Math. Ann. 283, 529–537 (1989)

Mathematische Annalen

Über das Primzahl-Zwillingsproblem

Dieter Wolke

Mathematisches Institut, Albertstrasse 23b, D-7800 Freiburg, Bundesrepublik Deutschland

1. Für natürliches k und $x \geqq 2$ sei

$$\psi_2(x, 2k) = \sum_{2k < n \leqq x} \Lambda(n)\Lambda(n-2k)$$

(Λ = von-Mangold-Funktion).

Nach Hardy-Littlewood [2] verhält sich ψ_2 für $x \to \infty$ vermutlich wie

$$H(x, 2k) = 2 \prod_{p>2} \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \prod_{\substack{p \mid k \\ p>2}} \left(\frac{p-1}{p-2}\right) \cdot (x-2k). \tag{1.1}$$

Van der Corput [1] und Lavrik [4] (s. hierzu Montgomery [5, Chap. 15]) zeigten, daß dies im mittleren Sinn richtig ist.

Für beliebige C_1, $C_2 > 0$ kann die Anzahl der $k \leqq x/2$ mit

$$E(x, 2k) = \psi_2(x, 2k) - H(x, 2k) \neq O(x(\ln x)^{-C_1}) \tag{1.2}$$

durch $O(x(\ln x)^{-C_2})$ abgeschätzt werden. Oder:

$$\sum_{1 \leqq k \leqq x/2} (E(x, 2k))^2 = O(x^2(\ln x)^{-C}) \quad \text{für jedes } C > 0. \tag{1.3}$$

Nach der Methode von Montgomery-Vaughan [6] wurde (1.2) von Jahnke [3] wie folgt verschärft: Es existiert ein $\delta > 0$, so daß die Anzahl der $k \leqq x/2$ mit $\psi(x, 2k) = 0$ durch $O(x^{1-\delta})$ abgeschätzt werden kann.

In der vorliegenden Arbeit soll das Ergebnis von van der Corput-Lavrik dahingehend verbessert werden, daß für „fast alle" $k \leqq x$ die vermutete Asymptotik für $\psi_2(y, 2k)$ in einem y-Bereich gilt, der weit über x hinausgeht.

Satz. *Seien* ε, A, $B > 0$. *Dann gilt für alle* $k \leqq x$ *mit Ausnahme von* $O(x(\ln x)^{-A})$ *Zahlen*

$$\psi_2(y, 2k) = H(y, 2k) + O(y(\ln y)^{-B})$$

im Bereich

$$2x \leqq y \leqq x^{\frac{8}{5} - \varepsilon}.$$

(Die O-Konstanten hängen nur von ε, A und B ab).

Die Aussage wird ermöglicht durch Dichte-Sätze für die Nullstellen der L-Reihen. Die Dichte-Hypothese (s. [5, Chap. 12]) bzw. die verallgemeinerte Riemann'sche Vermutung führen mit der verwendeten Methode zu dem Intervall $[2x, x^{2-\varepsilon}]$ für y.

2. Für $D_1>0$ sei

$$2x \leqq N < N' \leqq 2N \leqq x^{\frac{8}{5}-\varepsilon}, \qquad Q_1=(\ln x)^{D_1}, \qquad Q=N^{\frac{5}{8}+\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{2.1}$$

Für hinreichend großes x ist $Q_1 < \dfrac{N}{Q} < Q$.

Im Hinblick auf die Auswertung der Summe

$$S(\alpha)=S(\alpha, N, N')=\sum_{N<n\leqq N'} \Lambda(n)e(\alpha n) \tag{2.2}$$

benötigt man folgendes

Lemma 1. *Für $q\in\mathbb{N}$ und $\beta\in\mathbb{R}$ sei*

$$L(q,\beta)=\sum_{\chi(q)}\sum_{|\varrho(\chi)|\leqq x^2}\left|\int_N^{N'} t^{\varrho-1}e(t\beta)dt\right|$$

(ϱ durchläuft die nichttrivialen Nullstellen von $L(s,\chi)$).

(1) *Für* $1\leqq q\leqq Q_1$, $|\beta|\leqq \dfrac{1}{qQ}$ *und beliebiges $D_2>0$ gilt (mit nur von D_2 abhängiger $\ll$-Konstante)*

$$L(q,\beta)\ll N^{1/2}\min(N^{1/2}, |\beta|^{-1/2})(\ln x)^{-D_2}.$$

(2) *Für* $Q_1<q\leqq \dfrac{N}{Q}$, $|\beta|\leqq\dfrac{1}{qQ}$ *gilt*

$$L(q,\beta)\ll N^{1/2}\min(N^{1/2}, |\beta|^{-1/2})(\ln x)^{16}.$$

Beweis. Nach Titchmarsh [9, Lemmas 4.3 und 4.5.] ist für $\varrho=\xi+i\eta$ im Fall $\dfrac{1}{N}\leqq|\beta|\leqq\dfrac{1}{qQ}$

$$\int_N^{N'} t^{\varrho-1}e(t\beta)dt \ll \begin{cases} N^{\xi-1}|\beta|^{-1}, & \text{falls } |\varrho|\leqq N|\beta|,\\ N^{\xi-1/2}|\beta|^{-1/2}, & \text{falls } N|\beta|<|\varrho|\leqq 8\pi N|\beta|,\\ N^{\xi}(|\varrho|+1)^{-1}, & \text{falls } 8\pi N|\beta|<|\varrho|\leqq x^2. \end{cases} \tag{2.3}$$

Durch Entwickeln von $e(t\beta)$ sieht man im Fall $|\beta|\leqq N^{-1}$

$$\int_N^{N'} t^{\varrho-1}e(t\beta)dt \ll \frac{N^{\xi}}{1+|\varrho|} \tag{2.4}$$

Es soll im Folgenden der Fall $\beta\geqq N^{-1}$ behandelt werden.

Sei wie üblich für $\sigma\geqq\frac{1}{2}$ und $T\geqq 1$

$N(\sigma, T, \chi)$ die Anzahl der Nullstellen $\varrho = \xi + i\eta$ von $L(s,\chi)$ mit $\xi \geqq \sigma$ und $|\eta| \leqq T$. Nach Montgomery [5, Chap. 12] gilt

$$\sum_{\chi \bmod q} N(\sigma, T, \chi) \ll \begin{cases} (qT)^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}} \ln^9(qT), & \frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq \frac{4}{5}, \\ (qT)^{\frac{2(1-\sigma)}{\sigma}} \ln^{14}(qT), & \frac{4}{5} \leqq \sigma < 1. \end{cases} \tag{2.5}$$

(Diese Ungleichungen sind zwischenzeitlich mehrfach verschärft worden. Eine Übersicht findet man in Richert [8, Chap. 6]. In Bezug auf unseren Satz entstehen jedoch nur geringe Verbesserungen). Für $q \leqq Q_1$, $\chi \bmod q$, $|\tau| \leqq x^2$ und

$$\sigma \geqq \sigma_0 = 1 - (\ln x)^{-4/5} \tag{2.6}$$

gilt $L(\sigma + iT, \chi) \neq 0$ (s. [7, VIII, Satz 6.2]). Für $Q_1 < q \leqq NQ^{-1}$ with $\sigma_0 = 1$ gesetzt.

Im Bereich $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq \frac{4}{5}$ ist $T^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}}$ in T wachsend, $T^{\frac{3(1-\sigma)}{2-\sigma}-1}$ fallend. Entsprechendes ist richtig für $T^{\frac{2(1-\sigma)}{\sigma}}$. (2.3, 2.5, 2.6) führen daher im Fall $N^{-1} \leqq \beta \leqq (qQ)^{-1}$ zu der Abschätzung

$$L(q,\beta) \ll \ln^{16} x \cdot \left\{ qN\beta^{1/2} + \beta^{-1/2} N^{1/2} \int_{1/2}^{4/5} ((qN\beta)^{\frac{3}{2-\sigma}} N^{-1})^{1-\sigma} d\sigma \right.$$
$$\left. + \beta^{-1/2} N^{1/2} \int_{4/5}^{\sigma_0} ((qN\beta)^{2/\sigma} N^{-1})^{1-\sigma} d\sigma \right\}.$$

Im ersten Integral ist die Funktion

$$f_1(\sigma) = (1-\sigma)\left(\frac{3}{2-\sigma} \ln(qN\beta) - \ln N\right)$$

wegen $Q > N^{13/25}$ monoton steigend. Im Intervall $[\frac{4}{5}, \sigma_0]$ nimmt die Funktion

$$f_2(\sigma) = (1-\sigma)\left(\frac{2}{\sigma} \ln(qN\beta) - \ln N\right)$$

ihren größten Wert an einem der Endpunkte an. Es folgt daher

$$L(q,\beta) \ll \ln^{16} x \cdot \{qN\beta^{1/2} + q^{1/2} N^{4/5} + N^{1/2} \beta^{-1/2} ((qN\beta)^{2/\sigma_0} N^{-1})^{1-\sigma_0}\}.$$

Für $q \leqq Q_1$ ist $((qN\beta)^{2/\sigma_0} N^{-1})^{1-\sigma_0}$ nach (2.6)

$$\ll (\ln x)^{-16-D_2}.$$

Damit ergibt sich Behauptung (1) für $|\beta| \geqq N^{-1}$. Im andern Fall geht man mit (2.4) ganz analog vor. Behauptung (2) folgt in gleicher Weise, wobei mehrfach $Q \geqq N^{5/8}$ ausgenützt wird.

Für $1 \leqq q \leqq Q$ und $(a,q) = 1$ sei

$$I_{q,a} = \left[\frac{a}{q} - \frac{1}{qQ}, \frac{a}{q} + \frac{1}{qQ}\right]. \tag{2.7}$$

Lemma 2. (1) *Für* $1 \leqq q \leqq Q_1$, $(a,q)=1$, $\alpha = \frac{a}{q} + \beta \in I_{q,a}$ *und beliebiges* $D_2 > 0$ *gilt*

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= \sum_{N<n\leqq N'} \Lambda(n) e(\alpha n) \\ &= \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \sum_{N<n\leqq N'} e(\beta n) + O((\ln x)^{1-D_2} \cdot \min(N, N^{1/2}|\beta|^{-1/2})). \end{aligned}$$

(2) *Für* $Q_1 < q \leqq \frac{N}{q}$, $(a,q)=1$ *und* $\alpha \in I_{q,a}$ *gilt*

$$S(\alpha) \ll q^{-1/2} \min(N, N^{1/2}|\beta|^{-1/2}) \ln^{17} x.$$

(3) *Für* $\frac{N}{Q} < q \leqq Q$, $(a,q)=1$ *und* $\alpha \in I_{q,a}$ *gilt*

$$S(\alpha) \ll (N q^{-1/2} + N^{4/5} + N^{1/2} q^{1/2}) \ln^4 x.$$

Beweis zu (1). Nach [7, VII. Satz 4.4] besteht für $N < y \leqq N'$ und $\chi \bmod q$ die explizite Formel

$$\begin{aligned} \psi(y,\chi) &= \sum_{n\leqq y} \Lambda(n)\chi(n) \\ &= \varepsilon_\chi y - \sum_{|\varrho(\chi)| \leqq x^2} \frac{y^\varrho}{\varrho} + R(y), \end{aligned}$$

wobei

$$\varepsilon_\chi = 1, \quad \text{falls} \quad \chi = \chi_0; \qquad \varepsilon_\chi = 0, \quad \text{falls} \quad \chi \neq \chi_0$$

und

$$R(y) \ll \min\left(\ln^2 x, \frac{y}{x^2 \|y\|} \ln^2 x\right) \left(\|y\| = \min_{a\in\mathbf{Z}} |y-a|\right). \tag{2.8}$$

Die im zitierten Satz genannte Einschränkung auf primitive Charaktere kann auf Kosten eines Fehlers $O(\ln^2 x)$ fallengelassen werden. Die dortigen Terme $v_0 \ln x$, d_0 und $B(y,\chi)$ sind ebenfalls $O(\ln^2 x)$. (Im Fall, daß zu q ein Charakter χ_1 mit einer Ausnahme-Nullstelle gehört, kann d_0 nur durch $O(q^\varepsilon)$ abgeschätzt werden. Da zu q nur ein solches χ_1 gehört, bleibt die folgende Formel für $S\left(\frac{a}{q} + \beta\right)$ auch in diesem Fall richtig.)

In üblicher Weise ergibt sich

$$\begin{aligned} S\left(\frac{a}{q}+\beta\right) &= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(q)} \chi(a)\tau(\bar\chi) \sum_{N<n\leqq N'} \Lambda(n)\chi(n) \cdot e(n\beta) + O(\ln^2 x) \\ &= \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \int_N^{N'} e(y\beta)dy - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(q)} \chi(a)\tau(\bar\chi) \sum_{|\varrho(\chi)|\leqq x^2} \int_N^{N'} y^\varrho e(y\beta)dy \\ &\quad + O\left(\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi(q)} |\tau(\bar\chi)| \left(|R(N)| + |R(N')| + \int_N^{N'} |R(y)|\,|\beta| dy\right) + \ln^2 x\right). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Das Integral im ersten Term ist

$$= \sum_{N<n\leqq N'} e(n\beta) + O(1+N|\beta|).$$

Der Fehler-Term erweist sich mit (2.8) und der Ungleichung $\tau(\chi) \ll q^{1/2}$ als

$$O(q^{1/2} \ln^2 x \max(1, \mathrm{N}|\beta|).$$

Damit wird (2.9) zu

$$S\left(\frac{a}{q}+\beta\right) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \sum_{N<n\leqq N'} e(n\beta) + O\left(\frac{q^{1/2}}{\varphi(q)} L(q,\beta)\right)$$
$$+ O(q^{1/2} \ln^2 x \max(1, N|\beta|)). \tag{2.10}$$

Der Fehler kann mit Lemma 1 wie in (1) behauptet abgeschätzt werden. Ähnlich geht man bei (2) vor.

(3) findet man in [10, Theorem 3.1]. In etwas schwächerer Form ergibt es sich wie (1) mit (2.10) und einem Analogon zu Lemma 1.

Lemma 3. *Für* $Q_1 < q \leqq Q$ *und* $(a,q)=1$ *ist*

$$\int_{I_{q,a}} |S(\alpha)|^2 d\alpha \ll \begin{cases} Nq^{-1}(\ln x)^{35}, & \text{falls } Q_1 < q \leqq \dfrac{N}{Q}, \\ \left(\dfrac{N^2}{q^2 Q} + \dfrac{N^{8/5}}{qQ}\right) \ln^8 x, & \text{falls } \dfrac{N}{Q} < q \leqq Q. \end{cases}$$

Dies ergibt sich unmittelbar aus den Ungleichungen (2) und (3) von Lemma 2.

3. Die Einteilung des Einheitsintervalls in „major" und „minor arcs" geschieht wie folgt.

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{M} &= \bigcup_{q\leqq Q_1} \bigcup_{1\leqq a\leqq q,\,(a,q)=1} I_{q,a} \\ \mathbf{m} &= [Q^{-1}, 1+Q^{-1}]\backslash \mathbf{M}. \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

Es werde zuerst der Fall

$$x(\ln x)^{D_3} < N < N' \leqq 2N \leqq x^{\frac{8}{5}-\varepsilon} \tag{3.2}$$

betrachtet.

Für $k \leqq x$ läßt sich der Beitrag von $\mathbf{M}$ zu

$$\psi_2(N',2k) - \psi_2(N,2k) = \int_{Q^{-1}}^{1+Q^{-1}} |S(\alpha,N,N')|^2 e(-2k\alpha)d\alpha + O(x) \tag{3.3}$$

mit Lemma 2 leicht berechnen. Man sieht für $q \leqq Q_1$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} \int_{I_{q,a}} |S(\alpha)|^2 e(-2k\alpha)d\alpha \\
&= \sum_{\substack{a=1\\(a,q)=1}}^{q} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} \int_{-1/2}^{1/2} \Big|\sum_{N<n\leqq N'} e(n\beta)\Big|^2 e\left(-2k\left(\frac{a}{q}+\beta\right)\right) d\beta \\
&+O\left(\varphi(q) \int_0^{(qQ)^{-1}} (\ln x)^{2-2D_2} \min(N^2, N\beta^{-1}) d\beta\right) \\
&+O\left(\frac{1}{\varphi(q)} \int_{(qQ)^{-1}}^{1/2} \beta^{-2} d\beta\right) = \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} c_q(-2k)(N'-N) \\
&+O\left(\frac{x}{\varphi(q)}\right) + \varphi(q)(\ln x)^{2-2D_2} \cdot N + \frac{q}{\varphi(q)} Q,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{M}} |S(\alpha, N, N')|^2 e(-2k\alpha)d\alpha = \sum_{q\leqq Q_1} \frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)} c_q(-2k)(N'-N) \\
&+ O(N((\ln x)^{-D_3} + (\ln x)^{2+2(D_1-D_2)}))
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$\left(N, N' \text{ gemäß (3.2)}, c_q(h) = \sum_{1\leqq a\leqq q, (a,q)=1} e\left(\frac{a}{q}h\right)\right)$.

Es soll

$$A(N, N', D_3) = \left|\left\{k \leqq x, \left|\int_{\mathbf{M}} |S(\alpha, N, N')|^2 e(-2k\alpha)d\alpha\right| > N(\ln x)^{-D_3}\right\}\right| \tag{3.5}$$

abgeschätzt werden. Man erhält

$$\begin{aligned}
A(\,) &\leqq N^{-2}(\ln x)^{2D_3} \cdot \int_0^1 \Big|\sum_{k\leqq x} e(k\gamma) \int_{\mathbf{m}} |S(\alpha)|^2 e(-2\alpha)d\alpha\Big|^2 d\gamma \\
&\ll N^{-2}(\ln x)^{2D_3} \int_{\mathbf{m}} |S(\alpha_1)|^2 \int_{\mathbf{m}} |S(\alpha_2)|^2 \cdot \min\left(x, \frac{1}{\|\alpha_1-\alpha_2\|}\right) d\alpha_2 d\alpha_1 .
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Lemma 4. *Gleichmäßig in $\alpha_1 \in \mathbf{m}$ gilt*

$$\int_{\mathbf{m}} |S(\alpha_2)|^2 \min\left(x, \frac{1}{\|\alpha_1-\alpha_2\|}\right) d\alpha_2 \ll Nx(\ln x)^{37-D_1}.$$

Beweis. Zu festgehaltenem $\alpha_1 \in \mathbf{m}$ sei

$$\mathbf{m}_0 = \mathbf{m}_0(\alpha_1) = [\alpha_1 - x^{-1}, \alpha_1 + x^{-1}] \cap \mathbf{m},$$

$$\mathbf{m}_l = \mathbf{m}_l(\alpha_1) = \{\alpha \in \mathbf{m}, 2^{l-1}x^{-1} \leqq |\alpha - \alpha_1| \leqq 2^l x^{-1}\} \qquad \left(1 \leqq l \leqq \frac{\ln x}{\ln 2} + 1\right).$$

Nach dem Dirichlet'schen Approximationssatz und (3.1) wird $\mathbf{m} \subseteq \bigcup_l \mathbf{m}_l$ überdeckt durch die Intervalle $I_{q,a}$ mit $Q_1 < q \leqq Q$, $(a,q)=1$, $1 \leqq a \leqq q$.

Es werde bei festgehaltenem l zuerst $J_{2,l}$, der Beitrag der $I_{q,a}$ mit $\frac{N}{Q} < q \leqq Q$, $I_{q,a} \cap \mathbf{m}_l \neq \emptyset$, zum obigen Integral abgeschätzt. Zu jedem $q \in \left(\frac{N}{Q}, Q\right]$ gibt es höchstens

$$\ll \frac{2^l}{x} q + 1 \ll \begin{cases} 1, & \text{falls } NQ^{-1} < q \leqq x2^{-1}, \\ 2^l q x^{-1}, & \text{falls } x2^{-1} < q \leqq Q \end{cases}$$

solche Intervalle. Die erste Alternative tritt nur für $2^l > xQN^{-1}$ ein. In diesem Fall ergibt sich mit Lemma 3

$$\begin{aligned} J_{2,l} &\ll \frac{x}{2^l} \ln^8 x \cdot \left(\sum_{N/Q < q \leqq x/2^l} \left(\frac{N^2}{q^2 Q} + \frac{N^{8/5}}{qQ} \right) + \sum_{x/2^l < q \leqq Q} \frac{2^l q}{x} \left(\frac{N^2}{q^2 Q} + \frac{N^{8/5}}{qQ} \right) \right) \\ &\ll \ln^9 x \cdot \left(\frac{x}{2^l} N + \frac{x}{2^l} \frac{N^{8/5}}{Q} + \frac{N^2}{Q} + N^{8/5} \right) \\ &\ll \ln^9 x \cdot \left(\frac{N^2}{Q} + \frac{N^{13/5}}{Q^2} + N^{8/5} \right) \\ &\ll Nx (\ln x)^{36 - D_1}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

nach (2.1). Im Fall $2^l \leqq xQN^{-1}$ folgt dieselbe Ungleichung.

Bezeichne analog $J_{1,l}$ den Beitrag der $I_{q,a}$ mit $Q_1 < q \leqq \frac{N}{Q}$ zu dem Integral über $\mathbf{m}_l$. Die q mit $q \geqq x2^{-l}$ liefern ähnlich wie oben mit Lemma 3

$$\ll \frac{x}{2^l} \sum_{Q_1 < q \leqq N/Q} \frac{2^l}{x} q \cdot \frac{N}{q} \ln^{35} x \ll Nx (\ln x)^{36 - D_1}.$$

Es bleiben im Fall $2^l \leqq xQ_1^{-1}$ nur noch die q mit $Q_1 < q \leqq x2^{-l}$. Das Intervall $(Q_1, \min(NQ^{-1}, x2^{-l})]$ werde in $\ll \ln x$ Teile $(K, K']$ mit $K' \leqq 2K$ eingeteilt. Wegen $\left|\frac{a}{q} - \frac{a'}{q'}\right| \geqq \frac{1}{4K^2}$ für $q, q' \in (K, K']$, $(a,q)=(a',q')=1$, $\frac{a}{q} \neq \frac{a'}{q'}$ wird $\mathbf{m}_l$ von höchstens $\ll \frac{2^l}{x} K^2 + 1$ Intervallen $I_{q,a}$ mit $q \in (K, K']$ geschnitten. Diese tragen zu $J_{1,l}$ nur

$$\begin{aligned} &\ll \frac{x}{2^l} \left(\frac{2^l}{x} K^2 + 1 \right) \frac{N}{K} \ln^{35} x \ll Nx \ln^{35} x \left(\frac{K}{x} + K2^{-l} \right) \\ &\ll Nx (\ln x)^{35 - D_1} \end{aligned}$$

bei. Dies führt zur Ungleichung (3.7) für $J_{1,l}$. Summation über die l ergibt die Behauptung.

Setzt man Lemma 4 in (3.6) ein, so zeigt sich

$$A(N, N', D_3) \ll x (\ln x)^{37 + 2D_3 - D_1}. \tag{3.8}$$

Zusammenfassung von (3.3–3.5, 3.8) ergibt für N, N' gemäß (3.2) (nachdem D_2 hinreichend groß gewählt wurde):

Für alle $k \leqq x$ bis auf höchstens $O(x(\ln x)^{37+2D_3-D_1})$ Ausnahmen gilt

$$\psi_2(N',2k)-\psi_2(N,2k)=\sum_{q\leqq(\ln x)^{D_1}}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}c_q(-2k)(N'-N)+O(N(\ln x)^{-D_3}). \tag{3.9}$$

Im Fall $2x \leqq N \leqq x(\ln x)^{D_3}$ argumentiert man ganz analog mit

$$\psi_2(N',2k)-\psi_2(N,2k)=\int_{Q^{-1}}^{1+Q^{-1}}\sum_{N<n_1\leqq N'}\Lambda(n_1)e(n_1\alpha)$$

$$\times\sum_{N-2k\leqq n_2<N'-2k}\Lambda(n_2)e(-n_2\alpha)e(-2k\alpha)d\alpha.$$

Somit ist (3.9) richtig für

$$2x\leqq N<N'\leqq 2N\leqq x^{\frac{8}{5}-\varepsilon}.$$

4. Das Intervall $[2x, x^{\frac{8}{5}-\varepsilon}]$ werde aufgeteilt in $\ll(\ln x)^{D_4+1}$ aneinander anschließende Intervalle $[N_\nu, N_{\nu+1}]$ mit

$$N_{\nu+1}<N_\nu(1+(\ln x)^{-D_4}).$$

Für alle $k\leqq x$ bis auf höchstens $O(x(\ln x)^{38+2D_3+D_4-D_1})$ Ausnahmen und alle ν gilt daher

$$\psi_2(N_\nu,2k)-\psi_2(2x,2k)=\sum_{q\leqq(\ln x)^{D_1}}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}c_q(-2k)(N_\nu-2x)$$

$$+O(N_\nu(\ln x)^{D_4-D_3+1}). \tag{4.1}$$

Für alle Nicht-Ausnahmen k ist wegen

$$\sum_{N_\nu<n\leqq N_{\nu+1}}\Lambda(n)\Lambda(n-2k)\ll N_\nu$$

(4.1) an allen $y\in[2x, x^{\frac{8}{5}-\varepsilon}]$ mit einem Fehler

$$O(y((\ln x)^{D_4-D_3+1}+(\ln x)^{-D_4}))$$

erfüllt.

Mit der Ungleichung

$$|c_q(-2k)|\leqq\frac{\varphi(q)}{\varphi\left(\dfrac{q}{(q,2k)}\right)}$$

erhält man durch einfache elementare Rechnung, daß die Anzahl der $k\leqq x$ mit

$$\left|\sum_{q>(\ln x)^{D_1}}\frac{\mu^2(q)}{\varphi^2(q)}c_q(-2k)\right|>(\ln x)^{-D_5}$$

durch $O(x(\ln x)^{2D_5+1-2D_1})$ abgeschätzt werden kann.

Verwertet man noch das Ergebnis (1.2) von von der Corput-Lavrik, so folgt nach passender Wahl der D_ν die Behauptung des Satzes für alle y im angegebenen Intervall.

Literatur

1. Corput, J.G. van der: Sur l'hypothèse de Goldbach pour presque tous les nombres pairs. Acta Arith. **2**, 266–290 (1937)
2. Hardy, G.H., Littlewood, J.E.: Some problems of "Partitio Numerorum". III: On the expression of a number as a sum of primes. Acta Math. **44**, 1–70 (1923)
3. Jahnke, Th.: Über die Anzahl der Primzahlpaare mit gegebenem Abstand. Dissertation Univ. Freiburg. 1978
4. Lavrik, A.F.: On the twin prime hypothesis of the theory of primes by the method of I.M. Vinogradov. Dokl. Akad. Nauk SSSR **132**, 1013–1015 (1960) = Sov. Math. Dokl. **1**, 700–702 (1960)
5. Montgomery, H.L.: Topics in multiplicative number theory. (Lectures Notes Mathematics 227). Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971
6. Montgomery, H.L., Vaughan, R.C.: The exceptional set in Goldbach's problem. Acta Arith. **27**, 353–370 (1975)
7. Prachar, K.: Primzahlverteilung. Berlin Göttingen Heidelberg: Springer 1957
8. Richert, H.-E.: Lectures on Sieve methods. Bombay: Tata Institute 1976
9. Titchmarsh, E.C.: The theory of the Riemann zeta-function. Oxford: Clarendon 1951
10. Vaughan, R.C.: The Hardy-Littlewood method. Cambridge: University Press 1981

Received July 9, 1987