

Werk

Titel: Mathematische Annalen

Verlag: Springer

Jahr: 1989

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN235181684_0283

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN235181684_0283 | LOG_0063

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Cohomologie des groupes et corps d'invariants multiplicatifs

Jean Barge

Centre Mathématiques, Ecole Polytechnique, F 91 128, Palaiseau, France et Université de Lausanne, Département de Mathématiques, CH-1015 Lausanne-Dorigny, Suisse

Introduction

Soit Γ un groupe fini opérant linéairement et fidèlement sur un espace vectoriel complexe V , de dimension finie. Le problème de savoir si le corps des invariants, $\mathbb{C}(V)^\Gamma$ est transcendant pur sur \mathbb{C} – ou même stablement transcendant pur – a reçu une réponse négative. C'est Saltman [S 1] [S 2] qui, le premier, a donné un contre exemple. L'invariant qu'il utilise est le groupe de Brauer non ramifié, $\text{Br}^{\text{nr}}(\mathbb{C}(V)^\Gamma)$. C'est un sous-groupe du groupe de Brauer, nul pour les corps transcendants purs sur \mathbb{C} , et Saltman a construit un exemple de groupe fini Γ et de représentation fidèle V , tels que $\text{Br}^{\text{nr}}(\mathbb{C}(V)^\Gamma)$ soit non nul.

Un peu plus tard, Saltman et Bogomolov indépendamment ont calculé $\text{Br}^{\text{nr}}(\mathbb{C}(V)^\Gamma)$ pour tout Γ .

Théorème 1 [B].

$$\text{Br}^{\text{nr}}(\mathbb{C}(V)^\Gamma) = \text{Ker}[H^2(\Gamma; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \Pi_A H^2(A; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})]$$

où A parcourt tous les sous groupes abéliens de Γ .

(Voir aussi [CTS]) En particulier cet invariant ne dépend que de Γ et non pas de la représentation linéaire dès qu'elle est fidèle.

Un problème voisin et étroitement lié à la question précédente est le suivant: Soient G un groupe fini et M un G – réseau – i.e. un \mathbb{Z} module libre et de type fini sur lequel G agit fidèlement. On note $\mathbb{C}[M]$ l'anneau du groupe abélien M à coefficients dans \mathbb{C} et $\mathbb{C}(M)$ son corps de fractions. Calculer $\text{Br}^{\text{nr}}(\mathbb{C}(M)^G)$. La réponse a été donnée par Saltman [S 3] en 87.

Théorème 2 [S 3].

$$\text{Br}^{\text{nr}}(\mathbb{C}(M)^G) = \text{Ker}[H^2(G; \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \oplus M) \rightarrow \Pi_B H^2(B; \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \oplus M)].$$

où cette fois-ci B parcourt les sous-groupes abéliens bicycliques de G . – Un groupe est abélien bicyclique si c'est un quotient de \mathbb{Z}^2 –.

Le lien entre les deux problèmes (action linéaire et G -réseaux) est le suivant:

Supposons que le G -réseau M soit d'indice fini dans un module de permutation P de sorte que l'on ait la suite exacte $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow F \rightarrow 0$. On construit alors Γ , le produit semi-direct de G par le groupe des caractères de F , et une action linéaire fidèle de Γ sur $\mathbb{C}(P)$ de sorte que $\mathbb{C}(P)^\Gamma = \mathbb{C}(M)^G$ (1).

Un des buts de cet article est de donner une preuve directe du théorème 2, à partir du théorème 1, grâce à l'égalité (1). Les méthodes sont purement cohomologiques et, une fois admis le théorème 1, cet article est "self contained". Le point clé est la preuve du cas particulier suivant:

Théorème 3. *Soit Γ le produit semi-direct d'un groupe bicyclique B , par un B -module fini. Alors l'application*

$$H^2(\Gamma; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \Pi_A H^2(A; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

où A parcourt les sous-groupes abéliens de Γ , est injective.

Le théorème ci-dessus signifie (par dualité) que pour un tel Γ , toute l'homologie $H_2(\Gamma; \mathbb{Z})$ est engendrée par des classes toriques et la preuve que j'en donne s'inspire de [BG]. La démonstration repose sur le fait que \mathbb{Z}^2 est un groupe à dualité [Bi], et elle rend évident le rôle des groupes abéliens bicycliques. D'ailleurs on aboutit facilement à caractérisation suivante:

Théorème 4. *Soit G un groupe fini. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- 1) *Pour tout G -réseau M , $\text{Br}^{\text{nr}}(\mathbb{C}(M)^G) = 0$.*
- 2) *Les sous-groupes de Sylow de G sont abéliens bicycliques.*

En fait tout exemple de G -réseau M pour lequel $\text{Br}^{\text{nr}}(\mathbb{C}(M)^G) \neq 0$ conduit "par linéarisation" à un contre exemple au problème de Noether. C'est la méthode de Saltman [S2] qui "démarrait" avec le plus petit groupe violant 2), à savoir $(\mathbb{Z}/2)^3$.

La première partie est consacrée à la preuve du théorème 3. Dans la deuxième nous démontrons le théorème 4. En passant, nous obtenons une preuve du théorème 2 dans le cas particulier où M est d'indice fini dans un module de permutation.

I

Cette partie est consacrée à la démonstration du théorème

Théorème I.1. *Soit B un groupe abélien bicyclique et soit F un B -module fini. Soit Γ le produit semi-direct de B par F . Alors l'application*

$$H^2(\Gamma; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \Pi_A H^2(A; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

où A parcourt les sous-groupes abéliens de Γ , est injective.

Remarquons d'abord que l'énoncé précédent est équivalent – par la formule des coefficients universels – à celui-ci.

L'application

$$\bigoplus_A H_2(A; \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(\Gamma; \mathbb{Z})$$

est surjective. Par ailleurs puisque $H_2(A; \mathbb{Z}) \simeq \wedge_2(A)$ on peut se restreindre aux sous-groupes A qui sont abéliens bicycliques.

Définition I.2. Nous disons qu'une classe x de $H_2(\Gamma; \mathbb{Z})$ est torique, s'il existe un homomorphisme $f: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \Gamma$ tel que $x = f_*(u)$ où u est un générateur (choisi une fois pour toutes) de $H_2(\mathbb{Z}^2; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

Le théorème I.2 est donc équivalent à la:

Proposition I.3. Soit Γ comme dans le théorème I.1. Le groupe $H_2(\Gamma; \mathbb{Z})$ est engendré par des classes toriques.

I.4. Construction d'un groupe universel U .

Notons U le produit semi-direct du groupe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, par l'idéal d'augmentation, I , de son algèbre de groupe et choisissons deux générateurs X_1, X_2 du groupe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ce qui nous permet d'identifier I à l'idéal de l'anneau des polynômes de Laurent à deux variables engendré par $X_1 - 1$ et $X_2 - 1$.

Proposition I.5. Si $H_2(U; \mathbb{Z})$ est engendré par des classes toriques, il en est de même pour $H_2(\Gamma; \mathbb{Z})$ où Γ est comme dans le théorème I.1.

Preuve. Soit donc

$$0 \rightarrow F \xrightarrow{i} \Gamma \rightarrow B \rightarrow 1 \tag{1}$$

une suite exacte scindée, où B est bicyclique et F fini et soit

$$0 \rightarrow H_1(B; F) \xrightarrow{\phi} \frac{H_2(\Gamma; \mathbb{Z})}{i_*(H_2(F; \mathbb{Z}))} \rightarrow H_2(B; \mathbb{Z}) \rightarrow 0 \tag{2}$$

la suite exacte "des termes de bas degré" dans la suite spectrale de Hochschild-Serre.

Puisque (1) est scindée, (2) aussi et en conséquence toute classe de $H_2(\Gamma; \mathbb{Z})$ est congrue, modulo les classes toriques, à un élément de l'image de ϕ (puisque B , comme F est abélien).

Soient u_1, u_2 , deux générateurs de B . La suite

$$\mathbb{Z}[B]^2 \xrightarrow{d} \mathbb{Z}[B] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

où $d(a_1, a_2) = u_1 \cdot a_1 - a_1 + u_2 \cdot a_2 - a_2$ est un début de résolution libre de \mathbb{Z} . Il en résulte que tout élément α de $H_1(B; F)$ est la classe d'une chaîne $f_1, f_2 \in F \times F$ qui est un cycle, c'est-à-dire telle que

$$u_1 \cdot f_1 - f_1 + u_2 \cdot f_2 - f_2 = 0$$

Considérons alors le diagramme commutatif ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & U & \longrightarrow & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow h & & \downarrow k & & \downarrow l \\ 0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & \Gamma & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

où $l(X_1) = u_1, l(X_2) = u_2$ et où h est l'unique application $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ équivariante telle que $h(X_1 - 1) = f_2$ et $h(X_2 - 1) = -f_1$.

Le diagramme se complète par un homomorphisme (et même plusieurs) $k: U \rightarrow \Gamma$ (car il s'agit de produits semi-directs). Il induit en homologie le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{CD} H_1(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; I) @>\phi>> \frac{H_2(U; \mathbb{Z})}{i_*(H_2(I; \mathbb{Z}))} \\ @V(h, l)_*VV @VVk_*V \\ H_1(B; F) @>\phi>> \frac{H_2(\Gamma; \mathbb{Z})}{i_*(H_2(F; \mathbb{Z}))} \end{CD}$$

Soit alors $\beta \in H_1(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; I)$ la classe de $(1 - X_2, X_1 - 1)$ qui est bien un cycle puisque $X_1 \cdot (X_2 - 1) - (X_2 - 1) = X_2(X_1 - 1) - (X_1 - 1)$.

Il est clair que $(h, l)_*(\beta) = \alpha$ et donc que $\phi(\alpha) = k_*(\phi(\beta))$. Il suffit donc de montrer que $\phi(\beta)$ est engendré par des classes toriques. \square

La démonstration du théorème I.1 résulte donc maintenant de

Proposition I.6. *Soit U notre groupe universel.*

Alors $H_2(U; \mathbb{Z})$ est engendré par des classes toriques.

Pour démontrer la proposition I.6 nous utiliserons le lemme ci-dessous dont la démonstration est donnée en appendice.

Lemme I.7. *Soit*

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} \Gamma \rightarrow G \rightarrow 1 \tag{1}$$

une suite exacte scindée où A est abélien qui induit en homologie la suite exacte

$$0 \rightarrow H_1(G; A) \xrightarrow{\phi} \frac{H_2(\Gamma; \mathbb{Z})}{i_*(H_2(A; \mathbb{Z}))} \rightarrow H_2(G; \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

Soient $x \in H_2(G; \mathbb{Z})$ et s_1, s_2 deux sections de (1). On note $d(s_1, s_2)$ la classe dans $H^1(G; A)$ de la différence $s_2 - s_1$. Alors on a la formule

$$(s_2)_*(x) - (s_1)_*(x) = \phi[d(s_1, s_2) \cap x].$$

Preuve de I.6. On applique la formule ci-dessus à l'extension scindée

$$0 \rightarrow I \rightarrow U \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow 1$$

en choisissant pour x "la classe fondamentale" du tore notée $u \in H_2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; \mathbb{Z})$:
Le cap produit par u ,

$$\bigcap u: H^1(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; I) \rightarrow H_1(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; I)$$

est alors un isomorphisme (puisque $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est un groupe à dualité de dimension 2 [Bi]). Il en résulte que toute classe de l'image de ϕ est égale (modulo des classes toriques) à la différence $(s_2)_*(u) - (s_1)_*(u)$ - pour $d(s_1, s_2)$ convenablement choisie -. Ces deux classes, comme u , sont toriques. \square

Remarque I.8. Le groupe U est en fait un quotient du groupe fondamental de la surface de genre 2 puisqu'on a $[X_1, X_2 - 1] = [X_2, X_1 - 1]$ et la classe d'homologie

$\phi(\beta)$ de $H_2(U; \mathbb{Z})$ est l'image de "la" classe d'orientation de cette surface. Il résultait alors de la preuve de la proposition I.5 que toute classe de $H_2(\Gamma; \mathbb{Z})$ à défaut d'être engendrée par des classes toriques (comme nous l'avons finalement démontré) était à priori engendré par des classes de genre 2.

Remarque I.9. Pour revenir au problème initial nous avons en fait montré que toute extension centrale non triviale de Γ par \mathbb{Q}/\mathbb{Z} se détecte par pull-back sur un des trois sous-groupes abéliens de Γ suivants:

Tout d'abord F , puis un relevé quelconque de B , enfin l'image dans Γ d'un relevé bien choisi, non par de B , mais de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ dans le pull-back de l'extension initiale par l'application $l: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow B$.

II. Applications

II.1. Soient G un groupe fini et M un G -réseau qui est d'indice fini dans un G -module permutation P .

Comme mentionné dans l'introduction si F est le conoyau de M dans P on note Γ le produit semi-direct de G par le groupe des caractères \hat{F} de F . Soit $V = P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$. Le corps $\mathbb{C}(P)$ s'identifie au corps des fonctions rationnelles sur V et le groupe Γ agit fidèlement et linéairement sur $\mathbb{C}(V) = \mathbb{C}(P)$ de sorte que $\mathbb{C}(P)^\Gamma = \mathbb{C}(M)^\Gamma$ et on a donc

$$\text{Br}^{\text{nr}}(\mathbb{C}(P)^\Gamma) = \text{Br}^{\text{nr}}(\mathbb{C}(M)^\Gamma) \quad (1) \text{ [S.2]}$$

Proposition II.2. Soit B un groupe bicyclique et soit M un B réseau. Alors $\text{Br}^{\text{nr}}(\mathbb{C}(M)^B) = 0$.

Preuve. Si M est d'indice fini dans un B -module de permutation on applique l'égalité (1), puis le théorème I de l'introduction, puis le théorème I.1.

Le cas général (où M n'est plus nécessairement d'indice fini dans un module de permutation) résulte des deux faits suivants:

Fait 1. Soit M un G -réseau. Alors il existe un G -réseau N tel que $M \oplus N$ soit d'indice fini dans un module de permutation.

Fait 2. Si M et N sont deux G -réseaux le groupe $\text{Br}^{\text{nr}}(\mathbb{C}(M)^\Gamma)$ s'injecte dans $\text{Br}^{\text{nr}}(\mathbb{C}(M \oplus N)^\Gamma)$.

Nous laissons la démonstration du fait 1 en exercice.

Preuve du Fait 2. On observe d'abord que puisque $\mathbb{C}(M)$ est transcendant pur sur \mathbb{C} , le groupe $\text{Br}^{\text{nr}}(\mathbb{C}(M)^\Gamma)$ est en fait un sous-groupe du groupe de Brauer relatif, à savoir $H^2(G, \mathbb{C}(M)^*)$. Il reste à voir que $H^2(G, \mathbb{C}(M)^*)$ s'injecte dans $H^2(G, \mathbb{C}(M \oplus N)^*)$.

Pour cela considérons les suites d'injection suivantes:

$$\mathbb{C}(M)^* \xrightarrow{i_1} \mathbb{C}(M)[N]^* \xrightarrow{i_2} \mathbb{C}(M)(N)^* = (\mathbb{C}(M \oplus N))^*$$

La première injection i_1 admet une G -rétraction (induite par l'homomorphisme de N dans le groupe trivial) et donc induit une injection en cohomologie. Quand à la deuxième i_2 , son conoyau s'identifie au $\bigoplus_I \mathbb{Z}$ où I parcourt les idéaux principaux de

l'anneau factoriel $\mathbb{C}(M)[N]$. Ces idéaux sont permutés par G et donc $H^1(G, \bigoplus_i \mathbb{Z}) = 0$. Ce qui montre que $H^2(G; (\mathbb{C}(M)[N])^*)$ s'injecte dans $H^2(G; (\mathbb{C}(M \oplus N))^*)$. \square

Théorème II.3 [S 3]. Soient G un groupe fini et M un G -réseau d'indice fini dans un G -module de permutation.

Alors

$$\text{Br}^{\text{nr}}(\mathbb{C}(M)^G) = \text{Ker}[H^2(G; \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \oplus M) \rightarrow \Pi_B H^2(B, \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \oplus M)]$$

où B parcourt les sous-groupes abéliens bicycliques de G .

En appliquant le théorème I, le théorème II.3 se réduit, grâce à II.1) à la proposition suivante:

Proposition II.4 Soit $0 \rightarrow M \rightarrow P \rightarrow F \rightarrow 0$ une suite exacte de G -modules, où P est de permutation et F fini. Soit Γ le produit semi-direct de G par le groupe des caractères \hat{F} , de F . Alors les deux groupes

$$\text{Ker}[H^2(G; \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \oplus M) \rightarrow \Pi_B H^2(B; \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \oplus M)]$$

et

$$\text{Ker}[H^2(\Gamma; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \Pi_A H^2(A; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})]$$

où B parcourt les sous-groupes abéliens bicycliques de G et A les sous-groupes abéliens ou abéliens bicycliques de Γ , sont isomorphes.

Introduisons une notation: Si G est un groupe fini et M un G -module nous notons $K^i(G; M)$ le noyau de l'application

$$H^i(G; M) \rightarrow \Pi_B H^i(B; M)$$

où B parcourt les sous-groupes abéliens bicycliques de G . Ainsi la proposition II.4 signifie-t-elle que

$$K^2(\Gamma; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \simeq K^2(G; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus K^2(G; M).$$

Lemme II.5. Avec les notations précédentes, $K^2(G; M)$ est canoniquement isomorphe à $K^1(G; F)$.

Preuve. Il suffit de voir que $K^1(G; P) = K^2(G; P) = 0$. C'est clair pour $K^1(G; P)$ qui est contenu dans $H^1(G; P)$ qui est nul. Par ailleurs si $P \simeq \bigoplus_H \mathbb{Z}[G/H]$ on a la suite d'isomorphismes.

$$H^2(G; P) \simeq \bigoplus_H H^2(G; \mathbb{Z}[G/H]) \simeq \bigoplus_H H^2(H; \mathbb{Z}) \simeq \bigoplus_H H^1(H; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

et un homomorphisme de H dans \mathbb{Q}/\mathbb{Z} , nul sur les sous-groupes cycliques est trivial; d'où la nullité de $K^2(G; P)$.

Preuve de la Proposition II.4. Il s'agit donc de montrer que $K^2(\Gamma; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est isomorphe à

$$K^2(G; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \oplus K^1(G; F).$$

Considérons le diagramme de suites exactes:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & K^2(G; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & & K^2(\Gamma; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & & K^1(G; F) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 \longrightarrow & H^2(G; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{p^*} & \text{Ker}[H^2(\Gamma; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow H^2(F; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})] & \xrightarrow{\psi} & H^1(G; F) & \longrightarrow 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & \Pi_B H^2(B; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & & \Pi_A H^2(A; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & & \Pi_B H^1(B; F) &
 \end{array}$$

où la suite horizontale est la suite «des termes de bas degré» dans la suite spectrale de Hochschild-Serre, et où A, B parcourent respectivement les sous-groupes abéliens bicycliques de Γ et de G .

Nous allons montrer que ce diagramme induit la suite exacte scindée

$$0 \rightarrow K^2(G; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow K^2(\Gamma; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow K^1(G; F) \rightarrow 0$$

Il a deux points non évidents et nous laissons les autres vérifications au lecteur.

(a) $\psi(K^2(\Gamma; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \subset K^1(G; F)$

Preuve. Soit B un sous-groupe abélien bicyclique de G .

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow & \hat{F} & \longrightarrow & \Gamma & \xrightarrow{p} & G & \longrightarrow 1 \\
 & \parallel & & \uparrow i & & \uparrow j & \\
 0 \longrightarrow & \hat{F} & \longrightarrow & p^{-1}(B) & \longrightarrow & B & \longrightarrow 1
 \end{array}$$

et soit $x \in K^2(\Gamma; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Par functorialité $j^*(\psi(x)) = \psi(i^*(x))$ mais $i^*(x) \in K^2(p^{-1}(B); \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ qui est nul (théorème I.1).

(b) $\psi(K^2(\Gamma; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) = K^1(G; F)$

Preuve. Soit A un sous-groupe bicyclique de Γ .

Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 \longrightarrow & \hat{F} & \longrightarrow & \Gamma & \xrightleftharpoons[p]{s} & G & \longrightarrow 1 \\
 & \parallel & & \uparrow i & & \uparrow j & \\
 0 \longrightarrow & \hat{F} & \longrightarrow & p^{-1}(p(A)) & \xleftarrow{s} & p(A) & \longrightarrow 1
 \end{array}$$

où s est une section quelconque. Soit $y \in K^1(G, F)$. Je pretends que l'unique

$$x \in \text{Ker}[H^2(\Gamma; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\hat{F}; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})]$$

vérifiant $\psi(x) = y$ et $s^*(x) = 0$ est en fait dans $K^2(\Gamma; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

En effet

$$\psi(i^*(x)) = j^*(y) = 0$$

et

$$s^*(i^*(x)) = j^*(s^*(x)) = 0.$$

Ce qui montre que $i^*(x) \in H^2(p^{-1}(P(A)); \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est nul. Comme A est un sous-groupe bicyclique arbitraire, x appartient donc à $K^2(\Gamma; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. \square

Remarque II.6. Le théorème II.3 se généralise immédiatement au cas où le G -réseau M n'est plus d'indice fini dans un G -module de permutation grâce au fait suivant qui est «entre les lignes» dans [S2].

Si M et N sont deux G -réseaux, tout élément $\alpha \in \text{Br}(\mathbb{C}(M))^G$ appartient au sous-groupe $\text{Br}^{\text{nr}}(\mathbb{C}(M))^G$ si et seulement si son image par l'application canonique appartient à $\text{Br}^{\text{nr}}(\mathbb{C}(M \oplus N))^G$.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le

Théorème II.7. *Soit G un groupe fini. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- i) *Pour tout G -réseau M on a $\text{Br}^{\text{nr}}(\mathbb{C}(M))^G = 0$.*
- ii) *Les sous-groupes de Sylow de G sont abéliens bicycliques.*

Preuve. ii) \rightarrow i) Comme nous l'avons observé en II.2 le groupe $\text{Br}^{\text{nr}}(\mathbb{C}(M))^G$ est un sous-groupe du groupe $H^2(G; \mathbb{C}(M)^*)$.

Il en résulte que l'application: $\text{Br}^{\text{nr}}(\mathbb{C}(M))^G \rightarrow \prod_S \text{Br}^{\text{nr}}(\mathbb{C}(M))^S$ où S parcourt les sous-groupes de Sylow de G est injective. Ce dernier groupe est nul par la proposition II.2.

i) \rightarrow ii) Soient donc G un groupe fini et S un p sous-groupe de Sylow de G non abélien bicyclique.

Nous commençons par reproduire ici la construction de Saltman [S2] pour exhiber un S réseau N tel que $\text{Br}^{\text{nr}}(\mathbb{C}(N))^S$ soit non nul.

Soit N un S réseau tel que $H^2(S; N) \simeq \frac{\mathbb{Z}}{\#S}$ (par exemple le noyau de l'application de $\mathbb{Z}[S \times S] \rightarrow \mathbb{Z}[S]$) dans la résolution standard de \mathbb{Z} .)

Notons p^n le cardinal de S et $y = p^{n-1}e$ où e est un générateur du groupe cyclique $H^2(S; N)$. Quitte à ajouter à N un S module auxiliaire on peut supposer que N est d'indice fini dans un module de permutation. Soit alors $M = N \otimes_S \mathbb{Z}[G]$. C'est un G -réseau lui aussi d'indice fini dans un module de permutation et on peut donc appliquer le théorème II.3 pour calculer $\text{Br}^{\text{nr}}(\mathbb{C}(M))^G$. Montrons que l'élément $y = p^{n-1}e \in H^2(S; N) = H^2(G; M)$ qui est non nul, appartient à $K^2(G; M)$. En effet il faut montrer que y devient nul quand on le restreint aux sous-groupes abéliens bicycliques B de G ; et pour cela il suffit de le voir pour les sous-groupes de Sylow B_q d'un tel B qui sont maintenant des q groupes abéliens bicycliques. C'est alors clair si $q \neq p$ et pour $q = p$ le p groupe B_p est conjugué dans G d'un sous-groupe de S , strictement contenu dans S puisque S n'est pas abélien bicyclique et dont le cardinal divise donc p^{n-1} . La restriction de $y = p^{n-1}e$ à $H^2(B_p; M)$ est donc nulle puisque ce groupe de cohomologie est tué par p^{n-1} . \square

III. Appendice

Lemme III.1. Soit $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} \Gamma \rightarrow G \rightarrow 1$ une suite exacte scindée (1) où A est abélien, qui induit en homologie la suite exacte

$$0 \rightarrow H_1(G; A) \xrightarrow{\phi} \frac{H_2(\Gamma; \mathbb{Z})}{i_*(H_2(A; \mathbb{Z}))} \rightarrow H_2(G; \mathbb{Z}) \rightarrow 0$$

Soient $x \in H_2(G; \mathbb{Z})$ et s_1, s_2 deux sections de (1). On note $d(s_1, s_2)$ la classe dans $H^1(G; A)$ de la différence $s_2 - s_1$. Alors on a

$$s_{2*}(x) - s_{1*}(x) = \phi(d(s_1, s_2) \cap x) \in \frac{H_2(\Gamma; \mathbb{Z})}{i_*(H_2(A; \mathbb{Z}))}$$

Par évaluation sur les classes de cohomologies le lemme III.1 est équivalent à :

Lemme III.2. Soit

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} \Gamma \rightarrow G \rightarrow 1 \quad (1)$$

une suite exacte scindée où A est abélien, qui induit en cohomologie la suite exacte :

$$0 \rightarrow H^2(G; C) \rightarrow \text{Ker}[H^2(\Gamma; C) \xrightarrow{i^*} H^2(A; C)] \xrightarrow{\Psi} H^1(G; \text{Hom}(A; C)) \rightarrow 0$$

où C est un groupe abélien arbitraire. Soient $v \in \text{Ker}[H^2(\Gamma; C) \rightarrow H^2(A; C)]$ et s_1, s_2 deux sections de (1). On note $d(s_1, s_2)$ la classe dans $H^1(G; A)$ de la différence $s_2 - s_1$. Alors on a

$$s_2^*(v) - s_1^*(v) = \Psi(v) \cup d(s_1, s_2) \in H^2(G; C) \quad (2)$$

Preuve. Il est clair que le membre de gauche de l'égalité (2) ne dépend que de $\Psi(v)$. Pour démontrer l'égalité (2) on peut donc supposer par exemple que $s_1^*(v) = 0$. Si $0 \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow \Gamma \rightarrow 1$ est une extension centrale représentant v , le groupe E est alors le produit semi-direct de G par $C \times A$ puisque d'une part $s_1^*(v) = 0$ et d'autre part $i^*(v) = 0$. La loi de multiplication dans E identifié par s_1 à $C \times A \times G$ est la suivante :

$$(c, a, g) \times (c', a', g') = (c + c' + \overline{\Psi(v)}(g, g^{-1} \cdot a'), a + g \cdot a', gg')$$

où $\overline{\Psi(v)}$ désigne maintenant un homomorphisme croisé dont la classe est $\Psi(v)$. Soit de même \overline{d} un homomorphisme croisé représentant $d(s_1, s_2)$. On doit calculer dans E pour $g_1, g_2 \in G$, $s_2(g_1 g_2) s_2(g_2)^{-1} s_2(g_1)^{-1}$ et on trouve

$$(\overline{\Psi(v)}(g_1, \overline{d}(g_2)), 0, 1)$$

ce qui signifie exactement que le 2-cocycle associée à s_2 , est le cup produit des deux 1-cocycles $\overline{\Psi(v)}$ et \overline{d} .

Remerciements. Je remercie vivement J. L. Colliot-Thélène et J. J. Sansuc qui m'ont initié au sujet, puis fourni tous les éclaircissements nécessaires. Je remercie également E. Ghys, J. Lannes, M. Ojanguren, T. Vust, de leurs suggestions et de l'intérêt qu'ils ont montré pour ce travail, ainsi que le Fonds National Suisse qui m'a offert un séjour de 6 mois à l'Université de Lausanne.

Bibliographie

- [BG] Barge, J., Ghys, E.: Surface et cohomologie bornée. *Invent. Math.* **92**, 509–526 (1988)
- [CTS] Colliot-Thélène, J.L., Sansuc, J.J.: Groupes de Brauer de variétés quotients. En préparation
- [S1] Saltman, D.J.: Noether's problem over an algebraically closed field. *Invent. Math.* **77**, 71–84 (1984)
- [S2] Saltman, D.J.: Multiplicative field invariants. *J. Algebra* **106**, 221–238 (1987)
- [S3] Saltman, D.J.: Multiplicative field invariants and the Brauer group. Preprint Austin (1987)
- [B] Bogomolov, F.A.: The Brauer group of quotient spaces by linear group actions. *Izv. Akad. Nauk. Ser. Mat.* **51**, 485–516 (1987)
- [Bi] Bieri, R.: Gruppen mit Poincaré Dualität. *Comm. Math. Helv.* **47**, 373–396 (1972)

Reçu le 9 juin 1988; version révisée reçu le 12 octobre 1988