Math. Ann. 283, 171–176 (1989)

Mathematische Annalen

Stabilité du fibré tangent des surfaces de Del Pezzo

Rachid Fahlaoui

Mathématiques, Université Paris-Sud, Bâtiment 425, F-91405 Orsay Cedex, France

Introduction

On sait que sur une surface complexe compacte S dont le fibré canonique est positif (resp. négatif), l'existence d'une métrique de Kähler-Einstein entraîne la semi-stabilité du fibré tangent de S par rapport à la polarisation canonique (resp. anticanonique). Notons S_r la surface obtenue à partir de $\mathbb{P}^2$ en éclatant r points en position générale. Il semble probable que pour $3 \leqq r \leqq 8$, la surface S_r admette une métrique de Kähler-Einstein (ce qui entraînerait la semi-stabilité du fibré tangent de S_r). C'est dans cette optique que nous proposons dans cet article une démonstration algébrique (valable en caractéristique quelconque) de la semi-stabilité du fibré tangent des surfaces à fibré canonique négatif.

Enfin je voudrais remercier mon professeur A. Beauville pour ses remarques et ses suggestions qui m'ont aidé à simplifier énormément les calculs, ainsi que pour son aide considérable à la rédaction de cet article.

Notations

Nous considérons des surfaces projectives et lisses sur un corps algébriquement clos K. Soient S une telle surface, D et D' deux diviseurs sur S; on note

$\langle D, D' \rangle$ le produit d'intersection de D et D';

$D \equiv D'$ si D et D' sont linéairement équivalents;

K_S ou K un diviseur canonique, c'est-à-dire un diviseur sur S tel que $O_S(K) = \Omega_S^2$.

$H^i(S, O_S(D))$ ou $H^i(O_S(D))$ les espaces de cohomologie du faisceau $O_S(D)$.

$h^i(D)$ la dimension du K-espace vectoriel $H^i(S, O_S(D))$.

1. Définitions et généralités

Soient $p_1, \ldots, p_r$ ($r \leqq 8$) des points de $\mathbb{P}^2$ en position générale: cela signifie qu'il n'existe pas de droite qui contienne trois d'entre eux, ni de conique qui contienne six d'entre eux, ni (si $r = 8$) de cubique passant par 7 de ces points et ayant un point double au huitième.

On note S_r l'éclaté des points $p_1, \ldots, p_r$ dans $\mathbb{P}^2$ et E_i la droite exceptionnelle image réciproque de p_i. On désigne par E_0 l'image réciproque d'une droite de $\mathbb{P}^2$. Soit e_i $(0 \leqq i \leqq r)$ la classe du diviseur E_i dans $\operatorname{Pic}(S_r)$; le groupe $\operatorname{Pic}(S_r)$ est engendré par $e_0, \ldots, e_r$, et la forme d'intersection est donnée par:

$$\langle e_0, e_0 \rangle = 1, \quad \langle e_i, e_i \rangle = -1 \quad \text{pour} \quad i > 0, \quad \langle e_i, e_j \rangle = 0 \quad \text{pour} \quad i \neq j.$$

La classe dans $\operatorname{Pic}(S_r)$ du diviseur canonique est $-3e_0 + \sum_{i=1}^{r} e_i$.

Soit Φ_{-K} l'application rationnelle définie par les sections globales du fibré anticanonique $O_S(-K)$. Pour $0 \leqq r \leqq 6$, Φ_{-K} est un plongement de S_r dans $\mathbb{P}^{9-r}$; Φ_{-2K} est un plongement de S_7 dans $\mathbb{P}^6$, et Φ_{-3K} un plongement de S_8 dans $\mathbb{P}^8$ [D].

Soient S une surface algébrique, E un faisceau localement libre de rang 2 sur S et H la classe dans le groupe de Néron-Severi de S d'un diviseur ample (une telle classe est appelée une *polarisation* sur S).

Définition. On dit que E est stable (resp. semi-stable) par rapport à H si pour tout sous-faisceau localement libre L de rang 1 de E on a

$$\langle L, H \rangle < \tfrac{1}{2} \langle \Lambda^2 E, H \rangle \qquad (\text{resp. } \langle L, H \rangle \leqq \tfrac{1}{2} \langle \Lambda^2 E, H \rangle).$$

Dans la suite, on s'intéressera à la stabilité du fibré tangent $\Omega^1_{S_r}$ par rapport à la polarisation $-K$. Soit L un sous-faisceau de $\Omega^1_{S_r}$; on a donc une section globale s de $\Omega^1_{S_r} \otimes L^{-1}$. Soit Y le schéma des zéros de s; il définit un cycle de dimension $\leqq 1$ qui s'écrit $\sum n_i V_i + \sum m_j P_j$, où les V_i sont des courbes irréductibles et les P_j des points. On pose $(s)_1 = \sum n_i V_i$ et $(s)_0 = \sum m_j P_j$. Soit M le faisceau inversible associé à $(s)_1$; le faisceau $\Omega^1_{S_r} \otimes L^{-1} \otimes M^{-1}$ possède une section s' dont le schéma des zéros Z définit le cycle $(s)_0$. On a alors une suite exacte [R]

$$0 \to O_{S_r} \to \Omega^1_{S_r} \otimes L^{-1} \otimes M^{-1} \to IN \to 0,$$

où N est le faisceau $\Lambda^2(\Omega^1_{S_r} \otimes L^{-1} \otimes M^{-1})$ et I l'idéal du schéma Z. Observons qu'on a

$$c_2(\Omega^1_{S_r} \otimes L^{-1} \otimes M^{-1}) = \deg(Z) = \sum m_j.$$

Si $M = O_S$, on dit que le sous-faisceau L de $\Omega^1_{S_r}$ est saturé. Comme $\langle L, H \rangle \leqq \langle L \otimes M, H \rangle$ pour toute polarisation H, il suffit pour prouver la (semi-)stabilité de $\Omega^1_{S_r}$ de considérer les sous-faisceaux *saturés* de $\Omega^1_{S_r}$.

Lemme 1. *Soient L, M deux sous-faisceaux saturés de $\Omega^1_{S_r}$ qui ne sont pas isomorphes. On a alors $h^0(\omega_{S_r} \otimes L^{-1} \otimes M^{-1}) \geqq 1$.*

Démonstration. D'après ce qui précède, on a une suite exacte

$$0 \to O_{S_r} \to \Omega^1_{S_r} \otimes L^{-1} \to I\omega_{S_r} \otimes L^{-2} \to 0.$$

On en déduit la suite exacte

$$0 \to L \otimes M^{-1} \to \Omega^1_{S_r} \otimes M^{-1} \to I\omega_{S_r} \otimes L^{-1} \otimes M^{-1} \to 0,$$

d'où une suite exacte longue de cohomologie

$$0 \to H^0(L \otimes M^{-1}) \to H^0(\Omega^1_{S_r} \otimes M^{-1}) \to H^0(I\omega_{S_r} \otimes L^{-1} \otimes M^{-1})$$
$$\to H^1(L \otimes M^{-1}) \to \ldots.$$

On remarque que l'un des deux espaces $H^0(L\otimes M^{-1})$ ou $H^0(M\otimes L^{-1})$ est nul, sans quoi on aurait $L=M$ contrairement à l'hypothèse. Supposons par exemple $H^0(L\otimes M^{-1})=0$; on en déduit $h^0(I\omega_{S_r}\otimes L^{-1}\otimes M^{-1})\geqq 1$, ce qui achève la démonstration.

2. Exemples de sous-faisceaux de $\Omega^1_{S_r}$

Les sous-faisceaux inversibles saturés de $\Omega^1_{S_r}$ correspondent biunivoquement aux 1-formes rationnelles sur $\mathbb{P}^2$ qui s'annulent en codimension 2 seulement. Cette correspondance est définie de la façon suivante. Soit ω une section globale de $\Omega^1_{\mathbb{P}^2}(k)$, avec $k\geqq 2$. Si Z désigne le schéma des zéros de ω, on a une suite exacte

$$0\to O_{\mathbb{P}^2}\to\Omega^1_{\mathbb{P}^2}(k)\to I_Z O_{\mathbb{P}^2}(2k-3)\to 0.$$

Soient (X, Y, T) des coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}^2$; la forme ω s'écrit $PdX+QdY+RdT$, où P, Q, R sont des polynômes homogènes de degré $(k-1)$ vérifiant $XP+YQ+TR=0$.

Identifions les sections globales de $\Omega^1_{\mathbb{P}^2}(k)$ aux 1-formes rationnelles sur $\mathbb{P}^2$ ayant un pôle seulement le long de la droite $T=0$. Notons $\pi\colon \hat{S}\to\mathbb{P}^2$ l'éclatement de $\mathbb{P}^2$ au point $p=(0,0,1)$ et E la droite exceptionnelle $\pi^{-1}(p)$. Alors $\pi^*\omega$ est une 1-forme rationnelle sur $\hat{S}$ et $O_{\hat{S}}((\pi^*\omega)_1)$ est un sous-faisceau de $\Omega^1_{\hat{S}}$. Il est clair qu'en dehors de E, les zéros ou les pôles de $\pi^*\omega$ correspondent via π à ceux de ω; on a donc $(\pi^*\omega)_1=\pi^*((\omega)_1)+lE$, où l est un entier que nous allons calculer. Soit U l'ouvert $T\neq 0$ dans $\mathbb{P}^2$; prenons les coordonnées locales (x,y) dans U définies par $x=X/T$, $y=Y/T$. Soit $\hat{U}\subset U\times\mathbb{P}^1$ la sous-variété d'équation $xY'-yX'=0$ (X', Y' étant des coordonnées locales dans $\mathbb{P}^1$). Au voisinage du point (p,∞) de $\hat{U}$, on peut prendre x et $t=Y'/X'$ comme coordonnées locales; on a

$$\pi^*\omega|_{\hat{U}}=[P(x,tx,1)+tQ(x,tx,1)]\,dx+xQ(x,tx,1)\,dt.$$

Ecrivons $P(x,y,1)=p_m(x,y)+p_{m+1}(x,y)+\dots$, où les p_j sont des polynômes homogènes de degré j en x,y, avec $p_m\neq 0$. L'entier m est par définition la multiplicité de la courbe d'équation $P=0$ au point p.

Ecrivons de même $Q(x,y,1)=q_n(x,y)+q_{n+1}(x,y)+\dots$. On a alors

$$\begin{aligned}\pi^*\omega|_{\hat{U}}=[&x^m(p_m(1,t)+xp_{m+1}(1,t)+\dots)+tx^n(q_n(1,t)\\&+xq_{n+1}(1,t)+\dots)]\,dx\\&+x^{n+1}(q_n(1,t)+xq_{n+1}(1,t)+\dots)\,dt.\end{aligned}$$

Il en résulte qu'on a $l=\inf(m,n)$ ou $l=\inf(m,n)+1$, le second cas ne pouvant se produire que si on a $m=n$ et $p_m(1,t)+tq_m(1,t)=0$, c'est-à-dire $xp_m(x,y)+yq_m(x,y)=0$. Compte tenu de la relation $XP+YQ+TR=0$, cette dernière inégalité signifie que R s'annule en p avec multiplicité $\geqq m+2$.

Exemples. 1) $\omega=X\,dY-Y\,dX$.

On a $(\pi^*\omega)_1=-2E_0+2E$.

2) $\omega=(Y^2T-T^2Y)\,dX+(T^2X-X^2T)\,dY+(X^2Y-Y^2X)\,dT$.

Prenons $p_1=(1,0,0)$, $p_2=(0,1,0)$, $p_3=(0,0,1)$, $p_4=(1,1,1)$. L'argument ci-dessus montre que $(\pi^*\omega)_1$ contient les droites exceptionnelles E_1,E_2,E_3,E_4 avec multiplicité 2. On a donc

$$(\pi^*\omega)_1 = -4E_0 + 2\sum_{i=1}^{4} E_i,$$

et toute section de $\Omega^1_{\mathbb{P}^2}(4)$ vérifiant cette propriété est proportionnelle à ω. Les zéros de ω sont $p_1, \ldots, p_4$ et les points $(0,1,1)$, $(1,0,1)$ et $(1,1,0)$. Comme il y a au plus 4 de ces points qui soient en position générale, on en conclut qu'il n'existe pas de sous-faisceau de $\Omega^1_{S_r}$ de la forme

$$O\left(-4E_0 + 2\sum_{j=1}^{4} E_j + E_i\right) \quad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq r.$$

3) Considérons le cas $k=5$. Prenons $p_1=(1,0,0)$, $p_2=(0,1,0)$; si $\pi^*\omega$ s'annule sur E_1 et E_2 avec multiplicité $\geqq 2$, P s'annule triplement en p_1 et Q en p_2; comme T divise $XP+YQ$, on en déduit que T divise P (et Q). Ainsi si $(\pi^*\omega)_1 = -5E_0 + 2E_1 + \ldots + 2E_s$ ($s \leqq r$), chacune des droites $\langle p_1, p_1 \rangle$, pour $2 \leqq i \leqq s$, est contenue dans la courbe $P=0$. Les points p_i étant en position générale, on conclut qu'on a $s \leqq 5$: *il n'existe pas de sous-faisceau de* $\Omega^1_{S_r}$ *de la forme* $O(-5E_0 + 2E_1 + \ldots + 2E_6)$.

3. Stabilité du fibré tangent

Théorème. *Soit S une surface dont le fibré anticanonique est ample. Alors le fibré tangent de S est semi-stable par rapport à la polarisation* $-K$. *Si S n'est pas isomorphe à* $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ *ni à* S_1, *son fibré tangent est stable par rapport à* $-K$.

Toute surface dont le fibré anticanonique est ample est isomorphe à $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ ou à une surface S_r ($0 \leqq r \leqq 8$). Les cas $S=\mathbb{P}^2$ et $S=\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ sont immédiats; nous considérons désormais la surface S_r pour $1 \leqq r \leqq 8$.

Soit $L_a = O_{S_r}\left(-kE_0 + \sum_{i=1}^{r} a_i E_i\right)$ un sous-faisceau saturé de $\Omega^1_{S_r}$, avec $k>2$. En utilisant le lemme 1 du par. 1 et l'exemple 1 du par. 2, on voit qu'il existe un diviseur effectif C_a tel que

$$C_a \equiv (k-1)E_0 - (a_1+1)E_1 - \sum_{i=2}^{r} (a_i - 1)E_i.$$

Posons $d = \langle -K, C_a \rangle = 3k - \sum a_i + r - 5$. On a alors $d>0$. Observons que l'inégalité $\langle -K, L_a \rangle < \frac{1}{2}\langle -K, K \rangle$ s'écrit

$$2\sum a_i < 6k + r - 9, \tag{2}$$

soit encore $2d \geqq r$. Nous supposerons donc dans la suite $d < r/2$.

1) Cas $r \leqq 6$

Dans ce cas, Φ_{-K} envoie C_a sur une courbe de degré d dans $\mathbb{P}^{9-r}$, et on a $d \leqq 2$. On a alors $\langle C_a, E_1 \rangle \leqq 2$, d'où $a_1 \leqq 1$; comme les points $p_1, \ldots, p_r$ jouent un rôle symétrique, on en déduit $a_i \leqq 1$ pour tout i. Si $k>2$ cela donne $d \geqq 4$, ce qui contredit l'hypothèse. Pour $k=2$ les seuls sous-faisceaux saturés de $\Omega^1_{S_r}$ sont $O_{S_r}(-2E_0 + 2E_1)$ et $O_{S_r}(-2E_0)$; ceux-ci vérifient (2), sauf le premier dans le cas $r=1$, pour lequel on a egalité dans (2). Ceci démontre le théorème pour $r \leqq 6$.

2) Cas $r=7$

On peut supposer ici $d \leqq 3$. D'autre part puisque L_a est saturé on a $c_2(\Omega^1_{S_r} \otimes L_a^{-1}) \geqq 0$, c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{r} (a_i - a_i^2) + k^2 - 3k + 10 \geqq 0 .$$

En majorant $\sum a_i^2$ par $\frac{1}{r}(\sum a_i)^2$, on obtient

$$(3k-d+2)^2 \leqq 7(k^2-d+12). \tag{3}$$

Par ailleurs, sur la surface S_6 obtenue en éclatant $p_1, \ldots, p_6$ dans $\mathbb{P}^2$, le diviseur $(k-1)E_0 - (a_1+1)E_1 - \sum_{i=2}^{6} (a_i - 1)E_i$ est effectif, et son image par le plongement Φ_{-K} est de degré $d + a_7 - 1$. Prenant l'intersection avec E_1 on obtient

$$a_1 + 1 \leqq d + a_7 - 1 . \tag{4}$$

Si $d=1$ on en déduit $a_1 \leqq a_7 - 1$, ce qui est impossible car les a_i jouent un rôle symétrique.

Si $d=2$ on en déduit $a_1 = a_7$, et par suite $a_1 = a_2 = \ldots = a_7$. Mais on a alors $3k = 7a_1$ d'où $k \geqq 7$, ce qui contredit (3).

Supposons enfin $d=3$. Par (4) on obtient $a_i \leqq a_j + 1$ quels que soient i et j. D'autre part on a $a_i \leqq k-2$, et $k \leqq 7$ par (3). Compte tenu de ces inégalités, les seuls L_a possibles sont

$$O(-7E_0 + 3E_1 + \ldots + 3E_6 + 2E_7);$$

$$O(-6E_0 + 3E_1 + 3E_2 + 3E_3 + 2E_4 + \ldots + 2E_7);$$

$$O(-5E_0 + 2E_1 + \ldots + 2E_7); \qquad O(-4E_0 + 2E_1 + \ldots + 2E_4 + E_5 + E_6 + E_7).$$

Les deux derniers cas sont impossibles par les exemples 2 et 3 du par. 2. Par le lemme 1 (par. 1) et l'exemple 2, il existe un diviseur effectif C tel que

$$C \equiv (k+1)E_0 - \sum_{i=1}^{4} (a_i+1)E_i - \sum_{i=5}^{7} (a_i - 1)E_i ,$$

ce qui donne pour les deux premiers cas les courbes suivantes:

$$C_1 = 8E_0 - 4E_1 - \ldots - 4E_4 - 2E_5 - 2E_6 - E_7 ,$$

$$C_2 = 7E_0 - 4E_1 - 4E_2 - 4E_3 - 3E_4 - E_5 - E_6 - E_7 .$$

Notons Q_i ($i=5,6,7$) la conique de $\mathbb{P}^2$ passant par les points $p_1, \ldots, p_4$ et p_i. Le théorème de Bezout entraîne que chacune des courbes C_1 et C_2 doit contenir doublement Q_5 et Q_6 et simplement Q_7, ce qui est impossible.

3) Cas $r=8$

On peut supposer ici $d \leqq 3$, et aussi $k \geqq 3$ [les seuls sous-faisceaux saturés de $\Omega^1_{S_8}$ avec $k \leqq 2$ sont les $O(-2E_0 + 2E_i)$ et $O(-2E_0)$, qui vérifient l'inégalité (1)]. Numérotons les points p_i de façon que $a_1 \geqq a_i$ pour tout i; comme $d = 3k + 3 - \sum a_i$, on a alors $a_1 \geqq 2$.

Soit D le diviseur $6E_0 - 3E_1 - 2\sum_{i=2}^{8} E_i$. On a $\langle D, D\rangle = \langle D, K\rangle = -1$; il s'ensuit par Riemann-Roch que D est linéairement équivalent à une courbe exceptionnelle C (rationnelle et lisse). Considérons la suite exacte

$$0 \to O_S(-C)|_C \to \Omega^1_{S_8}|_C \to \omega_C \to 0\,;$$

Par produit tensoriel avec L_a^{-1} on obtient la suite exacte

$$0 \to L_a^{-1}(-C)|_C \to (\Omega^1_{S_8} \otimes L_a^{-1})|_C \to \omega_C \otimes L_a^{-1}|_C \to 0\,. \tag{5}$$

On a $\deg_C(L_a^{-1}(-C)|_C) = 2d - a_1 - 5$ et $\deg_C(\omega_C \otimes L_a^{-1}|_C) = 2d - a_1 - 8$, de sorte que ces deux faisceaux sont de degré < 0. On déduit alors de la suite exacte de cohomologie associée à (5) l'égalité $H^0(C, \Omega^1_{S_8} \otimes L_a^{-1}|_C) = 0$. Cela signifie que toute section globale de $\Omega^1_{S_8} \otimes L_a^{-1}$ s'annule sur C, ce qui contredit le fait que L_a est saturé. Cela achève la démonstration du théorème.

Bibliographie

[D] Demazure, M.: Surfaces de Del Pezzo (exp. IV). Séminaire sur les singularités des surfaces. Lectures Notes in Mathematics, Vol. 777, pp. 50–60. Berlin Heidelberg New York: Springer 1980

[R] Raynaud, M.: Fibrés vectoriels instables – Applications aux surfaces. Surfaces algébriques. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 868, pp. 293–314. Berlin Heidelberg New York: Springer 1981

Reçu le 14 juillet 1988