl. leere Reihen von Formeln, durch Kommata getrennt, stehen (als Vorderformeln der betreffenden Sequenz).

Nun *die einzelnen Schlußregeln*:

5.251. Schlußregel der *&-Einführung*: Aus den Sequenzen $\Gamma \to \mathfrak{A}$ und $\Delta \to \mathfrak{B}$ ergibt sich die Sequenz $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$.

&-Beseitigung: Aus $\Gamma \to \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ ergibt sich $\Gamma \to \mathfrak{A}$ bzw. $\Gamma \to \mathfrak{B}$.

$\vee$*-Einführung*: Aus $\Gamma \to \mathfrak{A}$ ergibt sich $\Gamma \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ bzw. $\Gamma \to \mathfrak{B} \vee \mathfrak{A}$.

$\vee$*-Beseitigung*: Aus $\Gamma \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}, \Delta \to \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}, \Theta \to \mathfrak{C}$ ergibt sich $\Gamma, \Delta, \Theta \to \mathfrak{C}$.

$\forall$*-Einführung*: Aus $\Gamma \to \mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ ergibt sich $\Gamma \to \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$, vorausgesetzt, daß die freie Variable $\mathfrak{a}$ in Γ und $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ *nicht vorkommt*.

$\forall$*-Beseitigung*: Aus $\Gamma \to \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ ergibt sich $\Gamma \to \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$.

$\exists$*-Einführung*: Aus $\Gamma \to \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ ergibt sich $\Gamma \to \exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$.

$\exists$*-Beseitigung*: Aus $\Gamma \to \exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ und $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}), \Delta \to \mathfrak{C}$ ergibt sich $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{C}$, vorausgesetzt, daß die freie Variable $\mathfrak{a}$ in Γ, Δ, $\mathfrak{C}$ und $\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ nicht vorkommt.

$\supset$*-Einführung*: Aus $\mathfrak{A}, \Gamma \to \mathfrak{B}$ ergibt sich $\Gamma \to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$.

$\supset$*-Beseitigung*: Aus $\Gamma \to \mathfrak{A}$ und $\Delta \to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ ergibt sich $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{B}$.

5.252. Schlußregel der „*Widerlegung*“: Aus $\mathfrak{A}, \Gamma \to \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}, \Delta \to \neg \mathfrak{B}$ ergibt sich $\Gamma, \Delta \to \neg \mathfrak{A}$.

„*Beseitigung der doppelten Verneinung*“: Aus $\Gamma \rightarrow \neg\neg \mathfrak{A}$ ergibt sich $\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}$.

5.253. Schlußregel der „*vollständigen Induktion*“: Aus $\Gamma \rightarrow \mathfrak{F}(1)$ und $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}), \Delta \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{a}+1)$ ergibt sich $\Gamma, \Delta \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$, vorausgesetzt, daß die freie Variable $\mathfrak{a}$ in Γ, Δ, $\mathfrak{F}(1)$ und $\mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ nicht vorkommt.

5.26. Einige *Erläuterungen zu den Schlußregeln.*

Die Formulierung der einzelnen Schlußregeln dürfte im allgemeinen an Hand der zugehörigen Beispiele von Schlüssen (4.5) verständlich sein. Einige Punkte seien noch erläutert:

Die Γ, Δ und Θ sind erforderlich, weil man im allgemeinsten Falle mit *beliebig vielen Annahmen* rechnen muß.

Die Formulierung mit *zugehörigen Annahmen*, die bei $\supset$-Einführung, „Widerlegung“ und vollständiger Induktion ohne weiteres naheliegt, erscheint vielleicht bei $\vee$- und $\exists$-Beseitigung etwas künstlich, wenn man diese mit den entsprechenden Schlußbeispielen (4.5) vergleicht. Es ist jedoch für die Formulierung am bequemsten, bei der *Fallunterscheidung* ($\vee$-Beseitigung) die beiden unterschiedenen Möglichkeiten einfach als *Annahmen* aufzufassen, die dann, wenn man aus beiden dasselbe Ergebnis ($\mathfrak{C}$) erhalten hat, erledigt sind; und bei der $\exists$-Beseitigung ist es ähnlich: Die aus $\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ gefolgerte Aussage $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ ist insofern nur eine *Annahme*, als von der in ihr vorkommenden Variablen $\mathfrak{a}$ *angenommen* wird, daß sie irgendeine der gemäß $\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ vorhandenen Zahlen mit der Eigenschaft $\mathfrak{F}$ darstelle. Diese Annahme ist dann *erledigt*, sobald man aus ihr eine Folgerung ($\mathfrak{C}$) gezogen hat, in der diese Variable $\mathfrak{a}$ nicht mehr vorkommt.

Damit komme ich zugleich auf einen weiteren Punkt, der einer kurzen Erläuterung bedarf: Das sind die *Bedingungen für die freien Variablen*, wie sie bei den Schlußregeln der $\forall$-Einführung, $\exists$-Beseitigung und der vollständigen Induktion gestellt sind. Die Bedingung besagt jeweils, daß die zur Schlußregel gehörige freie Variable $\mathfrak{a}$ unter allen zur Schlußregel gehörigen Formeln (die Annahmeformeln eingeschlossen) lediglich in der Formel $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ bzw. $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}+1)$ vorkommen darf. Man kann sich leicht an Beispielen klarmachen, daß diese Forderung i. allg. notwendig und eigentlich selbstverständlich ist; bei mathematischen Beweisen erfüllt man sie ganz von selbst. (In den übrigen Formeln hat eben die Variable $\mathfrak{a}$ auf Grund ihres Verwendungszweckes gar nichts zu suchen.)

Zu den *Schlußregeln für die Negation* ist zu sagen: Wie schon unter 4.56 erwähnt, ist hier die Auswahl der Elementarschlußweisen *willkürlicher* als für die anderen Aussagenverknüpfungen. Ich möchte noch folgende dafür in Betracht kommende einfache *Schlußregeln erwähnen*:

Aus $\mathfrak{A}, \Gamma \rightarrow \mathfrak{B}$ und $\neg \mathfrak{A}, \Delta \rightarrow \mathfrak{B}$ ergibt sich $\Gamma, \Delta \rightarrow \mathfrak{B}$.

Aus $\Gamma \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ und $\Delta \to \neg \mathfrak{B}$ ergibt sich $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{A}$ (Beispiel unter 4.43).

Aus $\Gamma \to \neg \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}, \Delta \to \mathfrak{B}$ ergibt sich $\Gamma, \Delta \to \neg \mathfrak{A}$.

Aus $\Gamma \to \neg \mathfrak{A}$ ergibt sich $\Gamma \to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ (Beispiel unter 4.41).

Aus $\Gamma \to \mathfrak{A}$ und $\Delta \to \neg \mathfrak{A}$ ergibt sich $\Gamma, \Delta \to \mathfrak{B}$.

Ferner könnte man als *logische Grundsequenzen* für die $\neg$-Verknüpfung nehmen:

$$\to \mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}, \text{ „Satz vom ausgeschlossenen Dritten"}$$

(Beispiel unter 4.42);

$$\to \neg (\mathfrak{A} \,\&\, \neg \mathfrak{A}), \text{ „Satz vom Widerspruch".}$$

Die beiden von mir gewählten Schlußregeln (5.252) sind aber *ausreichend*; die übrigen hier angegebenen Schlußregeln und Grundsequenzen sind in ihnen (mit Hinzunahme der Schlußregeln für die übrigen Aussagenverknüpfungen) schon enthalten, wie sich ohne wesentliche Schwierigkeiten nachweisen läßt.

5.3. *Reichen nun unsere Schlußregeln zur Darstellung aller in der reinen Zahlentheorie vorkommenden Schlüsse aus?*

5.31. Die Vollständigkeit der rein *logischen*, d. h. der den *Aussagenverknüpfungen* $\&, \vee, \supset, \neg, \forall, \exists$ *zugehörigen* Schlußregeln, in dem Sinne, daß alle richtigen Schlüsse von gleicher Art bereits durch die angegebenen Schlußregeln darstellbar sind, ist durch besondere Untersuchungen bewiesen worden[10].

Zu diesen Schlußweisen kommt nun, für die *reine Zahlentheorie*, die „vollständige Induktion" hinzu. Hier wird die Frage nach der Vollständigkeit der Schlußregeln zu einem recht schwierigen Problem; ich werde im Anschluß an den Widerspruchsfreiheitsbeweis (17.1) darauf zurückkommen. An dieser Stelle sei nur folgendes gesagt:

Es ist als ziemlich sicher anzunehmen, daß alle in den üblichen zahlentheoretischen Beweisen, soweit diese nicht Hilfsmittel aus der Analysis benutzen, auftretenden Schlüsse in unserem System darstellbar sind. Das gilt auch von den vielfach gebrauchten „anschaulichen" Schlüssen, auch wenn man es ihnen nicht unmittelbar ansieht.

Um dies allgemein nachzuweisen, müßte man freilich alle Beweise einzeln durchgehen, was natürlich höchst langwierig wäre.

---

[10]) Siehe für die „Aussagenlogik" ($\&, \vee, \supset, \neg$): Hilbert-Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, S. 33; für die „Prädikatenlogik" ($\forall, \exists$ dazu): K. Gödel, Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, Monatsh. f. Math. u. Phys. 37 (1930), S. 349—360. Die dort benutzten Formalisierungen der Schlußweisen lassen sich ohne besondere Schwierigkeiten als äquivalent mit der von mir gewählten erweisen. (Vgl. die Äquivalenzbeweise im V. Abschnitt meiner Arbeit „Untersuchungen über das logische Schließen".)

5.3 2. Ich begnüge mich mit einigen besonders wichtigen *Beispielen*: Die *vollständige Induktion* tritt häufig in gewissen abgewandelten Formen auf, die folgendermaßen auf unsere Normalform zurückführbar sind:

5.3 2 1. Zunächst die „absteigende" vollständige Induktion, diese lautet formal:

Aus $\Gamma \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ und $\mathfrak{F}(a+1), \Delta \rightarrow \mathfrak{F}(a)$ ergibt sich $\Gamma, \Delta \rightarrow \mathfrak{F}(1)$. a soll wieder in $\Gamma, \Delta, \mathfrak{F}(1)$ und $\mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ nicht vorkommen.

Sie wird so umgeformt: $\neg \mathfrak{F}(a) \rightarrow \neg \mathfrak{F}(a)$ ist Grundsequenz. Daraus folgt (5.2 4 3) $\mathfrak{F}(a+1), \neg \mathfrak{F}(a) \rightarrow \neg \mathfrak{F}(a)$, zusammen mit $\mathfrak{F}(a+1), \Delta \rightarrow \mathfrak{F}(a)$ ergibt sich durch „Widerlegung" (5.2 5 2) $\Delta, \neg \mathfrak{F}(a) \rightarrow \neg \mathfrak{F}(a+1)$ gleich (5.2 4 1) $\neg \mathfrak{F}(a), \Delta \rightarrow \neg \mathfrak{F}(a+1)$. Nimmt man die Grundsequenz $\neg \mathfrak{F}(1) \rightarrow \neg \mathfrak{F}(1)$ hinzu, so läßt sich nun die Schlußregel der vollständigen Induktion in der vorgeschriebenen Form (5.2 5 3), mit $\neg \mathfrak{F}$ als Induktionsaussage, anwenden und ergibt: $\neg \mathfrak{F}(1), \Delta \rightarrow \neg \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$. Mit Hinzunahme von $\Gamma \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$, womit auch (5.2 4 3) $\neg \mathfrak{F}(1), \Gamma \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ gilt, ergibt sich durch „Widerlegung" $\Gamma, \Delta \rightarrow \neg\neg \mathfrak{F}(1)$, und daraus durch „Beseitigung der doppelten Verneinung" (5.2 5 2): $\Gamma, \Delta \rightarrow \mathfrak{F}(1)$.

5.3 2 2. Ein weiteres Beispiel bildet folgende abgewandelte vollständige Induktion:

Aus $\Gamma \rightarrow \mathfrak{F}(1)$ und $\forall \mathfrak{x}[\mathfrak{x} \leqq a \supset \mathfrak{F}(\mathfrak{x})], \Delta \rightarrow \mathfrak{F}(a+1)$ ergibt sich $\Gamma, \Delta \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$. a soll wieder in $\Gamma, \Delta, \mathfrak{F}(1)$ und $\mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ nicht vorkommen; $\mathfrak{x}$ sei eine in $\mathfrak{F}(1)$ nicht vorkommende gebundene Variable.

Hieraus macht man leicht eine normale vollständige Induktion (5.2 5 3) mit der Induktionsaussage (für eine beliebige Zahl m geschrieben): $\forall \mathfrak{x}[\mathfrak{x} \leqq m \supset \mathfrak{F}(\mathfrak{x})]$, in Worten etwa: „für alle Zahlen von 1 bis m gilt $\mathfrak{F}$".

5.3 2 3. Die entsprechende „absteigende" Form lautet: Aus $\Gamma \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ und $\mathfrak{F}(a+1), \Delta \rightarrow \exists \mathfrak{x}[\mathfrak{x} \leqq a \;\&\; \mathfrak{F}(\mathfrak{x})]$ ergibt sich $\Gamma, \Delta \rightarrow \mathfrak{F}(1)$. Sie läßt sich entsprechend den beiden vorigen Beispielen auf die Normalform der vollständigen Induktion zurückführen.

Der Induktionsschluß in dem Euklidschen Beweis war ursprünglich von *dieser* Art (4.2) und wurde dann (4.4) auf die Normalform gebracht.

§ 6.

Begriffsbildungen und Axiome in der reinen Zahlentheorie.

6.1. In einem Beweis können außer den eigentlichen *Schlüssen* auch „*Begriffsbildungen*" vorkommen; das sind Einführungen von neuen Gegenständen, Funktionen oder Prädikaten.

Welcher Art sind nun die in der Zahlentheorie gebräuchlichen Begriffsbildungen?

Die Einführung von neuen *Gegenständen*, wie negativen Zahlen usw., wurde schon unter 3.31 besprochen, und es wurde darauf hingewiesen, daß diese grundsätzlich entbehrt werden können.

Die Einführung einer neuen *Funktion* oder eines *Prädikats* pflegt so zu geschehen, daß man mit Worten eine „Definition" desselben gibt.

Beispiele:

Die Funktion a^b wird definiert als „die Zahl a, b mal als Faktor genommen".

Die Funktion $a!$ wird definiert als „das Produkt der Zahlen von 1 bis a".

Die Funktion (a, b) wird definiert als „der größte gemeinsame Teiler von a und b".

Das Prädikat „a ist eine vollkommene Zahl" bedeutet dasselbe wie „die Zahl a ist gleich der Summe ihrer echten Teiler".

Das Prädikat $a \neq b$ bedeutet dasselbe wie $\neg (a = b)$.

Das Prädikat $a | b$ bedeutet dasselbe wie $\exists z (a \cdot z = b)$.

Die Funktion $\left(\frac{a}{b}\right)$, das „Legendresche Symbol". wird definiert nur für den Fall, daß b eine ungerade Primzahl ist, und zwar so: $\left(\frac{a}{b}\right) = 0$, falls $b | a$ gilt; gilt $\neg\, b | a$, so ist $\left(\frac{a}{b}\right) = 1$, wenn die Zahl a quadratischer Rest mod b ist, $\left(\frac{a}{b}\right) = -1$, wenn a quadratischer Nichtrest mod b ist.

Die Funktion $ak(a, b, c)$, „Ackermannsche Funktion", eine für gewisse Fragen der Beweistheorie bedeutsame Funktion, läßt sich so definieren[11]) („rekursiv"):

$$ak(a, b, 0) = a + b, \quad ak(a, b, 1) = a \cdot b, \quad ak(a, b, 2) = a^b,$$

und weiter für $c \geqq 2$:

$$ak(a, 0, c + 1) = a, \quad ak(a, b + 1, c + 1) = ak[a, ak(a, b, c + 1), c].$$

Ich will *keine allgemeinen formalen Schemata* für diese und weitere Begriffsbildungsmethoden aufstellen. Es wird sich zeigen, daß sie sich auch ohnedies in summarischer Weise in den Widerspruchsfreiheitsbeweis einbeziehen lassen. Das gleiche gilt von den „Axiomen", über die ich jetzt einiges sagen will.

6. 2. Bei zahlentheoretischen Beweisen geht man aus von gewissen einfachen, unmittelbar einsichtigen Aussagen, die nicht weiter bewiesen werden. Das sind die „*Axiome*". Sie stehen in naher Beziehung zu den *Begriffsbildungen*, insofern als die Axiome Grundtatsachen über die in ihnen vorkommenden Prädikate und Funktionen angeben. Man kann geradezu

---

[11]) Siehe W. Ackermann, Zum Hilbertschen Aufbau der reellen Zahlen, Math. Annalen 99 (1928), S. 118—133.

einen neuen Begriff formal dadurch einführen, daß man einige Axiome über ihn aufstellt („implizite Definition"). Ein Beispiel: Die Funktion (a, b) läßt sich vollständig charakterisieren durch die Axiome:

$$\forall x \, \forall y \, [(x, y) \,|\, x \,\&\, (x, y) \,|\, y] \quad \text{und} \quad \forall x \, \forall y \, \neg \exists z \, [(z \,|\, x \,\&\, z \,|\, y) \,\&\, z > (x, y)].$$

Die Wahl der Axiome ist *nicht eindeutig bestimmt*. Man kann das Ziel verfolgen, mit möglichst wenigen, einfachen Axiomen auszukommen [12]). Für die *Praxis* der zahlentheoretischen Beweisführungen legt man meist eine größere Anzahl von Axiomen zugrunde, ohne sich um weitere Zurückführbarkeit, gegenseitige Abhängigkeit und dergl. zu bekümmern. Für meinen *Widerspruchsfreiheitsbeweis* ist es ziemlich gleichgültig, was man als *Axiome* nimmt. Ich begnüge mich vorläufig, wie bei den Begriffsbildungen, mit der Angabe einiger *Beispiele*, aus denen zu ersehen ist, was für Aussagen etwa als Axiome in Frage kommen:

Einige Axiome für das Prädikat $=$ und die Funktion $+$, formalisiert:

$$\begin{aligned}
&\forall x \, (x = x), \\
&\forall x \, \forall y \, (x = y \supset y = x), \\
&\forall x \, \forall y \, \forall z \, [(x = y \,\&\, y = z) \supset x = z], \\
&\forall x \, \neg (x + 1 = 1), \\
&\forall x \, \forall y \, (x + y = y + x), \\
&\forall x \, \forall y \, \forall z \, [(x + y) + z = x + (y + z)].
\end{aligned}$$

6.3. *Der Begriff „derjenige, welcher"*.

Erwähnenswert ist noch folgende besondere Art von Begriffsbildung: Wenn eine Aussage der Form

$$\forall \mathfrak{x}_1 \, \forall \mathfrak{x}_2 \ldots \forall \mathfrak{x}_\nu \, \exists \mathfrak{y} \, \{\mathfrak{F}(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_\nu, \mathfrak{y}) \,\&\, \forall \mathfrak{z} \, [\mathfrak{F}(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_\nu, \mathfrak{z}) \supset \mathfrak{z} = \mathfrak{y}]\},$$

in Worten etwa: „zu jeder Zahlenkombination $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\nu$ *gibt es* eine und nur eine Zahl $\mathfrak{y}$, so daß $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\nu, \mathfrak{y})$ zutrifft", *bewiesen ist*, so darf man eine *Funktion einführen*, welche eben diesen Wert $(\mathfrak{y})$ in seiner Abhängigkeit von der Zahlenkombination $(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\nu)$ *darstellt* („derjenige, welcher"). Formal: Für die Funktion benutzt man etwa den Ausdruck (für die Argumente $a_1, \ldots, a_\nu$ aufgeschrieben): $\iota_\mathfrak{y} \, \mathfrak{F}(a_1, \ldots, a_\nu, \mathfrak{y})$; für diesen gilt dann: $\forall \mathfrak{x}_1 \ldots \forall \mathfrak{x}_\nu \, \mathfrak{F}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\nu, \iota_\mathfrak{y} \, \mathfrak{F}(\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_\nu, \mathfrak{y}))$. Die $\mathfrak{x}$ dürfen auch *leer* sein, dann stellt das ι-Zeichen eine einzelne *Zahl* dar.

Derartige Begriffsbildungen, die man in der praktischen reinen Zahlentheorie i. allg. *nicht benötigt*, bzw. durch „Definitionen" in der obigen

---

[12]) Aus solchem Bestreben entstanden die „*Peanoschen Axiome*" der natürlichen Zahlen. (Siehe etwa E. Landau. Grundlagen der Analysis, 1930.) Diese enthalten auch die vollständige Induktion, die ich zu den Schlußweisen genommen habe. Ein grundsätzlicher Unterschied zwischen Schlußweisen und Axiomen besteht nicht, man kann auch logische Schlußweisen als „logische Axiome" formulieren, etwa $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$ für die &-Beseitigung, usw.

Art (6. 1) ersetzen kann, sind für die Frage der *Widerspruchsfreiheit* belanglos, da sie aus einer Herleitung stets *eliminiert* werden können[13]).

III. Abschnitt.

Bedenkliche und unbedenkliche Schlußweisen in der reinen Zahlentheorie[14]).

Die Aufgabe des Widerspruchsfreiheitsbeweises soll sein (2. 3 1), *bedenkliche* Schlußweisen (Begriffsbildungen und Axiome eingeschlossen) unter Benutzung von *unbedenklichen* Schlüssen zu begründen. Zum richtigen Verständnis meines im IV. Abschnitt folgenden Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie ist es daher erforderlich, daß man sich klarmacht, welche Schlußweisen und sonstigen Beweismittel aus der reinen Zahlentheorie überhaupt *bedenklich* sind und welche dagegen als sicher richtig gelten können. Eine *eindeutige Abgrenzung* ist nicht möglich (vgl. 1. 8); immerhin lassen sich Überlegungen anstellen, welche die Zulässigkeit einiger Beweismittel sehr *einleuchtend* ergeben, während für andere eine entsprechende Begründung nicht gelingt und eine entfernte Analogie zu den bei den *Antinomien* der Mengenlehre auftretenden Trugschlüssen besteht, wodurch sie *bedenklich* erscheinen können.

Solche Überlegungen will ich jetzt durchführen; dazu gehe ich aus von der Betrachtung der mathematischen Theorie eines *endlichen* Gegenstandsbereiches (§ 7) und bespreche dann die durch die Verallgemeinerung auf einen *unendlichen* Gegenstandsbereich entstehenden Besonderheiten und Schwierigkeiten (§ 8—11).

§ 7.

Die Mathematik endlicher Gegenstandsbereiche.

7. 1. Die mathematische Behandlung eines *endlichen* Gegenstandsbereichs kann etwa so erfolgen:

Die *Gegenstände* des Bereichs werden *aufgezählt*; dabei erhält jeder eine bestimmte, ihm allein zukommende *Bezeichnung*.

Eine *Funktion* oder ein *Prädikat* wird so definiert: Die Anzahl der Argumentstellen sei ν. Für jede mögliche Aneinanderreihung von ν Gegenständen aus dem Gegenstandsbereich wird festgesetzt, welcher Gegenstand der zugehörige Funktionswert ist, bzw. für Prädikate: ob das Prädikat für diese Zusammenstellung von Gegenständen gilt oder nicht gilt.

---

[13]) Ein Beweis für dieses „ι-Eliminierbarkeitstheorem" findet sich in dem Buche: Hilbert-Bernays, Grundlagen der Mathematik 1 (1934), S. 422—457.

[14]) Vgl. die in Anm. [1]) und [2]) zitierten Arbeiten von Hilbert und Weyl.

(Man könnte auch zulassen, daß Funktionen und Prädikate für einige Gegenstandskombinationen gar nicht definiert werden, das bedeutet eine unwesentliche Komplikation.)

Da es immer nur *endlich viele* Aneinanderreihungen von ν Gegenständen gibt, so läßt sich jede Funktion und jedes Prädikat durch eine solche „Definitionstabelle" *vollständig* erklären.

7. 2. Weiterhin läßt sich von jeder beliebigen *bestimmten Aussage* (3. 2 4), die gemäß 3. 2 2, 3. 2 3 aus den gegebenen Gegenständen, Funktionen und Prädikaten mitsamt den Aussagenverknüpfungen aufgebaut ist, nach der folgenden formalen Vorschrift „*ausrechnen*", ob sie *richtig* oder *falsch* ist:

Die Aussage wird durch eine Formel, ohne freie Variable, dargestellt. Kommt darin ein Zeichen $\forall$ vor, so ersetzt man den betreffenden Formelteil $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ durch $[..[\mathfrak{F}(\mathfrak{g}_1)\ \&\ \mathfrak{F}(\mathfrak{g}_2)]\ \&\ \mathfrak{F}(\mathfrak{g}_3)]\ \&\ \ldots]\ \&\ \mathfrak{F}(\mathfrak{g}_\varrho)]$, wobei $\mathfrak{g}_1 \ldots \mathfrak{g}_\varrho$ die sämtlichen Gegenstände des Gegenstandsbereichs darstellen. Dies geschieht in gleicher Weise mit *jedem* vorkommenden $\forall$, und jedes $\exists$ wird durch einen entsprechenden Ausdruck mit $\vee$ statt & ersetzt.

Alsdann wird jeder vorkommende *Term* auf Grund der Definitionstabellen der in ihm auftretenden Funktionen „ausgerechnet", d. h. durch das Gegenstandszeichen ersetzt, das seinen „Wert" darstellt. Wo mehrere Funktionszeichen übereinandergeschachtelt sind, geschieht dies schrittweise von innen her.

Danach stellt man von jeder vorkommenden *Minimalformel* (3. 2 4) auf Grund der Definitionstabelle des betreffenden Prädikates fest, ob sie eine richtige oder eine falsche Aussage darstellt. *Weiterhin* erfolgt die Feststellung der Richtigkeit oder Falschheit der durch beliebige Aussagenverknüpfungszeichen zusammengesetzten Formelteile schrittweise von innen her nach den Anweisungen:

$\mathfrak{A}\ \&\ \mathfrak{B}$ ist richtig, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beide richtig sind, andernfalls falsch. $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ ist richtig, wenn $\mathfrak{A}$ richtig ist, ferner auch, wenn $\mathfrak{B}$ richtig ist; falsch nur dann, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beide falsch sind. $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ ist falsch, wenn $\mathfrak{A}$ richtig und $\mathfrak{B}$ falsch ist; in jedem anderen Falle ist $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ richtig. $\neg \mathfrak{A}$ ist richtig, wenn $\mathfrak{A}$ falsch ist, dagegen falsch, wenn $\mathfrak{A}$ richtig ist.

Das ganze Verfahren ergibt sich ohne weiteres aus dem tatsächlichen *Sinn*, den wir mit den formalen Zeichen verbinden. Wesentlich ist daran für uns nur die Grundeinsicht, daß in einer Theorie mit *endlichem* Gegenstandsbereich jede einschlägige Aussage *entscheidbar* ist, d. h. daß durch ein bestimmtes Verfahren mit endlich vielen Schritten festgestellt werden kann, ob sie richtig ist oder falsch.

7. 3. Es läßt sich leicht beweisen, daß die *logischen Schlußregeln* (5. 2), auf diese Theorie angewandt, *richtig* sind in dem Sinne, daß jede mit

ihrer Hilfe, ausgehend von „richtigen“ mathematischen Grundsequenzen herleitbare Sequenz „richtig“ ist. Dabei ist der Begriff der „*Richtigkeit*“ *einer Sequenz* wie folgt in Übereinstimmung mit ihrem inhaltlichen Sinn formal festzusetzen: Eine Sequenz ohne freie Variable ist *falsch*, wenn alle Vorderformeln richtig sind und die Hinterformel falsch ist; in jedem anderen Falle ist sie *richtig*. Eine Sequenz mit *freien Variablen* ist *richtig*, wenn sie bei *jeder beliebigen* Einsetzung von Gegenstandszeichen richtig ist.

Ein solcher Nachweis würde nichts weiter bedeuten als eine *Bestätigung*, daß wir unsere formalen Schlußregeln wirklich so gewählt haben, daß sie mit dem inhaltlichen Sinn der Aussagenverknüpfungen im *Einklang* sind.

7.4. Es sei noch bemerkt, daß man in der *Praxis* bei mathematischen Theorien *endlicher* Gegenstandsbereiche meist nicht nach obiger Methode der Einführung von Gegenständen, Funktionen und Prädikaten, und der „Ausrechnung“ der Aussagen, vorgeht; dies würde nämlich bei einer großen Zahl von Gegenständen zu langwierig sein. Man verfährt dann vielmehr nach ähnlichen Methoden, wie sie beim *unendlichen* Gegenstandsbereich Anwendung finden und im folgenden besprochen werden.

§ 8.

Entscheidbare Begriffsbildungen und Aussagen im unendlichen Gegenstandsbereich.

8.1. Was ändert sich nun, wenn man die Theorie eines *unendlichen* Gegenstandsbereichs, wie etwa der *natürlichen Zahlen*, entwickeln will?

8.11. Eine *Aufzählung der Gegenstände*, um diese zu *bezeichnen*, ist jetzt nicht mehr möglich, da es *unendlich viele* sind.

An deren Stelle tritt eine *Konstruktionsvorschrift* folgender Art: 1 bezeichnet eine natürliche Zahl. Weiter $1+1$, $1+1+1$, allgemein: aus einem Ausdruck, der eine natürliche Zahl darstellt, erhält man einen Ausdruck für eine weitere natürliche Zahl, indem man $+1$ anfügt. (Die Zeichen $2, 3, 4$ usw. kann man nachträglich als Abkürzungen für $1+1$, $1+1+1$, $1+1+1+1$ usw. einführen; das ist nebensächlich.)

Diese mit *endlich* vielen Worten auszusprechende Vorschrift erzeugt die *unendliche* Zahlenreihe dadurch, daß sie die *Möglichkeit* immer neuer Weiterbildung nach einem gleichartigen *Verfahren* in sich schließt. („Potentielle Unendlichkeit“.)

8.12. Die Definition von *Funktionen* und *Prädikaten* kann ebenfalls nicht wie beim endlichen Bereich durch Aufzählung aller einzelnen Werte erfolgen. Wollte man eine Definitionstabelle etwa für eine zahlentheoretische Funktion mit einem Argument geben, so müßte man der Reihe nach ihren Wert für das Argument 1, 2, 3, 4 usw., also *unendlich viele* Werte, angeben. Das ist unmöglich. Statt dessen gibt man eine *Berechnungs-*

vorschrift; z. B. für die Funktion $2 \cdot a$: $2 \cdot 1$ ist 2; $2 \cdot (b + 1)$ ist gleich $(2 \cdot b) + 2$. Diese Vorschrift ergibt die *Möglichkeit*, *der Reihe nach* für jede natürliche Zahl den zugehörigen Funktionswert eindeutig auszurechnen.

Allgemein gilt eine Funktion oder ein Prädikat als *entscheidbar definiert*, wenn eine *Entscheidungsvorschrift* dafür vorliegt, d. h.: Für jede vorgelegte Aneinanderreihung von natürlichen Zahlen muß der zugehörige *Funktionswert* auf Grund der Vorschrift eindeutig zu *berechnen* sein, bzw. muß eindeutig zu *entscheiden* sein, ob das *Prädikat* für diese Zusammenstellung von Zahlen *zutrifft* oder *nicht zutrifft*.

Für alle unter 6. 1 angegebenen Beispiele von Funktions- und Prädikatdefinitionen lassen sich solche Entscheidungsvorschriften angeben. Für Begriffsbildungen gemäß 6. 3 trifft das unter Umständen nicht mehr zu. Durch deren *Eliminierung* verschiebt sich die damit verbundene *Bedenklichkeit* auf die *logischen Schlußweisen*; diese behandle ich weiter unten (§ 9—11).

8. 2. Betrachten wir jetzt die *Aussagen* in der Theorie des unendlichen Gegenstandsbereiches der natürlichen Zahlen.

Von jeder vorgelegten bestimmten Aussage, in der die Verknüpfungen „*alle*“ und „*es gibt*“ *nicht* vorkommen, kann man wie im endlichen Bereich *entscheiden*, ob sie richtig oder falsch ist. Das Verfahren ist das gleiche wie unter 7. 2. Die Feststellung der Termwerte sowie der Richtigkeit oder Falschheit der Minimalformeln erfolgt jetzt statt nach einer *Definitionstabelle* nach der *Entscheidungsvorschrift* für die betreffenden Funktionen bzw. das betreffende Prädikat.

Auch die Anwendung der *logischen Schlußregeln* auf derartige Aussagen läßt sich wie im endlichen Bereich als zulässig nachweisen.

Es sei noch erwähnt, daß Entsprechendes auch für solche Aussagen gilt, in denen die Verknüpfungen „alle“ und „es gibt“ *nur auf endlich viele Zahlen bezogen* vorkommen; diese lassen sich in derselben Weise entscheiden, wobei die $\forall$ und $\exists$ wie unter 7. 2 durch & und $\vee$ zu ersetzen sind, und es lassen sich auch die zugehörigen Schlußweisen, das sind die $\forall$- und $\exists$-Schlußweisen (5. 2 5 1), sowie die vollständige Induktion (5. 2 5 3), in derselben Weise als zulässig nachweisen, sofern eben nur der Variabilitätsbereich der dabei vorkommenden — freien und gebundenen — Variablen etwa auf die Zahlen von 1 bis zu einer festen Zahl $\mathfrak{n}$ eingeschränkt wird.

§ 9.

Die „an-sich“-Auffassung der transfiniten Aussagen[15]).

9. 1. Wenden wir uns nun den wesentlich *transfiniten Aussagen* zu, d. h. solchen Aussagen, in denen die Verknüpfung „alle“ oder „es gibt“

---

[15]) Vgl. D. Hilbert, Über das Unendliche, Math. Annalen **95** (1926), S. 161—190.

auf die Gesamtheit aller natürlichen Zahlen bezogen vorkommt. Hier stehen wir vor einer *grundsätzlich neuen Sachlage.*

Zunächst ist festzustellen, daß sich das im endlichen Bereich anwendbare *Entscheidungsverfahren* (7.2, 8.2) auf solche transfiniten Aussagen nicht mehr übernehmen läßt; man müßte ja z. B. bei einer Aussage über *alle* natürlichen Zahlen *unendlich viele* Einzelfälle nachprüfen, das ist unmöglich. Auch sonst ist uns kein Entscheidungsverfahren für beliebige transfinite Aussagen bekannt, und es ist zweifelhaft, ob man jemals ein solches wird angeben können. Hätte man dieses, so könnte man z. B. von dem bisher unbewiesenen großen Fermatschen Satz (sowie dem Goldbachschen Satz usw.) nach bestimmtem Verfahren *ausrechnen*, ob er richtig oder falsch ist.

Was für einen *Sinn* sollen wir nun mit einer Aussage verbinden, deren Richtigkeit wir nicht *nachzuprüfen* vermögen?

9.2. Die herkömmliche Auffassung ist diese: Es sei „*an sich*" bestimmt, ob eine transfinite Aussage, wie z. B. der Fermatsche Satz, „richtig" sei oder „falsch", unabhängig davon, ob wir wissen oder jemals erfahren werden, welches von beiden der Fall ist. Jede transfinite Aussage habe einen bestimmten *Sinn an sich*; insbesondere sei der Sinn einer $\forall$-Aussage dieser: „Für *jede* einzelne der unendlich vielen natürlichen Zahlen gilt die betreffende Aussage", der Sinn einer $\exists$-Aussage sei: „In der unendlichen Gesamtheit der natürlichen Zahlen gibt es *irgendwo* eine Zahl, für welche die betreffende Aussage gilt."

Aus dieser Auffassung wird weiterhin gefolgert, daß für *transfinite* Aussagen dieselben *logischen Schlußweisen* gültig seien wie im Endlichen, da ja der „an-sich"-Sinn der Aussagenverknüpfungen im Transfiniten vollständig dem im Endlichen entspricht.

9.3. An dieser Stelle besteht nun hinreichender Anlaß zu einer *Kritik*, sofern man sich einmal entschlossen hat, die *äußersten Konsequenzen* aus den durch die Betrachtung der *Antinomien* der Mengenlehre gewonnenen Einsichten zu ziehen. Das will ich jetzt tun, und zwar will ich als Ergebnis der kritischen Betrachtung der Russellschen Antinomie (1.6) den folgenden *Grundsatz* aufstellen:

Man darf eine unendliche Gesamtheit nicht als eine an sich vorhandene, abgeschlossene, betrachten (aktuale Unendlichkeit), sondern nur als etwas Werdendes, das vom Endlichen her konstruktiv immer weiter aufgebaut werden kann (potentielle Unendlichkeit).

9.4. Die in § 8 angegebenen konstruktiven Methoden zur *Einführung von Gegenständen, Funktionen und Prädikaten* entsprechen diesem Grundsatz. Dort wurde ja ausdrücklich der Gedanke des allmählichen *Fortschreitens* in der Zahlenreihe, vom Anfang ausgehend, zugrundegelegt, nicht die Vorstellung einer *vollendeten* Gesamtheit aller natürlichen Zahlen. Dasselbe gilt von den unter 8. 2 behandelten Aussagen; diese sagen ja nur etwas über *endlich* viele Gegenstände aus, noch nicht über eine *unendliche* Gesamtheit.

9. 5. Dagegen kann die unter 9. 2 wiedergegebene „an-sich"-Auffassung der *transfiniten Aussagen* vor diesem Grundsatz *nicht bestehen.* Denn ihr liegt die Vorstellung der abgeschlossenen unendlichen Zahlenreihe zugrunde.

Zugleich muß die Auffassung, daß die logischen *Schlußweisen* ohne weiteres von endlichen auf unendliche Gegenstandsbereiche übernommen werden dürfen, *abgelehnt* werden.

Ich erinnere an einen *ähnlichen,* freilich trivialeren *Fall* einer unzulässigen Verallgemeinerung vom Endlichen aufs Unendliche, nämlich den bekannten Trugschluß: „Jede (endliche) Menge von natürlichen Zahlen enthält eine größte Zahl; also enthält auch die (unendliche) Menge *aller* natürlichen Zahlen eine größte Zahl." Hieraus ergeben sich Widersprüche, da dies eben nicht zutrifft.

9. 6. Nach dieser Ablehnung der an-sich-Auffassung der transfiniten Aussagen bleibt uns nun aber die Möglichkeit, ihnen einen *„finiten" Sinn beizulegen,* d. h. eine derartige Aussage jeweils als Ausdruck für einen bestimmten *endlich* darstellbaren Sachverhalt zu *deuten.*

Alsdann haben wir jeweils die zugehörigen *logischen Schlußweisen* daraufhin zu prüfen, ob sie mit dieser Deutung der *Aussagen* im Einklang sind.

Das soll im folgenden § 10 für einen beträchtlichen Teil der transfiniten Aussagen und der zugehörigen Schlußweisen durchgeführt werden. In § 11 behandle ich dann die restlichen Aussageformen und Schlußweisen; dabei stößt die Methode auf Schwierigkeiten, und es zeigt sich die Bedeutung der *intuitionistischen* (1. 8) *Grenzziehung* zwischen erlaubten und unerlaubten Schlußweisen innerhalb der Zahlentheorie; ferner ergibt sich eine andere, noch *engere Grenzziehung* als ebenfalls verfechtbar.

§ 10.

Finite Deutung der Verknüpfungszeichen $\forall$, &, $\exists$ und $\vee$ in transfiniten Aussagen.

Ich denke mir zunächst eine Zahlentheorie, die nur Aussagen über *endlich* viele Zahlen macht. Nun will ich schrittweise gewisse Typen von *transfiniten* Aussagen hinzunehmen.

10. 1. *Die $\forall$-Verknüpfung.*

10. 11. Beginnen wir mit der einfachsten Form einer transfiniten Aussage: $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$, wobei $\mathfrak{F}$ noch kein $\forall$ oder $\exists$ enthalte, so daß die

Richtigkeit von $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ für jede *bestimmte* für $\mathfrak{x}$ eingesetzte Zahl *nachprüfbar* ist (8.2).

Richtige Aussagen von dieser Gestalt sind z. B.:

$$\forall x(2|x \vee \neg 2|x); \qquad \forall x(x = x).$$

Man wird solche Aussagen als unbezweifelbar sinnvoll und richtig ansehen. Man braucht eben mit diesem $\forall$ gar nicht die Vorstellung einer *abgeschlossenen* unendlichen Anzahl von Einzelaussagen zu verbinden, sondern man kann dessen Sinn wie folgt „*finit*" *auffassen*: „Wenn man, mit 1 beginnend, der Reihe nach immer weitere Zahlen für $\mathfrak{x}$ einsetzt, so entsteht, wie weit man auch in der Bildung von Zahlen fortschreitet, jeweils eine richtige Aussage."

10.12. Diese Auffassung läßt sich verallgemeinern auf den Fall, daß $\mathfrak{F}$ eine beliebige Aussage ist, die nur bereits mit finitem Sinn versehen sein muß: $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ kann dann sinnvoll ausgesagt werden, wenn $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ für beliebige für $\mathfrak{x}$ der Reihe nach eingesetzte Zahlen stets eine sinnvolle und richtige Aussage darstellt.

10.13. Die der $\forall$-Verknüpfung zugehörigen *Schlußweisen*, $\forall$-Einführung und $\forall$-Beseitigung (5.251), sind mit dieser Auffassung im Einklang: Bei der *$\forall$-Einführung* liegt ein Beweis dafür vor, daß, unter der Voraussetzung gewisser Annahmen (Γ) — *transfinite* Annahmen sind zunächst völlig sinnlos und kommen vorläufig nicht in Frage — $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ richtig ist, und es wird daraus gefolgert, daß unter den gleichen Annahmen $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ gilt. Das ist in Ordnung, denn wenn eine beliebige Zahl $\mathfrak{n}$ gegeben ist, so kann man diese — im ganzen Beweis — für $\mathfrak{a}$ einsetzen und hat einen Beweis für $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ (unter denselben Annahmen Γ, die ja, auf Grund der Variablen-Bedingung für die $\forall$-Einführung, $\mathfrak{a}$ nicht enthalten, also durch die Einsetzung nicht etwa geändert werden). Bei der $\forall$-Beseitigung wird von $\Gamma \rightarrow \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ auf $\Gamma' \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ geschlossen. Der Term $\mathfrak{t}$ stellt, nach Einsetzen irgendwelcher Zahlen für etwaige darin vorkommende freie Variable, eine bestimmte Zahl $\mathfrak{n}$ dar; die Aussage $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ schließt ihrem finiten Sinn gemäß in sich, daß auch $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ gilt; also ist auch diese Schlußweise in Ordnung.

10.14. Die üblichen *zahlentheoretischen Axiome* lassen sich so formulieren, daß sie aus Aussagen, die kein $\forall$ oder $\exists$ enthalten, durch mehrere über die ganze Aussage erstreckte $\forall$-Verknüpfungen hervorgehen (vgl. 6.2). Die Einsicht, daß diese Axiome im Sinne der finiten Auffassung des $\forall$ und auf Grund der entscheidbaren Definitionen der in ihnen vorkommenden Funktionen und Prädikate *richtig* sind, ist von solcher *Evidenz*, daß sie keiner weiteren Untersuchung bedarf. Es dürfte auch kaum möglich sein, diese Einsicht auf etwas grundsätzlich einfacheres zurückzuführen.

10.2. *Die &-Verknüpfung.*

Eine transfinite Aussage der Form $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$ ist sinnvoll und darf behauptet werden, wenn $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bereits als sinnvoll und gültig erkannte Aussagen sind. Mit dieser Auffassung sind die Schlußregeln der &-Einführung und &-Beseitigung offenkundig im Einklang, wobei vorläufig, wie oben, transfinite Annahmen (Γ, Δ) ausgeschlossen sein sollen.

10.3. *Die $\exists$-Verknüpfung.*

Der Leser wird bisher den Eindruck haben, daß die „finite Deutung" den transfiniten Aussagen eigentlich nur *denselben* Sinn beilegt, den man auch sonst damit verbindet. Daß dies doch nicht ganz der Fall ist, wird sich bei der jetzt folgenden Behandlung des $\exists$ und $\vee$ zeigen (siehe 10.6).

Welchen Sinn wollen wir einer Aussage der Form $\exists\, \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ zuerkennen? Die *an-sich*-Auffassung: „es gibt *irgendwo* in der unendlichen Zahlenreihe eine Zahl mit der Eigenschaft $\mathfrak{F}$" gilt uns als *sinnlos.* Wenn aber die Aussage $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$, mit einer *bestimmten* Zahl $\mathfrak{n}$, sinnvoll und als gültig erkannt ist, so wollen wir daraus schließen dürfen ($\exists$-Einführung): $\exists\, \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$. Dagegen ist nichts einzuwenden; die Aussage $\exists\, \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ stellt jetzt nur eine *Abschwächung* der Aussage $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ dar („Partialaussage" bei Hilbert, „Urteilsabstrakt" bei Weyl), indem sie nämlich nur noch bezeugt, daß wir eine Zahl $\mathfrak{n}$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{F}$ gefunden hatten, diese Zahl selbst jedoch nicht mehr angibt. Damit hat $\exists\, \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ einen finiten Sinn.

Wenn bei der $\exists$-Einführung statt $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ eine Aussage $\mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ mit einem *beliebigen Term* $\mathfrak{t}$ steht, so ändert sich nichts Wesentliches. Setzt man nämlich für die darin vorkommenden freien Variablen bestimmte Zahlen ein (für solche stehen ja die freien Variablen), so wird $\mathfrak{t}$, auf Grund der entscheidbaren Funktionsdefinitionen, zu einer bestimmten ausrechenbaren Zahl $\mathfrak{n}$. Auch das Vorkommen von nicht transfiniten Annahmen (Γ) bei einer $\exists$-Einführung bedeutet keine wesentliche Änderung der Sachlage.

Wie kann man nun aus einer bewiesenen Aussage der Form $\exists\, \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$, auf Grund ihres *finiten Sinnes,* mit *Beseitigung des* $\exists$ weitere Aussagen schließen? Es ist, anders als bei $\forall$ und &, offenbar nicht möglich, aus $\exists\, \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ die Aussage $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$, welche die Berechtigung zur Behauptung von $\exists\, \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ gegeben hatte, *zurückzugewinnen,* weil eben aus $\exists\, \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ der Wert von $\mathfrak{n}$ gar nicht mehr ersichtlich ist. Wohl aber kann man so vorgehen: Man schließt auf $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$, wobei $\mathfrak{a}$ eine freie Variable ist, welche die Zahl $\mathfrak{n}$, ohne daß deren Wert im Augenblick bekannt zu sein braucht, vertritt. Gelingt es dann, hieraus irgendeine Aussage $\mathfrak{C}$, die $\mathfrak{a}$ nicht mehr enthält, zu folgern, so ist diese Aussage gültig. Damit haben wir die $\exists$-Beseitigung gemäß 5.251.

Bei dieser Schlußregel tritt erstmalig eine *zugehörige Annahme*, nämlich $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$, auf. Diese kann *transfinit* sein. Während wir bisher transfiniten Aussagen als *Annahmen* keinen Sinn beigelegt haben, sondern nur als *bewiesenen* Aussagen, können wir hier sagen: Indem $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ bewiesen und sinnvoll ist, muß eine Zahl $\mathfrak{n}$ bekannt gewesen und auf Grund des Beweises von $\exists \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ rekonstruierbar sein, derart daß $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ ebenfalls eine sinnvolle, richtige Aussage darstellt. Nun *betrachten* wir die Annahme $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ gar nicht als eine willkürliche Annahme, sondern als *die* richtige Aussage $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$, $\mathfrak{a}$ bedeute nichts anderes als die Zahl $\mathfrak{n}$. Alsdann erscheint der Beweis von $\mathfrak{C}$ aus der Annahme $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ nicht mehr als *hypothetisch*, sondern als ein gewöhnlicher *direkter* Beweis; und genau dies ist sein *Sinn*.

10.4. Die $\vee$-Verknüpfung läßt sich leicht analog zu $\exists$, wie & analog zu $\forall$, behandeln: Eine transfinite Aussage der Form $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ ist sinnvoll und darf behauptet werden, wenn eine der beiden Aussagen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ bereits als sinnvoll und gültig *erkannt ist*. Die Schlußregel der *$\vee$-Einführung* entspricht vollkommen dieser Auffassung. Eine *$\vee$-Beseitigung* geschieht so: Man hat $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, und folgert sowohl aus der Annahme $\mathfrak{A}$ als auch aus der Annahme $\mathfrak{B}$ dieselbe Aussage $\mathfrak{C}$, dann gilt $\mathfrak{C}$. Dies ist in Ordnung, denn $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ schließt in sich, daß entweder $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ irgendwann als gültig erkannt worden ist. Damit läßt sich dann, wie bei der $\exists$-Beseitigung, entweder der Beweis für $\mathfrak{C}$ aus $\mathfrak{A}$ oder der Beweis für $\mathfrak{C}$ aus $\mathfrak{B}$ von der Annahme $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ frei machen und wird zu einem *direkten* Beweis, während der andere der beiden Beweise jeweils überflüssig wird und als sinnlos gelten kann.

10.5. An dieser Stelle sei kurz dargetan, wie sich die Schlußregel der *vollständigen Induktion* ohne weiteres als der finiten Auffassung angemessen erweist: $\mathfrak{F}(1)$ sei eine sinnvolle, gültige Aussage. Der Term $\mathfrak{t}$ in dem Endergebnis $\mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ stellt, nach Einsetzen von Zahlen für etwaige freie Variable, eine bestimmte Zahl $\mathfrak{n}$ dar. Alsdann kann man in dem Beweis von $\mathfrak{F}(\mathfrak{a}+1)$ aus $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ für $\mathfrak{a}$ der Reihe nach die Zahlen 1, 2, 3 bis $\mathfrak{n}-1$ einsetzen und bildet daraus einen *direkten* Beweis, ausgehend von der gültigen Aussage $\mathfrak{F}(1)$ über $\mathfrak{F}(2)$, $\mathfrak{F}(3)$ usw. bis schließlich zu $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$, so daß nun auch $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ eine gültige, sinnvolle Aussage ist.

Dies klingt trivial; wesentlich ist daran, daß die *zunächst sinnlose* (sofern sie transfinit ist) Annahme $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ durch die Möglichkeit der Umwandlung des betreffenden Beweisteils in einen *direkten*, worin sie *nicht mehr als Annahme* fungiert, einen *Sinn erhält*.

10.6. Die angegebene finite Deutung der Verknüpfungszeichen $\exists$ und $\vee$ ist von deren an-sich-Auffassung nicht nur *begrifflich*, sondern auch *in der praktischen Auswirkung verschieden*, wie folgende *Beispiele* zeigen:

Die Aussage „der große Fermatsche Satz ist entweder richtig oder nicht richtig“ ist nach der an-sich-Auffassung *richtig*. Nach der finiten Auffassung des $\vee$ kann sie jedoch *nicht* behauptet werden. Denn hierzu würde verlangt, daß *eine* der beiden Aussagen bereits als gültig erkannt sei. Das ist aber bisher nicht der Fall.

Ein entsprechendes Beispiel mit $\exists$ ist die Aussage

$$\exists x \{[\forall y \forall z \forall u \forall v (v > 2 \supset y^v + z^v \neq u^v)] \\ \vee [\exists y \exists z \exists u (x > 2 \,\&\, y^x + z^x = u^x)]\},$$

in Worten etwa: „es gibt eine Zahl x, so daß entweder der Fermatsche Satz richtig ist oder ein Gegenbeispiel mit dem Exponenten x existiert“. Diese Aussage ist nach der an-sich-Auffassung richtig, kann aber nach der finiten Auffassung des $\exists$ nicht behauptet werden, da man eine solche Zahl x zur Zeit nicht kennt.

Diese beiden Aussagen lassen sich auch nicht mit den *bisher* besprochenen *Schlußweisen*, die wir ja als übereinstimmend mit der finiten Sinngebung erkannt haben, *beweisen*, sondern man braucht dazu außerdem die zu $\neg$ gehörigen Schlußweisen (vgl. 11. 2).

10. 7. Die in diesem Paragraphen versuchte finite Deutung von transfiniten Aussagen mit den Verknüpfungszeichen $\forall$, &, $\exists$ und $\vee$ und die damit verbundene Begründung der zugehörigen Schlußweisen ist in mancher Beziehung *unvollständig*; insbesondere müßte man auf die Bedeutung von Aussagen, in denen eine Reihe von solchen Verknüpfungen *übereinandergeschachtelt* vorkommt, noch näher eingehen. Ich tue dies nicht, da es mir hier nur auf die *Grundgedanken* ankommt.

Man könnte dann, von diesen Überlegungen ausgehend, einen rein formalen *Widerspruchsfreiheitsbeweis* für diesen Teil der Zahlentheorie entwickeln. Ein solcher hätte aber nicht viel Wert, denn man müßte in dem Beweis selbst transfinite Aussagen und dieselben zugehörigen Schlußweisen *benutzen*, die man durch ihn „*begründen*“ will. Der Beweis würde also keine eigentliche *Zurückführung* bedeuten, wohl aber immerhin eine *Bestätigung* des *finiten* Charakters der formalisierten Schlußregeln. *Was* aber *finit* ist, darüber müßte man sich *zuvor* im klaren sein (um dann den Widerspruchsfreiheitsbeweis selbst mit finiten Beweismitteln führen zu können).

§ 11.

Die Verknüpfungszeichen $\supset$ und $\neg$ in transfiniten Aussagen; die intuitionistische Grenzziehung.

11. 1. *Die $\supset$-Verknüpfung.*

Wir wollen jetzt transfinite Aussagen mit der $\supset$-Verknüpfung hinzunehmen.

Was bedeutet $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$? Es liege etwa ein *Beweis* vor, in dem, unter Verwendung von schon als zulässig erkannten Schlüssen, von der Annahme $\mathfrak{A}$ ausgehend die Aussage $\mathfrak{B}$ bewiesen wird. Hieraus schließt man durch $\supset$-Einführung: $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$. Diese Aussage soll nichts anderes besagen, als daß wir einen *Beweis* zur Verfügung *haben*, welcher gestattet, wenn einmal die Aussage $\mathfrak{A}$ bewiesen ist, daraus weiterhin die Aussage $\mathfrak{B}$ zu beweisen. Im Einklang mit dieser Auffassung ist die Schlußweise der $\supset$-*Beseitigung*: Bei dieser schließt man aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{B}$, das ist in Ordnung, denn $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ besagt ja gerade das Vorhandensein eines Beweises für $\mathfrak{B}$, sofern $\mathfrak{A}$ bereits bewiesen ist.

Bei dieser Deutung von $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ habe ich vorausgesetzt, daß der vorliegende Beweis von $\mathfrak{B}$ aus der Annahme $\mathfrak{A}$ nur *schon als zulässig erkannte* Schlüsse enthält. Nun könnte aber ein solcher Beweis auch wieder $\supset$-*Schlüsse* enthalten, und dann *versagt* unsere Deutung. Denn es wäre *zirkelhaft*, die $\supset$-Schlußweisen auf Grund einer $\supset$-Deutung zu begründen, in welche die Voraussetzung der Zulässigkeit *derselben* Schlußweisen bereits eingeht. Man müßte denn schon die *in dem Beweis vorkommenden* $\supset$-Schlüsse *zuvor* begründen; dies hat aber seine Schwierigkeiten, vor allem wenn die Annahme $\mathfrak{A}$ selbst die Form $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ hat; dann liegt ja gar kein Beweis für $\mathfrak{D}$ aus $\mathfrak{C}$ vor, auf Grund dessen $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{D}$ einen *Sinn* erhalten könnte.

Um dieser Schwierigkeit Herr zu werden, müßte man schon eine kompliziertere Deutungsvorschrift aufstellen. Hierin liegt eine *Hauptaufgabe* des im IV. Abschnitt folgenden *Widerspruchsfreiheitsbeweises*.

11.2. *Die* $\neg$-*Verknüpfung* stellt einer finiten Deutung noch mehr Hindernisse in den Weg als $\supset$. Die finite Deutung geschah ja immer in der Weise, daß eine transfinite Aussage jeweils als neuer Ausdruck für etwas zuvor als gültig Erkanntes ausgesprochen werden durfte. $\neg\, \mathfrak{A}$ besagt nun nach der an-sich-Auffassung nicht, daß irgendetwas *gilt*, sondern rein negativ, daß etwas, nämlich die Aussage $\mathfrak{A}$, *nicht gilt*.

Immerhin erscheint folgende *positive* Deutung möglich: $\neg\, \mathfrak{A}$ soll dann sinnvoll und richtig sein, wenn ein Beweis dafür vorliegt, daß aus der Annahme der Gültigkeit von $\mathfrak{A}$ etwas, was sicher falsch ist, folgt. Durch diese Deutung wäre die $\neg$-Verknüpfung auf die $\supset$-Verknüpfung *zurückgeführt*, man kann geradezu $\neg\, \mathfrak{A}$ als gleichbedeutend etwa mit $\mathfrak{A} \supset 1 = 2$ erklären. Mit dieser Auffassung ist die Schlußweise der „*Widerlegung*" im *Einklang*, wie sich ganz formal zeigen läßt: Aus $\mathfrak{A}, \Gamma \rightarrow \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}, \Delta \rightarrow \mathfrak{B} \supset 1 = 2$ ist $\Gamma, \Delta \rightarrow \mathfrak{A} \supset 1 = 2$ abzuleiten. Das geschieht so: Durch $\supset$-Beseitigung erhält man $\mathfrak{A}, \Gamma, \mathfrak{A}, \Delta \rightarrow 1 = 2$, also (5. 2 4 2) $\mathfrak{A}, \Gamma, \Delta \rightarrow 1 = 2$, und daraus durch $\supset$-Einführung $\Gamma, \Delta \rightarrow \mathfrak{A} \supset 1 = 2$. Damit wäre die „Widerlegung" auf die $\supset$-Schlußweisen zurückgeführt.

Es bleibt zu beachten, daß bei dieser Zurückführung von $\neg$ auf $\supset$ natürlich die bei $\supset$ bestehenden *Bedenken* sich auf die $\neg$-Verknüpfung in entsprechender Weise übertragen.

Nun kommt aber als weitere Schwierigkeit hinzu: Die „*Beseitigung der doppelten Verneinung*" läßt sich durchaus *nicht* als übereinstimmend mit der angegebenen $\neg$-Deutung nachweisen. Es ist gar nicht einzusehen, wieso aus der Gültigkeit von $(\mathfrak{A} \supset 1 = 2) \supset 1 = 2$ die Gültigkeit von $\mathfrak{A}$ hervorgehen soll.

Überhaupt fällt diese Schlußweise erheblich aus dem Rahmen der übrigen Schlußweisen *heraus*. Bei den Aussagenverknüpfungszeichen $\forall$, &, $\exists$, $\vee$ und $\supset$ hatten wir stets eine *Einführungs-* und eine *Beseitigungs*-Schlußweise, die einander in gewisser Weise entsprachen. (Siehe die Behandlung in § 10 und 11. 1.) Für die $\neg$-Verknüpfung kann die „Widerlegungs"-Schlußweise als Einführung (des $\neg$ in $\neg\,\mathfrak{A}$) und Beseitigung (des $\neg$ in $\neg\,\mathfrak{B}$) zugleich angesehen werden; dagegen stellt die Schlußweise der „Beseitigung der doppelten Verneinung" eine *zusätzliche* $\neg$-Beseitigung dar, die nicht der $\neg$-Einführung durch „Widerlegung" entspricht. Sie ermöglicht *positive Aussagen* ($\mathfrak{A}$) durch Widerlegung des Gegenteils *indirekt zu beweisen*, wobei es sein kann, daß ein positiver Beweis derselben Aussage gar nicht zu erhalten ist. Auf diese Art lassen sich beispielsweise die beiden unter 10. 6 als Beispiele genannten Aussagen mit $\vee$ und $\exists$ beweisen, die nach der finiten Deutung von $\vee$ und $\exists$ gar nicht behauptet werden dürfen.

Daraus geht hervor, daß sich die Schlußweise der „Beseitigung der doppelten Verneinung" in eine solche finite Deutung, wie wir sie für $\vee$ und $\exists$ gewählt haben, überhaupt auf keine Weise einbeziehen läßt.

11. 3. *Die intuitionistische Grenzziehung in der Zahlentheorie* besteht in dem Verbot der Schlußweise „Beseitigung der doppelten Verneinung" für *transfinite* Aussagen $\mathfrak{A}$. Sie wird oft auch als Verbot des „Satzes vom ausgeschlossenen Dritten", $\mathfrak{A} \vee \neg\,\mathfrak{A}$, für transfinite $\mathfrak{A}$, ausgesprochen, was auf dasselbe hinauskommt [16]).

Die in § 10 dargestellte „*finite* Auffassung" der Aussagenverknüpfungszeichen $\forall$, &, $\exists$ und $\vee$ in transfiniten Aussagen stimmt im wesentlichen mit der Auffassung der *Intuitionisten* überein. Die $\supset$-Verknüpfung jedoch wird von diesen in *allgemeinster* Verwendung zugelassen; die $\neg$-Verknüpfung wird wie unter 11. 2 angegeben durch Zurückführung auf $\supset$ gedeutet, dem entspricht die Ausdrucksweise „$\mathfrak{A}$ ist *absurd*" statt „$\mathfrak{A}$ gilt nicht" für $\neg\,\mathfrak{A}$.

Die „Beseitigung der doppelten Verneinung" hebt sich zweifellos ganz besonders von den übrigen Schlußweisen ab, und zwar in einer Weise, die

[16]) Vgl. A. Heyting, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik, Sitzungsberichte d. Preuß. Akad. d. Wiss., phys.-math. Kl. (1930), S. 42—56.

ihre Ablehnung nahelegt. Ich halte jedoch noch *weiter gehende Bedenken*, die sich insbesondere gegen die allgemeine Verwendung des $\supset$ richten können (11.1), für mit nicht geringerem Rechte verfechtbar.

Ein Satz von Gödel über die Gleichwertigkeit der intuitionistischen mit der gesamten reinen Zahlentheorie.

Wie zuerst von K. Gödel bewiesen wurde [17]), kann man durch eine besondere Deutung der transfiniten Aussagen erreichen, daß die Schlußweise „*Beseitigung der doppelten Verneinung*" *mit transfinitem* $\mathfrak{A}$ aus jedem beliebigen rein zahlentheoretischen Beweis *eliminiert* werden kann, so daß jeder derartige Beweis zu einem intuitionistisch zulässigen wird.

Dadurch ist die *gesamte* an-sich-Zahlentheorie auf die *intuitionistische* Zahlentheorie zurückgeführt. Insbesondere ist jene *widerspruchsfrei*, wenn diese es ist.

Die *betreffende Deutung* erfolgt so: Die Verknüpfungszeichen &, $\forall$, $\supset$ und $\neg$ erhalten ihren *intuitionistischen* Sinn. Anders mit $\vee$ und $\exists$; $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ wird gedeutet als $\neg [(\neg \mathfrak{A}) \,\&\, \neg \mathfrak{B}]$, $\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ als $\neg \forall \mathfrak{x} \neg \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$. $\vee$ und $\exists$ können ja nicht ihre intuitionistische Bedeutung erhalten, da die unter 10.6 genannten Aussagenbeispiele in der an-sich-Zahlentheorie beweisbar sind, in der intuitionistischen Zahlentheorie jedoch nicht. Ersetzt man in diesen Beispielen $\vee$ und $\exists$ in der angegebenen Weise durch &, $\forall$ und $\neg$, so entstehen Aussagen, die auch *intuitionistisch* beweisbar sind.

Bei *meinem Widerspruchsfreiheitsbeweis* macht die „Beseitigung der doppelten Verneinung" auch keine wesentlichen Schwierigkeiten (13.93).

11.4. In den *in der praktischen Zahlentheorie stattfindenden Beweisen* kommen die Schlußweisen, die wir bisher durch finite Deutung nicht zu begründen vermochten und die daher zunächst bedenklich sind, so gut wie *gar nicht vor*. Es sind dies, gemäß unseren Betrachtungen, vor allem die „Beseitigung der doppelten Verneinung" (und der „Satz vom ausgeschlossenen Dritten"), auf transfinite Aussagen angewandt, sowie die Verwendung von transfiniten Aussagen mit übereinandergeschachtelten $\supset$- und $\neg$-Verknüpfungen.

Transfinite Aussagen komplizierter Bauart kommen überhaupt praktisch kaum vor. In dem in § 4 vorgeführten *Euklidschen Beweis* z. B. sind die einzigen wesentlich transfiniten Aussagen die beiden am Schluß auftretenden: $\exists z$ (Prim $z \,\&\, z > a$) und $\forall y \exists z$ (Prim $z \,\&\, z > y$). Der ganze Beweis ist völlig *finit*. Die sonst darin vorkommenden transfiniten, d. h.

---

[17]) K. Gödel, Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie, Ergebnisse eines math. Koll., Heft 4 (1933), S. 34—38. — Das im Text genannte Ergebnis wurde etwas später, unabhängig von Gödel, auch von P. Bernays und mir gefunden. — Gödel ersetzt noch $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ durch $\neg (\mathfrak{A} \,\&\, \neg \mathfrak{B})$, dies ist bei meinem Schlußregelnsystem nicht notwendig, weil ich keine Aussagenvariablen verwende.

$\forall$ oder $\exists$ enthaltenden Aussagen, sind alle so beschaffen, daß die gebundenen Variablen auf einen *endlichen* Teil der Zahlenreihe beschränkt sind.

Als Beispiel eines schwierigeren Beweises habe ich den Beweis von Pfarrer Zeller für das „quadratische Reziprozitätsgesetz"[18]) durchgesehen und auch hierin keinen „bedenklichen Schluß" vorgefunden.

Es ist durchaus berechtigt, wenn man bei diesen und ähnlichen Beweisen den *Eindruck unanzweifelbarer Richtigkeit* hat. Man hat bei ihnen auch ganz von selbst mehr eine *finite* als eine *an-sich*-Auffassung der transfiniten Aussagen im Auge.

Die Aufgabe des *Widerspruchsfreiheitsbeweises* für die *reine Zahlentheorie* ist also mehr eine Begründung von *an sich möglichen*, als von wirklich *vorkommenden* Schlüssen.

IV. Abschnitt.

Der Widerspruchsfreiheitsbeweis.

Ich will nun die Widerspruchsfreiheit der gesamten, im II. Abschnitt formal angegebenen, reinen Zahlentheorie *beweisen.*

Gemäß 2. 3 1 ist darauf zu achten, daß die beim Widerspruchsfreiheitsbeweis *selbst* benutzten Schlüsse und Begriffsbildungen *unbedenklich* sind oder doch wenigstens wesentlich sicherer als die bedenklichen Schlußweisen der reinen Zahlentheorie. Nach den im III. Abschnitt angestellten Erwägungen kann diese Forderung als erfüllt gelten, wenn die benutzten Beweismittel „*finit*" (im Sinne von § 9—11) sind. Wieweit dies zutrifft, soll im V. Abschnitt noch näher untersucht werden (16. 1).

§ 13—15 enthält das *Kernstück* des Widerspruchsfreiheitsbeweises, während § 12 einer verhältnismäßig einfachen *Vorbereitung* gewidmet ist.

§ 12.

Wegschaffung der Zeichen $\vee$, $\exists$ und $\supset$ aus einer vorgelegten Herleitung.

Es liege irgendeine zahlentheoretische Herleitung (5. 2 2) vor. Es ist zu zeigen, daß sie widerspruchsfrei ist, d. h., daß ihre Endformel nicht die Gestalt $\mathfrak{A} \,\&\, \neg\, \mathfrak{A}$ haben kann.

Ich beginne mit einer Vorschrift zu einer *Umformung der vorgelegten Herleitung*. Durch die Umformung wird erreicht, daß die Aussagenverknüpfungszeichen $\vee$, $\exists$ und $\supset$ in der Herleitung *nicht mehr vorkommen.*

12. 1. In der an-sich-Logik, mit der wir es ja in der uneingeschränkten Zahlentheorie zu tun haben, können die einzelnen *Aussagenverknüpfungen* auf verschiedene Weise *durch andere dargestellt* werden. Man kann mit

---

[18]) Siehe etwa P. Bachmann, Die Elemente der Zahlentheorie, III, 10.

Hilfe von *drei* Verknüpfungszeichen, nämlich $\neg$, einem beliebigen der drei Verknüpfungszeichen $\&$, $\vee$, $\supset$, sowie einem beliebigen der beiden Verknüpfungszeichen $\forall$ und $\exists$, alle übrigen ausdrücken. Davon will ich zur Erleichterung des Widerspruchsfreiheitsbeweises Gebrauch machen, und zwar will ich die Zeichen $\&$, $\forall$ und $\neg$ *beibehalten* und $\vee$, $\exists$ und $\supset$ durch diese *ersetzen*.

Die dem $\supset$ anhaftenden *Bedenklichkeiten* (11.1) werden dadurch nicht etwa weggezaubert, sondern bleiben in dem $\neg$ in gleichwertiger Weise bestehen.

Die Ersetzung erfolgt so:

Für $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ tritt $\neg((\neg \mathfrak{A}) \& \neg \mathfrak{B})$;
für $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ tritt $\neg(\mathfrak{A} \& \neg \mathfrak{B})$;
für $\exists \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ tritt $\neg \forall \mathfrak{x} \neg \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$.

Alle in der Herleitung vorkommenden $\vee$-, $\exists$- und $\supset$-Zeichen werden in dieser Weise ersetzt. In welcher *Reihenfolge* das geschieht, ist offenbar belanglos.

12.2. Jetzt haben wir zu untersuchen, wieweit die vorgelegte *Herleitung* bei diesen Ersetzungen *korrekt geblieben* ist, und wo das nicht der Fall ist, sie entsprechend *umzuwandeln*. Daß dies möglich ist, ist sehr plausibel, da ja die für $\vee$, $\exists$ und $\supset$ getretenen anderen Schreibweisen bei der an-sich-Auffassung mit den ursprünglichen *gleichwertig* sind. Der genaue formale Nachweis ist daher auch nicht schwierig:

Logische Grundsequenzen (5.23) sind in ebensolche übergegangen.

Für *mathematische Grundsequenzen* gilt das gleiche, sofern wir voraussetzen, daß ein mathematisches Axiom, in dem $\vee$-, $\exists$- und $\supset$-Verknüpfungen vorkommen, bei der Ersetzung dieser durch $\neg$-, $\&$- und $\forall$-Verknüpfungen wieder in ein mathematisches Axiom übergeht. Das ist leicht zu erfüllen; das einfachste ist, man formuliert alle Axiome von vornherein ohne Verwendung von $\vee$, $\exists$ und $\supset$.

Strukturänderungen (5.24) und Anwendungsstellen der *Schlußregeln* (5.25) sind offenbar korrekt geblieben, soweit es sich nicht um eine der den Verknüpfungszeichen $\vee$, $\exists$ und $\supset$ *zugehörigen Schlußregeln* handelte. Diese sind durch Anwendungen *anderer* Schlußregeln zu ersetzen, nach folgenden Vorschriften:

Eine $\vee$-*Einführung* „aus $\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}$ ergibt sich $\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$“ lautet nach der Ersetzung: „Aus $\Gamma^* \rightarrow \mathfrak{A}^*$ ergibt sich $\Gamma^* \rightarrow \neg((\neg \mathfrak{A}^*) \& \neg \mathfrak{B}^*)$“. $\mathfrak{A}^*$ sei die aus $\mathfrak{A}$ durch die Ersetzung entstandene Formel; entsprechend sind $\mathfrak{B}^*$ und Γ^* aufzufassen.

In Worten lautet die neue Fassung mittels der Schlußweisen für $\&$ und $\neg$ wie folgt: Unter den Annahmen Γ^* gilt $\mathfrak{A}^*$. Würde nun $(\neg \mathfrak{A}^*) \& \neg \mathfrak{B}^*$ gelten, so insbesondere $\neg \mathfrak{A}^*$, das widerspräche $\mathfrak{A}^*$, kann also nicht stimmen, d. h. es gilt $\neg((\neg \mathfrak{A}^*) \& \neg \mathfrak{B}^*)$, unter den Annahmen Γ^*.

Dem entspricht folgende *formale* Vorschrift: Die Herleitungsstelle wird so abgeändert: $(\neg \mathfrak{A}^*) \& \neg \mathfrak{B}^* \rightarrow (\neg \mathfrak{A}^*) \& \neg \mathfrak{B}^*$ ist Grundsequenz; durch &-Beseitigung entsteht $(\neg \mathfrak{A}^*) \& \neg \mathfrak{B}^* \rightarrow \neg \mathfrak{A}^*$, dies ergibt zusammen mit der aus $\Gamma^* \rightarrow \mathfrak{A}^*$ gemäß 5. 2 4 3 erhaltenen Sequenz $(\neg \mathfrak{A}^*) \& \neg \mathfrak{B}^*, \Gamma^* \rightarrow \mathfrak{A}^*$ durch „Widerlegung“ $\Gamma^* \rightarrow \neg ((\neg \mathfrak{A}^*) \& \neg \mathfrak{B}^*)$.

Mit der anderen Form von $\vee$-Einführung verfährt man ganz entsprechend.

Eine $\vee$-*Beseitigung* lautet nach der Ersetzung: „Aus $\Gamma^* \rightarrow \neg ((\neg \mathfrak{A}^*) \& \neg \mathfrak{B}^*)$ und $\mathfrak{A}^*, \Delta^* \rightarrow \mathfrak{C}^*$ und $\mathfrak{B}^*, \Theta^* \rightarrow \mathfrak{C}^*$ ergibt sich $\Gamma^*, \Delta^*, \Theta^* \rightarrow \mathfrak{C}^*$.“ Man ändert dies so ab: $\neg \mathfrak{C}^* \rightarrow \neg \mathfrak{C}^*$ ergibt $\mathfrak{A}^*, \neg \mathfrak{C}^* \rightarrow \neg \mathfrak{C}^*$, dies gibt zusammen mit $\mathfrak{A}^*, \Delta^* \rightarrow \mathfrak{C}^*$ durch „Widerlegung“ $\Delta^*, \neg \mathfrak{C}^* \rightarrow \neg \mathfrak{A}^*$; ebenso ergibt $\mathfrak{B}^*, \neg \mathfrak{C}^* \rightarrow \neg \mathfrak{C}^*$ zusammen mit $\mathfrak{B}^*, \Theta^* \rightarrow \mathfrak{C}^*$ die Sequenz $\Theta^*, \neg \mathfrak{C}^* \rightarrow \neg \mathfrak{B}^*$; aus beiden Ergebnissen zusammen erhält man durch &-Einführung $\Delta^*, \neg \mathfrak{C}^*, \Theta^*, \neg \mathfrak{C}^* \rightarrow (\neg \mathfrak{A}^*) \& \neg \mathfrak{B}^*$, also (5. 2 4 2, 5. 2 4 1) $\neg \mathfrak{C}^*, \Delta^*, \Theta^* \rightarrow (\neg \mathfrak{A}^*) \& \neg \mathfrak{B}^*$; aus $\Gamma^* \rightarrow \neg ((\neg \mathfrak{A}^*) \& \neg \mathfrak{B}^*)$ ergibt sich $\neg \mathfrak{C}^*, \Gamma^* \rightarrow \neg ((\neg \mathfrak{A}^*) \& \neg \mathfrak{B}^*)$, somit erhält man durch „Widerlegung“ $\Delta^*, \Theta^*, \Gamma^* \rightarrow \neg \neg \mathfrak{C}^*$, durch „Beseitigung der doppelten Verneinung“ endlich $\Delta^*, \Theta^*, \Gamma^* \rightarrow \mathfrak{C}^*$, also (5. 2 4 1) $\Gamma^*, \Delta^*, \Theta^* \rightarrow \mathfrak{C}^*$.

Eine $\exists$-*Einführung* oder $\exists$-*Beseitigung* wird ganz entsprechend der $\vee$-Einführung bzw. $\vee$-Beseitigung behandelt; es tritt dann bei der Abänderung der Herleitungsstelle eine $\forall$-Beseitigung statt einer &-Beseitigung bzw. eine $\forall$-Einführung statt einer &-Einführung auf. Dies ist leicht durchzuführen.

Eine $\supset$-*Einführung* lautet nach der Ersetzung: „Aus $\mathfrak{A}^*, \Gamma^* \rightarrow \mathfrak{B}^*$ ergibt sich $\Gamma^* \rightarrow \neg (\mathfrak{A}^* \& \neg \mathfrak{B}^*)$.“ Man ändert dies so ab: $\mathfrak{A}^* \& \neg \mathfrak{B}^* \rightarrow \mathfrak{A}^* \& \neg \mathfrak{B}^*$ ergibt $\mathfrak{A}^* \& \neg \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}^*$ sowie $\mathfrak{A}^* \& \neg \mathfrak{B}^* \rightarrow \neg \mathfrak{B}^*$, also auch $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{A}^* \& \neg \mathfrak{B}^* \rightarrow \neg \mathfrak{B}^*$; dies mit $\mathfrak{A}^*, \Gamma^* \rightarrow \mathfrak{B}^*$ zusammen ergibt $\Gamma^*, \mathfrak{A}^* \& \neg \mathfrak{B}^* \rightarrow \neg \mathfrak{A}^*$, also $\mathfrak{A}^* \& \neg \mathfrak{B}^*, \Gamma^* \rightarrow \neg \mathfrak{A}^*$. Mit $\mathfrak{A}^* \& \neg \mathfrak{B}^* \rightarrow \mathfrak{A}^*$ dazu entsteht $\Gamma^* \rightarrow \neg (\mathfrak{A}^* \& \neg \mathfrak{B}^*)$.

Eine $\supset$-*Beseitigung* lautet nach der Ersetzung: „Aus $\Gamma^* \rightarrow \mathfrak{A}^*$ und $\Delta^* \rightarrow \neg (\mathfrak{A}^* \& \neg \mathfrak{B}^*)$ ergibt sich $\Gamma^*, \Delta^* \rightarrow \mathfrak{B}^*$“. Man ändert dies so ab: $\Gamma^* \rightarrow \mathfrak{A}^*$ und $\neg \mathfrak{B}^* \rightarrow \neg \mathfrak{B}^*$ ergibt $\Gamma^*, \neg \mathfrak{B}^* \rightarrow \mathfrak{A}^* \& \neg \mathfrak{B}^*$, also $\neg \mathfrak{B}^*, \Gamma^* \rightarrow \mathfrak{A}^* \& \neg \mathfrak{B}^*$; mit $\neg \mathfrak{B}^*, \Delta^* \rightarrow \neg (\mathfrak{A}^* \& \neg \mathfrak{B}^*)$ dazu entsteht $\Gamma^*, \Delta^* \rightarrow \neg \neg \mathfrak{B}^*$, daraus $\Gamma^*, \Delta^* \rightarrow \mathfrak{B}^*$.

12. 3. Somit ist es gelungen, die vorgelegte Herleitung in eine Herleitung umzuwandeln, in der die Zeichen $\vee$, $\exists$ und $\supset$ *nicht mehr vorkommen*. Man beachte, daß die *Endformel* der Herleitung nur dann geändert worden ist, wenn sie ein $\vee$, $\exists$ oder $\supset$ enthielt.

12. 4. Bemerkenswert ist, daß nach dem unter 11. 3 erwähnten Satze die vorgelegte Herleitung nunmehr bereits im wesentlichen eine *intuitio-*

nistisch zulässige zahlentheoretische Herleitung ist; die „Beseitigung der doppelten Verneinung“ ließe sich nämlich, wo sie noch benutzt wird, durch andere Schlußregeln ersetzen.

§ 13.

Das Reduzieren von Sequenzen.

Der im folgenden zu erklärende Begriff der „Angebbarkeit einer *Reduziervorschrift*“ für eine Sequenz dient uns als formaler Ersatz des inhaltlichen *Richtigkeitsbegriffs;* er gibt eine *besondere finite Deutung* der Aussagen, die an Stelle der *an-sich-Auffassung* derselben tritt, an (vgl. § 9 — 11).

Ein einzelner *Reduktionsschritt* an einer Sequenz, in der die Verknüpfungszeichen $\vee$, $\exists$ und $\supset$ nicht mehr vorkommen, kann auf folgende Arten ausgeführt werden (13. 1 1 bis 13. 5 3):

13. 1 1. Die Sequenz enthalte mindestens eine *freie Variable.* Dann ersetzt man eine freie Variable, überall wo sie in der Sequenz vorkommt, durch ein und dasselbe, beliebig zu wählende *Zahlzeichen.*

13. 1 2. Die Sequenz enthalte keine freien Variablen. In irgendeiner ihrer Formeln komme an einer Stelle ein *Minimalterm* (3. 2 4) vor (z. B. als Teil eines längeren Terms). Dann setzt man den *zugehörigen „Funktionswert“* dafür ein, d. h. dasjenige Zahlzeichen, das auf Grund der Definition der betreffenden Funktion (siehe 8. 1 2) deren Wert für die vorliegenden Zahlen als Argumente darstellt.

An dieser Stelle setze ich also von den *Funktionen* voraus, daß sie im Sinne von 8. 1 2 *entscheidbar definiert* seien.

13. 2 1. Die Sequenz enthalte keine freien Variablen und keine Minimalterme; ihre *Hinterformel* (5. 2 1) habe die Gestalt $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$. Dann ersetzt man diese durch eine Formel $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$, d. h. durch eine Formel, die aus $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ durch Einsetzen eines *beliebig zu wählenden Zahlzeichens* $\mathfrak{n}$ für die Variable $\mathfrak{x}$ hervorgeht.

13. 2 2. Die Sequenz enthalte keine freien Variablen und keine Minimalterme; ihre Hinterformel habe die Gestalt $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$. Dann ersetzt man diese, *nach Wahl,* durch die Formel $\mathfrak{A}$ oder durch die Formel $\mathfrak{B}$.

13. 2 3. Die Sequenz enthalte keine freien Variablen und keine Minimalterme; ihre Hinterformel habe die Gestalt $\neg \mathfrak{A}$. Dann ersetzt man diese durch die Formel $1 = 2$[19]), und fügt zugleich zu den Vorderformeln der Sequenz die Formel $\mathfrak{A}$ (als letzte) hinzu (vgl. 11. 2).

13. 3. Wenn keiner der bisher genannten Fälle vorliegt, so muß die *Hinterformel* der Sequenz eine *Minimalformel* (3. 2 4) sein.

Ich setze nunmehr von den *Prädikaten,* wie oben von den Funktionen, voraus, daß sie im Sinne von 8. 1 2 *entscheidbar definiert* seien.

---

[19]) Ich könnte hier auch eine beliebige andere falsche Minimalformel verwenden.

Demnach kann man von einer vorliegenden Minimalformel auf Grund der Definition des zugehörigen Prädikates feststellen, ob sie eine *richtige oder falsche* Aussage darstellt.

13.4. Die Sequenz enthalte keine freien Variablen und keine Minimalterme. Ihre Hinterformel sei eine *richtige Minimalformel*; oder: die Hinterformel sei eine *falsche Minimalformel* (z. B. $1 = 2$), und eine der *Vorderformeln* sei ebenfalls eine *falsche Minimalformel.*

Für eine solche offenbar *richtige* Sequenz (vgl. 7.3) wird *kein Reduktionsschritt definiert.*

13.5. Die Sequenz enthalte keine freien Variablen und keine Minimalterme; ihre Hinterformel sei eine falsche Minimalformel; keine der Vorderformeln sei eine falsche Minimalformel. Alsdann sind folgende drei verschiedenen Arten von Reduktionsschritten zulässig (Gegenstücke zu 13.2):

13.51. Eine *Vorderformel* habe die Gestalt $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$. Man fügt hinter dieser eine Vorderformel $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ hinzu, d. h. eine Formel, die aus $\mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ durch Einsetzung eines Zahlzeichens $\mathfrak{n}$ für die Variable $\mathfrak{x}$ hervorgeht. Dabei darf man die Formel $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ weglassen oder auch stehen lassen.

13.52. Eine Vorderformel habe die Gestalt $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$. Man fügt hinter ihr entweder die Formel $\mathfrak{A}$ oder die Formel $\mathfrak{B}$ hinzu. Dabei darf man die Formel $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ weglassen oder auch stehenlassen.

13.53. Eine Vorderformel habe die Gestalt $\neg \mathfrak{A}$. Man ersetzt die Hinterformel durch $\mathfrak{A}$. Dabei darf man die Formel $\neg \mathfrak{A}$ weglassen oder auch stehenlassen. —

13.6. Eine *Reduziervorschrift* für eine Sequenz, in der die Verknüpfungszeichen $\vee$, $\exists$ und $\supset$ nicht vorkommen, ist eine Vorschrift, auf Grund deren die Sequenz stets durch *endlich viele einzelne Reduktionsschritte* (gemäß 13.11 bis 13.53) auf eine der richtigen *Endformen* (13.4) „reduziert" werden kann, wie man auch immer, so oft ein Reduktionsschritt mit „Wahlfreiheit" stattfindet, d.h. einer der unter 13.11, 13.21 und 13.22 beschriebenen Schritte, daß dabei zu verwendende Zahlzeichen $\mathfrak{n}$ *wählen* mag, bzw. welche der beiden Formeln $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ (im Falle 13.22) man auch *wählen* mag.

13.7. Wo bei *sonstigen* Reduktionsschritten mehrere Möglichkeiten zur Verfügung stehen (z. B. im Falle 13.5), da besteht keine *Wahlfreiheit*, sondern da soll durch die Vorschrift *bestimmt* sein, welche Art von Reduktionsschritt stattzufinden hat. Auch z. B., *welches* Zahlzeichen $\mathfrak{n}$ bei der Zufügung einer Vorderformel $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ zu verwenden ist, und ob man dabei die Formel $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ weglassen soll oder nicht.

13.8. *Erläuterungen zum Begriff des Reduzierens.*

13.81. *Das Reduzieren von richtigen Sequenzen, die keine Variablen enthalten.*

Zur Erläuterung des Reduzierbegriffs zeige ich zunächst, daß für Sequenzen ohne Variable, und ohne die Zeichen $\vee$, $\exists$ und $\supset$, der Begriff der Angebbarkeit einer *Reduziervorschrift* mit dem Begriff der Richtigkeit gemäß dem *Ausrechnungsverfahren* (7.2, 7.3) übereinstimmt:

Eine solche „richtige" Sequenz ist nach folgender *Vorschrift* zur Endform zu reduzieren: Man ersetze zunächst die etwa vorkommenden *Terme* durch ihre „Zahlenwerte" (13.12). Alsdann führe man, sofern nicht schon Endform (13.4) vorliegt, einen Reduktionsschritt aus, durch den die Sequenz in eine ebenfalls „richtige" Sequenz übergeht, in der jedoch *weniger Aussagenverknüpfungszeichen* auftreten als zuvor. Das ist stets möglich. Nämlich bei Reduktionen gemäß 13.22 und 13.23 ist die Forderung jedenfalls erfüllt. Liegt der Fall 13.5 vor, so wendet man von den verschiedenen in Frage kommenden Reduktionsschritten den folgenden an:

Wenn eine falsche Vorderformel der Form $\mathfrak{A}$ & $\mathfrak{B}$ vorhanden ist, so muß entweder $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ falsch sein; man ersetzt alsdann die Formel durch $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$. Ist eine falsche Vorderformel der Form $\neg\,\mathfrak{A}$ vorhanden, so läßt man sie weg und ersetzt die Hinterformel durch $\mathfrak{A}$.

Bei jedem der angegebenen Reduktionsschritte entsteht offenbar wieder eine *richtige* Sequenz, und zwar mit *weniger Aussagenverknüpfungszeichen* als zuvor. Folglich gelangt man durch Fortsetzung dieses Verfahrens stets in endlich vielen Schritten zur Endform.

Daß umgekehrt jede variablenfreie Sequenz, für die eine *Reduziervorschrift* vorliegt, *richtig* ist, geht daraus hervor, daß eine *falsche* Sequenz, wie leicht festzustellen, durch jeden zulässigen Reduktionsschritt immer wieder in eine falsche Sequenz übergehen würde, bzw. daß im Falle eines Reduktionsschrittes gemäß 13.22 die *Wahl* von $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ so getroffen werden könnte, daß dies einträte.

13.82. Diese Überlegungen lassen sich ohne weiteres auf den Fall ausdehnen, daß die betrachteten Sequenzen $\forall$-Zeichen, die sich nur auf *endlich* viele Zahlen beziehen, enthalten. Dann wird das $\forall$ entsprechend dem & behandelt.

13.83. Geht man zum *unendlichen* Gegenstandsbereich aller natürlichen Zahlen über, so ist die Angabe einer Reduziervorschrift für irgendeine herleitbare Sequenz im allgemeinen nicht mehr so einfach. Dadurch, daß hier nicht mehr alle Formeln *entscheidbar* sind, ist man z. B. unter Umständen genötigt, bei Reduktionsschritten gemäß 13.51 bis 13.53 von der Erlaubnis, die geänderte Vorderformel *stehenzulassen*, Gebrauch zu machen, während im endlichen Bereich (13.81, 13.82) in solchem Falle diese Formel stets *weggelassen* werden konnte.

Als Beispiel gebe ich eine Reduziervorschrift für die unter 10.6 genannte, nach der damaligen finiten Deutung nicht richtige Aussage „der große Fermatsche Satz ist entweder richtig oder nicht richtig" an: Diese lautet, nach Ersetzung des $\vee$, und als Sequenz geschrieben, formal:

$$\rightarrow \neg \{[\neg \forall x \forall y \forall z \forall u \neg (u > 2 \,\&\, x^u + y^u = z^u)] \\ \&\, [\neg \neg \forall x \forall y \forall z \forall u \neg (u > 2 \,\&\, x^u + y^u = z^u)]\}.$$

Man reduziere wie folgt: Zunächst entsteht (13.23):

$$[\neg \forall x \forall y \forall z \forall u \neg (u > 2 \,\&\, x^u + y^u = z^u)] \\ \&\, [\neg \neg \forall x \forall y \forall z \forall u \neg (u > 2 \,\&\, x^u + y^u = z^u)] \rightarrow 1 = 2.$$

Durch zwei Reduktionen gemäß 13.52 erhält man

$$\neg \forall x \forall y \forall z \forall u \neg (u > 2 \,\&\, x^u + y^u = z^u), \\ \neg \neg \forall x \forall y \forall z \forall u \neg (u > 2 \,\&\, x^u + y^u = z^u) \rightarrow 1 = 2;$$

weiter (13.53):

$$\neg \forall x \forall y \forall z \forall u \neg (u > 2 \,\&\, x^u + y^u = z^u) \\ \rightarrow \neg \forall x \forall y \forall z \forall u \neg (u > 2 \,\&\, x^u + y^u = z^u).$$

Diese *logische Grundsequenz* ist nun, wie unter 13.92 *allgemein* beschrieben, zu Ende zu reduzieren.

13.90. Im folgenden will ich beweisen, daß sich zu einer beliebig vorgelegten, gemäß § 12 umgeformten Herleitung für alle darin vorkommenden Sequenzen *Reduziervorschriften* angeben lassen.

Daraus folgt dann ohne weiteres die *Widerspruchsfreiheit*:

Wäre nämlich eine Sequenz der Form $\rightarrow \mathfrak{A} \,\&\, \neg \mathfrak{A}$ herleitbar, so wäre auch z. B. $\rightarrow 1 = 2$ herleitbar. Denn aus $\rightarrow \mathfrak{A} \,\&\, \neg \mathfrak{A}$ ergibt sich durch &-Beseitigung $\rightarrow \mathfrak{A}$ sowie $\rightarrow \neg \mathfrak{A}$, also auch (5.243) $\neg 1 = 2 \rightarrow \mathfrak{A}$ und $\neg 1 = 2 \rightarrow \neg \mathfrak{A}$; durch „Widerlegung" entsteht $\rightarrow \neg\neg 1 = 2$, durch „Beseitigung der doppelten Verneinung" $\rightarrow 1 = 2$. (Auf dieselbe Weise kann man aus einem Widerspruch *jede beliebige Aussage* ableiten.) Für die Sequenz $\rightarrow 1 = 2$ kann es aber keine Reduziervorschrift geben, es gibt ja gar keinen Reduktionsschritt, der auf sie anwendbar wäre, und die Endform (13.4) hat sie auch nicht, denn $1 = 2$ ist ja falsch.

13.91. Von den *mathematischen Grundsequenzen* setze ich voraus, daß Reduziervorschriften für dieselben *gegeben* seien, und zwar insbesondere solche, die von der bei Reduktionsschritten gemäß 13.5 bestehenden Erlaubnis, die geänderte Vorderformel *stehen* zu lassen, keinen Gebrauch machen.

Für alle üblichen zahlentheoretischen Axiome sind solche leicht anzugeben. Betrachten wir etwa die unter 6.2 genannten Beispiele; diese wären als Sequenzen zu schreiben, das $\supset$ durch & und $\neg$ zu ersetzen; alsdann lassen sie sich *reduzieren*, indem man zunächst gemäß 13.21 die $\forall$-Zeichen wegschafft und die zugehörigen Variablen durch beliebige Zahlzeichen ersetzt, und dann wie unter 13.81 beschrieben fortfährt. Denn die entstehenden Formeln sind ja „richtig".

13.92. *Logische Grundsequenzen* sind nach folgender einfachen Vorschrift zu reduzieren:

Eine Sequenz $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ liege vor. Man ersetze zunächst die freien Variablen durch beliebige Zahlzeichen (13.11), alsdann die Minimalterme durch *die* Zahlzeichen, die deren Werte darstellen (13.12). Letzteres ist solange zu wiederholen — es können ja beim Ausrechnen Minimalterme neu entstehen — bis kein Minimalterm mehr vorkommt. Die Sequenz laute danach $\mathfrak{A}^* \rightarrow \mathfrak{A}^*$.

Nun führe man an der Hinterformel $\mathfrak{A}^*$ Reduktionsschritte gemäß 13.21, 13.22 und, falls nötig, 13.12 solange aus, bis die Hinterformel die Gestalt $\neg \mathfrak{C}$ hat oder eine Minimalformel ist. Bei Reduktionen gemäß 13.21 bzw. 13.22 darf man das einzusetzende Zahlzeichen bzw. die Formel *beliebig wählen.*

Ist nun aus der Hinterformel eine *richtige Minimalformel* geworden, so ist das Reduktionsverfahren bereits beendet (13.4).

Ist es eine *falsche Minimalformel*, so führt man nun gemäß 13.51, 13.52 und 13.12 solche Reduktionsschritte aus, bei denen die *Vorderformel* $\mathfrak{A}^*$ *genau die gleichen* Veränderungen erleidet, wie sie zuvor an der *Hinterformel* $\mathfrak{A}^*$, in gleicher Reihenfolge, stattfanden. Beispielsweise hat man, wenn die Vorderformel die Gestalt $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ angenommen hat, sie durch eine Formel $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ zu ersetzen und dabei das einzusetzende Zahlzeichen $\mathfrak{n}$ als *dasselbe* zu *bestimmen*, welches man bei der entsprechenden Reduktion der Hinterformel *gewählt* hatte. Entsprechend verfährt man bei Reduktionsschritten gemäß 13.52. So wird schließlich die Vorderformel gleich der Hinterformel, und das Verfahren ist wiederum *beendet*, indem die Endform (13.4) erreicht ist.

Hatte jedoch die Hinterformel die Gestalt $\neg \mathfrak{C}$ angenommen, so muß man zunächst gemäß 13.23 reduzieren. Dann lautet die Sequenz: $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{C} \rightarrow 1 = 2$. Diese reduziert man nun, genau wie im vorigen Falle, derart, daß die Vorderformel $\mathfrak{A}^*$ *ebenso* geändert wird wie zuvor die Hinterformel $\mathfrak{A}^*$, so daß schließlich an ihrer Stelle auch $\neg \mathfrak{C}$ steht. Nun lautet die Sequenz $\neg \mathfrak{C}, \mathfrak{C} \rightarrow 1 = 2$. Man reduziert sie gemäß 13.53 zu $\mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{C}$. Dies ist wieder eine *logische Grundsequenz*; die Formel $\mathfrak{C}$ enthält mindestens ein Aussagenverknüpfungszeichen *weniger* als $\mathfrak{A}^*$, folglich kommt man bei Fortsetzung dieses Verfahrens in endlich vielen Schritten zum Ende. Damit ist eine Reduziervorschrift für beliebige logische Grundsequenzen gegeben.

13.93. In ähnlicher Weise lassen sich auch beliebige Sequenzen der Form $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ oder $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x}) \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ oder $\mathfrak{A}, \neg \mathfrak{A} \rightarrow 1 = 2$ oder $\neg\neg \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ reduzieren, wovon ich nachher Gebrauch machen werde:

Man ersetze nämlich zunächst wiederum die freien Variablen und Minimalterme gemäß 13.11 und 13.12. Alsdann hat die Sequenz $\mathfrak{A}^* \& \mathfrak{B}^* \rightarrow \mathfrak{A}^*$ eine Gestalt, die beim Reduzieren der logischen *Grundsequenz* $\mathfrak{A}^* \& \mathfrak{B}^* \rightarrow \mathfrak{A}^* \& \mathfrak{B}^*$ nach 13.92 ebenfalls auftrat; sie kann also weiterhin genau wie dort zu Ende reduziert werden. Das Gleiche gilt für $\mathfrak{A}^* \& \mathfrak{B}^* \rightarrow \mathfrak{B}^*$ und entsprechend für $(\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x}))^* \rightarrow (\mathfrak{F}(\mathfrak{t}))^*$, hier ist die Grundsequenz $(\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x}))^* \rightarrow (\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x}))^*$ heranzuziehen. Bei $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^* \rightarrow \mathfrak{A}^* \& \mathfrak{B}^*$ ist ein Reduktionsschritt gemäß 13.22 durchzuführen; man erhält, nach Wahl, $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^* \rightarrow \mathfrak{A}^*$ oder $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^* \rightarrow \mathfrak{B}^*$. Die weitere Reduktion erfolgt nun genau wie die der Grundsequenz $\mathfrak{A}^* \rightarrow \mathfrak{A}^*$ bzw. $\mathfrak{B}^* \rightarrow \mathfrak{B}^*$; die zusätzliche Vorderformel bleibt unbeachtet und stört nirgends. Bei $\mathfrak{A}^*, \neg\, \mathfrak{A}^* \rightarrow 1 = 2$ ergibt ein Reduktionsschritt gemäß 13.53 $\mathfrak{A}^* \rightarrow \mathfrak{A}^*$, also wiederum eine Grundsequenz.

Bei $\neg\neg\, \mathfrak{A}^* \rightarrow \mathfrak{A}^*$ führe man an der Hinterformel Reduktionsschritte gemäß 13.21, 13.22 und 13.12 solange aus, bis sie die Gestalt $\neg\, \mathfrak{C}$ hat oder eine Minimalformel ist. Ist sie eine richtige Minimalformel geworden, so ist die Reduktion beendet. Hat sie die Gestalt $\neg\, \mathfrak{C}$ angenommen, so reduziert man gemäß 13.23 zu $\neg\neg\, \mathfrak{A}^*, \mathfrak{C} \rightarrow 1 = 2$, weiter (13.53) zu $\mathfrak{C} \rightarrow \neg\, \mathfrak{A}^*$, dann (13.23) zu $\mathfrak{C}, \mathfrak{A}^* \rightarrow 1 = 2$. Ebenso verfährt man in dem Falle, wo die Hinterformel zu einer falschen Minimalformel geworden ist; man erhält dann erst $\rightarrow \neg\, \mathfrak{A}^*$, danach $\mathfrak{A}^* \rightarrow 1 = 2$.

Nun haben wir in beiden Fällen eine Sequenz erhalten, die bei der Reduktion der *logischen Grundsequenz* $\mathfrak{A}^* \rightarrow \mathfrak{A}^*$ nach dem unter 13.92 angegebenen Verfahren *ebenfalls* auftritt (bzw. eine nicht *wesentlich* verschiedene). Man braucht also wiederum nur das *dort* angegebene Verfahren zu befolgen, um die Sequenz zu Ende zu reduzieren.

Man beachte, daß bei allen Reduktionsverfahren unter 13.92 und 13.93 niemals bei Reduktionsschritten gemäß 13.5 die betroffene Vorderformel *stehengelassen* wird.

§ 14.

Reduktionsschritte an Herleitungen [20]).

Um beliebige hergeleitete Sequenzen zu reduzieren, soll ein Verfahren angegeben werden, wobei an der gesamten *Herleitung* für die betreffende Sequenz gewisse Reduktionsschritte ausgeführt werden. Zu diesem Zwecke werde ich den Herleitungsbegriff gegenüber dem bisherigen etwas *abändern* (14.1) und dann erklären, wie ein einzelner *Reduktionsschritt* an einer solchen *Herleitung* auszuführen ist (14.2).

---

[20]) **Anmerkung bei der Korrektur: Die Nummern 14.1 bis 16.11 sind im Februar 1936 an Stelle eines früheren Textes eingefügt worden.**

14.1. *Abänderung des Herleitungsbegriffs.*

Der neue Herleitungsbegriff ergibt sich aus dem alten (5.2) wie folgt:

5.22 bleibt gültig, doch darf die „Endsequenz" der Herleitung jetzt auch *Vorderformeln* enthalten (damit von der „Herleitung für eine Sequenz" gesprochen werden kann). Die Zeichen $\vee$, $\exists$ und $\supset$ sollen in der Herleitung nicht vorkommen. Jede Herleitungssequenz soll zur Gewinnung von höchstens *einer* weiteren Sequenz (durch Anwendung einer Schlußregel) benutzt werden.

Man sieht leicht, daß eine Herleitung im alten Sinne in eine Herleitung mit derselben Endsequenz, die dieser Bedingung genügt, umgewandelt werden kann. Man braucht nur, von hinten nach vorne fortschreitend, mehrfach benutzte Sequenzen jeweils entsprechend oft aufzuschreiben, mitsamt den zu ihrer Herleitung benutzten Sequenzen.

Mathematische Grundsequenzen müssen die Forderung 13.91 erfüllen; mit ihnen zugleich sind auch alle ihre „Reduzierten", d. h. alle Sequenzen, die bei Durchführung des gegebenen Reduzierverfahrens auftreten können, als mathematische Grundsequenzen zugelassen.

Als *logische Grundsequenzen* gelten beliebige Sequenzen der Form $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ oder $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x}) \to \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ oder $\mathfrak{A}, \neg\, \mathfrak{A} \to 1 = 2$ oder $\neg\neg\, \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, sowie alle Sequenzen, die beim Reduzieren einer solchen gemäß 13.92, 13.93 auftreten können.

Strukturänderungen in der alten Form sind nicht mehr zugelassen.

Von den *Schlußregeln* bleiben bestehen die Regel der $\forall$-Einführung und der „vollständigen Induktion", und zwar mit dem Zusatz: Eine zulässige $\forall$-Einführung oder „vollständige Induktion", wobei in den zugehörigen Sequenzen keine andere freie Variable als $\mathfrak{a}$ vorkommt, bleibt zulässig, wenn man in den zugehörigen Sequenzen außer der die Variable $\mathfrak{a}$ enthaltenden Sequenz die vorkommenden Minimalterme durch ihre „Zahlenwerte" ersetzt, solange, bis keine Minimalterme mehr vorkommen (Zweck s. 14.22).

Neu hinzu kommt folgende „Schlußregel der $\neg$-Einführung": Aus $\Gamma, \mathfrak{A} \to 1 = 2$ ergibt sich $\Gamma \to \neg\, \mathfrak{A}$.

Ferner wird noch folgende Schlußregel — „*Kettenschluß*" — hinzugefügt: Aus einer Reihe von Sequenzen (mindestens einer) beliebiger Gestalt ergibt sich eine Sequenz folgender Form: Als *Hinterformel* erhält sie die Hinterformel irgendeiner Sequenz der Reihe, wobei, wenn es sich um eine falsche Minimalformel handelt, irgendeine andere falsche Minimalformel genommen werden darf. Als *Vorderformeln* schreibe man die sämtlichen Vorderformeln derselben Sequenz und der ihr in der Reihe *vorangehenden* Sequenzen in beliebiger Reihenfolge hin; jedoch dürfen dabei solche Formeln *weggelassen* werden, für die folgendes gilt: Die gleiche Formel *kommt* schon unter den hingeschriebenen (nicht weggelassenen) *vor*; oder: Die Formel ist gleich der *Hinterformel* irgendeiner der Sequenzen, die innerhalb der Reihe derjenigen Sequenz, aus deren Vorderformeln sie entnommen ist, *vorangehen*. Ferner dürfen noch beliebige weitere Vorderformeln, auch zwischen den anderen, neu *hinzugefügt* werden; und schließlich darf die fertige Sequenz noch so abgeändert werden, daß man ein oder mehrere Male irgendeine *gebundene Variable* gemäß 5.244 durch eine andere *ersetzt*.

Der „Kettenschluß" ist hiermit so *weit* gefaßt worden, daß er alles in sich enthält, was noch nötig ist, damit eine Herleitung im alten Sinne, die bereits gemäß § 12 von den Zeichen $\vee$, $\exists$ und $\supset$ befreit sei (und die Bedingungen für Funktionen, Prädikate und Axiome, 13.12, 13.3, 13.91, erfülle), nunmehr ohne Änderung ihrer Endsequenz in eine Herleitung im neuen Sinne *umgewandelt* werden kann.

Nämlich: Alle *Strukturänderungen* sind Spezialfälle des „Kettenschlusses". Die fortgefallenen *Schlußregeln* lassen sich durch die an ihre Stelle tretenden neuen *Grundsequenzen*, mit Hinzunahme des „*Kettenschlusses*", ersetzen. Z. B. die &-Einführung: $\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}$ und $\Delta \rightarrow \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ ergibt durch „Kettenschluß" $\Gamma, \Delta \rightarrow \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$. Die $\forall$-Beseitigung: $\Gamma \rightarrow \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ und $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ ergibt durch „Kettenschluß" $\Gamma \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$. Entsprechend ersetzt man &-Beseitigung und „Beseitigung der doppelten Verneinung". Schließlich die „Widerlegung": Aus $\mathfrak{A}, \Gamma \rightarrow \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}, \Delta \rightarrow \neg\, \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}, \neg\, \mathfrak{B} \rightarrow 1 = 2$ erhält man durch „Kettenschluß" $\Gamma, \Delta, \mathfrak{A} \rightarrow 1 = 2$, durch $\neg$-Einführung nunmehr $\Gamma, \Delta \rightarrow \neg\, \mathfrak{A}$.

Somit ist der *neue* Herleitungsbegriff nicht enger als der *alte*, und wir können für die Angabe von Reduziervorschriften für irgendwelche in einer Herleitung vorkommende Sequenzen ohne Beschränkung eine Herleitung im *neuen* Sinne für die betreffende Sequenz als gegeben annehmen.

Ich bezeichne im folgenden bei einer Schlußregelanwendung als „*Prämissen*" diejenigen Sequenzen, aus denen die neue Sequenz, das „*Ergebnis*", sich ergibt.

Daß der „Kettenschluss" seiner inhaltlichen Bedeutung nach einen „*richtigen*" Schluß darstellt, überlegt man sich leicht. Es läßt sich auch zeigen, daß er durch die alten Schlußregeln und Strukturänderungen ersetzt werden könnte.

Beim „Kettenschluß" wurde zugelassen, daß einige Prämissen gar nicht wirklich gebraucht werden; dies erweist sich für das Reduzierverfahren als praktisch. Die weitgehende Ersetzung von Schlußregeln durch Kombinationen aus Grundsequenzen und „Kettenschluß" ist gleichfalls hierfür bequem; sie wandelt gleichsam das ursprüngliche *Nacheinander* der Schlüsse in ein *Nebeneinander* um.

Ich will noch voraussetzen, daß bei jeder Sequenz einer gegebenen Herleitung *angegeben* ist, ob sie *Grundsequenz* ist, und von welcher *Art*, oder aus *welchen* vorangehenden Sequenzen und nach *welcher* Schlußregel sie sich ergibt; überhaupt allgemein, *wie* die einzelnen Sequenzen, Formeln, usw. bei der Anwendung einer Schlußregel den in dem zugehörigen allgemeinen Schema verwendeten Bezeichnungen *entsprechen*; damit man nicht auf etwaige *Mehrdeutigkeiten* eingehen muß.

14.2. *Reduktionsschritte an Herleitungen.*

Ich will jetzt den Begriff des Reduktionsschrittes an einer Herleitung (14.1) definieren und gleichzeitig beweisen: Durch einen solchen Schritt wird die betreffende Herleitung wieder in eine *Herleitung* umgewandelt, und ihre *Endsequenz* wird dabei in folgender Weise geändert:

Die etwa vorkommenden freien Variablen werden durch beliebig wählbare Zahlzeichen ersetzt; die danach etwa vorhandenen Minimalterme werden durch ihre „Zahlenwerte" ersetzt, solange, bis keine Minimalterme mehr vorkommen; und weiterhin findet *höchstens ein* Reduktionsschritt gemäß 13.2 bzw. 13.5 an der Sequenz statt. (Eine Endsequenz ohne freie Variable und Terme *kann* also auch ganz ungeändert bleiben.)

Der Herleitungs-Reduktionsschritt ist *eindeutig*, außer in den Fällen, wo die Endsequenz eine oder mehrere Veränderungen gemäß einem mit *Wahlfreiheit* verbundenen Sequenzen-Reduktionsschritt erleidet (13.11, 13.21, 13.22), alsdann kann man die Wahlen *beliebig* treffen; ist dies jedoch geschehen, so ist auch *dann* der Reduktionsschritt eindeutig bestimmt.

Hat die Endsequenz der Herleitung *Endform* gemäß 13.4, so wird *kein* Reduktionsschritt für die Herleitung definiert. In allen anderen Fällen jedoch gibt es einen Reduktionsschritt; die Definition desselben folgt jetzt (rekursiv). Es soll also im folgenden die Endsequenz *nicht* Endform haben.

14.21. Ist die Endsequenz der Herleitung eine *Grundsequenz*, so erfolgt der Reduktionsschritt an dieser gemäß den Reduziervorschriften 13.91 — 13.93, die ja alle Grundsequenzen im jetzigen Sinne mit erfassen; und zwar ist die Ersetzung der etwaigen freien Variablen und Terme durchzuführen, weiterhin jedoch nur genau *ein* Schritt gemäß 13.2 bzw. 13.5 (bzw. gar nichts, wenn schon Endform erreicht ist). Die oben aufgestellten Behauptungen über den Herleitungs-Reduktionsschritt sind dann offenbar erfüllt.

14.22. Nunmehr sei die Endsequenz das Ergebnis einer *Schlußregel*-Anwendung, und ich darf voraussetzen, daß für die Herleitungen der Prämissen bereits der Begriff des Reduktionsschrittes definiert und die Gültigkeit der zugehörigen Behauptungen nachgewiesen sei.

Der Reduktionsschritt für die Gesamtherleitung beginnt mit folgender *Vorbereitung* (Ersetzung von freien Variablen und Minimaltermen):

Man ersetzt zunächst die in der Endsequenz etwa vorkommenden freien Variablen durch beliebig wählbare Zahlzeichen. Alsdann ersetzt man in der gesamten Herleitung *dieselben* Variablen (nämlich: die in der Endsequenz ersetzt wurden) durch dieselben Zahlzeichen und die *übrigen* vorkommenden freien Variablen durch 1; jedoch mit der wichtigen Ausnahme: Die bei einer $\forall$-Einführung bzw. „vollständigen Induktion" auftretende, unter 5.25 mit $\mathfrak{a}$ bezeichnete freie Variable darf in der betreffenden Prämisse $\Gamma \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{a})$ bzw. $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$, $\Delta \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{a}+1)$, sowie ferner in *allen* zur *Herleitung* dieser Sequenz gehörigen Sequenzen *nicht* ersetzt werden.

Anschließend werden ferner sämtliche in der Herleitung vorkommenden *Minimalterme* der Reihe nach, bis keine mehr vorkommen, durch ihre „Zahlenwerte" ersetzt; jedoch mit der wichtigen Ausnahme: In der $\mathfrak{a}$ enthaltenden Prämisse einer $\forall$-Einführung oder „vollständigen Induktion", sowie in allen zur Herleitung dieser Sequenz gehörigen Sequenzen finden *keine* Ersetzungen statt.

Man überlege sich, daß bei diesen beiden Ersetzungsverfahren die Herleitung korrekt bleibt. Wesentlich dafür ist bei der Ersetzung der freien Variablen zunächst die unter 5.25 formulierte besondere Bedingung für die Variable $\mathfrak{a}$ bei $\forall$-Einführung und „vollständiger Induktion", ferner die Forderung (14.1), daß jede Herleitungssequenz als Prämisse von höchstens *einer* Schlußregel-Anwendung dient. Diese beiden Tatsachen ermöglichen es nämlich, die zu ersetzenden Variablen von den übrig bleibenden vollständig zu trennen, so daß durch diese Unterscheidung kein Fehler in irgendeine Schlußregel-Anwendung hineinkommt.

Bei der Term-Ersetzung ist die unter 14.1 formulierte Sonderbestimmung für $\forall$-Einführung und „vollständige Induktion" wichtig (und darum wurde sie eingeführt); denn durch die Ersetzung kann deren ursprüngliche Normalform (5.25) zerstört werden.

Nach dieser „Vorbereitung" folgt der eigentliche Reduktionsschritt gemäß den nachfolgenden Vorschriften. Hat jedoch die Endsequenz nunmehr *Endform*, so ist der Reduktionsschritt bereits beendet.

14.23. Die Endsequenz sei das Ergebnis einer $\forall$-*Einführung* oder $\neg$-*Einführung*. Dann läßt man sie fort und nimmt die *Prämisse* als neue Endsequenz, wobei im ersten Falle noch in der ganzen Herleitung dieser Prämisse, jedoch mit denselben Beschränkungen wie unter 14.22, für die freie Variable $\mathfrak{a}$ ein beliebig zu wählendes Zahlzeichen und für Minimalterme deren „Zahlenwerte" einzusetzen sind; *nicht ersetzt* werden jedoch auch solche Terme, in denen zuvor die Variable $\mathfrak{a}$ vorkam.

Die Herleitung ist offenbar korrekt geblieben, und die Endsequenz ist in eine gemäß 13.21 bzw. 13.23 reduzierte übergegangen.

14.24. Die Endsequenz sei das Ergebnis einer „*vollständigen Induktion*". Der Zahlenwert des Terms $\mathfrak{t}$ werde durch das Zahlzeichen $\mathfrak{n}$ angegeben; $\mathfrak{m}$ sei das Zahlzeichen für die um 1 kleinere Zahl (falls nicht $\mathfrak{n}$ gleich 1 ist). Man ersetze nun in der Herleitung der Prämisse $\mathfrak{F}(\mathfrak{a})$, $\Delta \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{a}+1)$ die freie Variable $\mathfrak{a}$, wieder mit der gleichen Beschränkung wie unter 14.22, der Reihe nach durch die Zahlzeichen 1, 2, 3 usw. bis $\mathfrak{m}$, und ersetze ferner jeweils anschließend alle entstehenden *Minimalterme*, ebenfalls mit der gleichen Beschränkung wie unter 14.22, durch ihre „Zahlenwerte". Nunmehr schließt man die Gesamtherleitung durch einen „*Kettenschluß*" ab, der aus $\Gamma \rightarrow (\mathfrak{F}(1))^*$ und den eben hergeleiteten Sequenzen $(\mathfrak{F}(1))^*$, $\Delta \rightarrow (\mathfrak{F}(2))^*$ und $(\mathfrak{F}(2))^*$, $\Delta \rightarrow (\mathfrak{F}(3))^*$ usw. bis zu $(\mathfrak{F}(\mathfrak{m}))^*$, $\Delta \rightarrow (\mathfrak{F}(\mathfrak{n}))^*$ wieder die Endsequenz $\Gamma, \Delta \rightarrow (\mathfrak{F}(\mathfrak{n}))^*$ zu gewinnen gestattet. Der Stern soll jeweils die durch die Ersetzungen von Minimaltermen eingetretenen Änderungen bezeichnen. Auf Grund der vorbereitenden Term-Ersetzungen (14.22) und der jetzt erfolgten sind schließlich überall *sämtliche* Minimalterme weggeschafft worden, so daß die zusammengehörigen $\mathfrak{F}^*$-Ausdrücke wirklich stets einander *gleich* geworden sind, selbst wenn sie es zuvor nicht waren. Ist $\mathfrak{n}$ gleich 1, so setze man für $\mathfrak{a}$ nur 1 ein, und erhält aus $\Gamma \rightarrow (\mathfrak{F}(1))^*$ und $(\mathfrak{F}(1))^*$, $\Delta \rightarrow (\mathfrak{F}(2))^*$ durch „Kettenschluß" die Endsequenz $\Gamma, \Delta \rightarrow (\mathfrak{F}(1))^*$.

14.25. Als letzter Fall bleibt jetzt der zu behandeln, daß die Endsequenz das Ergebnis eines „*Kettenschlusses*" ist. Dies ist der schwierigste Fall der Herleitungsreduktionen, weil nämlich der Kettenschluß gleichsam die Schwierigkeiten sämtlicher Schlüsse in sich zusammenfaßt.

Diejenige Prämisse, deren Hinterformel die Hinterformel der Endsequenz liefert, nenne ich die „*Hauptprämisse*". Ist die Hinterformel der Endsequenz eine falsche Minimalformel, so machen wir die *erste* Prämisse (in deren gegebener Reihenfolge), deren Hinterformel *ebenfalls* eine falsche Minimalformel ist, zur Hauptprämisse. Das ändert, auch wenn zuvor eine spätere Prämisse Hauptprämisse war, an der Korrektheit des „Kettenschlusses" nichts; es sind nur u. U. gewisse Vorderformeln der Endsequenz nun nicht mehr als den *Prämissen* entnommen, sondern als neu *hinzugefügt* anzusehen.

Nach dieser Vorbereitung ergibt sich, daß die Hauptprämisse keinesfalls *Endform* (13.4) haben kann; denn sonst müßte auch die Endsequenz offenbar Endform haben, was ausgeschlossen war. Folglich läßt sich an der Herleitung der Hauptprämisse ein *Reduktionsschritt* ausführen. Im Hinblick auf diesen unterscheide ich vier Fälle, die gesondert behandelt werden (14. 2 5 1 — 14. 2 5 4).

14. 2 5 1. Die Hauptprämisse erleide beim Reduktionsschritt an ihrer Herleitung eine Änderung gemäß 13. 2. — In diesem Falle führe man an der Endsequenz den für sie in Frage kommenden Sequenzen-Reduktionsschritt gemäß 13. 2 aus, wobei die etwaige *Wahl* beliebig zu treffen ist. Ferner führe man an der Herleitung der Hauptprämisse den Herleitungs-Reduktionsschritt aus und treffe dabei bei Wahlfreiheit die *gleiche* Wahl. Nun sind die Hinterformeln beider Sequenzen wieder gleich (bis auf Umbenennungen von gebundenen Variablen allenfalls), und der „Kettenschluß" ist wieder korrekt. Damit ist in diesem Falle der Reduktionsschritt für die Gesamtherleitung beendet.

14. 2 5 2. Die Hauptprämisse erleide beim Reduktionsschritt an ihrer Herleitung eine Änderung gemäß 13. 5, und die betroffene Vorderformel sei eine solche, die unter die Vorderformeln der Endsequenz (bei deren Bildung nach der Regel des „Kettenschlusses") *aufgenommen* wurde, *oder* aber auf Grund des Umstandes, daß eine gleiche Formel schon unter diesen *vorkam*, weggelassen wurde. — Alsdann führe man den Reduktionsschritt an der Herleitung der Hauptprämisse aus, und ändere, damit der „Kettenschluß" wieder korrekt wird, die Endsequenz gemäß dem *entsprechenden* Sequenzen-Reduktionsschritt (13. 5) ab. D. h., wenn die betroffene Vorderformel *selbst* in die Endsequenz aufgenommen war, so führe man an *dieser* hier den gleichen Reduktionsschritt aus; wenn sie aber wegen Übereinstimmung mit einer schon *vorhandenen* weggelassen war, so führe man an *dieser* den Reduktionsschritt aus und lasse sie dabei *stehen*, ganz gleich ob bei der Reduktion der *Prämisse* die entsprechende Formel weggelassen wird oder stehen bleibt.

14. 2 5 3. (*Hauptfall.*) Die Hauptprämisse, sie laute $\Delta \rightarrow \mathfrak{C}$, erleide beim Reduktionsschritt an ihrer Herleitung eine Änderung gemäß 13. 5, und die betroffene Vorderformel ($\mathfrak{B}$) sei eine solche, die unter die Vorderformeln der Endsequenz auf Grund ihrer Übereinstimmung mit der Hinterformel einer vorangehenden Prämisse nicht aufgenommen wurde; *diese* Prämisse, sie laute $\Gamma \rightarrow \mathfrak{B}$, erleide beim Reduktionsschritt an ihrer Herleitung eine *Änderung*, die dann notwendigerweise gemäß 13. 2 erfolgen muß. ($\mathfrak{B}$ kann ja keine Minimalformel sein.) — Die Endsequenz der Gesamtherleitung laute $\Theta \rightarrow \mathfrak{D}$. Ich unterscheide nun *drei Einzelfälle*, je nachdem nämlich ob $\mathfrak{B}$ die Gestalt $\forall \mathfrak{x} \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$, $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ oder $\neg \mathfrak{A}$ hat. Die Behandlung der drei Fälle ist nicht wesentlich verschieden.

Habe zunächst $\mathfrak{B}$ die Gestalt $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$. Dann wird bei dem Reduktionsschritt an $\Delta \rightarrow \mathfrak{C}$, gemäß 13.51, eine Vorderformel $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ hinzugefügt, und $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ bleibt stehen oder wird weggelassen; bei dem Reduktionsschritt an $\Gamma \rightarrow \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$, der gemäß 13.21 erfolgen muß, kann man für das einzusetzende Zahlzeichen das *gleiche* Zeichen $\mathfrak{n}$ wählen, so daß $\Gamma \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ entsteht. Nun bilde man drei „Kettenschlüsse": Der erste erhält als Prämissen die des ursprünglichen „Kettenschlusses", jedoch mit $\Gamma \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ an Stelle von $\Gamma \rightarrow \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$, als Ergebnis: $\Theta \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{n})$. Dies ist korrekt. Der zweite „Kettenschluß" erhält als Prämissen die des ursprünglichen „Kettenschlusses", jedoch mit der gemäß 13.51 reduzierten Sequenz an Stelle von $\Delta \rightarrow \mathfrak{C}$, als Ergebnis: $\Theta, \mathfrak{F}(\mathfrak{n}) \rightarrow \mathfrak{D}$. Auch dies ist ein *korrekter* „Kettenschluß". Der dritte „Kettenschluß" ergibt aus $\Theta \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{n})$ und $\Theta, \mathfrak{F}(\mathfrak{n}) \rightarrow \mathfrak{D}$ wieder die Endsequenz $\Theta \rightarrow \mathfrak{D}$. — Zu jeder der benutzten Sequenzen soll natürlich deren gesamte *Herleitung* hinzugeschrieben werden, so daß insgesamt nun wieder eine korrekte Herleitung vorliegt.

Wenn $\mathfrak{B}$ die Gestalt $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ hat, so wird bei dem Reduktionsschritt an $\Delta \rightarrow \mathfrak{C}$, gemäß 13.52, eine Vorderformel $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ hinzugefügt. $\Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$ wird nach Wahl zu $\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}$ oder $\Gamma \rightarrow \mathfrak{B}$; man treffe die Wahl so, daß die *gleiche* Formel auftritt wie bei $\Delta \rightarrow \mathfrak{C}$. Nun verfahre man weiter genau wie im vorigen Fall.

Hat $\mathfrak{B}$ die Gestalt $\neg\, \mathfrak{A}$, so wird $\Delta \rightarrow \mathfrak{C}$ reduziert zu $\Delta^{(*)} \rightarrow \mathfrak{A}$, und $\Gamma \rightarrow \neg\, \mathfrak{A}$ zu $\Gamma, \mathfrak{A} \rightarrow 1 = 2$. Nun bildet man, wie bisher, zwei „Kettenschlüsse" mit den Ergebnissen $\Theta, \mathfrak{A} \rightarrow 1 = 2$ und $\Theta \rightarrow \mathfrak{A}$. Diese beiden ergeben, in der Reihenfolge vertauscht, durch einen dritten „Kettenschluß" wieder $\Theta \rightarrow \mathfrak{D}$. Denn $\mathfrak{D}$ ist ja, wie $\mathfrak{C}$ und $1 = 2$, eine falsche Minimalformel.

14.254. Es bleiben noch folgende Möglichkeiten übrig: Die Hauptprämisse bleibt beim Reduktionsschritt an ihrer Herleitung *unverändert*; oder: ihre Änderung ist von der unter 14.253 angenommenen Art und die Prämisse $\Gamma \rightarrow \mathfrak{B}$ bleibt beim Reduktionsschritt an ihrer Herleitung *unverändert*. — In beiden Fällen führe man den Reduktionsschritt an der Herleitung der unverändert bleibenden Prämisse durch und ist damit fertig. Ist jedoch dieser Reduktionsschritt *an der Prämissen-Herleitung* insbesondere ein Reduktionsschritt gemäß 14.253 (wobei ja die Endsequenz, d. h. die Prämisse, *unverändert* bleibt), dann ist etwas *anders* zu verfahren, nämlich: Man führe diesen Reduktionsschritt aus, jedoch *ohne* den dafür vorgeschriebenen „dritten Kettenschluß" zu bilden; statt dessen setze man vielmehr die beiden Prämissen dieses „Kettenschlusses" an Stelle von dessen Ergebnis in die Reihe der Prämissen *des* „Kettenschlusses", der die *Gesamt*herleitung abschließt, ein. Man sieht leicht ein, daß dieser hierbei korrekt bleibt. Die Endsequenz wird nicht geändert.

Damit ist die Definition *eines Reduktionsschrittes an einer Herleitung* beendet.

§ 15.

Ordnungszahlen und Endlichkeitsbeweis.

Es bleibt jetzt noch zu zeigen, daß man, wenn man an einer vorgelegten Herleitung immer von neuem einen *Reduktionsschritt* ausführt, stets, d. h. wie man auch die Wahlen bei Wahlfreiheiten treffen mag, *in endlich vielen Schritten zur Endform* (der Endsequenz) gelangt. Damit ist dann auch für beliebige hergeleitete *Sequenzen* eine Reduziervorschrift (13. 6) gegeben; man braucht ja nur die *Herleitung* der Sequenz (gemäß § 14) zu reduzieren, und die *Sequenz* reduziert sich dabei (gemäß § 13) automatisch mit.

Um die Endlichkeit des Verfahrens nachzuweisen, wird man zeigen müssen, daß jeder Reduktionsschritt eine Herleitung in einem bestimmten Sinne „*vereinfacht*". Zu diesem Zwecke ordne ich jeder Herleitung eine „*Ordnungszahl*" zu, welche ein *Maß* für die „*Kompliziertheit*" der Herleitung darstellt (15. 1, 15. 2). Es läßt sich dann nämlich zeigen, daß bei jedem Reduktionsschritt an einer Herleitung deren Ordnungszahl (i. allg.) *kleiner* wird (15. 3). Hierdurch ist aber die *Endlichkeit* des Reduzierverfahrens noch nicht ohne weiteres gesichert; die Anordnung der Herleitungen (entsprechend der Größenanordnung ihrer Ordnungszahlen) ist nämlich insofern von besonderer Art, als es sein kann, daß eine Herleitung an Kompliziertheit *über unendlich vielen* anderen sich einreiht. Z. B. eine Herleitung, an deren Ende durch „vollständige Induktion", nebst $\forall$-Einführung, eine Endsequenz der Form $\rightarrow \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ gewonnen wird, ist als komplizierter anzusehen als ihre sämtlichen unendlich vielen durch Einsetzen bestimmter Zahlzeichen für $\mathfrak{x}$ und Auflösung der „vollständigen Induktion" (14. 23, 14. 24) entstehenden Spezialfälle. Dies kann nun noch in vielfach geschachtelter Weise eintreten. Infolgedessen haben die „Ordnungszahlen" den Charakter von „transfiniten Ordnungszahlen" (Anm. [21]), und die induktive Erfassung ihrer Gesamtheit ist nicht durch eine gewöhnliche vollständige Induktion möglich. sondern erst durch eine „*transfinite Induktion*", deren Gültigkeit eines besonderen Nachweises (15. 4) bedarf.

15. 1. *Definition der Ordnungszahlen* (rekursiv). Als „Ordnungszahlen" benutze ich gewisse positive *endliche Dezimalbrüche*, die nach folgender Vorschrift gebildet sind:

Ordnungszahlen mit dem Numerus 0 sind genau die folgenden Zahlen: 0,1, 0,11, 0,111, 0,1111, ..., d. h. allgemein: jede Zahl mit dem

Numerus 0, deren Mantisse aus endlich vielen Einsen besteht; sowie die Zahl 0,2.

Das Anhängen von Nullen am Ende sei, auch im folgenden, nicht gestattet; die Schreibweise soll eindeutig sein. — Ich nenne eine Mantisse *kleiner* als eine andere Mantisse, wenn diese Beziehung zwischen den durch Vorsetzen von „0,“ entstehenden *Zahlen* besteht.

Die Mantisse einer Ordnungszahl mit dem Numerus $\varrho + 1$ ($\varrho \geqq 0$) erhält man, indem man eine Anzahl voneinander verschiedener Ordnungszahlen (mindestens eine) mit dem Numerus ϱ nimmt, deren Mantissen der Größe nach ordnet, so daß die größte zuerst kommt, die kleinste zuletzt, und sie in dieser Reihenfolge hintereinanderschreibt, wobei jeweils zwischen zwei aufeinanderfolgende Mantissen $\varrho + 1$ Nullen einzufügen sind. *Alle* auf diese Weise aus Ordnungszahlen mit dem Numerus ϱ zu erhaltenden Zahlen, und keine anderen, sind Ordnungszahlen mit dem Numerus $\varrho + 1$.

Beispiele von Ordnungszahlen:

0,1111, 1,1101, 1,2, 2,111, 2,2010011010011, 3,201002 0001.

Man kann aus einer gegebenen Zahl mit dem Numerus $\varrho + 1$ eindeutig ersehen, aus *welchen* Zahlen mit dem Numerus ϱ sie nach obiger Vorschrift erzeugt ist. Denn eine Zahl mit dem Numerus σ kann offenbar nicht mehr als σ aufeinanderfolgende Nullen an irgendeiner Stelle enthalten.

Näheres über die *Anordnung* der Ordnungszahlen folgt unter 15. 4.

15. 2. *Die Zuordnung von Ordnungszahlen zu Herleitungen.*

Zu jeder gegebenen Herleitung (im Sinne von 14. 1) läßt sich nach folgender rekursiven Vorschrift eindeutig eine zugehörige Ordnungszahl berechnen:

Dabei gilt stets, worauf zu achten ist: Die Höchstanzahl (ν) aufeinanderfolgender Nullen in der Mantisse ist größer als 1, und alle durch Folgen von ν Nullen getrennten *Teile*, außer dem letzten, beginnen mit der Ziffer 2, der *letzte* Teil besteht nur aus Einsen.

Ist die Endsequenz der Herleitung eine *Grundsequenz*, so erhält die Herleitung eine Ordnungszahl der Form 2,2001 .. 1, wobei die Anzahl der Einsen um 1 größer als die Anzahl der in der Sequenz vorkommenden *Aussagenverknüpfungszeichen* zu wählen ist.

Nunmehr sei die Endsequenz das Ergebnis einer *Schlußregel*-Anwendung, und für die Herleitungen der Prämissen seien bereits die zugehörigen Ordnungszahlen bekannt. Aus diesen berechnet sich die Ordnungszahl der Gesamtherleitung wie folgt:

Ist die Endsequenz das Ergebnis einer $\forall$- oder $\neg$-Einführung, so füge man der Ordnungszahl für die Herleitung der Prämisse eine Ziffer 1 hinten an. Auf Grund der angegebenen Eigenschaften beliebiger Herleitungs-Ordnungszahlen ist dies offenbar wieder eine korrekte Ordnungszahl gemäß 15. 1.

Ist die Endsequenz das Ergebnis eines „*Kettenschlusses*“, so betrachte man die Mantissen der Ordnungszahlen der Herleitungen für die Prämissen; ν sei die Höchstanzahl aufeinanderfolgender Nullen in allen diesen. Kommen *gleiche* Mantissen darunter vor, so *unterscheide* man diese, indem man jeweils *einer* $\nu+1$ Nullen und eine 1, einer weiteren $\nu+1$ Nullen und *zwei* Einsen, usf., anhängt; dies führe man in gleicher Weise bei *jedem* Vorkommen von gleichen Mantissen durch. Die nunmehr erhaltenen Mantissen sind sämtlich *verschieden*; man schreibe sie der Größe nach hintereinander (die größte voran), mit jeweils $\nu+2$ Nullen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Mantissen; ferner hänge man am Schluß noch $\nu+2$ Nullen und eine 1 an. Hiermit hat man die Mantisse der Ordnungszahl für die Gesamtherleitung. Als *Numerus* dazu nehme man die kleinste natürliche Zahl, deren *Überschuß* über die Höchstanzahl aufeinanderfolgender Nullen in der Mantisse $\geqq 0$ und *erstens* nicht um mehr als 2 kleiner ist als der entsprechende Überschuß in irgendeiner der Ordnungszahlen für die Herleitungen der Prämissen, und *zweitens* nicht kleiner als die zweimal genommene Anzahl der *Aussagenverknüpfungszeichen* in der Hinterformel irgendeiner der Hauptprämisse (14. 2 5) vorangehenden Prämisse.

Ist die Endsequenz das Ergebnis einer „*vollständigen Induktion*“, so erhält die Ordnungszahl der Gesamtherleitung eine Mantisse der Form 201 .. 10 .. 01; dabei ist die Anzahl der aufeinanderfolgenden *Einsen* um 1 größer zu wählen als die Anzahl aufeinanderfolgender Einsen an entsprechender Stelle in der *größeren* der Mantissen der Ordnungszahlen für die Herleitungen der beiden *Prämissen* (bzw. *irgendeiner*, wenn beide *gleich* sind); d. h.: beginnt diese mit 200, so ist *eine* 1 zu nehmen; andernfalls muß sie mit 201 .. 10 beginnen, dann nimmt man eine 1 mehr als hier. Die Anzahl der aufeinanderfolgenden *Nullen* soll $\nu+2$ sein, wobei ν die Höchstanzahl aufeinanderfolgender Nullen in den beiden genannten Mantissen sei. Als *Numerus* dazu nehme man die kleinste natürliche Zahl, deren *Überschuß* über die Höchstanzahl aufeinanderfolgender Nullen in der Mantisse $\geqq 0$ und *erstens* nicht um mehr als 2 kleiner ist als der entsprechende Überschuß in irgendeiner der beiden benutzten Ordnungszahlen, und *zweitens* nicht kleiner als die zweimal genommene Anzahl der Aussagenverknüpfungszeichen in der Formel $\mathfrak{F}(1)$.

Man überlege sich immer, daß die neu gebildete Zahl wieder eine korrekte Ordnungszahl (15. 1) ist, und überdies die oben angegebenen besonderen Eigenschaften besitzt.

15.3. *Die Verkleinerung der Ordnungszahl bei Durchführung eines Reduktionsschrittes.*

Jetzt ist zu beweisen, daß bei jedem Herleitungs-Reduktionsschritt gemäß 14.2 im allgemeinen die Ordnungszahl der neu entstehenden Herleitung *kleiner* ist als die der alten. Ich werde zeigen: Der *Numerus* wird nicht größer; die *Mantisse* wird kleiner, außer in den Fällen, wo die Endsequenz nach Ersetzung der freien Variablen und Terme bereits *Endform* annimmt (14.21, 14.22); ferner bleibt die Höchstanzahl aufeinanderfolgender Nullen in der Mantisse *ungeändert*, *außer* im Falle einer Reduktion gemäß 14.253; und in diesem Falle wird sie genau um 2 größer.

Ich verfahre wieder rekursiv, d. h. ich beweise die Behauptung durch vollständige Induktion.

Für Herleitungen, deren Endsequenz eine *Grundsequenz* ist, folgt alles aus der Festsetzung der Ordnungszahl für eine solche Herleitung, zusammen mit der Tatsache, daß beim Reduktionsschritt eine Änderung der Sequenz gemäß 13.2 bzw. 13.5 erfolgt, wobei die Anzahl der vorkommenden Aussagenverknüpfungszeichen sich *verringert.* (Entsteht zuvor schon *Endform*, so bleibt die Ordnungszahl ungeändert.) Wichtig ist hierfür, daß bei Änderungen gemäß 13.5 die geänderte Vorderformel stets *weggelassen* wird, siehe 13.91—13.93.

Sei nun die Endsequenz das Ergebnis einer *Schlußregel*-Anwendung und die Behauptung für die Herleitungen der *Prämissen* als schon bewiesen angenommen.

Der *Vorbereitungsschritt* (14.22) hat auf die Ordnungszahl der Herleitung sichtlich keinen Einfluß. Wenn dabei die Endsequenz bereits *Endform* annimmt, bleibt also die Ordnungszahl ungeändert. Ist das nicht der Fall, so gilt:

Ist die Endsequenz das Ergebnis einer $\forall$- oder $\neg$-Einführung, so folgt die Behauptung ohne weiteres aus der Festsetzung der Ordnungszahl für eine solche Herleitung.

Auch wenn die Endsequenz das Ergebnis einer „*vollständigen Induktion*" ist, ergibt sich die Richtigkeit der Behauptung leicht. Die „vollständige Induktion" wird ja in einen „Kettenschluß" verwandelt; der Numerus der Ordnungszahl wird dabei nicht größer; die Mantisse kann zwar viel *länger* werden, doch wird sie trotzdem *kleiner*, da ja am *Anfang* stets die Mantisse der Ordnungszahl einer der beiden ursprünglichen Prämissenherleitungen zu stehen kommt. Die Höchstanzahl aufeinanderfolgender Nullen $(\nu + 2)$ bleibt bestehen.

Sei schließlich die Endsequenz das Ergebnis eines „*Kettenschlusses*". Eine Vorverlegung der Hauptprämisse (14.25) ändert die Mantisse der

Ordnungszahl nicht; doch kann der *Numerus* dabei kleiner werden, dadurch, daß gewisse Prämissen-Hinterformeln von der Mitbestimmung bei seiner Berechnung ausscheiden.

Der Reduktionsschritt erfolge nun etwa gemäß 14.2 5 1 oder 14.2 5 2. Hierbei wird eine der Mantissen der Ordnungszahlen für die *Prämissen*herleitungen, ohne Änderung der höchsten in ihr vorkommenden *Nullenzahl*, verkleinert. Dies wirkt sich auf die Mantisse für die Ordnungszahl der Gesamtherleitung offenbar gleichfalls *verkleinernd* aus. Die Nullenzahl $\nu + 2$ bleibt ja erhalten; die kleiner gewordene Mantisse rückt unter Umständen an einen *späteren* Platz in der nach Größe geordneten Reihe; war sie eine von mehreren *gleichen*, so erhalten die übrigen jetzt je eine 1 *weniger* angehängt; *auf jeden Fall* muß die erste nicht gleich gebliebene Mantisse in der Reihe der durch je $\nu + 2$ Nullen getrennten Mantissen eine *kleinere* sein als zuvor; damit ist auch die Gesamtmantisse sicher verkleinert. Der *Numerus* wird nicht vergrößert.

Bei einem Reduktionsschritt gemäß 14.2 5 3 wird die Ordnungszahl der Herleitung wie folgt geändert: Betrachten wir zunächst die Ordnungszahlen für die beiden Herleitungen, die mit dem neu gebildeten ersten bzw. zweiten „Kettenschluß“ abschließen. Für diese beiden besteht der *gleiche* Sachverhalt wie in dem *vorigen* Falle, d. h.: Die beiden Mantissen sind *kleiner* als die Mantisse der Ordnungszahl der ursprünglichen Herleitung; die Höchstzahl aufeinanderfolgender Nullen $(\nu + 2)$ ist die *gleiche* geblieben; die Numeri sind nicht größer geworden. Nun fügen wir den *dritten* „Kettenschluß“ an und bilden die Ordnungszahl der neuen Gesamtherleitung: Die *Mantisse* beginnt mit einer der beiden Mantissen, und nachfolgenden $\nu + 3$ (im allgemeinen $\nu + 4$) Nullen; folglich ist sie gleichfalls kleiner als die der ursprünglichen Ordnungszahl; die Höchstzahl aufeinanderfolgender Nullen ist $\nu + 4$, also um 2 größer als zuvor; der *Numerus* schließlich kann *nicht größer* geworden sein, denn: Die Anzahl der Aussagenverknüpfungszeichen in der Hinterformel $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$, bzw. $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$, bzw. $\mathfrak{A}$, ist *geringer* als in der Formel $\mathfrak{B}$, d. h. in $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$, bzw. $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$, bzw. $\neg \mathfrak{A}$; folglich ist die Summe der zweimal genommenen *ersteren* mit $\nu + 4$, die den neuen Numerus mitbestimmt, nicht größer als die Summe der zweimal genommenen *letzteren* mit $\nu + 2$; und kleiner als diese konnte der Numerus der *ursprünglichen* Herleitung nicht sein, da ja $\mathfrak{B}$ zu den bei seiner Berechnung mitbestimmenden Hinterformeln gehörte.

Bei einem Reduktionsschritt gemäß 14.2 5 4 ist die Lage, wenn nicht der *Sonderfall* vorliegt, dieselbe wie bei 14.2 5 1 und 14.2 5 2. Doch auch der Sonderfall erledigt sich nach den vorangehenden Betrachtungen ohne Mühe; es wird dabei eine der Mantissen der Ordnungszahlen für die Prämissenherleitungen nicht mehr wie oben durch *eine*, sondern durch *zwei* kleinere Mantissen ersetzt; die Wirkung ist aber in jeder erforderlichen Hinsicht die gleiche. Der Numerus wird nicht vergrößert; sein „Überschuß“ durfte vor der Reduktion nicht um mehr als 2 kleiner sein als die zweimal genommene Anzahl der Aussagenverknüpfungszeichen in $\mathfrak{B}$, so daß durch die Mitbestimmung von $\mathfrak{F}(\mathfrak{n})$, bzw. $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$, bzw. $\mathfrak{A}$ *nach* der Reduktion keine Vergrößerung eintreten kann.

Damit ist die (im allgemeinen eintretende) Verkleinerung der Ordnungszahl bei Reduktionsschritten *bewiesen*. Der *wichtigste Punkt* war die *Numerus*betrachtung bei der Behandlung der Reduktionsschritte 14.253 und 14.254; dies ist der Gedanke, durch den es gelingt, bei einem derartigen Reduktionsschritt eine *Vereinfachung* der Herleitung zu erkennen, trotz der scheinbaren Zunahme an Kompliziertheit. Die Vereinfachung besteht eben darin, daß die Prämissen des „dritten Kettenschlusses“ *in geringerem Maße miteinander „verflochten“* sind (nämlich entsprechend der Anzahl der Aussagenverknüpfungszeichen in der Hinterformel der ersten Prämisse, die zugleich Vorderformel der zweiten ist), als es die Prämissen des ersten und zweiten, und die des ursprünglichen „Kettenschlusses“ waren. An diesen Gesichtspunkt schließt sich die Art der Zuteilung der Ordnungszahl beim „Kettenschluß“ (15.2) an; alles übrige ergibt sich dann mehr oder weniger von selbst.

15.4. *Nachweis der Endlichkeit des Reduzierverfahrens.* Einige — nachfolgend gebrauchte — Tatsachen über die *Größenanordnung* der Ordnungszahlen:

Ich ordne jeder Zahl α mit dem Numerus ϱ ($\varrho \geqq 0$) das System $\mathfrak{S}(\alpha)$ derjenigen Zahlen mit dem Numerus $\varrho + 1$ zu, bei deren Bildung gemäß 15.1 die größte der benutzten Ordnungszahlen mit dem Numerus ϱ die Zahl α ist. Jede Ordnungszahl mit dem Numerus $\varrho + 1$ gehört eindeutig einem solchen System $\mathfrak{S}(\alpha)$ zu. Ist α_1 kleiner als α_2, so ist auch jede Zahl von $\mathfrak{S}(\alpha_1)$ kleiner als jede Zahl von $\mathfrak{S}(\alpha_2)$. Die Anordnung der Systeme $\mathfrak{S}(\alpha)$ entspricht also der Anordnung der Zahlen α. Für die Anordnung der Zahlen (mit dem Numerus $\varrho + 1$) *innerhalb* eines Systems $\mathfrak{S}(\alpha)$ gilt folgendes: Die *kleinste* Zahl innerhalb $\mathfrak{S}(\alpha)$ ist die Zahl $\alpha + 1$. Die *übrigen* Zahlen von $\mathfrak{S}(\alpha)$ entsprechen Anordnungs-isomorph der Gesamtheit der Zahlen mit dem Numerus $\varrho + 1$, die *kleiner* als $\alpha + 1$ sind, in folgender Weise: Jede Zahl von $\mathfrak{S}(\alpha)$, außer $\alpha + 1$, entsteht aus $\alpha + 1$, indem man $\varrho + 1$ Nullen und dahinter die Mantisse irgendeiner der Zahlen mit dem Numerus $\varrho + 1$, die kleiner als $\alpha + 1$ sind, anfügt. Deren *Anordnung* überträgt sich dabei.

Die Richtigkeit all dieser Behauptungen ist an Hand der Definition der Ordnungszahlen leicht einzusehen. Es ist nützlich, sich mit ihrer

Hilfe die Anordnung der Ordnungszahlen mit dem Numerus 1, sowie 2 und 3 beispielsweise, anschaulich zu machen[21]).

Ich behaupte nun *(Satz der „transfiniten Induktion")*:

Alle Ordnungszahlen (15. 1) sind bei Durchlaufung derselben nach wachsender Größe in folgendem Sinne *„erreichbar"*: Die erste Zahl 0,1 gilt als „erreichbar"; wenn ferner alle Zahlen, die kleiner als eine Zahl β sind, bereits als „erreichbar" erkannt sind, so gilt auch β als „erreichbar".

Beweis. Erreichbar ist zunächst 0,1, also auch 0,11, also auch 0,111, usw., allgemein ergibt sich durch vollständige Induktion: jede Zahl, die kleiner als 0,2 ist, ist erreichbar. Folglich ist auch 0,2 erreichbar, und damit sämtliche Zahlen mit dem Numerus 0. Nun wende ich *vollständige Induktion* an, d. h. ich nehme an, die Erreichbarkeit aller Zahlen bis zu denen mit dem Numerus ϱ ($\varrho \geqq 0$) einschließlich sei bereits bewiesen, und sie ist nun für die Zahlen mit dem Numerus $\varrho + 1$ zu beweisen. Die *erste* dieser Zahlen, d. h. die Zahl mit der Mantisse 1, ist erreichbar. Nun beachte man: Die Durchlaufung der Zahlen mit dem Numerus ϱ ist bereits geleistet. Jeder solchen Zahl α entspricht ein System $\mathfrak{S}(\alpha)$ von Zahlen mit dem Numerus $\varrho + 1$; dieses System besteht aus der Zahl $\alpha + 1$ und einem *den* Zahlen mit dem Numerus $\varrho + 1$, die *kleiner* als $\alpha + 1$ sind, Anordnungs-isomorphen System. Eine Durchlaufung der Zahlen mit dem Numerus $\varrho + 1$ ist nun nichts anderes als eine Durchlaufung der *Systeme* $\mathfrak{S}(\alpha)$ in derselben Weise, wie die *Zahlen* α

---

[21]) Für Kenner der Mengenlehre sei bemerkt: Das System der von mir benutzten „Ordnungszahlen" ist durch die $<$-Beziehung *wohlgeordnet*, und zwar entsprechen den Zahlen mit dem Numerus 0, 1, 2, 3, 4, 5 usw. bezüglich die transfiniten Ordnungszahlen $\omega + 1$, $2^{\omega+1} = \omega + \omega$, $2^{\omega+\omega} = \omega \cdot \omega$, $2^{\omega\cdot\omega} = \omega^{\omega}$, $2^{(\omega^{\omega})} = \omega^{(\omega^{\omega})}$, $2^{[\omega^{(\omega^{\omega})}]} = \omega^{[\omega^{(\omega^{\omega})}]}$, usw.; dem Gesamtsystem entspricht die „erste ε-Zahl". (Zum Beweise bedenke man, daß der im Text beschriebene Übergang von den Zahlen mit dem Numerus ϱ zu den Zahlen mit dem Numerus $\varrho + 1$ dem Definitionsgesetz der Potenz von 2 entspricht, und berücksichtige weiterhin die Rechenregeln für transfinite Ordnungszahlen.) Der „Satz der transfiniten Induktion" besagt nichts anderes als die Gültigkeit der transfiniten Induktion für diesen Abschnitt der II. Zahlklasse. Die Bedenklichkeiten der allgemeinen Mengenlehre gehen in den Widerspruchsfreiheitsbeweis natürlich nicht ein. da in diesem die entsprechenden Begriffe und Sätze ganz unabhängig in viel elementarerer Weise als in der Mengenlehre, wo sie dafür eine weit größere Allgemeinheit besitzen, entwickelt werden. — Ähnliche Inbezugsetzungen zwischen mathematischen Beweisen bzw. Sätzen und der Theorie der Wohlordnung, insbesondere der Zahlen der II. Zahlklasse, finden sich bei: A. Church, A proof of freedom from contradiction, Proc. Nat. Acad. of Sc. **21** (1935), S. 275—281; und: E. Zermelo, Grundlagen einer allgemeinen Theorie der mathematischen Satzsysteme I, Fund. Math. **25** (1935), S. 136—146.

mit dem Numerus ϱ durchlaufen wurden; hat man nämlich eine Zahl $\alpha + 1$ als erreichbar erkannt, so sind zugleich alle übrigen Zahlen des Systems $\mathfrak{S}(\alpha)$ offenbar erreichbar; man hat ja nur dieses System *in genau derselben Weise* zu durchlaufen wie das bereits durchlaufene *isomorphe* System der Zahlen (mit dem Numerus $\varrho + 1$) *kleiner* als $\alpha + 1$. So lassen sich sämtliche Zahlen mit dem Numerus $\varrho + 1$ durchlaufen, auf Grund der schon geleisteten Durchlaufung der Zahlen mit dem Numerus ϱ. Der Gesamtheit der Zahlen α (mit dem Numerus ϱ), die kleiner als eine Zahl α_0 sind, entspricht bei der Zahl $\alpha_0 + 1$ (mit dem Numerus $\varrho + 1$) die Gesamtheit der zu den *Systemen* $\mathfrak{S}(\alpha)$ *gehörigen* Zahlen (mit $\alpha < \alpha_0$).

Abschluß. Mit Hilfe des „Satzes der transfiniten Induktion" ergibt sich nun ohne weiteres die *Endlichkeit des Reduzierverfahrens* für beliebige Herleitungen. Ist nämlich die Endlichkeit des Reduzierverfahrens bereits bewiesen für alle Herleitungen, deren Ordnungszahl kleiner als eine Zahl β ist, so gilt sie auch für jede Herleitung mit der Ordnungszahl β; denn diese geht ja durch *einen* Reduktionsschritt in eine Herleitung mit *kleinerer* Ordnungszahl, oder mit Endform, über. (Hatte die Herleitung jedoch Endform, so ist überhaupt nichts mehr zu beweisen.) Somit überträgt sich die Tatsache der Endlichkeit des Reduzierverfahrens von der Gesamtheit der Herleitungen mit Ordnungszahlen *kleiner* als β auf die Herleitungen mit der Ordnungszahl β; nach dem Satz der transfiniten Induktion gilt sie also für *alle* Herleitungen, mit *beliebigen* Ordnungszahlen. Damit ist der Widerspruchsfreiheitsbeweis *beendet*.

V. Abschnitt.

Betrachtungen zum Widerspruchsfreiheitsbeweis.

§ 16.

Die beim Widerspruchsfreiheitsbeweis benutzten Schlußweisen.

Die Schlüsse und Begriffsbildungen, die ich beim Widerspruchsfreiheitsbeweis angewandt habe, will ich im folgenden nach *zwei Gesichtspunkten* begutachten: Erstens ist zu untersuchen, wieweit sie als *unbedenklich* gelten können (16.1), zweitens, im Zusammenhang mit dem *Satz von Gödel* (2.32), wieweit sie den in der formalisierten reinen Zahlentheorie enthaltenen Beweismitteln entsprechen und in welcher Weise sie über diese *hinausgehen* (16.2).

16.1. In der Frage der *Unbedenklichkeit* der benutzten Beweismittel ist der kritische Punkt der *Endlichkeitsbeweis* (15.4). Stellen wir diesen vorerst zurück. Die sonst im Widerspruchsfreiheitsbeweis benutzten Beweismittel können mit Bestimmtheit als „*finit*“, in dem im III. Abschnitt ausführlich erörterten Sinne, bezeichnet werden. Dies läßt sich nicht „beweisen“, schon allein, weil der Begriff „finit“ nicht eindeutig formal abgegrenzt ist und auch kaum abgegrenzt werden kann. Man muß sich eben jeden einzelnen Schluß daraufhin ansehen und sich darüber klar zu werden versuchen, ob er mit dem finiten Sinn der vorkommenden Begriffe im Einklang steht und nicht etwa auf einer unzulässigen „an-sich“-Auffassung dieser Begriffe beruht. Ich will die hierfür wichtigsten Stellen des Widerspruchsfreiheitsbeweises kurz besprechen:

Die *Gegenstände* des Widerspruchsfreiheitsbeweises, wie der Beweistheorie überhaupt, sind gewisse *Zeichen* und *Ausdrücke*, wie z. B. Terme, Formeln, Sequenzen, Herleitungen, Ordnungszahlen, außerdem übrigens auch natürliche Zahlen. Die Definitionen aller dieser Gegenstände erfolgten (3. 2, 5. 2, 14. 1, 15. 1) durch *Konstruktionsvorschriften*, entsprechend der Definition der natürlichen Zahlen (8. 1 1); eine solche Vorschrift gibt jeweils an, wie man sich schrittweise immer mehr derartige Gegenstände herstellen kann. — Vorauszusetzen ist dabei, daß in der formalisierten reinen Zahlentheorie *bestimmte* „Funktionen“, „Prädikate“ und „Axiome“ festgesetzt sind, welche die an diese gestellten Bedingungen erfüllen (13. 1 2, 13. 3, 13. 9 1). Durch diese Voraussetzung kommt eigentlich ein transfinit verwendetes „wenn — so“ in den Widerspruchsfreiheitsbeweis hinein; dies ist aber offenbar harmlos, da man den Beweis überhaupt erst als sinnvoll anzusehen braucht, wenn jene wirklich festgesetzt und die Bedingungen als erfüllt erwiesen sind. —

Für diese Gegenstände wurden ferner eine Reihe von *Funktionen* und *Prädikaten* verwandt, die im Sinne von 8. 12 *entscheidbar definiert* wurden. Z. B. die *Funktion* „die Endformel einer Herleitung“, das *Prädikat* „mindestens ein $\forall$- oder $\exists$-Zeichen enthalten“ und viele andere. Entscheidbar definiert wurden vor allem auch, wie unschwer nachzuprüfen, die Funktionen: „die aus einer Herleitung durch die *Umformung* gemäß § 12 entstehende Herleitung“, „die aus einer Herleitung durch einen *Reduktionsschritt*, unter bestimmter Festsetzung der etwaigen wahlfreien Bestimmungen, entstehende Herleitung“ (14. 2), „die *Ordnungszahl* einer Herleitung“ (15. 2).

Ferner wurden durch *vollständige Induktion* Aussagen „für *alle* Sequenzen“, „für *alle* Herleitungen“ u. dgl. bewiesen, deren Gültigkeit für jede *einzelne* Sequenz oder Herleitung *entscheidbar* ist. Z. B.: „Die aus einer Herleitung durch einen Reduktionsschritt entstehende Figur ist wieder eine Herleitung, und die Änderung der Endsequenz erfüllt gewisse Bedingungen“ (14. 2); „bei Durchführung eines Reduktionsschrittes wird die Ordnungszahl verkleinert“ (15. 3).

Bei der Anwendung des Begriffes „alle“ im Widerspruchsfreiheitsbeweis habe ich nicht die umständliche finite Ausdrucksweise dafür gemäß 10.11 gebraucht; hier ist ja der Unterschied zwischen an-sich-Auffassung und finiter Auffassung ohnehin für das Schließen belanglos.

Die *Verneinung* einer transfiniten Aussage kommt in dem ganzen Beweis nur unter 13.90 vor, und nur in harmloser Form, indem nämlich die betreffende Aussage auf einen ganz elementaren Widerspruch führt. Sie läßt sich überdies ganz *vermeiden*, wenn man für „Widerspruchsfreiheit“ den positiveren Ausdruck gebraucht: „Jede Herleitung hat eine Endformel, die nicht die Gestalt $\mathfrak{A} \,\&\, \neg\, \mathfrak{A}$ hat.“ Dieses „nicht“ ist nun nicht mehr transfinit.

16.11. Wie steht es nun schließlich mit dem *Endlichkeitsbeweis* (15.4)?

Der Begriff „*erreichbar*“ beim „Satz der transfiniten Induktion“ ist von ganz besonderer Art. Sein Zutreffen auf irgendeine vorgelegte Zahl ist keineswegs von vornherein *entscheidbar*; er ist daher von dem in § 9 erklärten Standpunkt aus nicht von vornherein *sinnvoll*, da ja ein „Sinn an sich“ abgelehnt wird. Er gewinnt vielmehr erst einen *Sinn*, für eine bestimmte Zahl ausgesprochen, gleichzeitig mit dem *Beweise seiner Gültigkeit* für diese Zahl. Das ist auch durchaus zulässig; der gleiche Sachverhalt besteht ja bei *allen transfiniten Aussagen*, wenn man ihnen einen finiten Sinn beilegen will, vgl. § 10. Die Definition des Begriffs „erreichbar“ ist mit der Erklärung „wenn alle Zahlen kleiner als β bereits als erreichbar *erkannt* sind, so ist auch β erreichbar“ bereits dieser Auffassung entsprechend gefaßt. In dieser Formulierung liegt natürlich nicht etwa ein *Zirkel*, sondern die Definition ist durchaus *konstruktiv*; es wird ja β erst *dann* als erreichbar erklärt, wenn *zuvor* schon alle Zahlen kleiner als β als erreichbar erkannt sind. Das dabei vorkommende „*alle*“ ist natürlich *finit* aufzufassen (10.11); es handelt sich ja stets um eine Gesamtheit mit einer *konstruktiven* Erzeugungsvorschrift für alle Elemente.

Zu dem *Beweis* des Satzes der transfiniten Induktion ist zu sagen: Aus der Art der Definition des Begriffs „erreichbar“ ergibt sich, daß beim Beweis eine „Durchlaufung“ sämtlicher Ordnungszahlen nach wachsender Größe stattfinden muß. Bei der Behandlung der Zahlen mit dem Numerus 0 ist zu beachten: Die *unendliche* Gesamtheit der Zahlen kleiner als 0,2 wird überwunden durch den *einen* Gedanken: Man *kann* den Beweis *beliebig* weit in diese Gesamtheit hinein fortführen; *also* darf man die *ganze* Gesamtheit als erledigt betrachten. Diese „potentielle“ Auffassung der „Durchlaufung“ einer unendlichen Gesamtheit ist bei dem *ganzen Beweis* beizubehalten.

Das Auftreten einer *transfiniten Induktionsannahme* bei der vollständigen Induktion nach ϱ ist im Sinne von 10.5 aufzufassen und daher unbedenklich. Bei dem Schluß: „wenn die Zahl $\alpha + 1$ als erreichbar erkannt ist, so sind auch alle übrigen Zahlen des Systems $\mathfrak{S}(\alpha)$ erreichbar", tritt ein *transfinites* „wenn – so" auf. Gegen diesen Begriff wurden unter 11. 1 Bedenken erhoben; diese treffen aber den vorliegenden Fall schon darum nicht, weil die Annahme hier nicht als *hypothetisch* aufzufassen ist, vielmehr gemeint ist: wenn die Erreichung von $\alpha + 1$ bereits *vollzogen* ist, *dann* gelingt auch die Durchlaufung der Zahlen von $\mathfrak{S}(\alpha)$ (nämlich genau entsprechend der vollzogenen Durchlaufung der Zahlen vor $\alpha + 1$).

Betrachten wir nun den *gesamten* Induktionsschritt, d. h. die Zurückführung der Durchlaufung des $\underset{\smile}{\varrho} + 1$-Systems auf die Durchlaufung des $\underset{\smile}{\varrho}$-Systems. Dies ist wohl der kritischste Punkt des ganzen. Doch glaube ich, daß man dem hierbei benutzten Gedankengang, wenn man sich recht anschaulich hineindenkt, eine beträchtliche Evidenz nicht absprechen kann. Man überlege sich etwa die Anfangsfälle mit dem Numerus 1, 2, 3 ausführlich. Es kommt mit wachsendem Numerus dann ja niemals etwas *grundsätzlich* neues hinzu; die Art des Fortschreitens bleibt immer die gleiche. Freilich findet ein starkes Anwachsen der Kompliziertheit der vielfach übereinandergeschachtelten Unendlichkeiten, die jeweils zu „durchlaufen" sind, statt; die Durchlaufung muß stets als eine „potentielle", wie schon beim Numerus 0, aufgefaßt werden. Die Schwierigkeit liegt darin, daß der *genaue finite Sinn* der „Durchlaufung" der $\underset{\smile}{\varrho}$-Zahlen zwar in den Anfangsfällen einigermaßen übersehbar, jedoch im allgemeinen Falle von so großer *Kompliziertheit* ist, daß man sich nur noch eine unbestimmte Vorstellung davon machen kann; diese muß nun als ausreichend angesehen werden, um die Möglichkeit der Durchlaufung der $\underset{\smile}{\varrho} + 1$-Zahlen darauf in einsichtiger Weise zu begründen.

Der „Abschluss" endlich bringt nichts wesentlich neues mehr hinzu. Die Aussage, daß das Reduzierverfahren für eine Herleitung *endlich* sei, wie man auch die etwaigen *Wahlen* treffen möge, enthält ein transfinites „es gibt", in bezug auf die *Anzahl* der Reduktionsschritte nämlich. Diese Aussage ist von gleicher Art wie die Aussage der „Erreichbarkeit"; sie erhält gleichfalls ihren bestimmten *Sinn* in jedem Spezialfall erst, indem ihre Gültigkeit für diesen Fall *bewiesen* wird; das entspricht der finiten Auffassung (10. 3). Für den Beweis der *Widerspruchsfreiheit* allein ist übrigens der Begriff der „Wahlfreiheit" entbehrlich; da handelt es sich ja nur um die Reduktion einer Herleitung mit der Endsequenz $\rightarrow 1 = 2$ und alle Reduktionsschritte sind *eindeutig*, nicht von Wahlen abhängig. Die Anzahl der Schritte wird nun nicht von vornherein angegeben; es lassen sich nur gewisse Aussagen über sie machen, die immer *unbestimmter* werden, je größer die Ordnungszahl der Herleitung ist. (An die Stelle einer direkten Angabe tritt eine „Möglichkeit der Angabe".) Dies muß durchaus noch als mit der finiten Auffassung im Einklang stehend angesehen werden.

Im ganzen meine ich, daß auch der *Endlichkeitsbeweis* (15.4) innerhalb der grundsätzlichen Unterscheidung von bedenklichen und unbedenklichen Beweismitteln (§ 9) durchaus noch dem *Unbedenklichen* zugerechnet werden kann, so daß der Widerspruchsfreiheitsbeweis eine wirkliche *Sicherung* der bedenklichen Teile der reinen Zahlentheorie darstellt.

16.2. Um den Widerspruchsfreiheitsbeweis auf seine *Übereinstimmung mit dem Satz von Gödel* (2.32) zu prüfen, hätte man zunächst in entsprechender Weise, wie es Gödel in seiner in Anm. [3]) zitierten Arbeit durchführt, den Gegenständen der Beweistheorie (Formeln, Herleitungen usw.) *natürliche Zahlen zuzuordnen*, sowie die benötigten Funktionen und Prädikate für diese Gegenstände als Funktionen und Prädikate für die entsprechenden natürlichen Zahlen einzuführen. Damit wird der Widerspruchsfreiheitsbeweis zu einem Beweis mit natürlichen Zahlen als Gegenständen. Die von mir offen gelassenen Definitionsmöglichkeiten für Prädikate und Funktionen wären, um einen abgegrenzten Formalismus zu haben, auf bestimmte Schemen zu beschränken, die man leicht allgemein genug wählen kann, um die Definition auch aller in der Beweistheorie benötigten Funktionen und Prädikate zu ermöglichen; siehe etwa Gödels Fassung.

Die Schlußweisen beim Widerspruchsfreiheitsbeweis sind alsdann auch *keine anderen* als die in der formalisierten Zahlentheorie angegebenen; *nur* der Endlichkeitsbeweis (15.4) nimmt wiederum eine Sonderstellung ein. Es ist nicht ersichtlich, wie dieser mit den Hilfsmitteln der reinen Zahlentheorie sollte dargestellt werden können. Dadurch ist der Widerspruchsfreiheitsbeweis mit dem Gödelschen Satz im Einklang.

Im Zusammenhang hiermit sind folgende zwei Tatsachen von Interesse, auf deren Beweis ich nicht eingehe, da er zu weit führen würde:

1. Läßt man aus der formalisierten reinen Zahlentheorie die Schlußregel der *vollständigen Induktion* weg, so kann der Widerspruchsfreiheitsbeweis ohne wesentliche Änderung so gefaßt werden, daß er — nach Durchführung der genannten Umdeutung in einen Beweis über natürliche Zahlen — völlig mit Hilfsmitteln der reinen Zahlentheorie (*einschließlich* der vollständigen Induktion) auskommt.

2. Der Widerspruchsfreiheitsbeweis für die *gesamte* reine Zahlentheorie läßt sich, auf natürliche Zahlen als Gegenstände umgedeutet, mit Hilfsmitteln der *Analysis* darstellen[22]).

[22]) Siehe auch K. Gödel, Über Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit, Ergebnisse eines math. Koll., Heft 3 (1932), S. 12—13.

Die Sonderstellung der Schlußregel der *vollständigen Induktion* liegt in folgendem Umstand begründet: Wenn man diese *wegläßt*, kann man für die *Anzahl der Reduktionsschritte*, die zum Reduzieren einer bestimmten Sequenz erforderlich sind, eine *bestimmte obere Schranke* angeben. Nimmt man jedoch die Schlußregel der vollständigen Induktion hinzu, so kann diese Anzahl, in Abhängigkeit von *Wahlen, beliebig groß* werden. Bei der Behandlung dieser Schlußregel (14. 2 4) ist nämlich die Anzahl der erforderlichen Reduktionsschritte für die Sequenz $\Gamma, \Delta \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ offenbar von der Zahl n (dem Wert von $\mathfrak{t}$) abhängig, und diese kann unter Umständen von einer *Wahl abhängen*, etwa indem $\mathfrak{t}$ eine *freie Variable*, also zunächst durch ein beliebig zu *wählendes* Zahlzeichen $\mathfrak{n}$ zu ersetzen ist. In diesem Falle gibt es für die Anzahl der Reduktionsschritte beim Reduzieren der Sequenz $\Gamma, \Delta \rightarrow \mathfrak{F}(\mathfrak{t})$ u. U. *keine* allgemeine Schranke.

Mit diesem Umstand dürfte es zusammenhängen, daß in die *früheren* Widerspruchsfreiheitsbeweise die Schlußregel der vollständigen Induktion sich nicht einbeziehen ließ (2. 4).

§ 17.

Die Tragweite des Widerspruchsfreiheitsbeweises.

Ich behandle zunächst die Frage, wieweit der Widerspruchsfreiheitsbeweis anwendbar bleibt, wenn man die im II. Abschnitt formulierte „reine Zahlentheorie“ durch Hinzufügen neuer Begriffe und Methoden *erweitert* (17. 1), weise dann auf seine *Übertragbarkeit* auf weitere Teilgebiete der Mathematik hin (17. 2), und gehe schließlich auf gewisse *Einwendungen* der „Intuitionisten“ gegen die *Bedeutung* von Widerspruchsfreiheitsbeweisen überhaupt ein (17. 3).

17. 1. Für den Wert eines Widerspruchsfreiheitsbeweises ist es sehr wesentlich, ob der zugrunde gelegte Formalismus die betreffende mathematische Theorie, in unserem Falle die reine Zahlentheorie. wirklich *vollständig* umfaßt (vgl. 3. 3, 5. 3). Nun braucht sich aber die praktische reine Zahlentheorie an keine formalen Begrenzungen gebunden zu halten; sie kann immer wieder durch neuartige Begriffsbildungen, vielleicht auch durch Anwendung neuartiger Schlußweisen *erweitert* werden. Wie steht es dann mit der Widerspruchsfreiheit? Nun, *man muß eben bei jedem Fortschreiten über den bisherigen Rahmen hinaus zugleich den Widerspruchsfreiheitsbeweis auf das neu hinzukommende ausdehnen.* Der Widerspruchsfreiheitsbeweis ist bereits so angelegt, daß dies in weitestem Maße ohne Schwierigkeiten möglich ist.

Führt man etwa neue *Funktionen* oder *Prädikate* für natürliche Zahlen ein, so hat man dafür *Entscheidungsvorschriften* gemäß 8. 1 2 anzugeben; führt man zugehörige mathematische *Axiome* ein, so hat man *Reduzier-*

vorschriften für diese gemäß 13.91 anzugeben (vgl. § 6 und 10.14). *Nicht entscheidbare* Begriffsbildungen gemäß 6.3 machen auch keine Schwierigkeiten, da sie nach der dort erwähnten Methode *eliminierbar* sind. Alle diese Forderungen sind mit Leichtigkeit zu erfüllen, wenn nur die Einführungen im landläufigen Sinne „korrekt", die Axiome „richtig" sind.

Es können auch neuartige *Schlüsse* stattfinden, die in dem bisherigen Formalismus nicht darstellbar sind. Ja es ist sogar *jedes* die reine Zahlentheorie enthaltende *formal abgegrenzte* System *zwangsläufig* in dem Sinne *unvollständig*, daß es zahlentheoretische Sätze von elementarem Charakter gibt, deren Richtigkeit durch einleuchtende finite Schlüsse bewiesen werden kann, aber nicht durch die dem System selbst zugehörigen Beweismittel[23]). Dieser Umstand wurde als Argument gegen den Wert von Widerspruchsfreiheitsbeweisen geltend gemacht[24]). Für meinen Widerspruchsfreiheitsbeweis spielt er jedoch keine Rolle; ganz allgemein läßt sich hier sagen: Wenn man einen rein zahlentheoretischen Satz mit Hilfe von Schlüssen zu beweisen vermag, die meinem Formalismus nicht angehören, so gebe man für diesen Satz eine *Reduziervorschrift* gemäß 13.91 an und er ist dadurch in den Widerspruchsfreiheitsbeweis einbezogen. Der von Gödel als Beispiel angegebene Satz hat die ganz elementare Gestalt $\forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{P}(\mathfrak{x})$, wobei $\mathfrak{P}$ ein *entscheidbares Prädikat* für natürliche Zahlen darstellt; die Erkenntnis der finiten Richtigkeit dieses Satzes ergibt also, daß $\mathfrak{P}(\mathfrak{n})$ für *jedes bestimmte* $\mathfrak{n}$ richtig ist, und daraus folgt ohne weiteres die *Reduzierbarkeit* der Sequenz $\rightarrow \forall \mathfrak{x}\, \mathfrak{P}(\mathfrak{x})$ gemäß 13.21, 13.4.

Der Begriff der *Reduziervorschrift* ist eben schon so *allgemein* gehalten, daß er nicht an einen bestimmten Schlußregeln-Formalismus gebunden ist, sondern dem allgemeinen Begriff der „Richtigkeit", jedenfalls soweit dieser überhaupt einen klaren Sinn hat, entspricht (vgl. 13.8.).

Wenn man eine neue *Schlußweise* als solche der bisherigen reinen Zahlentheorie zufügen will, so muß man sie in das Reduzierverfahren einzubeziehen suchen. (In Frage käme etwa eine „transfinite Induktion" bis zu einer festen „Zahl der II. Zahlklasse".)

Wenn man freilich zur reinen Zahlentheorie Begriffsbildungen und Schlußweisen der *Analysis*, die ja auch zum Beweis zahlentheoretischer Sätze benutzt werden, hinzufügen will, so läßt sich der Widerspruchsfreiheitsbeweis im allgemeinen nicht mehr ohne weiteres auf diese ausdehnen; da liegen noch Schwierigkeiten vor, die erst der Lösung bedürfen.

17.2. Wohl aber läßt sich der *Widerspruchsfreiheitsbeweis für die reine Zahlentheorie* auf eine Reihe von *weiteren Teilgebieten der Mathematik*

---

[23]) Siehe P. Finsler, Formale Beweise und die Entscheidbarkeit, Math. Zeitschr. 25 (1926), S. 676—682, und die in Anm. [3]) genannte Arbeit von K. Gödel.

[24]) Siehe die in der vorigen Anmerkung genannte Arbeit von P. Finsler.

ohne Schwierigkeit *übertragen.* Dies gilt ganz allgemein für solche mathematischen Theorien, deren *Gegenstände* durch eine *Konstruktionsvorschrift*, entsprechend der für die natürlichen Zahlen (8. 1 1), gegeben sind. Eine besonders einfache und in allen Fällen anwendbare Art einer solchen Vorschrift ist diese: Man gibt zunächst eine bestimmte Anzahl von Grundzeichen an, und erklärt dann: Jedes dieser Zeichen bezeichnet einen Gegenstand; wenn man an die Bezeichnung eines Gegenstandes ein Grundzeichen anfügt, so ergibt dies wieder die Bezeichnung eines Gegenstandes. (Kurz gesagt: „Jede endliche Reihe von Grundzeichen bezeichnet einen Gegenstand der Theorie".)

Bei solchen Theorien führt man dann *Funktionen* und *Prädikate* durch entscheidbare Definitionen (8. 1 2) ein, und wendet auch die gleichen logischen *Schlußweisen* an wie in der reinen Zahlentheorie. Der *Widerspruchsfreiheitsbeweis* ist ohne weiteres übernehmbar, es treten lediglich an die Stelle der „Zahlzeichen" die „Gegenstandszeichen" der Theorie, wodurch sich am *Wesentlichen* nichts ändert.

Derartige Teilgebiete der Mathematik sind z. B. wesentliche Teile der *Algebra* (die *Polynome* als Gegenstände sind ja endliche Zeichenkombinationen); aus dem Bereich der Geometrie z. B. die *kombinatorische Topologie*; auch große *Teile der Analysis* lassen sich so darstellen, indem man den Begriff der reellen Zahl nicht in seiner *allgemeinsten* Form gebraucht. Schließlich gehören auch wesentliche Teile der *Beweistheorie* hierher (vgl. 16. 1).

Die Hinzunahme von negativen Zahlen, gebrochenen Zahlen, diophantischen Gleichungen usw. zu den natürlichen Zahlen als Gegenständen in der reinen Zahlentheorie selbst (3. 3 1) läßt sich *in gleicher Weise* in den Widerspruchsfreiheitsbeweis einbeziehen. Man *kann* freilich auch alle Aussagen über diese Gegenstände, wie unter 3. 3 1 erwähnt, in Aussagen über natürliche Zahlen *umdeuten*, indem man die neuen Gegenstände in geeigneter Weise den natürlichen Zahlen zuordnet. Das Gleiche geht auch bei allen übrigen Theorien der genannten Art; man kann ja die „endlichen Zeichenkombinationen" stets in eine eineindeutige Zuordnung zu den natürlichen Zahlen bringen („Abzählbarkeit"). Doch ist dies für die Erfordernisse des Widerspruchsfreiheitsbeweises unnötig umständlich und unnatürlich.

17. 3. (Vgl. § 9.) Von seiten der *Intuitionisten* wird gegen die *Bedeutung* von Widerspruchsfreiheitsbeweisen folgender *Einwand* erhoben[25]:

---

[25]) Siehe etwa: L. E. J. Brouwer, Intuitionistische Betrachtungen über den Formalismus, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss., phys.-math. Kl. (1928), S. 48—52; und A. Heyting, Mathematische Grundlagenforschung — Intuitionismus — Beweistheorie, Ergebnisse d. Math. und ihrer Grenzgebiete 3 (1935), Heft 4.

Wenn auch damit nachgewiesen sei, daß die bedenklichen Schlußweisen nicht zu einander widersprechenden Ergebnissen führen können, so wären doch diese Ergebnisse *sinnlose* Aussagen, die Beschäftigung hiermit eine Spielerei; wirkliche *Erkenntnisse* könnten nur durch die unbedenklichen, intuitionistischen (bzw. finiten, wenn man will) Schlußweisen gewonnen werden.

Betrachten wir als Beispiel die unter 10. 6 angegebene Existenzaussage, bei der eine *Angabe* der Zahl, deren Existenz behauptet wird, nicht möglich ist. Diese Aussage wäre also nach der intuitionistischen Auffassung *sinnlos*; denn eine Existenzaussage könne sinnvoll eben nur dann ausgesprochen werden, wenn sich ein Zahlenbeispiel *angeben* läßt.

Was läßt sich nun dazu sagen?

Hat eine solche Aussage irgendeinen *Erkenntniswert?* Nun, zunächst einmal liegt in folgenden Anwendungsmöglichkeiten, die von Gegnern der intuitionistischen Auffassung angeführt werden, ein gewisser *praktischer Wert* derartiger Aussagen:

Sie können eventuell als Hilfsmittel dienen, um aus ihnen einfache, etwa durch Minimalformeln (3. 24) darstellbare Aussagen abzuleiten, die nun wieder finit und intuitionistisch sinnvoll sind und auf Grund des Widerspruchsfreiheitsbeweises *richtig* sein müssen.

Ferner hat z. B. eine Existenzaussage $\exists\, \mathfrak{x}\, \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ ohne Beispielsangabe immerhin den Nutzen, daß man nicht mehr nach einem Beweis für die Aussage $\forall\, \mathfrak{x} \neg \mathfrak{F}(\mathfrak{x})$ zu suchen braucht; denn einen solchen kann es nicht geben, da sonst ein Widerspruch entstände.

Dies wären immerhin Gründe, die das Beweisen von Sätzen mittels „an-sich"-Schlußweisen als *nicht ganz zwecklos* erscheinen lassen, abgesehen noch von dem „ästhetischen Wert" mathematischer Forschungen überhaupt.

Somit hätten die Aussagen der an-sich-Mathematik zwar einen gewissen *Wert*, aber noch immer keinen *Sinn*. Nun besteht aber doch der wesentlichste Teil meines Widerspruchsfreiheitsbeweises gerade darin, daß den an-sich-Aussagen ein *finiter Sinn beigelegt* wird, nämlich: Es *läßt sich* für jede beliebige Aussage, sofern sie bewiesen ist, eine *Reduziervorschrift* gemäß 13. 6 *angeben*, und diese Tatsache stellt eben den durch den Widerspruchsfreiheitsbeweis gewonnenen finiten Sinn der betreffenden Aussage dar.

Freilich kann dieser „finite Sinn" bereits bei einfach geformten Aussagen recht *kompliziert* sein, und steht im allgemeinen in einer loseren Beziehung zu der (durch die an-sich-Auffassung bestimmten) *Form* der Aussage, als es im Bereich des finiten Schließens der Fall ist.

Die oben angeführte Existenzaussage z. B. erhält damit auch einen finiten Sinn, doch ist dieser *schwächer* als bei finit bewiesenen Existenzaussagen, denn er besagt *nicht*, daß sich ein Beispiel angeben läßt.

Eine andere Frage ist es, welche *Bedeutung* nun noch dem *an-sich-Sinn* der Aussagen zukommt. Jedenfalls ergibt der Beweis, daß man widerspruchsfrei so schließen kann, „als ob" im unendlichen Gegenstandsbereich alles ebenso an-sich-bestimmt wäre wie in endlichen Bereichen (vgl. § 9). Ob und wieweit jedoch dem an-sich-Sinn einer transfiniten Aussage etwas „Wirkliches" entspricht — außer dem, was ihr eingeschränkter *finiter* Sinn aussagt — das ist eine Frage, die der *Widerspruchsfreiheitsbeweis nicht* beantwortet.

(Eingegangen am 11. 8. 1935.)