

## Werk

**Titel:** Mathematische Annalen

**Verlag:** Springer

**Jahr:** 1966

**Kollektion:** Mathematica

**Digitalisiert:** Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

**Werk Id:** PPN235181684\_0166

**PURL:** [http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684\\_0166](http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684_0166)

**LOG Id:** LOG\_0028

**LOG Titel:** Über die Auflösung gewisser Singularitäten von holomorphen Abbildungen.

**LOG Typ:** article

## Übergeordnetes Werk

**Werk Id:** PPN235181684

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235181684>

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235181684>

## Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

## Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

# Über die Auflösung gewisser Singularitäten von holomorphen Abbildungen

Herrn Professor OTT-HEINRICH KELLER zum 60. Geburtstag gewidmet

EGBERT BRIESKORN\*

## Einleitung

Eine Auflösung von Singularitäten holomorpher Abbildungen ist bisher nur in wenigen Spezialfällen ausgeführt worden. Ein Beispiel hierfür ist der in [10] beschriebene Auflösungsprozeß, ein anderes die Auflösung gewöhnlicher Doppelpunkte in Familien komplexer Flächen in einer Arbeit von M. F. ATIYAH. Die vorliegende Veröffentlichung ist ein weiterer Beitrag zu diesem Fragenkreis. Sie behandelt das folgende Problem, das sich in natürlicher Weise aus der Arbeit von ATIYAH ergibt.

$f: X \rightarrow Y$  sei eine holomorphe Abbildung eines 3-dimensionalen normalen komplexen Raumes  $X$  auf eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit  $Y$ . Die im folgenden definierte Singularitätenmenge von  $f$  bestehe nur aus endlich vielen Punkten von  $X$ . Für eine solche Abbildung wird eine Definition des Begriffs „Auflösung der Singularitäten von  $f$ “ gegeben, die man in Anbetracht der Ergebnisse von ATIYAH als naheliegend ansehen kann. Das Problem besteht dann darin, Bedingungen für die Existenz solcher Auflösungen anzugeben.

$f: X \rightarrow Y$  sei eine holomorphe Abbildung des komplexen Raumes  $X$  mit der Strukturgarbe  $\mathcal{O}_X$  auf den komplexen Raum  $Y$  mit der Strukturgarbe  $\mathcal{O}_Y$ . (Zum folgenden vgl. § 2 in [15].) Für  $t \in Y$  sei  $m_t$  die Idealgarbe der in  $t$  verschwindenden Funktionskeime und  $m_t \circ f$  die von  $\{g \circ f | g \in m_t\}$  erzeugte kohärente Idealgarbe in  $\mathcal{O}_X$ . Die Faser von  $f$  über  $t$  ist der nicht notwendig reduzierte komplexe Raum  $X_t = f^{-1}(t)$  mit der Strukturgarbe  $\mathcal{O}_X/m_t \circ f$ .  $f$  heißt regulär in  $x \in X$ , wenn  $X_{f(x)}$  in  $x$  nichtsingulär ist und wenn  $f$  platt in  $x$  ist, d. h. wenn  $\text{Tor}_1^{\mathcal{O}_Y, f(x)}(\mathcal{O}_{X,x}, \mathcal{O}_{Y,f(x)}/m_{f(x)})$  verschwindet. Dies bedeutet, daß  $f$  in der Umgebung von  $x$  wie eine Projektion in einem cartesischen Produkt mit singularitätenfreien Fasern aussieht. Die *Singularitätenmenge*  $S(f)$  von  $f$  ist die Menge der Punkte von  $X$ , in denen  $f$  nicht regulär ist.

\* Ein großer Teil dieser Arbeit ist während eines Aufenthaltes am Mathematischen Institut der Universität Leiden entstanden, der aus Mitteln des Koninklijke Shell prijs vor wiskunde 1963 finanziert wurde.

<sup>1</sup> Nicht reduzierte Räume treten in dieser Arbeit nur als Fasern von holomorphen Abbildungen auf. In allen anderen Fällen ist mit einem  $k$ -dimensionalen komplexen Raum ein rein  $k$ -dimensionaler komplexer Raum im Sinne von SERRE gemeint.

Ist  $S(f)$  leer, so heißt  $f$  *regulär*. Ist  $Y$  eine komplexe Mannigfaltigkeit, so besteht  $S(f)$  aus allen singulären Punkten von  $X$  sowie aus denjenigen nichtsingulären Punkten, in denen der Rang der Funktionalmatrix von  $f$  kleiner als die Dimension von  $Y$  ist.

**Definition:**  $f : X \rightarrow Y$  sei eine holomorphe Abbildung des 3-dimensionalen normalen komplexen Raumes  $X$  auf die 1-dimensionale Mannigfaltigkeit  $Y$ . Die Singularitätenmenge von  $f$  sei endlich. Eine *Auflösung* von  $f$  ist ein Tripel von holomorphen Abbildungen  $(f', \varphi, \psi)$  mit folgenden Eigenschaften:

i)  $f' : X' \rightarrow Y'$  ist eine reguläre Abbildung einer 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $X'$  auf eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit  $Y'$ .

ii) Die Abbildungen  $\varphi : Y' \rightarrow Y$  und  $\psi : X' \rightarrow X$  sind eigentlich und surjektiv.

iii) Das folgende Diagramm ist kommutativ

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\psi} & X \\ r' \downarrow & & \downarrow r \\ Y' & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

iv) Für jedes  $s \in Y'$  gilt für die Beschränkung  $\psi_s$  von  $\psi$  auf die Faser  $X'_s$ , daß  $\psi_s : X'_s \rightarrow X_{\varphi(s)}$  eine Auflösung der Singularitäten des 2-dimensionalen reduzierten komplexen Raumes  $X_{\varphi(s)}$  ist<sup>2</sup>.

In § 2 werden Bedingungen für die Existenz einer Auflösung angegeben. Eine notwendige Bedingung ist

**Satz 2.**  $f : X \rightarrow Y$  sei eine holomorphe Abbildung des 3-dimensionalen normalen komplexen Raumes  $X$  auf die 1-dimensionale Mannigfaltigkeit  $Y$ .  $S(f)$  sei endlich. Die Fasern von  $f$  seien normal. Es existiere eine Auflösung von  $f$ . Dann sind die Singularitäten der Fasern rational<sup>2</sup>.

Aus Satz 2 ergibt sich als Spezialfall

**Satz 3.**  $f : X \rightarrow Y$  sei eine holomorphe Abbildung der 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $X$  auf die 1-dimensionale Mannigfaltigkeit  $Y$ .  $S(f)$  sei endlich. Es existiere eine Auflösung von  $f$ . Dann sind die Singularitäten der Fasern von  $f$  rationale Doppelpunkte<sup>2</sup>.

Über die Definition und die Eigenschaften der rationalen Singularitäten wird im Anschluß an eine Arbeit von M. ARTIN in § 1.8 berichtet. Für die rationalen Doppelpunkte beweisen wir

**Satz 1.** Ein isolierter singulärer Punkt eines 2-dimensionalen komplexen Raumes ist genau dann ein rationaler Doppelpunkt, wenn er ein absolut isolierter Doppelpunkt ist<sup>2</sup>.

Für die absolut isolierten Doppelpunkte hat D. KIRBY eine vollständige Klassifikation angegeben: Es gibt den gewöhnlichen Doppelpunkt  $A_1$ , die biplanaren Doppelpunkte  $A_k$ ,  $k \geq 2$ , die uniplanaren Doppelpunkte  $D_k$ ,  $k \geq 4$ , und die drei exzeptionellen uniplanaren Doppelpunkte  $E_6$ ,  $E_7$ ,  $E_8$ .

Das Hauptresultat der Arbeit ist die folgende hinreichende Bedingung für die Existenz einer Auflösung:

**Satz 4.**  $f : X \rightarrow Y$  sei eine holomorphe Abbildung einer 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $X$  auf eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit  $Y$ .  $S(f)$  sei

<sup>2</sup> Zur Definition vgl. § 1.

endlich. Die Singularitäten der Fasern von  $f$  seien von  $E_8$  verschiedene rationale Doppelpunkte. Dann existiert eine Auflösung von  $f$ .

Satz 4 ist eine teilweise Umkehrung von Satz 3. Ob die genaue Umkehrung gilt, d. h. ob auch  $E_8$  auflösbar ist, und ob darüber hinaus auch Satz 2 umkehrbar ist, ist ein offenes Problem.

Ein Spezialfall von Satz 4 wurde von ATIYAH in [5] bewiesen, nämlich der Fall, bei dem die Singularitäten der Fasern nur gewöhnliche Doppelpunkte  $A_1$  sind. Für beliebige rationale Doppelpunkte  $\neq E_8$  erfolgt der Beweis durch eine explizite und elementare Konstruktion der Auflösung für jeden einzelnen Singularitätentyp. Diese Konstruktion nimmt den größten Teil von § 2 ein. § 3 enthält eine Anwendung von Satz 4 auf K3-Flächen sowie Ergänzungen und Verallgemeinerungen.

Für viele Anregungen danke ich M. ARTIN, P. DU VAL, F. HIRZEBRUCH, D. KIRBY und A. VAN DE VEN.

## § 1. Rationale Doppelpunkte

**1.1.** Wir erinnern zunächst an einige bekannte Tatsachen, die mit der Auflösung von Singularitäten zusammenhängen.

**Definition:**  $X$  sei ein komplexer Raum im Sinne von SERRE. Eine *Auflösung der Singularitäten von  $X$*  ist eine holomorphe eigentliche Abbildung  $f: \tilde{X} \rightarrow X$  eines singularitätenfreien komplexen Raumes  $\tilde{X}$  auf  $X$ , so daß gilt: Für die Menge  $X_r$  der regulären Punkte von  $X$  ist  $f^{-1}(X_r)$  dicht in  $\tilde{X}$  und  $f$  induziert eine biholomorphe Abbildung  $f^{-1}(X_r) \rightarrow X_r$ .

Eine Auflösung  $f: \tilde{X} \rightarrow X$  ist dann eine stetige eigentliche Modifikationsabbildung im Sinne von REMMERT [11].

$X$  sei jetzt ein 2-dimensionaler komplexer Raum.

**Satz:** Die Singularitäten eines 2-dimensionalen komplexen Raumes lassen sich auflösen.

Für normale komplexe Räume wurde dies in [19] bewiesen<sup>3</sup>.

**1.2.** Es sei  $p \in X$  ein normaler isolierter singulärer Punkt und  $f: \tilde{X} \rightarrow X$  eine Auflösung. Dann besteht  $f^{-1}(p)$  (als Menge) aus endlich vielen irreduziblen Kurven  $C_1, \dots, C_k$  auf der Mannigfaltigkeit  $\tilde{X}$ .  $f^{-1}(p) = \bigcup_{i=1}^k C_i$  ist zusammenhängend. Es lassen sich Schnittzahlen  $C_i \circ C_j$  definieren, [21], § 5. Das System von Kurven  $C_1, \dots, C_k$  ist exzeptionell im Sinne von [14], d. h. im wesentlichen: Es kann zu einem normalen Punkt „zusammengeblasen“ werden. GRAUERT hat in [14], 8e bewiesen:

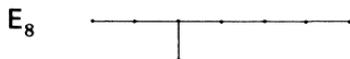
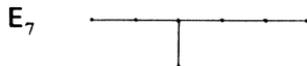
**Satz:** Ein System von irreduziblen Kurven  $C_1, \dots, C_k$  auf einer 2-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit ist genau dann exzeptionell, wenn die Schnittmatrix  $(C_i \circ C_j)$  negativ definit ist.

Daß die negative Definitheit im Fall der Auflösung algebraischer Flächen notwendig ist, wurde von DU VAL bewiesen, [8] § 4 (vgl. auch [30]). Dieser Satz kann zur Klassifikation solcher exzeptionellen Systeme von Kurven  $C_1, \dots, C_k$  benutzt werden, für deren Selbstschnittzahl  $C_i \circ C_i = -2$  für

<sup>3</sup> Daß die in [19] behandelten komplexen Räume gerade die 2-dimensionalen normalen komplexen Räume sind, zeigt Satz 31 in [12].

$i = 1, \dots, k$  gilt. Denn zunächst folgt für ein solches System aus der negativen Definitheit sofort: (1) Für  $i \neq j$  gilt  $C_i \circ C_j = 0$  oder  $C_i \circ C_j = 1$ , d. h. zwei Kurven schneiden sich entweder gar nicht oder transversal in genau einem Punkt. (2) Es gehen keine drei Kurven durch einen Punkt. Die Schnittmatrix eines Kurvensystems mit den Eigenschaften (1) und (2) kann man auch beschreiben durch einen zusammenhängenden „bewerteten“ Graphen (vgl. [21] § 4), dessen Punkte den Kurven  $C_i$  entsprechen, und zwar so, daß die  $C_i$  und  $C_j$  entsprechenden Punkte genau dann durch eine Strecke verbunden werden, wenn  $C_i \circ C_j = 1$  gilt. Der  $C_i$  entsprechende Punkt wird mit  $C_i \circ C_i$  bewertet. Es ist klar, wie umgekehrt einem bewerteten Graphen eine Matrix zuzuordnen ist. Wir interessieren uns für die zusammenhängenden bewerteten Graphen, deren sämtliche Punkte mit  $-2$  bewertet sind und deren zugeordnete Matrizen negativ definit sind. Wie z. B. in [31] II § 6 gezeigt wird, ergibt sich die Klassifikation dieser Graphen aus der Klassifikation der entsprechenden Dynkinschemata, die bei der Beschreibung der einfachen Lieischen Algebren auftreten. Man hat also (vgl. auch [7], Teil I):

**Lemma:** Die folgenden Bäume sind die einzigen zusammenhängenden Graphen, für die bei Bewertung aller Punkte mit  $-2$  die zugeordnete Matrix negativ definit wird.



Nun gibt es Singularitäten, die sich auflösen lassen in Systeme von rationalen singularitätenfreien Kurven mit Selbstschnitt  $-2$  und mit den Bäumen  $A_k, D_k, E_k$ . Dies sind die absolut isolierten Doppelpunkte, mit denen wir uns im folgenden beschäftigen wollen.

1.3. Wir betrachten jetzt 2-dimensionale isolierte Singularitäten mit minimaler Einbettungsdimension 3, d. h. solche isolierte Singularitäten eines 2-dimensionalen komplexen Raumes  $X$ , die eine Umgebung in  $X$  besitzen, welche sich als analytische Teilmenge in ein Gebiet des  $C^3$  einbetten läßt. Diese Einbettung ist dann im wesentlichen lokal eindeutig bestimmt, [14] p. 333. Solche Singularitäten sind nach einem Lemma von OKA normal, [1], 12.3. Aus einem von KUHLMANN [29] und HIRONAKA [17] bewiesenen komplex-analytischen Analogon des Satzes von LEVI-ZARISKI folgt als Spezialfall:

**Satz:** Eine in eine 3-dimensionale Mannigfaltigkeit eingebettete 2-dimensionale isolierte Singularität kann aufgelöst werden durch eine endliche Folge

von monoidalen Modifikationen in der umgebenden 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit mit Punkten oder mit singularitätenfrei eingebetteten mehrfachen Kurven als Basis.

Monoidale Modifikationen werden auch als  $\sigma$ -Prozesse bezeichnet (vgl. z. B. [28]), wenn ihre Basis singularitätenfrei eingebettet ist.

1.4. Im Anschluß an KIRBY [22] definieren wir

**Definition:** Eine *absolut isolierte Singularität* ist eine 2-dimensionale isolierte Singularität mit minimaler Einbettungsdimension 3, die sich durch eine Folge von  $\sigma$ -Prozessen mit Punkten als Basis auflösen läßt.

Eine absolut isolierte Singularität hat also als singuläre unendlich benachbarte Punkte höchstens isolierte Singularitäten. Ein *absolut isolierter Doppelpunkt* ist natürlich eine absolut isolierte Singularität, deren lokaler Ring die Multiplizität 2 hat. Für eine rein  $k$ -dimensionale analytische Menge  $A \subset \mathbb{C}^{k+1}$  kann die Multiplizität auch folgendermaßen beschrieben werden. Sei  $z \in A$ , sei  $\mathcal{I}_z \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^{k+1}, z}$  das Hauptideal der auf  $A$  verschwindenden holomorphen Funktionskeime in  $z$  und  $f \in \mathcal{I}_z$  ein erzeugendes Element. Dann ist die Multiplizität von  $A$  in  $z$  gleich der Ordnung des Verschwindens von  $f$  in  $z$ .

Ein Doppelpunkt mit Einbettungsdimension 3 kann natürlich durch eine Gleichung  $z^2 = g(x, y)$  beschrieben werden. Durch Untersuchung des Zusammenhangs zwischen der Auflösung der Singularitäten der Verzweigungskurve  $g(x, y) = 0$  und dem Auflösungsprozeß von LEVI-ZARISKI hat KIRBY in [22], 2.6, 2.7 gezeigt:

**Satz:** *Zu jedem von den bewerteten Graphen  $A_k, D_k, E_6, E_7, E_8$  gibt es genau einen absolut isolierten Doppelpunkt, der auflösbar ist in ein System von rationalen singularitätenfreien Kurven, welches die diesem Graphen entsprechende Schnittmatrix hat. Diese Singularitäten sind die einzigen absolut isolierten Doppelpunkte. Sie können durch folgende Gleichungen beschrieben werden:*

$$\begin{array}{ll} A_k & z^2 - x^2 + y^{k+1} = 0 \\ D_k & z^2 - y(x^2 - y^{k-2}) = 0 \\ E_6 & z^2 + x^3 - y^4 = 0 \\ E_7 & z^2 - x(x^2 - y^3) = 0 \\ E_8 & z^2 + x^3 - y^5 = 0. \end{array}$$

Diese Singularitäten sind seit langem bekannt und sind mehrfach untersucht worden, z. B. in [3], [7], [16], [21]. Zur Geschichte vgl. die Einleitung von [9]. In [2], 2.3.7 werden diese Singularitäten auch *negligible singularities* genannt. Einige von diesen Gleichungen finden sich bereits in FELIX KLEINS Vorlesungen über das Ikosaeder, Kap. III, § 1. Die durch die obigen Gleichungen gegebenen analytischen Teilmengen von  $\mathbb{C}^3$  kann man nach [9], § 39 auffassen als die Quotientenräume  $\mathbb{C}^2/G$ , wo  $G$  eine endliche Untergruppe der multiplikativen Gruppe der Quaternionen vom Betrag 1 ist. ( $G$  operiert durch Linksmultiplikation auf dem 2-dimensionalen komplexen Vektorraum der Quaternionen.)

1.5. Wir werden beweisen, daß dies die einzigen normalen Singularitäten sind, die sich in ein System von rationalen singularitätenfreien Kurven mit Selbstschnitt  $-2$  auflösen lassen<sup>4</sup>. Fragen ähnlicher Art sind, abgesehen von den prinzipiellen Resultaten in [14], [18], m. W. bisher nur in wenigen Fällen untersucht worden, z. B. in [14], 8b, wo für eine exzeptionelle singularitätenfreie rationale Kurve gezeigt wird, daß die komplexe Struktur der Umgebung durch die Selbstschnittzahl eindeutig bestimmt ist. Daher hat der im folgenden bewiesene Satz 1 auch unabhängig von seiner Anwendung in § 2 ein gewisses Interesse.

Zur Vorbereitung des Beweises von Satz 1 erinnern wir an einige bekannte Tatsachen.

1.6.  $X$  sei ein komplexer Raum. Eine Auflösung der Singularitäten  $f: \tilde{X} \rightarrow X$  heißt *minimal*, wenn es für jede weitere Auflösung  $f': X' \rightarrow X$  eine eindeutig bestimmte holomorphe Abbildung  $g: X' \rightarrow \tilde{X}$  gibt, so daß  $f' = f \circ g$  gilt.

**Lemma:** Für jeden 2-dimensionalen normalen komplexen Raum  $X$  existiert eine eindeutig bestimmte minimale Auflösung der Singularitäten  $f: \tilde{X} \rightarrow X$ . Sie ist dadurch charakterisiert, daß für jeden singulären Punkt  $p \in X$   $f^{-1}(p)$  keine exzeptionelle Kurve erster Art enthält<sup>5</sup>.

*Beweis:* Die Eindeutigkeit ist trivial. Die Existenz kann man etwa folgendermaßen beweisen: O.b.d.A. sei  $p \in X$  der einzige singuläre Punkt von  $X$ . Ausgehend von einer beliebigen Auflösung von  $X$  erhält man durch successives Niederblasen aller singularitätenfreien rationalen Kurven über  $p$  mit Selbstschnitt  $-1$  eine Auflösung  $f: \tilde{X} \rightarrow X$ , in der über  $p$  keine exzeptionellen Kurven erster Art liegen. Diese ist minimal. Denn sei  $f': X' \rightarrow X$  eine weitere Auflösung. Die Komposition der meromorphen Abbildungen  $f'$  und  $f^{-1}$  ist eine wohldefinierte meromorphe Abbildung  $f^{-1} \circ f'$  im Sinne von [32].  $G \subset X' \times \tilde{X}$  sei der Graph von  $f^{-1} \circ f'$  (dann ist  $G$  auch der Graph von  $f'^{-1} \circ f$ ), ferner seien  $\pi_1: G \rightarrow X'$  und  $\pi_2: G \rightarrow \tilde{X}$  die Projektionen und  $\psi: \tilde{G} \rightarrow G$  eine Auflösung der Singularitäten von  $G$ . Dann sind  $\varphi_1 = \pi_1 \circ \psi$  und  $\varphi_2 = \pi_2 \circ \psi$  eigentliche Modifikationsabbildungen der komplexen Mannigfaltigkeit  $\tilde{G}$  auf die komplexen Mannigfaltigkeiten  $X'$  bzw.  $\tilde{X}$ , und die Entartungsmengen von  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  sind kompakt. Daher sind nach dem Satz von HOPF (vgl. [28])  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  iterierte  $\sigma$ -Modifikationsabbildungen, die höchstens über Punkten  $\text{vop } f'^{-1}(p)$  bzw.  $f^{-1}(p)$  entarten. Wegen der Voraussetzungen über  $\tilde{X}$  folgt aus dem Verhalten der Selbstschnittzahlen beim  $\sigma$ -Prozeß, daß in  $\tilde{G}$  die einzigen exzeptionellen Kurven erster Art über  $f^{-1}(p)$  die bei dem iterierten  $\sigma$ -Prozeß  $\varphi_2$  zuletzt eingesetzten Kurven sind. Wenn man daher durch Niederblasen exzeptioneller Kurven erster Art von  $\tilde{G}$  zu  $X'$  übergeht, so macht man offenbar lediglich einige der  $\sigma$ -Prozesse von  $\varphi_2$  rückgängig (vgl. das Argument in [19] p. 19). Das heißt aber, daß  $X'$  aus  $\tilde{X}$  durch iterierte  $\sigma$ -Prozesse entsteht. q.e.d.

<sup>4</sup> Die Normalität ist wesentlich für den Eindeutigkeitsatz. Es gibt nicht normale, lokal irreduzible, isolierte Singularitäten, die sich in ein System von rationalen singularitätenfreien Kurven mit Selbstschnitt  $-2$  auflösen lassen.

<sup>5</sup> Als exzeptionelle Kurven erster Art bezeichnen wir die singularitätenfreien rationalen Kurven mit Selbstschnitt  $-1$ .

1.7. Im Beweis von Satz 1 und in § 2 benötigen wir drei bekannte Formeln für die kanonischen Geradenbündel komplexer Mannigfaltigkeiten: Die Adjunktionsformel, eine verallgemeinerte Hurwitzformel und die verallgemeinerte Plückerformel.

(a) *Adjunktionsformel*:  $V$  sei eine komplexe Mannigfaltigkeit,  $W$  eine 1-codimensionale komplexe Untermannigfaltigkeit,  $i: W \rightarrow V$  die Inklusion,  $K_V$  bzw.  $K_W$  die kanonischen Geradenbündel von  $V$  bzw.  $W$ .

Dann gilt die leicht zu beweisende Formel

$$K_W = i^*(K_V \otimes [W]).$$

Dabei wird für einen Divisor  $D$  auf  $V$  mit  $[D]$  das  $D$  zugeordnete holomorphe Geradenbündel bezeichnet (vgl. z. B. [23] p. 111).

(b) *Hurwitzformel*:  $\varphi: V \rightarrow U$  sei eine holomorphe Abbildung gleichdimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten mit nicht identisch verschwindender Funktionaldeterminante.  $E_\varphi$  sei der durch das Verschwinden der Funktionaldeterminante definierte Entartungsdivisor von  $\varphi$ . Durch leichte Rechnung mit lokalen Koordinaten beweist man für die kanonischen Bündel

$$K_V = \varphi^* K_U \otimes [E_\varphi].$$

(c) *Plückerformel*: Es sei  $C$  eine irreduzible Kurve auf der 2-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit  $W$ ,  $\tilde{C} \rightarrow C$  das singularitätenfreie Modell und  $\pi(\tilde{C})$  sein Geschlecht. Man definiert das virtuelle Geschlecht von  $C$  durch

$\pi'(C) = \frac{1}{2}(C \circ C + K_W \circ C) + 1$ . Dabei muß man für ein komplexes Geradenbündel  $F$  über  $W$  die Schnittzahl  $F \circ C$  geeignet definieren, z. B. wie in [21] § 5 oder auch äquivalent dazu als  $F \circ C = c(F_{\tilde{C}})(\tilde{C})$ , d. h. als Wert der charakteristischen Klasse  $c(F_{\tilde{C}})$  des auf  $\tilde{C}$  gelifteten Bündels  $F_{\tilde{C}}$  auf dem fundamentalen 2-Zykel von  $\tilde{C}$ . Dann gilt ([20], 2.5 oder [23] 2.3)

$$\pi'(C) = \pi(\tilde{C}) + \frac{1}{2} \sum_{p \in C} c_p$$

mit  $c_p = \sum_i v_i(v_i - 1)$ , wobei zu summieren ist über die Multiplizitäten  $v_i$  von

$C$  in  $p$  und in den unendlich benachbarten Punkten von  $p$ . Man folgert (c) aus (a) und (b), indem man die Singularitäten von  $C$  durch Anwendung eines iterierten  $\sigma$ -Prozesses auf  $W$  auflöst. Offenbar gilt  $\pi'(C) \geq 0$ , und ferner  $\pi'(C) = 0$  genau dann, wenn  $C$  rational und singularitätenfrei ist.

### 1.8. Rationale Singularitäten.

**Definition:** Ein normaler Punkt  $x$  eines 2-dimensionalen komplexen Raumes  $X$  heißt eine *rationale Singularität*, wenn für eine Auflösung  $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$  das erste direkte Bild  $\pi_1 \mathcal{O}_{\tilde{X}}$  der Strukturgarbe  $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$  von  $\tilde{X}$  in einer Umgebung von  $x$  verschwindet.

Ist der normale komplexe Raum  $X$  kompakt, so folgt aus der Lerayschen Spektralsequenz der Abbildung  $\pi$ , daß für die arithmetischen Geschlechter

$\chi(\tilde{X}) = \sum_{i=0}^2 (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} H^i(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}})$  bzw.  $\chi(X) = \sum_{i=0}^2 (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} H^i(X, \mathcal{O}_X)$  gilt:

$\chi(\tilde{X}) = \chi(X)$  genau dann, wenn alle Singularitäten von  $X$  rational sind.

Nach ARTIN [4] können die rationalen Singularitäten folgendermaßen charakterisiert werden: Ein normaler Punkt  $x$  werde in ein System von Kurven  $C_1, \dots, C_k$  aufgelöst. Wir betrachten die Menge  $\mathcal{Z}$  von positiven Zykeln  $Z = \sum_{i=1}^k r_i(Z)C_i$  für deren Schnitzzahlen  $Z \circ C_i \leq 0$  für  $i = 1, \dots, k$  gilt.  $\mathcal{Z}$  ist nicht leer. Der Fundamentalzykel von  $\{C_i\}$  ist der wieder zu  $\mathcal{Z}$  gehörende Zykel  $Z_0 = \sum_{i \in \mathcal{Z}} \min_i r_i(Z)C_i$ . In [4] wird bewiesen:

**Satz:** (i) *Der normale Punkt  $x$  ist eine rationale Singularität genau dann, wenn das virtuelle Geschlecht des Fundamentalzykels  $Z_0$  verschwindet.*

(ii) *Ist  $x$  eine rationale Singularität, so ist die Multiplizität des lokalen Ringes von  $x$  gleich  $-Z_0 \circ Z_0$  und die minimale Einbettungsdimension gleich  $-Z_0 \circ Z_0 + 1$ .*

Hieraus folgt insbesondere

**Korollar:** *Eine rationale Singularität hat minimale Einbettungsdimension 3 genau dann, wenn sie ein Doppelpunkt ist. Ein normaler Punkt ist ein rationaler Doppelpunkt genau dann, wenn er sich in ein System von singularitätenfreien rationalen Kurven mit Selbstschnitt  $-2$  auflösen läßt.*

1.9. Die oben erwähnten Resultate von M. ARTIN und D. KIRBY ergeben zusammen mit dem folgenden Satz die vollständige Klassifikation der rationalen Doppelpunkte.\*

**Satz 1:** *Eine isolierte Singularität eines 2-dimensionalen komplexen Raumes ist genau dann ein absolut isolierter Doppelpunkt, wenn sie ein rationaler Doppelpunkt ist, d. h. normal ist und sich in ein System von singularitätenfreien rationalen Kurven mit Selbstschnittzahl  $-2$  auflösen läßt.*

*Beweis:* Daß absolut isolierte Doppelpunkte in dieser Weise auflösbar sind, ist ein Teil des Satzes von KIRBY. Die Idee des Beweises für die andere Implikation des Satzes besteht darin, die Auflösung der Singularität durch Kurven mit Selbstschnitt  $-2$  zu vergleichen mit einer Auflösung durch  $\sigma$ -Prozesse im umgebenden 3-dimensionalen Raum, wie man sie nach dem Satz von LEVI-ZARISKI erhält.

(i) Sei  $p \in X$  o.b.d.A. der einzige singuläre Punkt von  $X$ .  $\tilde{X}$  sei eine komplexe Mannigfaltigkeit, die aus  $X$  durch Auflösen von  $p$  in ein System von singularitätenfreien rationalen Kurven mit Selbstschnitt  $-2$  entsteht.  $\tilde{X}$  ist dann die minimale Auflösung von  $X$ . Ist nun  $X$  in eine 3-dimensionale Mannigfaltigkeit  $U$  eingebettet und  $X'$  eine Auflösung von  $X$  nach dem Satz von LEVI-ZARISKI, so hat man eine Modifikationsabbildung  $g: X' \rightarrow \tilde{X}$ , die höchstens in Punkten von  $f'^{-1}(p)$  entartet. Also entsteht  $X'$  aus  $\tilde{X}$  nach dem Satz von HOPF durch mehrfache Anwendung des  $\sigma$ -Prozesses in Punkten über  $f^{-1}(p)$ .

(ii) Es sei  $V$  die bei Anwendung des Prozesses von LEVI-ZARISKI aus  $U$  entstehende Mannigfaltigkeit [vgl. (i)],  $\varphi: V \rightarrow U$  die entsprechende iterierte  $\sigma$ -Modifikationsabbildung und  $i: X' \rightarrow V$  die Inklusion.  $\Sigma_1, \dots, \Sigma_m$  seien die irreduziblen Komponenten des Entartungsdivisors  $E_\varphi$ ,  $C_1, \dots, C_k$  die irredu-

\* Siehe Zusatz am Schluß der Arbeit.

ziblen Kurven von  $X'$ , in die die Singularität aufgelöst wird. Es gilt

$$i^* [\Sigma_i] = \prod_{j=1}^k [C_j]^{\alpha_{ij}}$$

mit gewissen ganzen Zahlen  $\alpha_{ij} \geq 0$ , ferner

$$[E_\varphi] = \prod_{i=1}^m [\Sigma_i]^{v_i}$$

mit gewissen positiven Zahlen  $v_i$  und

$$\varphi^* [X] = [X'] \otimes \prod_{j=1}^m [\Sigma_j]^{r_j}$$

mit gewissen positiven Zahlen  $r_i$ .

Also folgt mit 1.7 (a) und 1.7 (b)

$$\begin{aligned} K_{X'} &= i^*(K_V \otimes [X']) = i^* \left( \varphi^* K_V \otimes [E_\varphi] \otimes \varphi^* [X] \otimes \prod_{i=1}^m [\Sigma_i]^{-r_i} \right) \\ &= (\varphi \circ i)^*(K_V \otimes [X]) \otimes i^* \prod_{i=1}^m [\Sigma_i]^{v_i - r_i} = (\varphi \circ i)^*(K_V \otimes [X]) \otimes \left[ \sum_{j=1}^k \mu_j C_j \right], \end{aligned}$$

wobei die Zahlen  $\mu_j$  durch die folgende Gleichung definiert sind.

$$(I) \quad \mu_j = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}(v_i - r_i).$$

Da bei Beschränkung auf eine geeignete Umgebung von  $p$  in  $U$  das Bündel  $K_V \otimes [X]$  trivial ist, gilt für eine geeignete Umgebung  $X''$  von  $\bigcup_{i=1}^k C_i$  in  $X'$

$$K_{X''} = \left[ \sum_{j=1}^k \mu_j C_j \right].$$

Da  $X'$  aus  $\tilde{X}$  durch iterierten  $\sigma$ -Prozeß entsteht, sind alle  $C_i$  singularitätenfrei und rational und nach 1.7 (c) gilt also  $\pi'(C_i) = 0$ , d. h. aber mit obigem  $K_{X''}$

$$(II) \quad \sum_{j=1}^k C_i \circ C_j \mu_j = -(2 + C_i \circ C_i) \quad i = 1, \dots, k.$$

Da die Schnittmatrix  $(C_i \circ C_j)$  nichtsingulär ist, können nach (II) die  $\mu_j$  eindeutig aus der Schnittmatrix berechnet werden. Andererseits sind sie durch (I) definiert, und die Zahlen  $v_i$ ,  $r_i$  hängen vom Auflösungsprozeß und den Multiplizitäten der Singularitäten ab. Der Beweis unseres Satzes wird sich durch Vergleich von Folgerungen aus (I) und (II) ergeben.

(iii) Durch (II) werden jedem exzeptionellen System von Kurven  $C_1, \dots, C_k$  rationale Zahlen  $\mu_1, \dots, \mu_k$  zugeordnet. Man entnimmt aus (II) sofort, daß sich diese bei  $\sigma$ -Prozessen wie folgt verhalten. Durch  $\sigma$ -Prozeß werde im Punkt  $q$  des Kurvensystems eine neue Kurve  $C_{k+1}$  eingesetzt und  $\mu'_1, \dots, \mu'_{k+1}$  seien die zu dem neuen Kurvensystem berechneten Zahlen. Lag  $q$  nur auf einer nicht-singulären Kurve  $C_i$ , so gilt  $\mu'_j = \mu_j$  für  $j = 1, \dots, k$  und  $\mu'_{k+1} = 1 + \mu_i$ . Lag  $q$  auf zwei sich transversal in einem Punkt schneidenden Kurven  $C_i$ ,

und  $C_{i_2}$ , so gilt  $\mu'_j = \mu_j$  für  $j=1, \dots, k$  und  $\mu'_{k+1} = 1 + \mu_{i_1} + \mu_{i_2}$ . Nun entsteht  $X'$  durch  $\sigma$ -Prozesse aus  $\tilde{X}$ . Für das exzeptionelle Kurvensystem von  $\tilde{X}$  sind die  $\mu_j = 0$ , weil alle Kurven die Selbstschnittzahl  $-2$  haben. Also gilt für das in (ii) betrachtet exzeptionelle Kurvensystem  $C_1, \dots, C_k$  von  $X'$

$$\mu_j \geq 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, k.$$

(iv) Die  $\mu_j$  waren durch (I) mit Hilfe der Zahlen  $v_i$  und  $r_i$  definiert. Wir untersuchen das Verhalten der  $v_i$  und  $r_i$  bei  $\sigma$ -Prozessen. Wir betrachten ein bestimmtes  $\Sigma_i$ . Fall 1:  $\Sigma_i$  entsteht durch  $\sigma$ -Prozeß in einem Punkt  $q$ . Fall 2:  $\Sigma_i$  entsteht durch  $\sigma$ -Prozeß längs einer Kurve  $C$ . Es seien  $\Sigma_{i_1}, \dots, \Sigma_{i_n}$  diejenigen bei vorhergehenden  $\sigma$ -Prozessen eingesetzten Flächen, welche  $q$  bzw.  $C$  enthalten. Für die eigentliche Transformierte von  $X$  bezüglich der vorausgehenden  $\sigma$ -Prozesse sei  $q$  ein Punkt mit Multiplizität  $\varrho_i \geq 2$  bzw.  $C$  eine  $\varrho_i$ -fache Kurve,  $\varrho_i \geq 2$ . Dann gilt

$$r_i = r_{i_1} + \dots + r_{i_n} + \varrho_i.$$

Da ferner ein  $\sigma$ -Prozeß in einem Punkt bzw. längs einer Kurve bezüglich geeigneter Koordinaten durch die Abbildung  $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_1 x_2, x_1 x_3)$  bzw.  $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (x_1, x_1 x_2, x_3)$  beschreibbar ist, und die Funktionaldeterminante dieser Abbildungen  $x_1^2$  bzw.  $x_1$  ist, erhält man

$$\begin{aligned} v_i &= v_{i_1} + \dots + v_{i_n} + 2 && \text{im Fall 1} \\ v_i &= v_{i_1} + \dots + v_{i_n} + 1 && \text{im Fall 2.} \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} v_i - r_i &= \sum_{\lambda=1}^n (v_{i_\lambda} - r_{i_\lambda}) + 2 - \varrho_i && \text{im Fall 1} \\ v_i - r_i &= \sum_{\lambda=1}^n (v_{i_\lambda} - r_{i_\lambda}) + 1 - \varrho_i && \text{im Fall 2.} \end{aligned}$$

Hieraus folgt: Für  $\Sigma_k$  gilt  $v_k - r_k \geq 0$  genau dann, wenn  $X$  in  $p$  die Multiplizität 2 hat und alle vor  $\Sigma_k$  eingesetzten  $\Sigma_j$  einschließlich  $\Sigma_k$  durch punktale  $\sigma$ -Prozesse entstanden sind. Wären für ein  $\Sigma_k$  diese Bedingungen nicht erfüllt, wäre also  $p$  kein absolut isolierter Doppelpunkt, so gäbe es ein  $\Sigma_i$  mit  $v_i - r_i < 0$  und  $\alpha_{ij} > 0$  für mindestens ein Indexpaar  $(i, j)$ , und daher würde wegen (I) mindestens ein  $\mu_j$  negativ im Widerspruch zu (iii). q.e.d.

## § 2. Bedingungen für die Auflösbarkeit

2.1. Wir beweisen zunächst die in der Einleitung angekündigten notwendigen Bedingungen für die Existenz von Auflösungen.

**Satz 2.**  *$f: X \rightarrow Y$  sei eine holomorphe Abbildung des 3-dimensionalen normalen komplexen Raumes  $X$  auf die eindimensionale Mannigfaltigkeit  $Y$ . Die Singularitätenmenge von  $f$  sei endlich, und die Fasern von  $f$  seien normal. Es existiere eine Auflösung von  $f$ . Dann sind die Singularitäten der Fasern rational.*

*Beweis:* Zunächst einige Bezeichnungen:  $(f', \varphi, \psi)$  sei eine Auflösung von  $f$ . Es sei  $\varphi^*X$  der durch  $\varphi^*X = \{(y', x) \in Y' \times X \mid \varphi(y') = f(x)\}$  definierte

komplexe Unterraum von  $Y' \times X$ , und  $f'' : \varphi^* X \rightarrow Y'$  die durch die Projektion auf den ersten Faktor induzierte Abbildung. Für die Fasern von  $f''$  gilt  $(\varphi^* X)_s = X_{\varphi(s)}$ .  $\pi : X' \rightarrow \varphi^* X$  werde definiert durch  $\pi(x') = (f'(x'), \psi(x'))$ .  $\pi$  ist eine Auflösung der (isolierten) Singularitäten von  $\varphi^* X$ . Die Singularitätenmenge  $S(f'')$  von  $f''$  ist gerade die Menge der singulären Punkte von  $\varphi^* X$ , und es gilt  $S(f'') = \{(y', x) | x \in S(f)\}$ . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir  $S(f)$  als einpunktig annehmen.  $X_0$  sei dann eine singuläre Faser von  $f''$ ,  $x_0$  deren singulärer Punkt und  $X'_0$  die Faser von  $f'$  über  $f''(x_0)$ .  $\bar{\pi} : X'_0 \rightarrow X_0$  sei die durch  $\pi$  induzierte Auflösung der Singularitäten von  $X_0$ . Für irgendeinen komplexen Raum  $V$  bezeichne  $\mathcal{O}_V$  die Strukturgarbe. Es sei  $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{X'}$  die Idealgarbe von  $X'_0 \subset X'$ , ferner  $m \subset \mathcal{O}_{\varphi^* X}$  die Idealgarbe von  $x_0 \in \varphi^* X$ , und schließlich  $m \circ \pi \subset \mathcal{O}_{X'}$  die wie in der Einleitung definierte geliftete kohärente Idealgarbe.

Um die Rationalität des singulären Punktes  $x_0$  von  $X_0$  zu zeigen, ist nach der Definition zu zeigen, daß die erste analytische Bildgarbe  $\bar{\pi}_1(\mathcal{O}_{X'_0})$  verschwindet. Äquivalent dazu ist das Verschwinden von  $\pi_1(\mathcal{O}_{X'_0})$ . Nun erhält man aus der exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{O}_{X'} \rightarrow \mathcal{O}_{X'_0} \rightarrow 0$$

die exakte Sequenz der auf  $x_0$  konzentrierten höheren Bildgarben

$$\cdots \rightarrow \pi_1(\mathcal{O}_{X'}) \rightarrow \pi_1(\mathcal{O}_{X'_0}) \rightarrow \pi_2(\mathcal{I}) \rightarrow \cdots$$

Zum Beweis des Satzes genügt es also, zu beweisen: (1)  $\pi_2(\mathcal{I}) = 0$ , (2)  $\pi_1(\mathcal{O}_{X'}) = 0$ . Zu (1): Nach Hauptsatz IIa von GRAUERT in [13] gilt

$$\lim_{\leftarrow} \pi_2(\mathcal{I})/m^v \cdot \pi_2(\mathcal{I}) = \lim_{\leftarrow} \pi_2(\mathcal{I}/(m \circ \pi)^v \cdot \mathcal{I}).$$

Da für einen lokalen Ring  $A$  mit maximalem Ideal  $m$  jeder  $A$ -Modul von endlichem Typ separiert bezüglich der  $m$ -adischen Topologie ist, genügt es wegen der Kohärenz von  $\pi_2(\mathcal{I})$  (Hauptsatz I in [13]),  $\pi_2(\mathcal{I}/(m \circ \pi)^v \cdot \mathcal{I}) = 0$  zu zeigen. Nun ist  $\mathcal{I}/(m \circ \pi)^v \cdot \mathcal{I}$  konzentriert auf die 1-dimensionale analytische Menge  $\pi^{-1}(x_0)$ , und daher ist der Halm der 2-ten Bildgarbe in  $x_0$  gleich  $H^2(\pi^{-1}(x_0), \mathcal{I}/(m \circ \pi)^v \cdot \mathcal{I})$ . Diese Cohomologiegruppe verschwindet aber, denn nach [33] gilt allgemein:  $W$  sei eine  $k$ -dimensionale analytische Teilmenge eines komplexen Raumes  $V$  und  $\mathcal{G}$  eine kohärente analytische Garbe auf  $V$ . Dann gilt  $H^p(W, \mathcal{G}|_W) = 0$  für  $p > k$ .

Zu (2): Zu zeigen ist, daß es eine Basis von Umgebungen  $U$  von  $x_0$  in  $\varphi^* X$  gibt mit  $H^1(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_{X'}) = 0$ . Dazu benutzen wir folgenden Satz von G. SCHEJA in [34]:

$X$  sei ein komplexer Raum,  $A$  eine analytische Teilmenge,  $\mathcal{G}$  eine kohärente analytische Garbe auf  $X$ , und  $\text{codh } \mathcal{G}_x$  die homologische Codimension des Halmes  $\mathcal{G}_x$ . Dann gilt für die Beschränkungshomomorphismen

(i)  $H^p(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^p(X - A, \mathcal{G})$  ist injektiv, wenn für alle  $x \in A$   $\text{codh } \mathcal{G}_x \geq p + \dim_x A + 1$ ,

(ii)  $H^p(X, \mathcal{G}) \rightarrow H^p(X - A, \mathcal{G})$  ist bijektiv, wenn für alle  $x \in A$   $\text{codh } \mathcal{G}_x \geq p + \dim_x A + 2$ .

Da für die 3-dimensionale Mannigfaltigkeit  $X'$   $\text{codh } \mathcal{O}_{X',x} = \dim \mathcal{O}_{X',x} = 3$  ist, folgt aus (i), daß man eine injektive Abbildung

$$H^1(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_{X'}) \rightarrow H_1(\pi^{-1}(U - x_0), \mathcal{O}_{X'}) \cong H^1(U - x_0, \mathcal{O}_{\varphi^*X})$$

hat. Nun ist  $\mathcal{O}_{\varphi^*X, x_0}$  ein Cohen-Macaulay-Ring, weil der Restklassenring  $\mathcal{O}_{\varphi^*X, x_0}/(f'') = \mathcal{O}_{X'_0, x_0}$  als 2-dimensionaler normaler lokaler Ring ein Cohen-Macaulay-Ring ist. Die Macaulay-Ringe sind gerade die lokalen Ringe, für welche die homologische Codimension gleich der Krullschen Dimension ist, und daher ist  $\text{codh } \mathcal{O}_{\varphi^*X, x_0} = 3$  und aus (ii) folgt, daß  $H^1(U - x_0, \mathcal{O}_{\varphi^*X}) \cong \cong H^1(U, \mathcal{O}_{\varphi^*X})$ . Aber diese Gruppe verschwindet, wenn man die Umgebung  $U$  steinsch wählt. Dann verschwindet auch  $H^1(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_{X'})$ . q.e.d.

*Bemerkung:* Ist  $f$  eigentlich, so folgt Satz 2 unmittelbar aus 1.9 und der Tatsache, daß das arithmetische Geschlecht  $\chi(X_t)$  bzw.  $\chi(X'_s)$  unabhängig von  $t$  bzw.  $s$  ist ([13] § 7, Satz 6, ohne Beweis).

Da die einzigen rationalen Singularitäten mit Einbettungsdimension 3 die rationalen Doppelpunkte sind, folgt aus Satz 2 sofort

**Satz 3.**  $f : X \rightarrow Y$  sei eine holomorphe Abbildung der 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $X$  auf die 1-dimensionale Mannigfaltigkeit  $Y$ .  $S(f)$  sei endlich. Es existiere eine Auflösung von  $f$ . Dann sind die Singularitäten der Fasern von  $f$  rationale Doppelpunkte.

Übrigens läßt sich Satz 3 im Gegensatz zu Satz 2 mit ganz elementaren Methoden beweisen, und zwar folgendermaßen.  $(f', \varphi, \psi)$  sei eine Auflösung von  $f$ . Es sei  $p \in X_t$  ein singulärer Punkt der Faser  $X_t \subset X$ . Wegen der Charakterisierung der rationalen Doppelpunkte in 1.8 genügt es, zum Beweis von Satz 3 zu zeigen, daß für ein  $s$  mit  $\varphi(s) = t$  bei der Auflösung  $\psi_s : X'_s \rightarrow X_t$  die Singularität  $p$  aufgelöst wird in ein System von singularitätenfreien rationalen Kurven  $C_1, \dots, C_k$  mit  $C_i \circ C_i = -2, i = 1, \dots, k$ . Wegen der Plückerformel 1.7 (c) ist dies äquivalent mit folgender Behauptung.  $K_{X'_s}$  sei das kanonische Geradenbündel von  $X'_s$ . Dann gilt  $K_{X'_s} \circ C_i = 0$  für  $i = 1, \dots, k$ . Denn dann folgt  $\pi'(C_i) = \frac{1}{2} C_i \circ C_i + 1 \leq \frac{1}{2}$ , andererseits  $\pi'(C_i) \geq 0$ , also  $\pi'(C_i) = 0$ ,

also  $C_i \circ C_i = -2$  und  $C_i$  singularitätenfrei und rational. Wir werden also  $K_{X'_s} \circ C_i$  berechnen.

Die Abbildung  $\varphi$  ist eine endlichblättrige verzweigte Überlagerung. Der Punkt  $s$  ist ein Verzweigungspunkt von  $\varphi$ . Denn andernfalls würde in einer geeigneten Umgebung von  $X'_s$  die Funktionaldeterminante von  $\psi$  nur in den Kurven von  $X'_s$  verschwinden, in welche die Singularitäten von  $X_t$  aufgelöst werden. Es sei  $h \geq 1$  die Verzweigungsordnung von  $\varphi$  in  $s$ . Es sei  $U$  eine Umgebung von  $s$  in  $Y'$ , die zu einem Teilgebiet von  $\mathbf{C}^1$  biholomorph äquivalent ist, und in der kein weiterer Verzweigungspunkt von  $\varphi$  liegt. Dann gilt für den Entartungsdivisor  $E_\psi$  in der Notation von 1.7

$$[E_\psi] | f'^{-1}(U) = [X'_s]^h | f'^{-1}(U)$$

für die Beschränkungen der fraglichen Bündel auf  $f'^{-1}(U)$ . Aber das Bündel  $[X'_s] | f'^{-1}(U)$  ist trivial, denn der Divisor  $X'_s$  wird in der ganzen offenen Menge  $f'^{-1}(U)$  durch eine einzige holomorphe Funktion, nämlich  $f'$ ,

gegeben. Sind daher  $i: X_t \rightarrow X$  und  $j: X'_s \rightarrow X'$  die natürlichen Inklusionen, so ist  $j^*[X'_s]$  trivial. Daher erhält man unter Benutzung der Adjunktions- und der Hurwitzformel für die kanonischen Bündel

$$\begin{aligned} K_{X'_s} &= j^*(K_X \otimes [X'_s]) = j^*(\psi^* K_X \otimes [E_\psi] \otimes [X'_s]) = j^*\psi^* K_X \otimes j^*[X'_s]^{h+1} \\ &= j^*\psi^* K_X = \psi_s^* i^* K_X. \end{aligned}$$

Aber  $K_X$  ist in einer geeigneten Umgebung des Punktes  $p$  trivial, und daher ist  $K_{X'_s}$  in einer geeigneten Umgebung von  $\psi_s^{-1}(p)$  trivial. Dann gilt aber  $K_{X'_s} \circ C_i = 0$  für  $i = 1, \dots, k$ . q. e. d.

**2.2.** Wir kommen nun zum Hauptresultat dieser Arbeit.

**Satz 4.**  $f: X \rightarrow Y$  sei eine holomorphe Abbildung der 3-dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit  $X$  auf die 1-dimensionale Mannigfaltigkeit  $Y$ . Die Singularitätenmenge von  $f$  sei endlich. Die Singularitäten der Fasern von  $f$  seien von  $E_8$  verschiedene absolut isolierte Doppelpunkte. Dann existiert eine Auflösung von  $f$ .

Der Beweis dieses Satzes nimmt den Rest dieses Paragraphen ein.

**2.3.** Die Idee des Beweises ist sehr einfach. Man konstruiert in geeigneter Weise die Überlagerung  $\varphi: Y' \rightarrow Y$ . Dann lifet man die Familie von komplexen Räumen  $X = \bigcup_{t \in Y} X_t$  nach  $Y'$ , d. h. man betrachtet den komplexen Raum

$\varphi^* X = \{(s, x) \in Y' \times X \text{ mit } \varphi(s) = f(x)\}$ .  $\varphi^* X$  hat Singularitäten genau in den endlich vielen Punkten  $(s, x)$ , für welche  $x$  und  $s$  singuläre Punkte von  $f$  bzw.  $\varphi$  sind. Diese isolierten Singularitäten des 3-dimensionalen komplexen Raumes  $\varphi^* X$  muß man nun in geeigneter Weise auflösen, und zwar so, daß man in  $(s, x)$  gerade ein System von Kurven einsetzt, das die Singularität der Faser  $X_{f(x)}$  auflöst. Dieses geschieht folgendermaßen: Man zeigt, daß man sich auf die Betrachtung einer geeigneten Umgebung  $V$  von  $p = (s, x)$  in  $\varphi^* X$  beschränken kann. Für dieses  $V$  kann man gewisse meromorphe Abbildungen  $\mu: V \rightarrow P_1$  finden, die genau in  $p$  eine Unbestimmtheitsstelle haben. Der Graph  $G_\mu = \{(v, \lambda) \in V \times P_1 \mid \lambda = \mu(v)\}$  ist eine Modifikation  $V_1$  von  $V$ , die aus  $V$  durch Einsetzen der Kurve  $\{p\} \times P_1$  in  $p$  entsteht.  $V_1$  enthält möglicherweise wieder gewisse isolierte Singularitäten. Dann modifiziert man  $V_1$  in analoger Weise. Durch endliche Wiederholung dieses Prozesses erhält man schließlich eine gewisse projektive Modifikation  $V' \rightarrow V$  im Sinne von [27], die man auch als Graph einer meromorphen Abbildung  $V \rightarrow P_1 \times \dots \times P_1$  in ein  $k$ -faches kartesisches Produkt von 1-dimensionalen projektiven Räumen auffassen kann. Dabei ist die Zahl  $k$  gleich dem „Rang“ der fraglichen Singularität, d. h.  $k$  für  $A_k$  bzw.  $D_k$  bzw.  $E_k$ . Die Modifikation  $V'$  hat die gewünschten Eigenschaften; bei Anwendung dieses Prozesses auf jeden singulären Punkt von  $\varphi^* X$  erhält man eine Modifikation  $\pi: X' \rightarrow \varphi^* X$ , deren Komposition mit der Projektion  $\varphi^* X \rightarrow Y'$  die gesuchte Auflösung  $f': X' \rightarrow Y'$  ist.

**2.4. Konstruktion der Überlagerung  $\varphi: Y' \rightarrow Y$ .** Für den Beweis von Satz 3 wird es bei  $\varphi$  nur auf die Verzweigungsordnung von  $\varphi$  in den Punkten  $s \in Y'$  ankommen, für die  $X_{\varphi(s)}$  singulär ist. Um diese Verzweigungsordnung geeignet zu bestimmen, ordnen wir jedem absolut isolierten Doppelpunkt  $p$  eine natürliche Zahl  $h(p)$  zu, seine „Coxeterzahl“. (In der Theorie der einfachen

Lieschen Algebren ist die Coxeterzahl die Ordnung gewisser Elemente, nämlich der Coxetertransformationen, in den entsprechenden Weylschen Gruppen.)

Coxeterzahlen:

$$\begin{aligned} h(A_r) &= r + 1 \\ h(D_r) &= 2r - 2 \\ h(E_6) &= 12 \\ h(E_7) &= 18 \\ h(E_8) &= 30 \end{aligned}$$

In den Abschnitten 2.7 bis 2.10 werden wir u. a. folgendes zeigen:

**Zusatz zu Satz 4:** Wenn die Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  nur einen einzigen singulären Punkt  $p$  hat, so existiert eine Auflösung  $(f', \varphi, \psi)$ , für welche die Überlagerung  $\varphi$  über  $f(p)$  genau einen Verzweigungspunkt hat, und zwar von der Ordnung  $h(p) - 1$ .

*Vermutung:* Für jede Auflösung  $(f', \varphi, \psi)$  ist die Verzweigungsordnung von  $\varphi$  in einem Punkt  $s$  mit  $\varphi(s) = f(p)$  gleich  $ah(p) - 1$ , wobei  $a$  eine ganze positive Zahl ist.

Aus diesem Grunde wählen wir zum Beweis von Satz 3 für  $\varphi: Y' \rightarrow Y$  irgendeine verzweigte Überlagerung von  $Y$ , welche die folgende Eigenschaft hat: Es sei  $s \in Y'$ ,  $h_s(\varphi) - 1$  die Verzweigungsordnung von  $\varphi$  in  $s$  und  $p \in X_{\varphi(s)}$  ein singulärer Punkt von  $X_{\varphi(s)}$ . Dann teilt die Coxeterzahl  $h(p)$  die Zahl  $h_s(\varphi)$ . Solche Überlagerungen gibt es natürlich. Sind etwa  $p_1, \dots, p_m \in X$  die singulären Punkte von  $f$  und  $t_1, \dots, t_k$  ihre Bildpunkte, und ferner  $h$  das kleinste gemeinsame Vielfache von  $h(p_1), \dots, h(p_m)$ , so kann man z. B. für zusammenhängendes  $Y: Y' \rightarrow Y$  als  $h$ -blättrige Überlagerung wählen, welche genau über  $t_1, \dots, t_k$  und, falls  $k$  ungerade, über einem weiteren Punkt  $t_0$  verzweigt ist, und zwar mit der Ordnung  $h - 1$  (vgl. [5], p. 242).

**2.5.** In diesem Abschnitt soll lediglich gezeigt werden, daß das Auflösungsproblem ein rein lokales Problem für die singulären Punkte von  $\varphi^*X$  ist und daß sich die Gleichungen dieser Singularitäten auf eine Standardform bringen lassen.

(a) *Standardisierung:* Zunächst ist klar, daß man in einer Umgebung eines singulären Punktes  $p \in X$  von  $f$  und einer Umgebung von  $f(p)$  in  $Y$  komplexe Koordinaten  $(x, y, z)$  bzw.  $t$  einführen kann, so daß  $f$  beschrieben wird durch

$$t = u(x, y, z) (z^2 - g(x, y)),$$

wo  $z^2 - g(x, y) = 0$  eine der in 1.4 für die absolut isolierten Doppelpunkte angegebenen Gleichungen und  $u$  eine nicht verschwindende holomorphe Funktion ist. Durch  $x_1 = u^{a_1}x$ ,  $x_2 = u^{a_2}y$ ,  $x_3 = u^{a_3}z$  mit geeigneten Zahlen  $a_i$  kann man neue Koordinaten einführen, so daß

$$t = x_3^2 - g(x_1, x_2).$$

Führt man nun noch in einer Umgebung eines über  $f(p)$  liegenden Verzweigungspunktes  $s \in Y'$  eine komplexe Koordinate  $x_4$  ein, so daß  $\varphi$  durch

$t = x_4^h$  beschrieben wird, dann gilt: Bezüglich geeigneter Koordinaten in der Umgebung von  $(s, p) \in Y' \times X$  wird eine Umgebung  $V$  von  $(s, p)$ ,  $V \subset \varphi^* X \subset C Y' \times X$ , durch die Gleichung

$$(1) \quad g(x_1, x_2) - x_3^2 + x_4^h = 0$$

beschrieben, wobei die Projektionen  $p_1: \varphi^* X \rightarrow Y'$  und  $p_2: \varphi^* X \rightarrow X$  durch  $p_1(x_1, \dots, x_4) = x_4$  und  $p_2(x_1, \dots, x_4) = (x_1, x_2, x_3)$  gegeben werden.

(b) *Zurückführung auf ein lokales Problem*: Es sei  $\pi: V' \rightarrow V$  eine Auflösung der Singularität  $(s, p)$  von  $V$ , welche die gewünschten Eigenschaften hat, d. h. für welche  $p_1 \circ \pi$  regulär und  $\pi: (p_1 \circ \pi)^{-1}(s) \rightarrow p_1^{-1}(s)$  eine Auflösung der Singularität von  $p_1^{-1}(s)$  ist. Dann erhält man aus  $V'$  und  $\varphi^* X - \{(s, p)\}$  durch Identifizierung der offenen Teilmengen  $V' - \pi^{-1}((s, p)) \subset V'$  und  $V - \{(s, p)\} \subset \varphi^* X - \{(s, p)\}$  einen komplexen Raum  $\tilde{X}$  und eine eigentliche Modifikationsabbildung  $\tilde{\pi}: \tilde{X} \rightarrow \varphi^* X$ , für welche  $\tilde{\pi}: \tilde{\pi}^{-1}(\varphi^* X - \{(s, p)\}) \rightarrow \varphi^* X - \{(s, p)\}$  biholomorph und  $\tilde{\pi}: \tilde{\pi}^{-1}(V) \rightarrow V$  im wesentlichen gleich  $\pi: V' \rightarrow V$  ist. Indem man diesen Prozeß für jeden der endlich vielen singulären Punkte von  $\varphi^* X$  anwendet, erhält man eine eigentliche Modifikation  $\pi: X' \rightarrow \varphi^* X$ , welche alle gewünschten Eigenschaften hat:  $\pi$  ist eine Auflösung der Singularitäten von  $\varphi^* X$ ,  $f' = p_1 \circ \pi$  ist regulär, mit  $\psi = p_2 \circ \pi$  gilt  $\varphi \circ f' = f \circ \psi$ , und für jedes  $s \in Y'$  ist  $\pi: X'_s \rightarrow p_1^{-1}(s)$  eine Auflösung der Singularitäten von  $p_1^{-1}(s)$ , also  $\psi_s: X'_s \rightarrow X_{\varphi(s)}$  eine Auflösung der Singularitäten von  $X_{\varphi(s)}$ . Also ist  $f': X' \rightarrow Y'$  eine Auflösung der Singularitäten von  $f$ .

Es ist somit klar, daß es zum Beweis von Satz 4 genügt, für geeignete Umgebungen  $V$  der singulären Punkte von  $\varphi^* X$ , die durch eine Gleichung (1) beschrieben werden, eine Auflösung  $\pi: V' \rightarrow V$  mit den angegebenen Eigenschaften zu konstruieren. Dies wird in 2.7 für  $A_k$ , in 2.8 für  $D_k$ , in 2.9 für  $E_6$  und in 2.10 für  $E_7$  ausgeführt.

2.6. (a) Bei der Konstruktion der Auflösung von  $V$  können wir uns auf den Fall beschränken, wo in der Gleichung (1) der Exponent  $h$  gleich der Coxeterzahl  $h(p)$  der Singularität  $p \in X_{\varphi(s)}$  ist. Denn nach Konstruktion von  $\varphi$  gilt jedenfalls  $h = ah(p)$  mit einer natürlichen Zahl  $a$ . Daher kann man lokal  $\varphi$  faktorisieren in  $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ , wobei  $\varphi_1$  eine Überlagerung mit der Verzweigungsordnung  $h(p) - 1$  ist. Wenn man das Problem für die Überlagerung  $\varphi_1$  lösen kann, so kann man die Lösung in naheliegender Weise mittels  $\varphi_2$  „liften“ und erhält dann eine Lösung für  $\varphi$ .

(b) Zu den schon in 2.3 erwähnten meromorphen Abbildungen  $V \rightarrow P_1 \times \dots \times P_1$  mit Unbestimmtheitsstellen genau in den singulären Punkten bemerken wir folgendes:  $V, W$  seien normale komplexe Räume,  $p \in V$  und  $q \in W$ , und  $\Phi: V \rightarrow W$  eine holomorphe Abbildung mit  $\Phi^{-1}(q) = p$ . Ferner sei  $\mu: W \rightarrow P_1 \times \dots \times P_1$  eine meromorphe Abbildung mit  $q$  als einziger Unbestimmtheitsstelle,  $W' \subset W \times P_1 \times \dots \times P_1$  der Graph von  $\mu$  und  $\pi: W' \rightarrow W$  die durch die Projektion auf  $W$  induzierte Modifikationsabbildung. Dann ist  $\mu \circ \Phi$  eine meromorphe Abbildung mit  $p$  als einziger Unbestimmtheitsstelle und der Graph  $V'$  von  $\mu \circ \Phi$  ist biholomorph äquivalent zu  $\Phi^* W' = \{(v, w) \in V \times W' \mid \Phi(v) = \pi(w)\}$ . Kennt man bereits die Modifikation

$W' \rightarrow W$ , so liefert  $\Phi^*W'$  eine einfache Beschreibung von  $V'$ , und wir werden dieses in 2.8 bis 2.10 zur Vereinfachung der Darstellung benutzen.

(c) Es wird sich herausstellen, daß die zu modifizierenden analytischen Teilmengen  $V$  von  $\mathbf{C}^4$  sich sämtlich durch Gleichungen der Form

$$(2) \quad \Phi_1 \Phi_2 - \Phi_3 \Phi_4 = 0$$

beschreiben lassen, wobei aus  $\Phi_i(x_1, \dots, x_4) = 0$  für  $i = 1, \dots, 4$  folgt, daß  $x = (0, \dots, 0)$  <sup>6</sup>. Die Graphen der meromorphen Funktionen  $\Phi_1/\Phi_3$  oder  $\Phi_1/\Phi_4$  sind Modifikationen von  $V$ , welche im Sinne von 2.3 zur Lösung des Problems benutzt werden können. Indem wir durch  $z_i = \Phi_i(x)$  eine holomorphe Abbildung  $\Phi$  von  $V$  auf den Kegel  $W$  mit der Gleichung

$$z_1 z_2 - z_3 z_4 = 0$$

definieren, können wir also prinzipiell nach (b) die Lösung zurückführen auf den wohlbekannten Fall des Kegels (vgl. hierzu [5] und [11], § 4). Allerdings ist gerade das Auffinden der Funktionen  $\Phi_i$  bzw. der Abbildungen  $\Phi$  die eigentliche Schwierigkeit.

### 2.7. Auflösung von $A_k$ .

Gleichung (1) lautet in diesem Fall (wenn wir  $h = h(A_k) = k + 1$  setzen)

$$x_1^2 - x_2^h - x_3^2 + x_4^h = 0$$

oder, nach dem Koordinatenwechsel  $y_1 = x_1 + x_3$ ,  $y_3 = x_1 - x_3$ ,  $y_2 = x_2$ ,  $y_4 = x_4$

$$y_1 y_3 - \prod_{v=1}^h (y_2 - e_h^v y_4) = 0,$$

wobei  $e_h$  eine primitive  $h$ -te Einheitswurzel ist. Allgemeiner sei in diesem Abschnitt  $V$  die analytische Teilmenge von  $\mathbf{C}^4$ , die durch die folgende Gleichung gegeben wird.

$$(3) \quad y_1 y_3 - \prod_{v=1}^h (y_2 - a_v y_4) = 0,$$

wobei  $a_1, \dots, a_h$  paarweise verschiedene komplexe Zahlen sind. (Daß die  $a_v$  paarweise verschieden sind, ist notwendig und hinreichend dafür, daß der einzige singuläre Punkt von  $V$  der Nullpunkt des  $\mathbf{C}^4$  ist.) Für die durch  $f''(y) = y_4$  gegebene Abbildung  $f'' : V \rightarrow \mathbf{C}^1$  hat  $f''^{-1}(0)$  eine Singularität  $A_k$ , und  $f''^{-1}(t)$ ,  $t \neq 0$ , ist singularitätenfrei.

Es seien  $P_1^{(i)}$  1-dimensionale projektive Räume und  $(z_{i0}, z_{i1})$  homogene Koordinaten in  $P_1^{(i)}$ . Wir definieren eine meromorphe Abbildung  $\mu : V \rightarrow P_1^{(1)} \times \dots \times P_1^{(k)}$  durch

$$(z_{i0}, z_{i1}) = \left( y_1, \prod_{v=1}^i (y_2 - a_v y_4) \right) \quad i = 1, \dots, k.$$

<sup>6</sup> Im Fall  $E_8$  gilt keine solche Gleichung. Dies folgt daraus, daß der lokale Ring von  $E_8$  faktoriell ist (siehe [30], II (a) sowie G. SCHEJA, „Über Primfaktorzerlegung in 2-dimensionalen lokalen Ringen“, Math. Ann. **159**, 252–258 (1965)). Ein elementarer Beweis für die Unmöglichkeit einer solchen Gleichung wurde mir von D. KIRBY mitgeteilt.

$V'$  sei der Graph von  $\mu$ ;  $V'$  ist also eine analytische Teilmenge von  $V \times \times P_1^{(1)} \times \dots \times P_1^{(k)} \subset \mathbb{C}^4 \times P_1^{(1)} \times \dots \times P_1^{(k)}$ . Man hat eine eigentliche Modifikationsabbildung (durch Projektion auf den ersten Faktor)  $\pi: V' \rightarrow V$ .  $V'$  ist singularitätenfrei.

*Beweis:* Wir geben eine Überdeckung von  $V'$  mit  $k+1$  Koordinatenumgebungen  $U_0, \dots, U_k$  an. Es sei  $U_i = \{(y, z) \in V' \mid z_{i1} \neq 0, z_{i+1,0} \neq 0\}$ ,  $i = 1, \dots, k-1$ ,  $U_0 = \{(y, z) \in V' \mid z_{10} \neq 0\}$  und  $U_k = \{(y, z) \in V' \mid z_{k1} \neq 0\}$ . Offensichtlich gilt  $V' = \bigcup_{i=0}^k U_i$ . Als Koordinatenfunktionen in  $U_i$  können wir  $y_4$

und die wie folgt definierten Funktionen  $u_{i0}, u_{i1}$  wählen.  $u_{i1} = z_{i0} z_{i1}^{-1}$  für  $i = 1, \dots, k$ ,  $u_{i0} = z_{i+1,1} z_{i+1,0}^{-1}$  für  $i = 0, \dots, k-1$  und  $u_{01} = y_1$ ,  $u_{k0} = y_3$ . Daß die Funktionen  $y_4, u_{i0}, u_{i1}$  wirklich eine biholomorphe Abbildung von  $U_i$  auf  $\mathbb{C}^3$  definieren, folgt daraus, daß man sofort die Umkehrabbildung angeben kann:

$$(4) \quad \begin{aligned} y_1 &= u_{i1} \prod_{v=1}^i (u_{i0} u_{i1} + (a_{i+1} - a_v) y_4) \\ y_3 &= u_{i0} \prod_{v=i+2}^h (u_{i0} u_{i1} + (a_{i+1} - a_v) y_4) \\ y_2 &= u_{i0} u_{i1} + a_{i+1} y_4 \quad y_4 = y_4 \end{aligned}$$

$$(5) \quad \begin{aligned} (z_{j0}, z_{j1}) &= \left( u_{i1} \prod_{v=j+1}^i (u_{i0} u_{i1} + (a_{i+1} - a_v) y_4), 1 \right) \quad \text{für } j \leq i \\ (z_{j0}, z_{j1}) &= \left( 1, u_{i0} \prod_{v=i+2}^j (u_{i0} u_{i1} + (a_{i+1} - a_v) y_4) \right) \quad \text{für } j > i. \end{aligned}$$

Aus (4) und (5) geht unmittelbar hervor, daß bei der Modifikation  $\pi: V' \rightarrow V$  im Punkte  $(y) = (0, \dots, 0) \in V$  die folgenden  $k$  singularitätenfreien rationalen Kurven von  $P_1^{(1)} \times \dots \times P_1^{(k)}$  eingesetzt worden sind

$$\{(0, 1)\} \times \dots \times \{(0, 1)\} \times P_1^{(i)} \times \{(1, 0)\} \times \dots \times \{(1, 0)\} \quad i = 1, \dots, k.$$

$f' = f'' \circ \pi$  wird in jedem  $U_i$  durch die Koordinatenfunktion  $y_4$  gegeben und ist also regulär. Ferner ist offensichtlich  $\pi: f'^{-1}(0) \rightarrow f''^{-1}(0)$  eine Auflösung der Singularität  $A_k$  von  $f''^{-1}(0)$ , und damit ist durch  $\pi: V' \rightarrow V$  unser Problem im Fall  $A_k$  gelöst.

### 2.8. Auflösung von $D_k$ .

Gleichung (1) lautet für  $D_{k+1}$ , da  $h = h(D_{k+1}) = 2k$ ,

$$(6) \quad x_2 x_1^2 - x_3^2 - x_2^k + x_4^{2k} = 0.$$

Ist  $e_h$  eine  $h$ -te primitive Einheitswurzel, so kann man (6) in der folgenden Form schreiben:

$$x_2 x_1^2 - x_3^2 + (-1)^{k+1} \prod_{i=1}^k (e_h^{2i} x_4^2 - x_2) = 0.$$

Allgemeiner betrachten wir im folgenden die analytische Teilmenge  $V$  von  $\mathbb{C}^4$ , die durch die folgende Gleichung definiert wird.

$$(7) \quad x_2 x_1^2 - x_3^2 + \prod_{i=1}^k (a_i^2 x_4^2 - x_2) = 0. \quad a_i^2 \neq a_j^2 \quad \text{für } i \neq j.$$

Um dies in der Form (2) zu schreiben, führen wir zwei Polynome  $P(x_2, x_4)$  und  $Q(x_2, x_4)$  ein. Sie werden eindeutig definiert durch die Gleichung

$$(8) \quad vP(v^2, x_4) + Q(v^2, x_4) = \prod_{i=1}^k (v + a_i x_4),$$

wobei  $v$  eine Unbestimmte ist. Es gilt

$$(8') \quad -vP(v^2, x_4) + Q(v^2, x_4) = \prod_{i=1}^k (-v + a_i x_4)$$

und also wegen (8), (8')

$$(9) \quad -x_2 P^2(x_2, x_4) + Q^2(x_2, x_4) = \prod_{i=1}^k (a_i^2 x_4^2 - x_2).$$

Einsetzen von (9) in (7) ergibt für  $V$  die Gleichung

$$x_2(x_1^2 - P^2) - x_3^2 + Q^2 = 0.$$

Daher wird durch  $y_1 = x_2$ ,  $y_3 = x_1^2 - P^2$ ,  $y_2 = x_3$ ,  $y_4 = Q$  eine Abbildung  $\Phi$  der durch (7) beschriebenen analytischen Menge  $V$  in den Kegel  $Q_3$  mit der Gleichung  $y_1 y_3 - y_2^2 + y_4^2 = 0$  gegeben.  $Q'_3 \rightarrow Q_3$  sei die in 2.7 beschriebene Modifikation von  $Q_3$ .  $Q'_3$  wird durch zwei Koordinatenumgebungen  $U_0$  und  $U_1$  überdeckt. Wie in 2.6 (b) erhalten wir eine Modifikation von  $V$  durch  $\Phi^* Q'_3 = \Phi^* U_0 \cup \Phi^* U_1 \subset V \times Q'_3$ . Da  $\Phi^* U_1$  singularitätenfrei ist, braucht nur  $\Phi^* U_0$  untersucht zu werden. Mit den in 2.7 eingeführten Koordinaten wird es durch folgende Gleichungen beschrieben

$$\begin{aligned} x_2 &= u_{01} & x_3 &= u_{00} u_{01} - y_4 \\ x_1^2 - P^2 &= u_{00} (u_{00} u_{01} - 2y_4) & Q &= y_4. \end{aligned}$$

Nach Elimination von  $u_{01}$ ,  $x_3$  und  $y_4$  bleibt die Gleichung

$$(10) \quad u_{00} (u_{00} x_2 - 2Q(x_2, x_4)) - x_1^2 + P^2(x_2, x_4) = 0.$$

Durch  $y_1 = u_{00}$ ,  $y_3 = u_{00} x_2 - 2Q(x_2, x_4)$ ,  $y_2 = x_1$ ,  $y_4 = P$  wird wieder eine Abbildung  $\Psi$  der durch (10) beschriebenen analytischen Menge in  $Q_3$  gegeben. Bezeichnen wir jetzt die in 2.7 beschriebenen Koordinatenumgebungen bzw. -funktionen mit  $V_0, V_1$  bzw.  $v_{ij}$ , so ist  $\Psi^* V_1$  singularitätenfrei und  $\Psi^* V_0$  wird nach Elimination von  $v_{01}, y_4$  und  $x_1$  beschrieben durch

$$(11) \quad (x_2 - v_{00}^2) u_{00} + 2(v_{00} P(x_2, x_4) - Q(x_2, x_4)) = 0.$$

Das Polynom  $v_{00} P(x_2, x_4) - Q(x_2, x_4) - (v_{00} P(v_{00}^2, x_4) - Q(v_{00}^2, x_4))$  ist natürlich durch  $x_2 - v_{00}^2$  teilbar, es sei also etwa gleich  $(x_2 - v_{00}^2)G(v_{00}, x_2, x_4)$ . Wir führen neue Koordinaten ein durch

$$z_1 = x_2 - v_{00}^2, \quad z_3 = (-1)^k \left( \frac{1}{2} u_{00} + G \right), \quad z_2 = v_{00}, \quad z_4 = x_4.$$

Dann wird unter Beachtung von (8') aus (11)

$$z_1 z_3 - \prod_{i=1}^k (z_2 - a_i z_4) = 0.$$

Das ist aber die Gleichung (3), und für diese haben wir in 2.7 bereits das Problem gelöst.

### 2.9. Auflösung von $E_6$ .

$A_2^*$  sei die analytische Menge in  $\mathbb{C}^4$ , die durch die Gleichung

$$y_1 y_3 - y_2^3 + y_4^3 = 0$$

gegeben wird (vgl. 2.7), und  $A'_2 \rightarrow A_2^*$  die in 2.7 konstruierte Auflösung der Singularitäten von  $A_2^*$ . Wir werden die gesuchte Auflösung konstruieren, indem wir drei Abbildungen  $\Phi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , in  $A_2^*$  angeben und wie in 2.6 die Modifikationen  $\Phi_i^* A'_2$  betrachten. Die in 2.7 angegebenen Koordinatenumgebungen und -funktionen von  $A'_2$  mögen für  $\Phi_1$  mit  $U_i$  und  $u_{ij}$ , für  $\Phi_2$  mit  $V_i$  und  $v_{ij}$  bezeichnet werden. Gleichung (1) lautet im Fall  $E_6$

$$(12) \quad (x_2^2 + x_3)(x_2^2 - x_3) - x_1^3 + x_4^3 = 0.$$

$\Phi_1$  wird definiert durch  $y_1 = x_2^2 + x_3$ ,  $y_3 = x_2^2 - x_3$ ,  $y_2 = x_1$ ,  $y_4 = x_4$ .  $\Phi_1^* U_0$  und  $\Phi_1^* U_2$  sind singularitätenfrei. Für  $\Phi_1^* U_1$  ergibt sich nach Elimination von  $x_1, x_3, x_4$  die Gleichung

$$2x_2^2 - u_{10}u_{11}(u_{10} + u_{11}) + (e^4 - e^8)(u_{11} - e^4 u_{10})x_4^4 = 0,$$

wobei  $e = e_{12}$  eine primitive 12-te Einheitswurzel ist. Nach einem Koordinatenwechsel mit  $z_2^2 = 2x_2^2$ ,  $z_4^4 = e^4(2e^5 + 2e^7 - 3)x_4^4$ ,  $3u_0 = (e^8 - e^4)u_{10} + (1 - e^4)u_{11}$ ,  $3u_1 = (e^8 - e^4)u_{10} + (e^8 - 1)u_{11}$  nimmt diese Gleichung die folgende Form an

$$(z_2 - (e^5 + e^7)u_0 z_4 + z_4^3)(z_2 + (e^5 + e^7)u_0 z_4 - z_4^3) - u_1^3 + (u_0 + z_4^2)^3 = 0.$$

Daher definieren wir die Abbildung  $\Phi_2 : \Phi_1^* U_1 \rightarrow A_2^*$  durch

$$y_1 = z_2 - (e^5 + e^7)u_0 z_4 + z_4^3, \quad y_3 = z_2 + (e^5 + e^7)u_0 z_4 - z_4^3, \quad y_2 = u_1,$$

$y_4 = u_0 + z_4^2$ . Dann sind  $\Phi_2^* V_0$  und  $\Phi_2^* V_2$  singularitätenfrei, und für  $\Phi_2^* V_1$  erhält man die Gleichung

$$2z_4(z_4^2 - (e^5 + e^7)u_0) + v_{10}v_{11}(v_{10} - v_{11}) + (e^4 - e^8)(v_{11} + e^4 v_{10})(u_0 + z_4^2) = 0.$$

Durch  $y_1 = (e^8 - 1)v_{10} + (e^4 - e^8)v_{11} - 2(e^5 + e^7)z_4$ ,

$$y_3 = u_0 + z_4^2 + \frac{1}{3}v_{10}((1 - e^4)v_{10} + (e^4 - e^8)v_{11} + 2(e^5 + e^7)z_4),$$

$$y_2 = -v_{10} - \frac{2}{3}(e^5 + e^7)z_4, \quad y_4 = z_4 \quad \text{und} \quad a_i = e^{4i} \left(1 + \frac{1}{3}(e^5 + e^7)\right)$$

geht diese Gleichung über in

$$y_1 y_3 - \prod_{i=1}^3 (y_2 - a_i y_4).$$

Man hat also eine biholomorphe Abbildung  $\Phi_3 : \Phi_2^* V_1 \rightarrow A_2^*$ , und mit 2.6, 2.7 erhält man die gesuchte Auflösung.

### 2.10. Auflösung von $E_7$ .

Ähnlich wie in 2.9 werden wir eine Abbildung  $\Psi$  in  $Q_3$  und dann drei Abbildungen  $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$  in  $A_2^*$  angeben, mittels derer gemäß 2.6 zunächst eine und dann dreimal je zwei singularitätenfreie rationale Kurven eingesetzt

werden. Mit  $U_i$  bzw. auch  $V_i$ ,  $i = 0, 1, 2$ , bezeichnen wir die in 2.7 beschriebenen Koordinatenumgebungen von  $A'_2$  und mit  $u_0, u_1$  bzw. auch  $v_0, v_1$  die dort definierten Koordinatenfunktionen in  $U_1$  bzw.  $V_1$ . Wir bemerken vorweg, daß  $\Phi_1^*(U_0)$ ,  $\Phi_1^*(U_2)$  und  $\Phi_2^*(V_0)$ ,  $\Phi_2^*(V_2)$  singularitätenfrei sein werden; daher betrachten wir nur  $\Psi^*(Q'_3)$ ,  $\Phi_1^*(U_1)$ ,  $\Phi_2^*(V_1)$ .

Im Fall  $E_7$  lautet Gleichung (1)

$$(13) \quad x_1(x_1^2 - x_2^2) - x_3^2 + x_4^{18} = 0.$$

$\Psi$  wird definiert durch  $y_1 = x_1$ ,  $y_3 = x_1^2 - x_2^2$ ,  $y_2 = x_3$ ,  $y_4 = x_4^9$ . Dann erhält man für  $\Psi^*(Q'_3)$  die Gleichung

$$(14) \quad (x_1 + ut^3 + (2\alpha^2 - 1)t^6)(x_1 - u^2 + (2\alpha^2 - 1)ut^3 + (-11\alpha^2 + \alpha + 4)t^6) - x_2^2 + u^3t^3 = 0.$$

Dabei ist  $\alpha$  eine Lösung der Gleichung  $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 1 = 0$ , d. h.  $\alpha = 1 - e_9 - e_9^8$ , wo  $e_9$  eine primitive 9-te Einheitswurzel ist, und für die Koordinaten  $u$  und  $t$  gilt  $2x_4^9 = \alpha^3(\alpha - 1)^3t^9$  und  $u_{00} = u - \alpha^2t^3$ , wobei  $u_{00}$  die in 2.7 angegebene Koordinatenfunktion für  $Q'_3$  ist.

Wegen (14) wird durch  $y_1 = x_1 + ut^3 + (2\alpha^2 - 1)t^6$ ,  $y_3 = x_1 - u^2 + (2\alpha^2 - 1)ut^3 + (-11\alpha^2 + \alpha + 4)t^6$ ,  $y_2 = x_2$ ,  $y_4 = ut$  eine Abbildung  $\Phi_1$  der durch (14) beschriebenen analytischen Menge in  $A_2^*$  definiert. Für  $\Phi_1^*U_1$  ergibt sich die Gleichung

$$(15) \quad u^2 + 2(1 - \alpha^2)ut^3 + (13\alpha^2 - \alpha - 5)t^6 - u_0u_1^2 + u_0^2u_1 - ut((1 - \varepsilon^2)u_0 + (\varepsilon^2 - \varepsilon)u_1) = 0,$$

wobei  $\varepsilon$  eine primitive 3-te Einheitswurzel ist.

Statt  $u_0, u_1$  führen wir Koordinaten  $u'_0, u'_1$  ein durch

$$3u'_0 = (1 - \varepsilon^2)u_0 + (\varepsilon^2 - \varepsilon)u_1 + ct^2, \quad 3u'_1 = (\varepsilon - 1)u_0 + (\varepsilon^2 - \varepsilon)u_1,$$

wobei  $c$  noch geeignet zu bestimmen ist. Dann kann man (15) in der folgenden Form schreiben

$$(16) \quad (u + a_1t^3 + b_1u'_0t)(u + a_2t^3 + b_2u'_0t) - u_1^3 + u_0^3 = 0.$$

Die Koeffizienten  $a_i, b_i, c$  ergeben sich dabei durch Koeffizientenvergleich mit (15) als Lösungen eines Systems algebraischer Gleichungen. Wegen (16) definieren wir  $\Phi_2: \Phi_1^*U_1 \rightarrow A_2^*$  durch

$$y_1 = u + a_1t^3 + b_1u'_0t, \quad y_3 = u + a_2t^3 + b_2u'_0t, \quad y_2 = u'_1, \quad y_4 = u'_0.$$

Für  $\Phi_2^*V_1$  erhält man die Gleichung

$$(17) \quad (a_1 - a_2)t^3 + (b_1 - b_2)u'_0t - v_1^2v_0 + v_0^2v_1 + u'_0((\varepsilon^2 - 1)v_0 + (\varepsilon - \varepsilon^2)v_1) = 0.$$

Führt man neue Koordinaten ein durch  $3v'_0 = (1 - \varepsilon^2)v_0 + (\varepsilon^2 - \varepsilon)v_1 + c_1t$ ,  $3v'_1 = (\varepsilon - 1)v_0 + (\varepsilon^2 - \varepsilon)v_1$ ,  $u''_0 = c_2u'_0 + c_3v_0^2 + c_4v_0t + c_5t^2$  mit geeigneten, leicht zu bestimmenden Konstanten  $c_i$ , so lautet (17)

$$u''_0v'_0 - v_1^3 + t^3 = 0,$$

so daß man eine biholomorphe Abbildung  $\Phi_3: \Phi_2^*V_1 \rightarrow A_2^*$  hat. Durch die Modifikation  $\Phi_3^*A'_2$  werden die letzten zwei von den sieben Kurven eingesetzt,

in welche die isolierte Singularität von  $V$  durch die obigen Modifikationen aufgelöst worden ist. Die so konstruierte Auflösung der Singularitäten  $V' \rightarrow V$  ist mit Koordinatenumgebungen überdeckt, in denen  $x_4$  (oder  $t = ax_4$  mit  $a \neq 0$ ) eine Koordinate ist. Daher ist  $V'$  eine Lösung unseres Problems im Fall  $E_7$ .

**2.11.** Die Durchführung der Beweise in 2.7 bis 2.10 zeigt, daß die Singularitäten von  $\varphi^*X$  in der gewünschten Weise durch eine endliche Folge von Modifikationen der folgenden Art aufgelöst werden können: Die beim Beweis auftretenden Singularitäten sind isolierte singuläre Punkte  $p$  von 3-dimensionalen analytischen Mengen  $V \subset \mathbb{C}^4$ . In den Fällen  $A_k, D_k, E_6, E_7$ , jedoch nicht im Fall  $E_8$ , kann man singularitätenfreie 2-dimensionale analytische Teilmengen  $W$  finden mit  $p \in W \subset V \subset \mathbb{C}^4$ . Durch  $\sigma$ -Prozeß in  $\mathbb{C}^4$  längs  $W$  erhält man eine Modifikation von  $V$ , in der für  $p$  ein  $P_1$  eingesetzt ist.

### § 3. Familien komplexer Flächen

**3.1. Definition:** Eine *reguläre Familie komplexer Flächen* ist eine eigentliche, reguläre, holomorphe Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  einer komplexen Mannigfaltigkeit  $X$  auf eine zusammenhängende komplexe Mannigfaltigkeit  $Y$  mit zusammenhängenden, 2-dimensionalen Fasern  $X_t$ .

Allgemeiner hat KODAIRA [24] auch differenzierbare Familien komplexer Flächen definiert. Eine komplexe Fläche  $V_0$  heißt *Deformation* von  $V_1$ , wenn  $V_0$  und  $V_1$  biholomorph äquivalent zu zwei Fasern in einer differenzierbaren Familie komplexer Flächen sind.

Im Rahmen der von KODAIRA und SPENCER entwickelten Deformationstheorie ist es möglich, das Verhalten einer exzeptionellen analytischen Teilmenge  $A$  einer Faser  $X_t$  bei Deformationen von  $X_t$  zu untersuchen, wenn  $A$  singularitätenfrei ist (vgl. z. B. [25], § 1, § 3, Theorem 5). Für den Fall, daß  $A$  nicht singularitätenfrei ist, sind mir keine derartigen Untersuchungen bekannt. Daher sind die folgenden Aussagen vielleicht als Beispiele von Interesse.

**Lemma 1.**  $f: X \rightarrow Y$  sei eine eigentliche holomorphe Abbildung komplexer Mannigfaltigkeiten mit endlicher Singularitätenmenge,  $X$  3-dimensional,  $Y$  1-dimensional und zusammenhängend. Die Fasern  $X_t$  seien zusammenhängend und ihre Singularitäten seien von  $E_8$  verschiedene rationale Doppelpunkte. Dann existiert eine reguläre Familie komplexer Flächen  $f': X' \rightarrow Y'$ , die eine Auflösung von  $f$  ist.

*Beweis:* Nach Satz 4 und 2.4 existiert eine Überlagerung  $\varphi: Y' \rightarrow Y$  mit zusammenhängendem  $Y'$  und eine Auflösung  $f': X' \rightarrow Y'$ .  $X'_s$  ist zusammenhängend, weil  $X_{\varphi(s)}$  es ist.  $f'$  ist faktorisiert durch  $X' \rightarrow \varphi^*X \rightarrow Y'$ .  $X' \rightarrow \varphi^*X$  ist eine eigentliche Modifikationsabbildung, und  $\varphi^*X \rightarrow Y'$  ist eigentlich, weil  $f$  eigentlich ist. Also ist  $f'$  eigentlich.

**Lemma 2.**  $V \subset P_N$  sei eine singularitätenfreie 3-dimensionale algebraische Mannigfaltigkeit,  $X_0 \subset V$  ein Hyperebenenschnitt (mit Schnittmultiplizität 1), und die Singularitäten von  $X_0$  seien von  $E_8$  verschiedene rationale Doppel-

punkte. Dann existiert eine holomorphe Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  wie in Lemma 1 und ein  $t_0 \in Y$ , so daß  $X_{t_0} = X_0$  und daß für  $t_0 \neq t \in Y$   $X_t$  ein singularitätenfreier Hyperebenenschnitt von  $V$  ist.

*Beweis* (wie in [5], p. 243): Man bläst  $V$  durch  $\sigma$ -Prozeß längs einer singularitätenfreien Kurve auf, welche durch eine hinreichend allgemeine Hyperebene auf  $X_0$  ausgeschnitten wird. Aus der entstehenden Modifikation  $\tilde{V} \subset V \times P_1$  erhält man  $X$  durch Entfernen der von  $X_0$  verschiedenen singulären Fasern und  $f$  durch Beschränkung der Projektion  $V \times P_1 \rightarrow P_1$ .

Indem man  $P_3$  mit Hilfe der Monome  $r$ -ten Grades in  $P_N$  einbettet ( $N = \binom{r+3}{3} - 1$ ), kann man Lemma 2 mit  $V = P_3$  auf den Fall anwenden,

wo  $X_0 \subset P_3$  eine Fläche der Ordnung  $r$  ist, deren Singularitäten rationale Doppelpunkte sind. Solche Flächen existieren natürlich; z. B. gibt es für jeden rationalen Doppelpunkt Flächen, die diesen Doppelpunkt als einzige Singularität haben. Man erhält also:

**Lemma 3.**  $X_0 \subset P_3$  sei eine Fläche der Ordnung  $r$ , deren Singularitäten von  $E_8$  verschiedene rationale Doppelpunkte sind. Dann existiert eine reguläre Familie komplexer Flächen  $f: X \rightarrow Y$ , so daß für ein  $t_0 \in Y$  gilt  $X_{t_0} = X_0$  und daß für alle  $t \neq t_0$   $X_t$  eine singularitätenfreie Fläche der Ordnung  $r$  in  $P_3$  ist, welche für  $r \neq 3$  überhaupt keine exzeptionellen Kurven und für  $r = 3$  nur exzeptionelle Kurven erster Art enthält.

**Korollar:**  $X_0, X_1 \subset P_3$  seien Flächen der Ordnung  $r$ ,  $X_1$  sei singularitätenfrei, und die Singularitäten von  $X_0$  seien von  $E_8$  verschiedene absolut isolierte Doppelpunkte. Dann ist das minimale singularitätenfreie Modell  $X'_0$  von  $X_0$  eine Deformation von  $X_1$ . Für die arithmetischen Geschlechter gilt

$$\chi(X_0) = \chi(X'_0) = \chi(X_1).$$

Für  $r = 4$  sagt das Korollar, daß  $X'_0$  eine K3-Fläche ist, denn die K3-Flächen können gerade definiert werden als diejenigen zweidimensionalen komplexen Mannigfaltigkeiten  $W$ , die Deformationen sind von singularitätenfreien Quartiken im  $P_3$ . Bezeichnen wir mit  $q = \dim_{\mathbb{C}} H^1(W, \mathcal{O}_W)$  die Irregularität von  $W$ , so ist für eine K3-Fläche  $W$   $q = 0$  und das kanonische Bündel  $K_W$  trivial. Dies folgt sofort daraus, daß für eine komplexe Fläche  $W$  mit gerader erster Bettizahl  $b_1 = 2q$  gilt. (Im Kählerschen Fall ist dies wohlbekannt, im allgemeinen Fall ist es ein Resultat von KODAIRA [26], Theorem 3). Die viel schwierigere Umkehrung wurde von KODAIRA bewiesen, [26], Theorem 12: *Eine 2-dimensionale kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, deren erste Chernsche Klasse  $c_1(W)$  und deren Irregularität  $q$  verschwinden, ist eine K3-Fläche.*

**Lemma 4.**  $X$  sei eine Fläche der Ordnung  $r$  in  $P_3$ , die nur isolierte Singularitäten hat.  $X'$  sei das minimale singularitätenfreie Modell von  $X$ . Dann gilt:  $X'$  ist eine K3-Fläche genau dann, wenn  $r = 4$  und wenn alle Singularitäten von  $X$  absolut isolierte Doppelpunkte sind.

*Beweis:*  $X'$  sei eine K3-Fläche. Wegen  $K_{X'}$  trivial folgt aus der Plückerformel 1.7, daß alle exzeptionellen Kurven von  $X'$  singularitätenfrei und

rational sind und Selbstschnitt  $-2$  haben. Also sind nach Satz 1 alle Singularitäten von  $X$  absolut isolierte Doppelpunkte. Daher gilt nach einem Argument beim Beweis von Satz 1 für die kanonischen Bündel

$$K_{X'} = \psi^*(K_{P_3} \otimes [X]),$$

wobei  $\psi$  die Komposition der Auflösung  $X' \rightarrow X$  und der Einbettung  $X \rightarrow P_3$  ist. Ist  $H$  das zu einer Ebene gehörige Geradenbündel auf  $P_3$ , so gilt also  $K_{X'} = \psi^* H^{r-4}$ , also  $r=4$  wegen der Trivialität von  $K_{X'}$ .

Nun habe umgekehrt  $X$  die Ordnung 4 und nur absolut isolierte Doppelpunkte. Kommt kein Doppelpunkt  $E_8$  vor, so ist  $X'$  eine K3-Fläche nach obigem Korollar. Es können aber Doppelpunkte  $E_8$  vorkommen, wie man z. B. leicht aus [16], Theorem VII entnimmt, und dann müssen wir KODAIRA'S Satz benutzen, d. h.  $q=0$  und  $c_1(X')=0$  zeigen.  $c_1(X')=0$  ist klar, weil  $K_{X'} = \psi^* H^{r-4}$  trivial ist. Nach dem Riemann-Rochschen Satz gilt für das arithmetische Geschlecht von  $X'$

$$\chi(X') = 1 - q + p_g = \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2).$$

Dabei ist das rechts stehende Polynom in den charakteristischen Klassen  $c_1$  und  $c_2$  von  $X'$  wegen  $H^4(X', \mathbb{Z})$  als ganze Zahl aufgefaßt, und  $p_g = \dim_{\mathbb{C}} H^0(X', K_{X'})$  ist das geometrische Geschlecht. Wegen der Trivialität von  $K_{X'}$  ist  $p_g = 1$  und  $c_1 = 0$ , also  $q = 2 - \frac{1}{12} c_2$ , d. h. zu zeigen ist  $c_2 = 24$ .

Wir erhalten  $X'$  durch den Levi-Zariski-Prozeß, d. h. wir sind in der Situation von 1.9 (ii) mit  $U = P_3$ . Für ein komplexes Vektorraumbündel  $F$  bezeichnen wir mit  $c_i(F)$  die  $i$ -te Chernsche Klasse. Für die Tangentialbündel  $T_{X'}$  und  $T_V$  von  $X'$  bzw.  $V$  gilt  $T_{X'} \oplus i^*[X'] = i^*T_V$ . Ferner folgt z. B. aus [35], daß für den iterierten punktalen  $\sigma$ -Prozeß  $\varphi$  gilt  $c_2(T_V) = \varphi^* c_2(T_U)$ . Daher folgt

$$\begin{aligned} c_2 &= c_2(T_{X'}) = c_2(i^*T_V) - c_1(T_{X'})c_1(i^*[X']) = i^*c_2(T_V) = c_1([X'])c_2(T_V) \\ &= c_1(\varphi^*[X] \otimes \prod_v [\Sigma_v]^{-r_v}) \varphi^* c_2(T_U) = \varphi^*(c_1([X])c_2(T_{P_3})) - \\ &\quad - \sum_v r_v i_{v,*}(i_v^* \varphi^* c_2(T_U)), \end{aligned}$$

wobei  $i_v: \Sigma_v \rightarrow V$  die Inklusion und  $i_{v,*}$  den Gysinmorphismus bezeichnet. Aber  $\varphi \circ i_v$  ist die konstante Abbildung, und daher verschwindet  $(\varphi \circ i_v)^* c_2(T_U)$ . Übrig bleibt  $c_2 = \varphi^*(c_1([X])c_2(T_{P_3})) = 24$ .

*Bemerkung:* Der vorstehende Beweis wird kürzer, wenn man Satz 6 aus [13] § 7 benutzt, denn dann folgt aus obigem Korollar  $\chi(X') = 2$  und wegen  $p_g = 1$  also  $q = 0$ .

*Bemerkung:* Könnte man Satz 4 auch für  $E_8$  beweisen, dann wäre Lemma 4 eine leichte Folgerung hieraus.

3.2. In § 2 ist die Existenz einer Auflösung  $(f', \varphi, \psi)$  für holomorphe Abbildungen  $f: X \rightarrow Y$  mit rationalen Doppelpunkten als Singularitäten bewiesen worden. Es ist jedoch zu bemerken, daß diese Auflösung durch die Überlagerung  $\varphi: Y' \rightarrow Y$  nicht eindeutig bestimmt ist.

*Definition:* Zwei Auflösungen  $(f'_1, \varphi, \psi_1)$ ,  $(f'_2, \varphi, \psi_2)$  von  $f$  heißen *äquivalent*, wenn es eine biholomorphe Abbildung  $g: X'_1 \rightarrow X'_2$  gibt mit  $\psi_1 = \psi_2 \circ g$  und  $f'_1 = f'_2 \circ g$ . Es folgt dann für die eindeutig bestimmten Abbildungen  $\pi_i: X'_i \rightarrow \varphi^* X$   $g = \pi_2^{-1} \circ \pi_1$ . Nun ist beispielsweise die in 2.7 beschriebene

Modifikation  $\pi_1$  der durch die Gleichung  $y_1 y_3 - \prod_{v=1}^h (y_2 - a_v y_4) = 0$  gegebenen Menge abhängig von der Numerierung der  $a_v$ . Wählt man eine andere Numerierung, so erhält man eine zweite Modifikation  $\pi_2$ , und die bimeromorphe Abbildung  $\pi_2^{-1} \circ \pi_1$  ist nicht holomorph. Man erhält so  $h!$  inäquivalente Auflösungen. Die in 2.8 bis 2.10 beschriebenen Modifikationen sind in ähnlicher Weise von gewissen Wahlen abhängig.

3.3. Wir haben die Auflösung der Singularitäten von Abbildungen im Rahmen der komplexen Analysis behandelt. Man kann ein analoges Problem für die algebraische Geometrie formulieren, indem man in der Definition einer Auflösung die komplexen Mannigfaltigkeiten durch singularitätenfreie abstrakte algebraische Varietäten über  $\mathbb{C}$  im Sinne von SERRE, FAC, und die holomorphen Abbildungen durch die entsprechenden Morphismen ersetzt. Der Zusammenhang mit dem komplexanalytischen Problem wird durch die Resultate von SERRE, GAGA, hergestellt. Natürlich gilt dann ein zu Satz 2 analoger Satz. Es ist hingegen nicht so, daß auch ein genaues Analogon zu Satz 4 gilt. Im Beweis von Satz 4 haben wir nur in 2.5 (a) wesentlich komplexanalytische Methoden benutzt. Daher gilt folgendes:

$f: X \rightarrow Y$  sei ein Morphismus abstrakter algebraischer Varietäten über  $\mathbb{C}$ , so daß für die zugehörige holomorphe Abbildung  $f$  die Voraussetzungen von Satz 4 erfüllt sind. Ferner werde über  $f$  vorausgesetzt, daß es einen eigentlichen surjektiven Morphismus  $\varphi: Y' \rightarrow Y$  von 1-dimensionalen singularitätenfreien Varietäten gibt, so daß folgendes gilt: Für jeden singulären Punkt von  $\varphi^* X$  existiert eine Zariski-offene Umgebung, welche so zu einer Zariski-offenen Teilmenge der durch die Gleichung  $g(x_1, x_2) - x_3^2 + x_4^h = 0$  gegebenen affin algebraischen Teilmenge von  $\mathbb{C}^4$  isomorph ist, daß die in 2.5 (a) angegebenen Bedingungen erfüllt sind. Dann ist die in § 2 konstruierte Auflösung  $f': X' \rightarrow Y'$  ein Morphismus von algebraischen Varietäten.

Es ist leicht, Beispiele anzugeben, in denen alle obenstehenden Voraussetzungen erfüllt sind. Aber es gibt auch Beispiele von H. HIRONAKA, wo durch die Modifikationen von § 2 aus  $\varphi^* X$  eine nicht-algebraische Varietät entsteht.

3.4. In § 2 haben wir die Auflösung von holomorphen Abbildungen mit endlich vielen Singularitäten behandelt. Die erzielten Ergebnisse lassen sich aber unter speziellen Voraussetzungen auf den Fall verallgemeinern, daß die Singularitätenmenge von  $f$  aus endlich vielen Fasern von  $f$  besteht. Als Resultate erhält man eine Art Kombination zwischen der Auflösung quasi-regulärer Abbildungen in [10] und Satz 4. Ein Beispiel ist die folgende Verallgemeinerung von Lemma 1.

**Lemma 5.**  $f: X \rightarrow Y$  sei eine holomorphe eigentliche Abbildung einer 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $X$  auf eine zusammenhängende 1-dimensionale Mannigfaltigkeit  $Y$ . Das Bild der Singularitätenmenge von  $f$  in  $Y$  sei endlich. Die Fasern  $X_t$  seien zusammenhängend, und die Singularitäten der zugehörigen reduzierten Räume  $\text{red}(X_t)$  seien von  $E_8$  verschiedene absolut isolierte Doppelpunkte. Dann existiert ein Tripel von holomorphen Abbildungen  $(f', \varphi, \psi)$  mit den folgenden Eigenschaften:

- i)  $f': X' \rightarrow Y'$  ist eine reguläre Familie komplexer Flächen.
- ii)  $\varphi: Y' \rightarrow Y$  ist eine verzweigte Überlagerung,  $\psi: X' \rightarrow X$  ist eigentlich und surjektiv.
- iii) Das folgende Diagramm ist kommutativ

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\psi} & X \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ Y' & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

iv) Sei  $s \in Y'$ , und  $\varrho_s: \tilde{X}_{\varphi(s)} \rightarrow \text{red}(X_{\varphi(s)})$  die minimale Auflösung der Singularitäten von  $\text{red}(X_{\varphi(s)})$ . Dann läßt sich die durch  $\psi$  induzierte Abbildung  $\psi_s: X'_s \rightarrow \text{red}(X_{\varphi(s)})$  faktorisieren durch  $\psi_s = \varrho_s \circ \eta_s$ , wobei  $\eta_s: X'_s \rightarrow \tilde{X}_{\varphi(s)}$  eine unverzweigte Überlagerung ist.

v) Hat  $f$  über  $\varphi(s)$  nur endlich viele singuläre Punkte, so ist  $\eta_s$  die triviale Überlagerung.

Wir verzichten auf die Einzelheiten des Beweises und bemerken nur, daß man zunächst  $\varphi$  geeignet wählt und dann auf die Normalisierung von  $\varphi^*X$  die Konstruktionen in 2.7 bis 2.10 anwendet.

**3.5.** Wir haben in der Definition der Auflösung von Singularitäten holomorpher Abbildungen die sehr starke Bedingung (iv) verwendet, weil wir in Satz 4 tatsächlich die Existenz von Auflösungen mit dieser Eigenschaft beweisen konnten. Man könnte aber auch den Begriff einer *schwachen Auflösung* definieren, indem man (iv) ersetzt durch die folgende schwächere Bedingung

(iv\*) Für jedes  $s \in Y'$  ist  $\psi_s: X'_s \rightarrow X_{\varphi(s)}$  eine eigentliche Modifikation.

Satz 2 und Satz 3 gelten auch mit diesem schwachen Auflösungs begriff. Man kann sogar die Voraussetzungen dieser Sätze noch weiter abschwächen. Man kann beweisen:

**Satz 5.**  $f: X \rightarrow Y$  sei eine holomorphe Abbildung eines 3-dimensionalen normalen komplexen Raumes  $X$  auf eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit  $Y$ . Die Fasern von  $f$  seien 2-dimensionale normale komplexe Räume. Alle Fasern bis auf endlich viele mögen höchstens rationale Singularitäten haben. Es existiere eine schwache Auflösung von  $f$ . Dann haben alle Fasern nur rationale Singularitäten.

**3.6.** Wir haben in Satz 2 ein notwendiges Kriterium für die Existenz einer Auflösung für eine holomorphe Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  angegeben. Dabei war  $X$  ein 3-dimensionaler komplexer Raum mit isolierten Singularitäten. Bei dem Hauptresultat Satz 4 hingegen haben wir die Existenz einer Auflösung nur für den Fall bewiesen, daß  $X$  singularitätenfrei ist. Bereits der Beweis

von Satz 4 zeigt aber, daß auch für einen Raum  $X$  mit isolierten Singularitäten, z. B. den durch die Gleichungen (3), (7), (12), (13) beschriebenen, eine Auflösung existieren kann, wenn die Singularitäten der Fasern rational sind. Weitere Beispiele für derartige Aussagen sind die folgenden nicht schwer zu beweisenden Resultate.

$f: X \rightarrow Y$  sei eine holomorphe Abbildung des zusammenhängenden 3-dimensionalen normalen komplexen Raumes  $X$  auf die 1-dimensionale Mannigfaltigkeit  $Y$ , und die Singularitätenmenge sei der Einfachheit halber einpunktig:  $S(f) = \{x_0\}$ .

**Satz 6.** *Unter den obigen Voraussetzungen über  $f: X \rightarrow Y$  gilt: Hat die Faser  $X_{f(x_0)}$  in  $x_0$  einen gewöhnlichen Doppelpunkt, so existiert eine Auflösung von  $f$ .*

**Satz 7.** *Unter den obigen Voraussetzungen über  $f: X \rightarrow Y$  gilt: Hat  $X$  in  $x_0$  einen gewöhnlichen Doppelpunkt (d. h. eine Kegelspitze  $z_1 z_2 - z_3 z_4 = 0$ ), so hat die Faser  $X_{f(x_0)}$  in  $x_0$  einen rationalen Doppelpunkt  $A_k$ , und es existiert eine Auflösung von  $f$ .*

Diese Sätze verallgemeinern die Ergebnisse von ATIYAH in [5].

Wir haben die Existenz von Auflösungen nur für rationale Doppelpunkte bewiesen. Es gibt aber auch Beispiele für die Existenz von Auflösungen von Abbildungen, deren Fasern rationale Singularitäten höherer Multiplizität haben. Solche Beispiele erhält man z. B. durch Niederblasen einer exzeptionellen Kurve in einer Familie von Hirzebruchschen  $\Sigma$ -Flächen (vgl. z. B. [6], p. 355). Ob allgemein die Umkehrung von Satz 2 oder Satz 5 gilt, d. h. die Auflösbarkeit von Abbildungen, deren Fasern rationale Singularitäten haben, ist ein ungelöstes Problem.

*Zusatz bei der Korrektur:* Inzwischen habe ich einen eleganteren Beweis für Satz 1 gefunden und darüber hinaus die vollständige Klassifikation für eine größere Klasse von rationalen Singularitäten, nämlich für alle normalen 2-dimensionalen Singularitäten, deren Umgebungsänder eine endliche Fundamentalgruppe haben.

### Literatur

- [1] ABHYANKAR, S.: Concepts of order and rank on a complex space, and a condition for normality. *Math. Ann.* **141**, 171—192 (1960).
- [2] ARTIN, M.: On Enriques' surfaces. Thesis, Harvard Univ., Mass. 1960.
- [3] — Some numerical criteria for contractibility of curves on an algebraic surface. *Am. J. Math.* **84**, 485—496 (1962).
- [4] — On isolated rational singularities of surfaces. *Am. J. Math.* **88**, 129—136 (1966).
- [5] ATIYAH, M. F.: On analytic surfaces with double points. *Proc. Roy. Soc. A*, **247**, 237—244 (1958).
- [6] BRIESKORN, E.: Über holomorphe  $P_n$ -Bündel über  $P_1$ . *Math. Ann.* **157**, 343—357 (1965).
- [7] DU VAL, P.: On isolated singularities which do not affect the conditions of adjunction, Part I, II, III. *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **30**, 453—465 und 483—491 (1934).
- [8] — On absolute and non absolute singularities of algebraic surfaces. *Istanbul Üniv. Fen. Fak. Mecmuasi* **9**, Serie A, 159—215 (1944).
- [9] — Homographies, quaternions and rotations. Oxford: Clarendon Press 1964.
- [10] FISCHER, G.: Auflösung der Singularitäten gewisser holomorpher Abbildungen. *Bayer. Akad. Wiss. Math.-Natw. Kl. S.-B.* 79—85 (1965).
- [11] GRAUERT, H., u. R. REMMERT: Zur Theorie der Modifikationen. I. Stetige und eigentliche Modifikationen komplexer Räume. *Math. Ann.* **129**, 274—296 (1955).

- [12] — — Komplexe Räume. *Math. Ann.* **136**, 245—318 (1958).
- [13] GRAUERT, H.: Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen. *Publications Math. de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, Nr. 5 (1960).
- [14] — Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. *Math. Ann.* **146**, 331—368 (1962).
- [15] — u. H. KERNER: Deformationen von Singularitäten komplexer Räume. *Math. Ann.* **153**, 236—260 (1964).
- [16] HERSZBERG, J.: Algebraic characterization of types of unodes of surfaces in  $S_3$ . *J. London Math. Soc.* **32**, 187—198 (1957).
- [17] HIRONAKA, H.: Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero I, II. *Ann. Math.* **79**, 109—326 (1964).
- [18] — and H. ROSSI: On the equivalence of imbeddings of exceptional complex spaces. *Math. Ann.* **156**, 313—333 (1964).
- [19] HIRZEBRUCH, F.: Über vierdimensionale Riemannsche Flächen mehrdeutiger analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen. *Math. Ann.* **126**, 1—22 (1953).
- [20] — Übertragung einiger Sätze aus der Theorie der algebraischen Flächen auf komplexe Mannigfaltigkeiten von zwei komplexen Dimensionen. *J. reine angew. Math.* **191**, 110—124 (1953).
- [21] — Differentiable manifolds and quadratic forms. *Lecture notes*, Univ. of Calif., Berkeley 1962.
- [22] KIRBY, D.: The structure of an isolated multiple point of a surface. I, II, III. *Proc. London Math. Soc.* (3), **VI**, 597—609 (1956), und **VII**, 1—28 (1957).
- [23] KODAIRA, K.: On compact complex analytic surfaces I. *Ann. Math.* **71**, 111—152 (1960).
- [24] — and D. C. SPENCER: On deformations of complex analytic structures I, II. *Ann. Math.* **67**, 328—466 (1958).
- [25] — On stability of compact submanifolds of complex manifolds. *Am. J. Math.* **85**, 79—94 (1963).
- [26] — On the structure of compact complex analytic surfaces I. *Am. J. Math.* **86**, 751—798 (1964).
- [27] KUHLMANN, N.: Projektive Modifikationen komplexer Räume. *Math. Ann.* **139**, 217—238 (1960).
- [28] — Über eine Verallgemeinerung eines Satzes von H. Hopf. *Archiv Math.* **11**, 431—436 (1960).
- [29] — Über die Auflösung der Singularitäten 3-dimensionaler komplexer Räume II. *Math. Ann.* **154**, 387—405 (1964).
- [30] MUMFORD, D.: The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity. *Publ. Math. de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, Nr. 9 (1961).
- [31] RANDOW, R. v.: Zur Topologie von dreidimensionalen Baummannigfaltigkeiten. *Bonner Math. Schriften* Nr. 14, Univ. Bonn 1962.
- [32] REMMERT, R.: Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. *Math. Ann.* **133**, 328—370 (1957).
- [33] REIFFEN, H. J.: Prolongement de Riemann concernant les classes de cohomologie à supports compacts. *C. R. Acad. Sci. (Paris)* **259**, 2333—2335 (1964).
- [34] SCHEJA, G.: Riemannsche Hebbbarkeitssätze für Cohomologieklassen. *Math. Ann.* **144**, 345—360 (1961).
- [35] VAN DE VEN, A.: Characteristic classes and monoidal transformations. *Indagationes. math.* **18**, 571—578 (1956).

EGBERT BRIESKORN

Mathematisches Institut der Universität Bonn

(Eingegangen am 27. Juli 1965)