Werk

Titel: Mathematische Annalen

Verlag: Springer

Jahr: 1989

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN235181684_0283

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN235181684_0283|LOG_0060

Math. Ann. 283, 491–497 (1989)

Mathematische Annalen

L'ensemble des algèbres de Lie algébriques n'est pas Zariski-dense dans la variété des algèbres de Lie de dimension $M \geqq 9$

R. Carles

Université de Poitiers, Mathematiques, 40, Avenue du Recteur Pineau, F-86022 Poitiers Cedex, France

Introduction

Soient L_m la variété des lois d'algèbres de Lie de dimension m sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, R_m la sous-variété des lois résolubles et N_m celle des lois nilpotentes sur lesquelles opère le groupe $GL_m(\mathbb{C})$ par l'action canonique habituelle. Les notions topologiques sont relatives à la topologie de Zariski et $\bar{X}$ désigne l'adhérence de X. Dans [2] et [3] avait été mis en évidence le rôle important joué par les algèbres de Lie algébriques dans la description de L_m et de R_m et qui peut se formuler ainsi:

a) toute algèbre de Lie rigide (c.a.d. dont l'orbite est ouverte) est algébrique;

b) l'ensemble des algèbres de Lie algébriques (respectivement algébriques résolubles) est dense dans L_m (respectivement R_m) pour $m \leqq 7$.

L'assertion (b) avait été prouvée [2] pour le cas des algèbres de Lie décomposables au prix d'une démonstration essentiellement technique cas par cas sur chaque type de la classification de Vergne [8]. Il en découlait une construction aisée des composantes de L_m et de R_m pour $m \leqq 7$. Le cas algébrique étudié dans ce travail vérifie (b) sans difficulté.

Dans cet article est démontré principalement que l'assertion (b) est fausse pour $m \geqq 9$, résultat déjà conjecturé dans [2]. Pour cela on construit une nouvelle famille de composantes irréductibles de L_m et de R_m si $m \geqq 9$ pour lesquelles un ouvert non vide ne contient aucune algèbre de Lie algébrique (ni décomposable). Ces composantes sont engendrées par des déformations liées à l'existence du centre de certaines algèbres de Lie décomposables. La question reste ouverte pour $m = 8$.

1. Ensembles d'algèbres de Lie décomposables, algébriques

Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de dimension finie, on désigne par $\Delta(\mathfrak{g})$ l'algèbre de Lie de ses dérivations, $Z(\mathfrak{g})$ son centre, $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{r}$ son radical et $\mathfrak{n}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{n}$ son plus grand idéal nilpotent. Un tore sur $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel constitué de dérivations semi-simples de $\mathfrak{g}$ qui commutent. L'algèbre $\mathfrak{g}$ est dite décomposable (ou presque algébrique) si elle admet une décomposition (dite normale) $\mathfrak{u} \oplus \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{n}$ de radical

$\mathfrak{u}\oplus\mathfrak{n}$, avec $\mathfrak{s}$ une sous-algèbre de Levi et $\mathfrak{u}$ une sous-algèbre abélienne qui commute avec $\mathfrak{s}$ telle que $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{u}$ soit un tore sur $\mathfrak{g}$. Les lois décomposables $\mathfrak{g}$ d'idéal $\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{n}(\mathfrak{g})$ fixé s'obtiennent à isomorphisme près comme le produit semi-direct $\tau\oplus\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{n}$ où τ est le sous-espace d'un tore extérieur maximal T_e sur $\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{n}$ (un tore est dit extérieur s'il ne contient aucune dérivation intérieure non nulle [2]). Si sa dimension r est fixée, le tore τ varie dans la Grassmannienne $\mathrm{Gr}_r(T_e)$; l'ensemble des lois obtenues a pour orbite sous l'action canonique de $GL_m(\mathbb{C})$ un ensemble irréductible et constructible (c.a.d. réunion finie de localement fermés) noté $L_m^0(\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{n})$ et étudié dans [2]. Si $\mathfrak{s}$ est nul, $L_m^0(\mathfrak{n})$ est contenu dans R_m et l'on désigne encore cet espace par $R_m^0(\mathfrak{n})$.

Une algèbre de Lie algébrique est une algèbre de Lie décomposable dont le tore $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{u}$ est algébrique (c.a.d. une algèbre de Lie linéaire algébrique au sens de Chevalley). Un tore algébrique est caractérisé par un ensemble de poids α qui s'écrivent $\sum_{i=1}^{r} c_i\alpha_i$ sur une base de poids α_i $(1\leqq i\leqq r)$ avec $c_i\in\mathbb{Q}$ $(1\leqq i\leqq r)$. L'algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{n}$ est algébrique, chaque tore maximal est algébrique et l'on peut choisir T_e algébrique: les tores algébriques constituent alors une partie dense de $\mathrm{Gr}_r(T_e)$. Ces tores donnent une famille d'algèbres de Lie algébriques dense dans $L_m^0(\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{n})$. Une généralisation de ces résultats conduit à la proposition suivante:

(1.1) **Proposition.** *L'ensemble L_m^0 (respectivement R_m^0) des algèbres de Lie (respectivement résolubles) décomposables est constructible dans L_m (respectivement R_m) pour tout m. L'ensemble des algèbres de Lie (respectivement résolubles) algébriques est dense dans L_m^0 (respectivement R_m^0) pour tout m.*

Preuve. Les lois d'algèbres de Lie dont le radical est nilpotent forment une partie constructible X_n de L_n à cause de la semi-continuité des applications qui à $\mathfrak{g}$ associent les dimensions de $\mathfrak{n}(\mathfrak{g})$ et de $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$. Les classes de conjugaison des tores maximaux sur ces algèbres sous l'action adjointe du groupe $GL_n(\mathbb{C})$ sont en nombre fini d'après [1, 6] et soient T_i $(0\leqq i\leqq k)$ des représentants de ces classes. Soit $X_n(T)$ l'ensemble des lois qui admettent à isomorphisme près T comme tore maximal. Chaque $X_n(T_i)$ est l'orbite de l'espace constructible $X_n^{T_i}$ des lois T_i-invariantes privé des orbites des $X_n^{T_j}$ $(j\neq i)$ pour lesquelles T_j contient T_i (à conjugaison près): chaque $X_n(T_i)$ $(0\leqq i\leqq k)$ est constructible, non irréductible en général et l'on a $X_n=\coprod_{i=0}^{k} X_n(T_i)$. Par exemple $X_n(T_0)$ pour $T_0=(0)$ est l'ensemble des algèbres de Lie caractéristiquement nilpotentes de dimension n: il est constructible non vide pour tout $n\geqq 7$ [4].

Les lois décomposables $\mathfrak{g}$ de dimension m dont la partie $\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{n}$ appartient à $X_n(T)$ sont (à isomorphisme près) le produit semi-direct $\tau\oplus\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{n}$ où τ varie dans la grassmannienne $\mathrm{Gr}_{m-n}(T_e)$ (on peut pendre un même tore extérieur maximum algébrique $T_e\subset T$ pour toutes ces algèbres). Cet espace noté $L_m^0(X_n(T))$ est constructible, irréductible si $X_n(T)$ l'est et l'on peut calculer sa dimension: même preuve que la proposition 1.3.(1) de [2]. L'espace L_m^0 est réunion finie des $L_m^0(X_n(T))$ où n varie entre $\frac{m}{2}$ et m et T sur un nombre fini de classes, il est donc encore constructible.

Les lois algébriques s'obtiennent de la même façon en prenant les tores algébriques dans chaque $\mathrm{Gr}_{m-n}(T_e)$; on utilise le fait qu'ils constituent une partie dense.

Pour construire R_m^0 on remplace X_n par $X_n \cap N_n$. CQFD.

(1.2) *Remarque.* En prenant l'adhérence de certains des espaces $L_m^0(X)$ et $R_m^0(X)$ où X est une composante irréductible d'un $X_n(T)$ on obtient les composantes de L_m ou de R_m qui contiennent un ouvert non vide de lois décomposables. Ces espaces sont la généralisation naturelle des $L_m^0(\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{n})$ étudiés dans [2].

On déduit l'assertion (b) de [2] et (1.1):

(1.3) **Corollaire.** *Les lois algébriques constituent une partie dense dans L_m et dans R_m pour tout $m \leqq 7$.*

(1.4) *Remarque.* L'ensemble des lois algébriques de L_m (ou R_m) n'est pas constructible pour $m \geqq 3$. Il contient le sous-ensemble constructible formé des lois dont le radical est nilpotent, l'ouvert des algèbres de Lie rigides (condition a), l'ouvert des algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ telles que $\dim \Delta(\mathfrak{g}) \leqq \dim \mathfrak{g}$ [3].

2. Déformations d'une algèbre de Lie liées à l'existence d'un centre

Le deuxième groupe de cohomologie adjointe d'une algèbre de Lie décomposable $\mathfrak{g}=\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{u}\oplus\mathfrak{n}$ peut se calculer à l'aide d'un théorème de factorisation de Hochschild et Serre [7, 2]:

$$H^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g}) \simeq H^2(\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{u},\mathbb{C})\otimes Z(\mathfrak{g}) + Z(\mathfrak{s}\oplus\mathfrak{u})\otimes(H^1(\mathfrak{n},\mathfrak{n})^{\mathfrak{s}+\mathfrak{u}}/Z(\mathfrak{s}+\mathfrak{u})) + H^2(\mathfrak{n},\mathfrak{n})^{\mathfrak{s}+\mathfrak{u}}$$

Les deux derniers termes sont constitués de classes dont certaines s'intègrent en déformations déjà rencontrées. Le premier terme s'identifie à $C^2(\mathfrak{u}, Z(\mathfrak{g}))$ et se plonge dans l'espace des 2-cocycles $Z^2(\mathfrak{g},\mathfrak{g})$; il s'interprète comme l'ensemble des déformations infinitésimales suivantes:

si $\varphi \in C^2(\mathfrak{u}, Z(\mathfrak{g}))$, soit $\mathfrak{g}_{t\varphi}$ la loi définie par les crochets

$$[x,y]_t = t\varphi(x,y) \quad \text{si} \quad (x,y)\in\mathfrak{u}^2,$$

$$[x,y]_t = [x,y] \quad \text{si} \quad (x,y)\in(\mathfrak{s}+\mathfrak{n})\times\mathfrak{g}.$$

On vérifie que $\mathfrak{g}_{t\varphi}$ est une déformation non triviale si $\varphi \neq 0$. En particulier l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_\varphi$ n'est pas décomposable si $\varphi \neq 0$.

On en déduit aisément le lemme suivant:

(2.1) **Lemme.** *L'orbite $\Sigma(\mathfrak{g})$ sous l'action de $GL_m(\mathbb{C})$ de l'ensemble des $\mathfrak{g}_\varphi$ avec $\varphi \in C^2(\mathfrak{u}, Z(\mathfrak{g}))$ est une partie irréductible, constructible de dimension égale à*

$$m^2 - \dim \Delta(\mathfrak{g}) + \frac{r(r-1)}{2}\dim Z(\mathfrak{g}) \qquad (r = \dim \mathfrak{u}).$$

Le sous-ensemble des algèbres de Lie décomposables de $\Sigma(\mathfrak{g})$ est l'orbite de $\mathfrak{g}$.

L'espace $Z^2(\mathfrak{g}_\varphi, \mathfrak{g}_\varphi)$ est le tangent de Zariski au point $\mathfrak{g}_\varphi$ de L_m. Si sa dimension pour $\varphi \in C^2(\mathfrak{u}, Z(\mathfrak{g}))$ est égale à celle de $\Sigma(\mathfrak{g})$, alors l'adhérence de $\Sigma(\mathfrak{g})$ est une composante irréductible et le point $\mathfrak{g}_\varphi$ est simple pour le schéma défini par les relations de Jacobi [2]. Cette dimension pourra être calculée à l'aide du lemme suivant:

(2.2) **Lemme.** *Si* $R = ad_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{u})$ *on a:*

$$\dim Z^2(\mathfrak{g}_\varphi, \mathfrak{g}_\varphi) = \dim Z^2(\mathfrak{g}_\varphi, \mathfrak{g}_\varphi)^R - \dim \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})^R + \dim \mathfrak{g}^R + m^2 - m$$

Preuve. On utilise le fait que les différents R-modules qui interviennent sont semi-simples; de plus l'algèbre R annule le groupe $H(\mathfrak{g}_\varphi, \mathfrak{g}_\varphi)$ puisqu'elle est constituée de répliques de $\operatorname{ad} \mathfrak{g}_\varphi$. CQFD.

Considérons l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \times \mathbb{C}$ avec $\mathfrak{a} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{n}$ où le tore $T = \operatorname{ad}_{\mathfrak{n}} \mathfrak{u}$ est maximal sur $\mathfrak{n}$ et vérifie:

(2.3) $\dim T \geqq 4$;

(2.4) Les poids α qui définissent l'action de T sur $\mathfrak{n}$ sont de multiplicité 1 et non nuls;

(2.5) $H^2(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})^T = 0$.

Ces hypothèses entraînent $H^i(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = 0$ pour $0 \leqq i \leqq 2$ ainsi que la proposition suivante qui donne une nouvelle famille de composantes:

(2.6) **Proposition.** *L'adhérence de* $\Sigma(\mathfrak{g})$ *pour* $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} \times \mathbb{C}$ *où* $\mathfrak{a} = \mathfrak{u} \oplus \mathfrak{n}$ *vérifie les hypothèses* (2.3, 2.4, 2.5) *est une composante irréductible de* L_m *et de* R_m *de dimension* $m^2 - m + r\dfrac{(r-3)}{2}$ ($r = \dim \mathfrak{u}$) *qui contient un ouvert non vide constitué de lois non décomposables (donc non algébriques) ainsi que des points simples pour le schéma défini par les relations de Jacobi. L'espace* $\Sigma(\mathfrak{g})$ *est constitué d'une famille continue à* $\dfrac{r(r-1)}{2} - 1$ *paramètres d'orbites de dimension* $m^2 - m - r + 1$ *(pour* $\varphi \neq 0$*) et d'une orbite de dimension* $m^2 - m - r$ *(pour* $\varphi = 0$*).*

Preuve. Soit une base t_i $(1 \leqq i \leqq r)$ de $\mathfrak{u}$. On a $Z(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}$ et l'on choisit φ de sorte que la sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h} = \mathfrak{u} \times \mathbb{C}$ de $\mathfrak{g}_\varphi$ soit une algèbre de Heisenberg si r est pair ou le produit direct par $\mathbb{C}$ d'une algèbre de Heisenberg si r est impair. Il suffit de prendre φ tel que $\varphi(t_i, t_j)$, $(i<j)$ soit nul si $j \neq \left[\dfrac{r}{2}\right] + i$ et égal à 1 si $j = \left[\dfrac{r}{2}\right] + i$ où [ ] désigne la partie entière. L'espace $Z^2(\mathfrak{g}_\varphi, \mathfrak{g}_\varphi)^R$ est l'ensemble des 2-cochaînes f qui envoient $\mathfrak{h}^2$ dans $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h} \times \mathfrak{n}_\alpha$ dans $\mathfrak{n}_\alpha$ $\left(\text{si } \mathfrak{n} = \bigoplus_\alpha \mathfrak{n}_\alpha \text{ est la décomposition en sous-espaces de poids pour } T\right)$, $\mathfrak{n}_\alpha \times \mathfrak{n}_\beta$ dans $\mathfrak{n}_{\alpha+\beta}$ et qui vérifient les conditions de cocycle si [ ] désigne la loi de $\mathfrak{g}_\varphi$:

(2.7) $$(t, t', t'') \in \mathfrak{u}^3, \quad \sum_{\operatorname{circ}(tt't'')} f(\varphi(t, t'), t'') = \sum_{\operatorname{circ}(tt't'')} [t, f(t', t'')];$$

(2.8) $$(t, t', x_0) \in \mathfrak{u}^2 \times \mathbb{C}, \quad [t, f(t', x_0)] = [t', f(t, x_0)];$$

(2.9) $$(t, t', x) \in \mathfrak{u}^2 \times \mathfrak{n}_\alpha, \quad f(\varphi(t, t'), x) = [x, f(t, t')];$$

(2.10) $$(t, x_0, x) \in \mathfrak{u} \times \mathbb{C} \times \mathfrak{n}_\alpha, \quad [x, f(t, x_0)] = 0;$$

(2.11) $$(t, x, y) \in \mathfrak{u} \times \mathfrak{n}_\alpha \times \mathfrak{n}_\beta, \quad f([x, y], t) = [x, f(y, t)] + [y, f(t, x)];$$

(2.12) $$(x_0, x, y) \in \mathbb{C} \times \mathfrak{n}_\alpha \times \mathfrak{n}_\beta, \quad f([x, y], x_0) = [x, f(y, x_0)] + [y, f(x_0, x)];$$

(2.13) $$f|\mathfrak{n} \times \mathfrak{n} \in Z^2(\mathfrak{n}, \mathfrak{n})^T;$$

La condition (2.10) donne $f(\mathfrak{u}\times\mathbb{C})\subset\mathbb{C}$ et la condition (2.8) est automatiquement vérifiée. La condition (2.9) donne pour $i<j$ et $j\neq\left[\frac{r}{2}\right]+i$: $[x, f(t_i, t_j)]=0$, soit $f(t_i, t_j)\in\mathbb{C}$; si l'on pose

$$v=f\left(t_i, t_{\left[\frac{r}{2}\right]+1}\right)$$

elle donne $f(1,x)=[x,v]$ pour tout $x\in\mathfrak{n}$ et

$$f\left(t_i, t_{\left[\frac{r}{2}\right]+i}\right)=v$$

modulo $\mathbb{C}$, d'où:

(2.14) $\qquad (t,t')\in\mathfrak{u}^2, \quad f(t,t')=\varphi(t,t')v+\lambda(t,t')\cdot 1 \quad \text{avec} \quad \lambda\in C^2(\mathfrak{u},\mathbb{C})$.

Les vecteurs $w=\varphi(t,t')t''+\varphi(t',t'')t+\varphi(t'',t)t'$ pour $(t,t',t'')\in\mathfrak{u}^3$ engendrent $\mathfrak{u}$ pour $r\geqq 4$ (2.3); si l'on tient compte de (2.14) l'égalité (2.7) s'écrit $f(1,w)=[w,v]$ pour tout $w\in\mathfrak{u}$, d'où avec ce qui précède:

(2.15) $\qquad f(1,x)=[x,v] \quad \text{pour tout } x\in\mathfrak{g}_\varphi,$

et (2.12) devient inutile. La condition (2.11) exprime que pour chaque $t\in\mathfrak{u}$ l'application $x\to f(t,x)$ appartient à $Z^1(\mathfrak{n},\mathfrak{n})^T$ d'où:

(2.16) $\qquad f|\mathfrak{u}\times\mathfrak{n}\in\mathfrak{u}^*\otimes Z^1(\mathfrak{n},\mathfrak{n})^T$.

Les conditions de cocycle se résument à (2.13, 2.14, 2.15, 2.16) où le vecteur v décrit $\mathfrak{h}$ et n'intervient dans (2.15) que par l'intermédiaire de $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}_\varphi} v$, c'est à dire modulo le centre $\mathbb{C}$ de $\mathfrak{g}_\varphi$. On en déduit la dimension de $Z^2(\mathfrak{g}_\varphi, \mathfrak{g}_\varphi)$ par le lemme (2.2) et ce qui précède en tenant compte de (2.4) et (2.5): on trouve $m^2-m+\frac{r(r-3)}{2}$. C'est aussi la dimension de $\Sigma(\mathfrak{g})$ obtenue par le lemme (2.1) en remarquant que le théorème de Künneth donne pour un produit direct $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1\times\mathfrak{g}_2$:

$$H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=H^1(\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_1)+H^1(\mathfrak{g}_2,\mathfrak{g}_2)+Z(\mathfrak{g}_1)\otimes(\mathfrak{g}_2/[\mathfrak{g}_2,\mathfrak{g}_2])+(\mathfrak{g}_1/[\mathfrak{g}_1,\mathfrak{g}_1])\otimes Z(\mathfrak{g}_2).$$

Si $\mathfrak{g}_1=\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{g}_2=\mathbb{C}$ les hypothèses (2.4) et (2.5) entraînent les égalités $H^1(\mathfrak{g},\mathfrak{g})=\mathbb{C}\oplus(\mathfrak{a}/[\mathfrak{a},\mathfrak{a}])$ et $Z(\mathfrak{g})=\mathbb{C}$ d'où $\dim\Delta(\mathfrak{g})=m+r$ et la dimension cherchée. CQFD

(2.17) **Corollaire.** *Si* $\mathfrak{a}$ *vérifie les conditions* (2.3, 2.4, 2.5), *alors la composante* $\Sigma(\mathfrak{g})$ *avec* $\mathfrak{g}=\mathfrak{a}\times\mathbb{C}$ *est égale à l'adhérence de l'ensemble* $E_c^1(\mathfrak{a})$ *des lois d'algèbres de Lie qui sont (à isomorphisme près) extensions centrales de noyau* $\mathbb{C}$ *de* $\mathfrak{a}$.

Preuve. L'espace $E_c^1(\mathfrak{a})$ contient $\Sigma(\mathfrak{g})$ et d'après [4] il est constructible, irréductible et de dimension égale à $m(m-1)-\dim\Delta(\mathfrak{a})+\dim Z^2(\mathfrak{a},\mathbb{C})-v$ avec ici $v=0$ où $Z^2(\mathfrak{a},\mathbb{C})$ désigne l'espace des 2-cocycles à valeur triviale de $\mathfrak{a}$. Les dimensions des 2 sous-espaces calculées par les 2 formules sont les mêmes d'où l'égalité de leur adhérence. CQFD

(2.18) *Remarques.* (a) Les algèbres $\mathfrak{a}=\mathfrak{u}\oplus\mathfrak{n}$ qui vérifient les conditions (2.3, 2.4, 2.5) sont nombreuses: on peut prendre pour $\mathfrak{n}$ tout produit direct de plus de 4 facteurs nilpotents de dimension $\leqq 6$ (sauf $\mathfrak{n}_{6,5}$ et $\mathfrak{n}_{6,12}$ dans la nomemclature de [8]) de type $\mathfrak{n}_n^{(l)}$ ou des recollements centraux [5].

(b) Si $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$ sont non isomorphes, les composantes $\bar{E}_c^1(\mathfrak{a}_i)$ $(i=1,2)$ sont distinctes. On en construit ainsi un grand nombre d'ordre $\Gamma(\sqrt{m})$ où Γ est la fonction gamma d'Euler en utilisant (a) et [5].

(c) Les deux composantes de N_7 mises en évidence par Vergne [8] sont de la forme de celles du corollaire (2.17): soient $\bar{E}_c^1(\mathfrak{n}_{6,19})$ et $\bar{E}_c^1(\mathfrak{n}_{6,15})$ [4] pour les algèbres de Lie nilpotentes $\mathfrak{n}_{6,19}$ et $\mathfrak{n}_{6,15}$ dans la nomenclature de [8].

3. Conclusions

Soient $R_m(\mathfrak{n})$ le sous-espaces de R_m des algèbres de Lie de plus grand idéal nilpotent isomorphe à $\mathfrak{n}, \mathfrak{o}_n$ l'algèbre de Lie abélienne $\mathbb{C}^n, \mathfrak{n}_3$ l'algèbre de Heisenberg $[x_1, x_2]=x_3$ et $\mathfrak{r}_2 \simeq T_1 \oplus \mathfrak{o}_1$ l'algèbre de Lie $[x_1, x_2]=x_2$. Les séries $\mathfrak{o}_n$ $(n \geqq 4)$, $\mathfrak{n}_3 \times \mathfrak{o}_{n-3}$ $(n \geqq 5)$ admettent des tores maximaux de dimension n et $n-1$ qui vérifient (2.3, 2.4, 2.5); (2.6, 2.17) donnent:

(3.1) $\bar{E}_c^1(\mathfrak{r}_2^n)$ $(n \geqq 4)$ est une composante irréductible de L_{2n+1} et de R_{2n+1} $\left(\text{de dimension } \frac{9}{2}n^2 + \frac{n}{2}\right)$ contenu dans $\bar{R}_{2n+1}(\mathfrak{o}_{n+1})$ et qui contient un ouvert non vide d'algèbres de Lie non décomposables;

(3.2) $\bar{E}_c^1(\mathfrak{r}_2^{n-3} \times (T_2 \oplus \mathfrak{n}_3))$ $(n \geqq 5)$ est une composante irréductible de L_{2n} et de R_{2n} (de dimension $\frac{9}{2}n^2 - \frac{9}{2}n + 2$) contenue dans $\bar{R}_{2n}(\mathfrak{n}_3 \times \mathfrak{o}_{n-2})$ et qui contient un ouvert non vide d'algèbres de Lie non décomposables.

En améliorant (3.1) on a le résultat suivant:

(3.3) **Proposition.** *L'espace $R_m(\mathfrak{o}_n)$ pour $n > m-n \geqq 4$ contient un ouvert non vide de L_m constitué d'algèbres de Lie non décomposables et un ouvert constitué de lois décomposables dont l'adhérence est la composante $\bar{R}_m^0(\mathfrak{o}_n)$ de L_m.*

Le corollaire (1.3) avec (3.1, 3.2) ou (3.3) permet d'énoncer le principal résultat de cette étude:

(3.4) **Proposition.** *L'ensemble des algèbres de Lie algébriques (respectivement décomposables) est: dense dans L_m et dans R_m pour $m \leqq 7$; non dense dans L_m et dans R_m pour $m \geqq 9$.*

Ceci met en évidence une difficulté supplémentaire pour construire les variétés L_m et R_m si $m \geqq 9$ et peut-être $m=8$ du fait que les lois non décomposables ne sont plus dans l'adhérence d'ouverts constitués de lois décomposables bien choisies. Il reste à trouver une méthode générale pour construire ces nouvelles composantes. Ceci s'ajoute à la difficulté de classer les lois nilpotentes à partir de la dimension 7 et l'existence de familles paramétrées. Notons cependant que différentes tables d'algèbres de Lie nilpotentes en dimension 7 sont parues récemment: E. N. Safiullina, Sur la classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7 (en russe) Kazan 1976; Ancochea Bermudez, Goze, CRAS 302 (1986); Magnin, L., Sur les algèbres de Lie nilpotentes de dimension $\leqq 7$. JGP.3 (1986); M. Romdhani, Classification of real and complex Nilpotent Lie algebras of Dimension 7, à paraître dans Linear and Multilinear Algebra; Seeley, C., Nilpotent Lie algebras of Dimension 7 over the Complex Numbers, (1988). Ceci permet d'envisager l'étude de L_8, intéressante à cause de phénomènes nouveaux qui y apparaissent.

Bibliographie

1. Bratzlavsky, F.: Sur les algèbres admettant un tore d'automorphismes donné. J. Algebra **30**, 305–316 (1974)
2. Carles, R., Diakité, Y.: Sur les variétés d'algèbres de Lie de dimension $\leqq 7$. J. Algebra **91**, 53–63 (1984)
3. Carles, R.: Sur la structure des algèbres de Lie rigides. Ann. Inst. Fourier, Grenoble **34**, 65–82 (1984)
4. Carles, R.: Sur les algèbre de Lie caractéristiquement nilpotentes. Prépublication n° 5, Poitiers (1984)
5. Carles, R.: Sur certaines classes d'algèbres de Lie rigides. Math. Ann. **272**, 477–488 (1985)
6. Favre, G.: Système de poids sur une algèbre de Lie nilpotente. Manuscr. Math. **9**, 53–90 (1973)
7. Hochschild, G., Serre, J.P.: Cohomology of Lie algebras. Ann. Math. **57**, 591–603 (1953)
8. Vergne, M.: Thèse 3e cycle, Paris (1966)

Reçu le 23 juin 1988