Math. Ann. 283, 689–700 (1989)

Mathematische Annalen

Thetareihen und modulare Spitzenformen zu den Hilbertschen Modulgruppen reell-quadratischer Körper. II

Carl Friedrich Hermann

Universität Mannheim, Seminargebäude A 5, D-6800 Mannheim, Bundesrepublik Deutschland

Im Buch von van der Geer [6] wird gezeigt, daß aus der Existenz eines effektiven und modularen multikanonischen Divisors auf der Hilbertschen Modulfläche $Y_\gamma(D)$ die Minimalität des Modells $Y_\gamma^0(D)$ folgt. Es wird vermutet, daß ein solcher Divisor immer existiert. Falls γ das Geschlecht von $(\sqrt{D})$ ist, wurde diese Vermutung in [3] für zwei Serien von Diskriminanten $D\equiv 1 \bmod 8$ mit Hilfe von auf $H\times H_-$ definierten Γ_D-Spitzenformen vom Gewicht zwei bewiesen [$\Gamma_D = \mathrm{Sl}_2(\mathfrak{o}_D)$.] Im vorliegenden Artikel untersuchen wir, wann geeignete Produkte der in [3] studierten modularen Thetareihen effektive multikanonische Divisoren auf $Y_-(D)$ liefern. Die Bedingungen, die hierbei auftreten, betreffen die Fourierentwicklungen und Nullstellen dieser Thetareihen und sind für Spitzenformen vom Gewicht zwei automatisch erfüllt.

Wir übernehmen die Notation von [3].

Sei a ein quadratfreier Teiler von D. Dann ist $\Pi^2(D,a)$ (s. [3, 3.6]) eine modulare Γ_D-Spitzenform vom Gewicht 10. Die Hurwitz-Maaß-Erweiterung G_D von Γ_D operiert transitiv auf der Menge $\{\Pi(D,a),\ a|D\}$ [3, Satz. 2.] Deshalb ist die Differentialform $\omega^*(\Pi^2(D,a))$ entweder für alle Teiler von D holomorph auf $Y_-(D)$ oder für keinen. Es kommt aber vor, daß $\omega^*\left(\prod_{a|D}(\Pi^2(D,a)\right)$ holomorph ist, obwohl $\omega^*(\Pi^2(D,a))$ für alle $a|D$ Pole hat. Falls $D\not\equiv 5 \bmod 8$, zerfällt $\Pi(D,a)$ in ein Produkt zweier Modulformen. Für $D\equiv 1 \bmod 8$ bzw. $D\equiv 0 \bmod 4$ sind $\theta^8(D,a)$ bzw. $\Delta_4^2(D,a)$ modulare Spitzenformen vom Gewicht 4, [3, 3.6]. Zwei Teiler a und $\chi^2\dfrac{d}{a}$, wobei χ durch $\chi=2$, falls $(d,a)\equiv(3,2) \bmod 4$ und $\chi=1$ sonst definiert ist, sind als äquivalent anzusehen. Wir setzen $\Pi(D)=\prod_{a|D}(\Pi^2(D,a))$, sowie $\Delta(D)=\prod_{a|D}\Delta_4^2(D,a)$, falls $D\equiv 0 \bmod 4$ und $\theta(D)=\prod_{a|D}\theta^8(D,a)$, falls $D\equiv 1 \bmod 8$, wobei sich die Produkte über je $2^{t(D)-1}$ nicht äquivalente Teiler erstrecken. $\Pi(D)$ ist eine modulare Spitzenform vom Gewicht $5\cdot 2^{t(D)}$, und $\Delta(D)$ bzw. $\theta(D)$ sind modulare Spitzenformen vom Gewicht $2^{t(D)+1}$. [$t(D)$ bezeichnet die Anzahl der Primteiler von D.]

Es gilt

Satz 1. a) *$\omega^*(\Pi(D))$ ist genau dann holomorph auf $Y_-(D)$, wenn D kongruent* 6 mod 9 *ist, und es in $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ keine Zahl der Norm -2 gibt.*

b) $(D \equiv 0 \bmod 4)$

$\omega^*(\Delta(D))$ ist genau dann holomorph auf $Y_-(D)$, wenn es in $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ keine Zahl der Norm $-N$ mit $N \in \{1,2,3\}$ gibt.

c) $(D \equiv 1 \bmod 8)$

$\omega^*(\theta(D))$ ist genau dann holomorph auf $Y_-(D)$, wenn es zu jedem

$$N \in \left\{ \frac{D-k^2}{4n^2} \in \mathbb{N},\ k, n, \in \mathbb{Z},\ k \equiv n \equiv 1 \bmod 2 \right\}$$

einen Primteiler von D gibt, der nicht durch die quadratische Form X^2+4Ny^2 darstellbar ist.

Wir stellen den Beweis von Satz 1 zurück und ziehen zunächst eine Folgerung. Auf $Y_-(D)$ existieren jedenfalls dann effektive und modular multikanonische Divisoren, wenn $Y_-(D) = Y_-^0(D)$ gilt, und D eine der Kongruenzen $D \equiv 6 \bmod 9$, $D \equiv 0 \bmod 4$ oder $D \equiv 1 \bmod 8$ erfüllt.

Beispiele für a) sind $D = 60, 69, 105$. Alle Diskriminanten $D = 4m$, wobei m eine quadratfreie Zahl mit $m \equiv -1 \bmod 24$ ist, genügen beispielsweise der Bedingung b). Für Diskriminanten $D \equiv 1 \bmod 8$ ist die Aussage von Satz 1 komplizierter. Aus $n \equiv 1 \bmod 2$ folgt $N \equiv 0 \bmod 2$, also ist $\omega^*(D)$ jedenfalls dann holomorph, falls D einen Teiler a mit $a \not\equiv 1 \bmod 8$ besitzt in Übereinstimmung mit [3] Satz 6. Weitere Beispiele für c) sind etwa die Diskriminanten $D = 17p$, wobei p eine Primzahl mit $p = a^2 + 8b^2 = c^2 + 16d^2$, $a, b, c, d \in 2\mathbb{Z}+1$ ist. Denn es gibt dann keine ungerade Zahlen k, n mit $\frac{D-k^2}{4n^2} \in \{2,4\}$, aber aus $x^2 + Ny^2 = 17$ und $N \equiv 0 \bmod 2$ folgt $N \in \{2,4\}$. Aus einer modularen Spitzenform $f \in \left[\Gamma_D, \frac{k}{2}, v\right]$, $k \in \mathbb{Z}$, erhält man auf folgende Weise weitere modulare Spitzenformen. Sei $\mathfrak{M} = \alpha\mathfrak{o}_D + \beta\mathfrak{o}_D$ ein ganzes $\mathfrak{o}_D$-Ideal, $\mathfrak{p}$ ein Primideal der Norm p und $\lambda \in \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ eine total-positive Zahl mit $\mathfrak{M}^2 = (\lambda)\mathfrak{p}$. Es gibt Zahlen η, $\xi \in \mathfrak{M}^{-1}$ mit

$$M_{\mathfrak{M}} = \begin{pmatrix} \alpha & \eta \\ \beta & \xi \end{pmatrix} \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Q}(\sqrt{D}))\,.$$

Setze

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} (\sqrt{\lambda})^{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}$$

und

$$T_p(\mathfrak{M}, \lambda, f) = \left(f \underset{\frac{k}{2}}{|} M\Lambda\right) \prod_{j=0}^{p-1} \left(f \underset{\frac{k}{2}}{|} M\Lambda I T^j\right).$$

Direkte Rechnung unter Benutzung der bekannten Tatsache, daß Γ_D von den speziellen Matrizen I und $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathfrak{o}_D$ erzeugt wird, ergibt

$$T_p(\mathfrak{M}, \lambda, f) \in \left[\Gamma_D, k\frac{p+1}{2}, v^*\right]$$

mit einem Γ_D-Charakter v^*. $T_p(\mathfrak{M}, \lambda, f)$ ist genau dann modular, wenn f modular ist. Falls f ein Produkt von Thetareihen der Art [3,(9)] ist, dann ist auch $T_p(\mathfrak{M}, \lambda, f)$ eine Thetareihe. Dies folgt aus [3, Satz 3]. Leider wurde dort ein Term vergessen. Korrigiert und leicht verallgemeinert lautet dieser Satz

Satz 2. *Sei* $\mathfrak{M} = \mathfrak{o}_D\alpha + \mathfrak{o}_D\beta$ *ein (gebrochenes) Ideal in* $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ *und*

$$M_{\mathfrak{M}} = \begin{pmatrix} \alpha & \eta \\ \beta & \xi \end{pmatrix} \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Q}(\sqrt{D}))$$

wobei $\eta, \xi \in \mathfrak{M}^{-1}$. *Für jeden quadratfreien Teiler* a *von* D *gibt es eine Abbildung* $t(a, \mathfrak{M}) : C(\mathfrak{a}_a) \to C(\mathfrak{a}_a\mathfrak{M})$, *so daß für alle* $z \in H \times H_-$ *gilt*

$$(\theta^8(D, a, \mathfrak{o}_D, \mu, \nu) \underset{4}{|} M_{\mathfrak{M}})(z) = (\mathrm{Norm}(\mathfrak{M}))^4 \theta^8(D, \mathfrak{a}_a\mathfrak{M}, t(a, \mathfrak{M})(\mu, \nu))\left(\frac{z}{a}\right).$$

Für $D \equiv 1 \bmod 8$ *gilt* $t(a, \mathfrak{M})(1,1) = (1,1)$ *und für* $D \equiv 0 \bmod 4$

$$t(a, \mathfrak{M})(C_k(\mathfrak{a}_a)) = C_k(\mathfrak{a}_a\mathfrak{M}), \qquad k = 4, 6.$$

Beweis. Wegen $M_{\lambda\mathfrak{M}} = M_{\mathfrak{M}} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ genügt es, Satz 3 für ein zu $\mathfrak{M}$ äquivalentes Ideal zu beweisen. In jeder Klasse gibt es ein Ideal $\mathfrak{J}$ mit den in [3] Satz 3 vorausgesetzten Eigenschaften. Also gibt es Matrizen

$$M \in \mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z}) \quad \text{und} \quad \Omega = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U^{t^{-1}} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_2(\mathbb{Q})$$

mit $\det U = \mathrm{Norm}\,\mathfrak{J}$ und $\phi(a, \mathfrak{o}_D)(M_{\mathfrak{J}}) = M\Omega$. Aus

$$(\theta_m^8 | M\Omega)(Z) = (\theta_m^8 | \Omega)(Z) = (\det U)^4 \theta_m^8(\Omega(Z))$$

folgt dann Satz 3. Der Faktor $(\det U)^4 = (\mathrm{Norm}\,\mathfrak{J})^4$ war in [3] vergessen worden.

Falls $\mathfrak{M}$ ein Hauptideal (α_p) ist, wobei $\alpha_p \in \mathfrak{o}_D$, $\alpha_p \gg 0$ und $N(\alpha_p) = p$, gilt

$$T_p((\alpha_p), \alpha_p, f) = f(\alpha_p z) \prod_{x=0}^{p-1} f\left(\bar{\alpha}_p\left(\frac{z+x}{p}\right)\right).$$

In [3] wurde (in Fall $D \equiv 1 \bmod 8$) ein hinreichendes Kriterium dafür angegeben, daß $\theta(D, a_1) T_2((\alpha_2), \alpha_2, \theta(D, a_2))$ eine Spitzenform vom Gewicht zwei zur vollen Gruppe Γ_D ist. Das verallgemeinern wir nun und setzen dazu voraus, daß $D = u^2 + v^2 = s^2 + pt^2$ gilt (p eine Primzahl), wobei $u, s \in 2\mathbb{N}+1, v \in 4\mathbb{N}, t \in 2\mathbb{N}$, und daß es in $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ eine Einheit $\varepsilon > 0$ negativer Norm gibt. Setze $\gamma_1 = \dfrac{u+\sqrt{D}}{2}$, $\mathfrak{J}_1 = \dfrac{v}{2}\mathbb{Z} + \gamma_1\mathbb{Z}$, $\gamma_p = \dfrac{s+\sqrt{D}}{2}$ und $\mathfrak{J}_p = \dfrac{t}{2}\mathbb{Z} + \gamma_p\mathbb{Z}$. Es gilt $\mathfrak{J}_1^2 = (\gamma_1)$ und $\mathfrak{J}_p^2 = \mathfrak{p}\left(\dfrac{\gamma_p}{p}\right)$ mit einem Primideal $\mathfrak{p}$ der Norm p. Setze $\vartheta(D, p)\,(z) = T_p(\mathfrak{J}_p, -\bar{\varepsilon}\gamma_p, \theta(D, 1)(z)$. Aus Satz 2 folgt (Bezeichnungen wie in [3] S. 332–333)

$$\vartheta(D, p)(z) = \theta(D, 1, \mathfrak{J}_p, 1, 1)\left(\frac{\varepsilon(-\bar{\gamma}_p)z}{(t/2)^2}\right) \prod_{x=0}^{p-1} \theta(D, 1, \bar{\mathfrak{J}}_p, 1, 1)\left(\frac{(-\bar{\varepsilon})\gamma_p(z+x)}{(t/2)^2 p}\right). \tag{1}$$

Die Charakteristik $(1,1) \in \mathfrak{J}_1 \bmod 2\mathfrak{J}_1$ wird durch γ_1 repräsentiert. Falls $\dfrac{t}{2} \equiv 1 \bmod 2$ wird $(1,1) \in \mathfrak{J}_p \bmod 2\mathfrak{J}_p$ durch $\dfrac{t}{2}$ repräsentiert. Dies kommt nur für

$p=2$ vor, und der Charakter der Modulform $\theta(D,1)\vartheta(D,2)$ ist dann nicht trivial. Falls $t\equiv 0 \bmod 4$ wird $(1,1)\in\mathfrak{J}_p \bmod 2\mathfrak{J}_p$ durch γ_p repräsentiert. Das Transformationsverhalten der Thetareihen auf der rechten Seite von (1) unter Translationen $z\mapsto z+\alpha$, $\alpha\in\mathfrak{o}_D$, erhält man leicht durch direkte Rechnung unter Verwendung von [3] Formel (12). Es gilt

$$\theta(D,1)(z+\bar{\varepsilon}\alpha)=(-1)^{S(\alpha)\frac{v}{4}}e^{\frac{\pi i}{4}S(\alpha)}\theta(D,1)(z)$$

und

$$\vartheta(D,p)(z+\bar{\varepsilon}\alpha)=e^{\frac{\pi i}{4}(p+1)S(\alpha)}\vartheta(D,p)(z). \tag{2}$$

Ein Γ_D-Charakter ist genau dann trivial, wenn er auf der Untergruppe

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \alpha\in\mathfrak{o}_D\right\}$$

trivial ist. Aus (2) folgt daher

Satz 3. *Sei D die Diskriminante eines reell-quadratischen Zahlkörpers, dessen sämtliche Teiler kongruent* $1 \bmod 8$ *sind. Dann gibt es Zahlen $u,s\in 2\mathbb{N}+1$ und $v,t\in 2\mathbb{N}$ mit $D=u^2+v^2=s^2+2t^2$ und eine durch diese bestimmte modulare Γ_D-Spitzenform $\theta(D,1)\vartheta(D,2)$ vom Gewicht zwei zu einem Charakter C mit $C^4=1$, der genau dann trivial ist, wenn* $t\equiv 0 \bmod 4$ *und* $v\equiv 4 \bmod 8$ *gilt.*

Die ersten 10 Primzahlen, die die Bedingungen von Satz 3 erfüllen, sind

41, 137, 313, 409, 457, 521, 569, 761, 809, 857.

Ein einfaches Kriterium dafür, wann die zu den modularen Spitzenformen der Art

$$f=\theta(D,1)^r\vartheta(D,p)\in\left[\Gamma_D,\frac{p+1+r}{2},1\right]$$

gehörenden $\frac{p+1+r}{4}$-kanonischen Divisoren effektiv sind, habe ich außer für $(r,p)=(1,2)$ nicht gefunden. Allerdings kann $\mathrm{Div}(\omega^*(f))$ in jedem Einzelfall explizit berechnet werden. (s. dazu die Beispiele weiter unten). Aus Satz 3 und [6, VII 7.12] folgt

Satz 4. *$Y_-^0(D)$ ist minimal, falls $D=u^2+v^2=s^2+2t^2$* wobei $v\equiv 4 \bmod 8$ *und* $t\equiv 0 \bmod 4$.

Beweis von Satz 1. Für modulares $f\in[\Gamma_D,2k]$ gilt

$$\mathrm{Div}(\omega^*(f))=\mathfrak{F}(f)+\mathfrak{S}(f)+\mathfrak{E}(f)$$

mit $\mathfrak{F}(f)=\sum_{N,i}a_N^{(i)}F_N^{(i)}$, $a_N^{(i)}\geqq 0$. Der Index i numeriert hier die verschiedenen Komponenten der Kurve F_N. Der Träger des Divisors $\mathfrak{S}(f)$ setzt sich aus rationalen Kurven, die durch die Auflösung der Spitzen entstehen, zusammen, und der Träger von $\mathfrak{E}(f)$ besteht aus rationalen Kurven, die von der Auflösung der elliptischen Fixpunkte herkommen.

Für $D=5$, 8, 12 sind $\mathrm{Div}(\omega^*(\Pi(D))$ bzw. $\mathrm{Div}(\omega^*(\Delta(D)))$ nicht effektiv. Falls $D>12$ gibt es nur elliptische Fixpunkte der Ordnung 2 oder 3. Ihre Auflösung wird im Buch [6] von van der Geer detailliert beschrieben (Kap. II 3). Falls in der Auflösung eines Fixpunktes nur (-2)-Kurven vorkommen, gibt es keine Fortsetzungsprobleme [6, 3.3]. Sei E eine (-3)-Kurve, die zu einem Fixpunkt e der Ordnung 3 gehört. Jede Modulform $f\in[\Gamma_D, k]$ mit $k\not\equiv 0 \bmod 3$ verschwindet in e. Für alle $a|D$ liegt demnach e auf einer Nullstellenkurve von $\Pi(D,a)$.

Hilfssatz 1. *Zwei irreduzible Nullstellenkurven von $\Pi(D,a)$ schneiden sich im Endlichen nicht.*

Dies folgt aus [3, Satz 4] und einem Resultat von Franke, wonach zwei verschiedene Humbertsche Flächen der Diskriminante 1 auf der Siegelschen Halbebene keinen Schnittpunkt haben [1, 3.3.4]. Im folgenden bezeichne f eine der Modulformen

$$f\in\{\Pi^2(D,a), \Delta_4^2(D,a), \theta^8(D,a)\}.$$

Aus Hilfssatz 1 folgt, daß die Nullstellenkurven von f auf $Y_-(D)$ nicht singulär sind, und daß E genau eine dieser Kurven schneidet. Wir folgern daraus, daß $\omega^*(\Delta(D))$ und $\omega^*(\theta(D))$ über allen elliptischen Fixpunkten holomorph sind, und daß dies für $\omega^*(\Pi(D))$ genau dann gilt, wenn in der Auflösung der Fixpunkte nur (-2)-Kurven vorkommen. Nach [5, 2.1 (7)] ist dies für Diskriminanten $D\equiv 6 \bmod 9$ und nur für diese der Fall.

Wir setzen $\delta(D)=0$, falls es in $\mathfrak{o}_D$ eine Einheit negativer Norm gibt, und $\delta(D)=1$ sonst. Die Hurwitz-Maaß-Erweiterung G_D von Γ_D operiert auf der Menge der Spitzen und zerlegt sie in Orbits mit $h_1(D)=2^{t(D)-1-\delta(D)}$ Elementen. Es gibt $h_1(D)$ Teiler a_j von D und $h_2(D)=h(D)(h_1(D))^{-1}$ ganze Ideale $\mathfrak{J}_i$, so daß die $h(D)$ Ideale $\mathfrak{a}_{a_j}\mathfrak{J}_i$, $j=1,\dots,h_1(D)$, $i=1,\dots,h_2(D)$ alle Idealklassen von $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ repräsentieren. Der Divisor $\mathfrak{S}(f)$ zerfällt in eine Summe

$$\mathfrak{S}(f)=\sum_{j=1}^{h_1(D)}\sum_{i=1}^{h_2(D)}\mathfrak{S}(\mathfrak{a}_{a_j}\mathfrak{J}_i, f). \tag{3}$$

Wegen [3, Satz 2] genügt es, $\mathfrak{S}(\mathfrak{J}_i, f)$ zu berechnen. Mit $B_{i,k}$, $k\in\mathbb{Z}$, seien die Randpunkte der Menge $\{\alpha\in\mathfrak{J}_i^{-2},\ \alpha>0,\ \bar\alpha<0\}$ bezeichnet. Es gilt $\mathfrak{J}_i^{-2}=\mathbb{Z}B_{i,k}+\mathbb{Z}B_{i,k+1}$. Über die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2\pi i z_1 &= B_{i,k-1}\log u_{i,k}+B_{i,k}\log v_{i,k},\\ 2\pi i(-z_2) &= \bar B_{i,k-1}\log u_{i,k}+\bar B_{i,k}\log v_{i,k} \end{aligned} \tag{4}$$

werden Koordinaten $(z_1,-z_2)\in H\times H_-$ in Koordinaten $(u_{i,k}, v_{i,k})$ auf $Y_-(D)$ umgerechnet (s. [4, 2.3] oder [6, Kap. II]).

Die Länge der Kettenbruchentwicklung einer zu $\mathfrak{J}_i^{-2}$ gehörenden reduzierten quadratischen Irrationalzahl sei $2^{-\delta(D)}l_i$ und die Geraden S_{ik} seien durch die Gleichungen $v_{i,k}=u_{i,k+1}=0$ gegeben. Wir setzen

$$\min(D,a,\mu,i,k)=\min\left\{S\left(\frac{g^2B_{i,k}}{a\sqrt{D}}\right),\ g\in\mathfrak{a}_a\mathfrak{J}_i,\ g\equiv\mu \bmod 2\mathfrak{o}_a\mathfrak{J}_i\right\}$$

und $\Omega(i,j)=(\mathfrak{a}_{a_j}\mathfrak{J}_i/2\mathfrak{a}_{a_j}\mathfrak{J}_i)\setminus\{0\}$.

Indem wir (4) in die Fourierentwicklung $(f|M_{\mathfrak{J}_i})(z)$ einsetzen, erhalten wir

$$\mathfrak{S}(\mathfrak{J}_i, f) = \sum_{k=0}^{l_1-1} c(i,k)(f) S_{ik} \tag{5}$$

mit

$$c(i,k)(\Pi^2(D,a)) = \tfrac{1}{2}\Big(\sum_{\mu \in \Omega(i,j)} \min(D,a,\mu,i,k)\Big) - 5\,,$$

$$c(i,k)(\Delta^2(D,a)) = \tfrac{1}{2}(\min(D,a,n,i,k)) - 2$$

und

$$c(i,k)(\theta^8(D,a)) = (\min(D,a,\tilde{1},i,k)) - 2\,,$$

wobei n das in [3, 3.2] eingeführte Element $n \in \Omega(i,j)$ ist, und $\tilde{1}$ den vorderen Teil der Charakteristik $(1,1) \in C(\mathfrak{a}_{a_j}\mathfrak{J}_i)$ bezeichnet.
Sei $\mathfrak{J}$ ein $\mathfrak{o}_D$-Ideal und $\lambda \in \mathfrak{J}^{-2}$ eine Zahl mit $\lambda > 0$ und $\bar{\lambda} < 0$. Nach (5) muß man zur Berechnung von $\mathfrak{S}(f)$ die Minima der Abbildungen

$$Q(a,\mathfrak{J},\lambda) : (\mathfrak{a}_a\mathfrak{J})^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{N}\,,$$

$$g \mapsto S\left(g^2 \frac{\lambda}{a\sqrt{D}}\right)$$

für $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_i$ und $\lambda = B_{ik}$ unter den Nebenbedingungen $g \equiv \mu \bmod 2\mathfrak{a}_a\mathfrak{J}_i$ bestimmen. Zum Beweis von Satz 1 genügt es aber, $Q(a_j, \mathfrak{J}, \lambda)$ für verschiedene Teiler a_j von D zu vergleichen. Zu $Q(a,\mathfrak{J},\lambda)$ gehört nach Wahl einer $\mathbb{Z}$-Basis von $\mathfrak{a}_a\mathfrak{J}$ eine positiv definite quadratische Form der Diskriminante $4N(\lambda)m^2$, wobei $m = \operatorname{Norm}\mathfrak{J}$. Wir setzen o.B.d.A. voraus, daß $\mathfrak{J}$ relativ prim zu $(2D)$ ist. Dann gibt es eine Zahl $\omega(\mathfrak{J}) = \frac{b+\sqrt{D}}{2}$ mit $N(\omega(\mathfrak{J})) \equiv 0 \bmod 2dm^2$ und $\mathfrak{o}_a\mathfrak{J} = \mathbb{Z}am + \mathbb{Z}\omega(\mathfrak{J})$. Setze $Q(a,\mathfrak{J},\lambda)(x,y) = S\left((xam + y\omega)^2 \frac{\lambda}{a\sqrt{D}}\right)$. Die Wahl von $\{am, \omega(\mathfrak{J})\}$ als Basis von $\mathfrak{a}_a\mathfrak{J}$ hat den Vorteil, daß für zwei quadratfreie Teiler a_1 und a_2 von D die Formel

$$Q(a_2,\mathfrak{J},\lambda)\left(\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\,x, \sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\,y\right) = Q(a_1,\mathfrak{J},\lambda)(x,y) \tag{6}$$

gilt. Im folgenden bezeichnen wir die quadratische Form $Q(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2$ auch einfach mit Q oder auch mit $[a,b,c]$ und setzen $(a,b,c) = \operatorname{cont} Q$.

Aus (6) erhält man nach einigen elementaren Rechnungen

Hilfssatz 2. *$Q(a_2,\mathfrak{J},\lambda)$ ist genau dann* $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$*-äquivalent zu $Q(a_1,\mathfrak{J},\lambda)$, wenn es in der Ordnung der Diskriminante*

$$4N(\lambda)m^2(\operatorname{cont} Q(a_1,\mathfrak{J},\lambda), \operatorname{cont} Q(a_2,\mathfrak{J},\lambda))^{-1}$$

von $\mathbb{Q}(\sqrt{N(\lambda)})$ ein Element der Norm $\dfrac{a_1 a_2}{(a_1,a_2)^2}$ gibt.

Der quadratischen Form $Q = [a,b,c]$ ordnen wir die symmetrische Matrix

$$\varphi(Q) = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$$

zu. Die Abbildung

$$\varphi(a,\mathfrak{J}):\mathfrak{J}^{-2}\to M_2(\mathbb{Q}),$$
$$\lambda\mapsto\varphi(Q(a,\mathfrak{J},\lambda))$$

ist ein Homomorphismus von $\mathbb{Z}$-Moduln mit $\varphi(a,\mathfrak{J})(\mathfrak{J}^{-2})\subset M_2(\mathbb{Z})$ (s. auch [3, (12)]). Die Matrix $\varphi(a,\mathfrak{J}_i)(B_{ik})$ is primitiv, weil $\{B_{ik},B_{i,k+1}\}$ eine Basis von $\mathfrak{J}_i^{-2}$ ist. Also gilt $\operatorname{cont}Q(a,\mathfrak{J}_i,B_{ik})\in\{1,2\}$. Zu jeder positiv definiten quadratischen Form Q gibt es bekanntlich eine zu Q äquivalente Form $Q_{\text{red}}=[a,b,c]$ mit 1) $a,c>0$ und 2) $-a<b\leqq a\leqq c$ (s. z.B. [7, 13]). Es gilt

$$\min\{Q(x,y),\ (x,y)\equiv(1,0)\bmod 2\}=a,$$
$$\min\{Q(x,y),\ (x,y)\equiv(0,1)\bmod 2\}=c$$

und

$$\min\{Q(x,y),\ (x,y)\equiv(1,1)\bmod 2\}=a-b+c.$$

Wir kommen nun zurück auf Formel (5) und setzen $Q(a,\mathfrak{J}_i,B_{ik})_{\text{red}}=[r,2s,t]$. Eine einfache Rechnung ergibt $c(i,k)(\Pi^2(D,a))=r-s+t-5$. Also gilt

$$c(i,k)(\Pi^2(D,a))<0$$
$$\Rightarrow Q(a,\mathfrak{J}_i,B_{ik})_{\text{red}}\in\{[1,0,1],[1,0,2],[1,0,3],[2,2,2],[1,0,4],[2,2,3]\}.$$

Falls es in $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ ein Element der Norm -2 gibt, dann auch ein B_{ik} mit $N(B_{ik})=-2$ und $Q(a,\mathfrak{J}_i,B_{ik})_{\text{red}}=[1,0,2]$ für alle $a|D$. Die in Satz 1a) genannten Bedingungen sind also notwendig. Aus $D\equiv 6\bmod 9$ folgt, daß es in $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ kein Element der Norm -1, -3 oder -4 gibt. Es gibt genau zwei $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$-Äquivalenzklassen positiv definiter quadratischer Formen der Determinante 5. Sie werden durch $[1,0,5]$ und $[2,2,3]$ repräsentiert. Sei $B_{ik}\in\mathfrak{J}_i^{-2}$ eine Zahl mit $N(B_{ik})m_i^2=-5$. Weil $x^2+5y^2=3$ keine ganzzahlige Lösung hat, folgt aus Hilfssatz 2, daß $Q(a,\mathfrak{J}_i,B_{ik})$ und $Q\left(\frac{3a}{(3,a)^2},\mathfrak{J}_i,B_{ik}\right)$ nicht äquivalent sind, also ist die Multiplizität von S_{ik} in $\mathfrak{S}(\pi(D))$ gleich 0 und Satz 1a) ist bewiesen.

Der Beweis der Teile b) und c) von Satz 1 erfolgt weitgehend analog. Diskriminanten $D\equiv 0\bmod 4$ haben immer mindestens zwei Teiler. Die Pole von $\omega^*(\Delta_4^2(D,a))$ werden durch Nullstellen von $\omega^*\left(\Delta_4^2\left(D,\frac{2a}{(2,a)^2}\right)\right)$ kompensiert, außer wenn $\operatorname{Norm}(\mathfrak{J}_i^2)N(B_{ik})\in\{-1,-2,-3\}$. Im Fall $D\equiv 1\bmod 8$ ist $\operatorname{Div}(\omega^*(\theta^8(D,a)))$ für kein $a|D$ effektiv. Falls $\omega^*(\theta^8(D,a_j))$, $j=1,2$, eine gemeinsame Polkurve S_{ik} haben, gibt es $M_j\in\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ mit

$$\varphi(D,a_j)(B_{ik})=M_j\begin{pmatrix}1&0\\0&N\end{pmatrix}M_j^t,$$

wobei die Matrizen M_j noch einer Kongruenzbedingung mod 2 genügen müssen, die von der Wahl einer Basis von $\mathfrak{a}_{a_j}\mathfrak{J}_i\bmod 2\mathfrak{a}_{a_j}\mathfrak{J}_i$ abhängt. Aus [3, Satz 4] folgt $N\in\left\{\frac{D-k^2}{4n^2},\ k,n\in\mathbb{Z}\right\}$ und aus Hilfssatz 2 folgt, daß es Zahlen $x,y\in\mathbb{Z}$ gibt mit

$x^2+Ny^2=\frac{a_1a_2}{(a_1,a_2)^2}$. Die oben erwähnte Kongruenzbedingung erzwingt $y\equiv 0 \bmod 2$ und $n\equiv 1 \bmod 2$. Daher ist S_{ik} kein Pol von $\left(\theta^8(D,a)\theta^8\left(D,\frac{ap}{(a,p)^2}\right)\right)$, falls p nicht durch die quadratische Form x^2+4Ny^2 dargestellt wird. Nun sei eine Zahl $N=\frac{D-r^2}{4n^2}$, $N,r,n\in\mathbb{Z}$, $n\equiv 1 \bmod 2$, $r^2<D$ vorgegeben. Setze $\alpha_N=\frac{r+\sqrt{D}}{2}$. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß $\mathfrak{J}:=\mathbb{Z}n+\mathbb{Z}'\alpha_N$ eines der Ideale $\mathfrak{J}_i$, $i\in\{1,\dots,h_2(D)\}$ ist. Setze $\beta_N=\frac{-\alpha_N}{n^2}$. Es gilt

$$\varphi(1,\mathfrak{J}_i)(\beta_N)=M\begin{pmatrix}N&0\\0&1\end{pmatrix}M^t$$

mit $M\in\Gamma_0(2)$ und daher

$$\min\left\{S\left(\frac{g^2\beta_N}{\sqrt{D}}\right),\ g\in\mathfrak{J}_i,\ g\equiv n \bmod 2\mathfrak{J}_i\right\}=1\,.$$

Daraus folgt, daß es ein $k\in\mathbb{Z}$ gibt mit $\beta_N=B_{ik}$ und $c(i,k)(\theta^8(D,1))=-1$. Wenn jeder Teiler von D durch x^2+4Ny^2 darstellbar ist, gilt wegen Hilfssatz 2 $c(i,k)(\theta^8(D,a))=-1$ für alle $a|D$. Also tritt S_{ik} in $\mathrm{Div}(\omega^*(\theta(D))$ mit der Vielfachheit $-2^{t(D)}$ auf.

Ich möchte nun anhand einiger Beispiele illustrieren, wie man

$$\mathrm{Div}(\omega^*(f)),\quad f\in\{\Pi^2(D,a),\ \Delta_4^2(D,a),\ \theta^8(D,a)\}$$

explizit berechnen kann. Zunächst einige allgemeine Bemerkungen. Auf den Nullstellenkurven von f liegt kein Fixpunkt der Ordnung 3 und der zweiten Art, also geben diese Fixpunkte in $\mathfrak{C}(f)$ keinen Beitrag. Sei $v_2(f)$ die Multiplizität, mit der die zum Fixpunkt e der Ordnung 2 gehörende (-2)-Kurve in $\mathfrak{C}(f)$ auftritt. Dann gilt $v_2(f)=0$, falls e nicht auf $\mathfrak{F}(f)$ liegt und (wegen Hilfssatz 1) $v_2(\Pi^2(D,a))=v_2(\Delta_4^2(D,a))=1$, $v_2(\theta^8(D,a))=4$ sonst. Sei E eine (-3)-Kurve, die zu einem Fixpunkt der Ordnung 3 gehört. Dann enthält $\mathfrak{C}(f)$ den Beitrag $v_3(f)E$ mit $v_3(\Pi^2(D,a))=-1$, $v_3(\Delta_4^2(D,a))=0$ und $v_3(\theta^8(D,a))=2$.
Nach [3] Satz 4 ist jede Nullstellenkurve von $\Pi^2(D,a)$ in $\bigcup F_N$, $N\in\left\{\frac{D-k^2}{4m^2}\in\mathbb{N}\right\}$ enthalten. Setze $\alpha_N=\frac{k+\sqrt{D}}{2}$ und $\mathfrak{M}=\mathfrak{o}_Dm+\mathfrak{o}_D\alpha_N$. Die schief-Hermitesche Matrix

$$B_N:=\frac{1}{m}M_{\mathfrak{M}}\begin{pmatrix}0&\bar{\alpha}_N\\-\alpha_N&0\end{pmatrix}\bar{M}_{\mathfrak{M}}t$$

($M_{\mathfrak{M}}$ wie in Satz 2) ist primitiv. Die durch B_N definierte Komponente von F_N sei mit $F_N^{(1)}$ bezeichnet. Aufgrund von Satz 2 verschwindet $\theta(D,a,\mathfrak{o}_D,\mu,v)$ auf $F_N^{(1)}$ genau dann, wenn $\theta(D,a,\mathfrak{M},t(\mu,v))$ auf $\{(\alpha_N,\bar{\alpha}_N)z,\ z\in H\}\subset H\times H_-$ verschwindet.

Mit Hilfe dieses Kriteriums sowie [3, Satz 2] und den Überlegungen von [3], Beweis von Satz 4, kann man $\mathfrak{F}(f)$ leicht berechnen. Man muß dazu nur feststellen, welche der quadratischen Formen $Q\left(a,\mathfrak{M},\frac{\alpha_N}{m^2}\right)$ diagonalisierbar sind.

In unseren Beispielen gibt es in $\mathfrak{o}_D$ nur je ein Idealgeschlecht. Zur Bestimmung von $\mathfrak{S}(f)$ genügt es daher, die Minima der quadratischen Formen $Q(a, \mathfrak{o}_D, B_k)$ wobei

$$\{\alpha \in \mathfrak{o}_D,\ \alpha > 0,\ \bar{\alpha} < 0\} = \ldots + \mathbb{N}B_{-1} + \mathbb{N}B_0 + \mathbb{N}B_1 + \ldots,$$

zu berechnen. Falls die Grundeinheit von $\mathbb{Q}(\sqrt{D})$ positiv ist, gibt es zu jedem a ein $\tilde{a}$, so daß $Q(a, \mathfrak{I}, \lambda)$ äquivalent ist zu $Q(\tilde{a}, \mathfrak{I}, \varepsilon\lambda)$. Deshalb und wegen $Q(a, \mathfrak{I}, \lambda) = Q(a, \bar{\mathfrak{I}}, \bar{\lambda})$ genügt es, $Q(a, \mathfrak{o}_D, B)$ für $k = 0, 1, \ldots, \frac{1}{2}(2^{-\delta(D)}l_- + \mu)$ zu reduzieren ($\mu = 1$, falls $l \equiv 1 \bmod 2$ und $\mu = 2$ sonst. (l_- bezeichnet die Länge des zu $(\sqrt{D})$ gehörenden Zykels). Zur Illustration der einzelnen Rechenschritte behandeln wir das erste Beispiel ziemlich ausführlich.

<u>$D = 28$</u>

$$\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega,\quad \omega = \frac{7+\sqrt{7}}{7} = [[\overline{b_0, \ldots, b_4}]] = [[\overline{2, 2, 3, 3, 2}]],\quad l_- = 10,\quad \delta(28) = 1,$$

$B_{-1} = 1 + \sqrt{7}$, $B_0 = \sqrt{7}$, $B_{k+1} = b_k B_k - B_{k-1}$.

$$Q(a, \mathfrak{o}_{28}, x + y7\bar{\omega}) = \left[\frac{14}{a}x + \frac{42}{a}y,\ 2x,\ -ay\right],\qquad a \in \{1, 2\}.$$

Setze $\varphi(Q(a, \mathfrak{o}_{28}, B_k)) = R(a, k)\varphi(Q(a, \mathfrak{o}_{28}, B_k)_{\mathrm{red}})R(a, k)^t$. Es gilt

k	0	1	2
b_k	2	2	3
B_k	$\sqrt{7}$	$\sqrt{7}-1$	$\sqrt{7}-2$
$Q(1, \mathfrak{o}_{28}, B_k)_{\mathrm{red}}$	$[1, 0, 7]$	$[1, 0, 6]$	$[1, 0, 3]$
$Q(2, \mathfrak{o}_{28}, B_k)_{\mathrm{red}}$	$[2, 2, 4]$	$[2, 0, 3]$	$[2, 2, 2]$
$R(1, k) \bmod 2$	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$
$R(2, k) \bmod 2$	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Die Charakteristik $n \in \mathfrak{a}_a \bmod 2\mathfrak{a}_a$ wird für $a = 1$ durch $n = (1, 0)\begin{pmatrix}7+\sqrt{7}\\ 1\end{pmatrix}$ und für $a = 2$ durch $n = (0, 1)\begin{pmatrix}7+\sqrt{7}\\ 2\end{pmatrix}$ repräsentiert. Daher gilt

$$\min\left\{S\left(g^2\frac{B_k}{\sqrt{D}}\right),\ g \in \mathfrak{o}_{28},\ g \equiv 7 + \sqrt{7} \bmod 2\right\}$$
$$= \min\{r_k x^2 + 2s_k xy + t_k y^2,\ (x, y) \equiv (1, 0)R(1, k) \bmod 2\},$$

wobei $[r_k, 2s_k, t_k] = Q(1, \mathfrak{o}_{28}, B_k)_{\mathrm{red}}$. Mit Hilfe von Formel (5) und der Tabelle errechnet man

$$\mathfrak{S}(\Delta_4^2(28, 1)) = 2S_0 + S_1 - S_3 - S_4 - S_5 - S_6 - S_7 + S_9.$$

Analog dazu findet man

$$\mathfrak{S}(\Delta_4^2(28,2)) = -S_0 - S_1 - S_2 + S_4 + 2S_5 + S_6 - S_8 - S_9.$$

Die Komponenten $F_7^{(1)}$ bzw. $F_3^{(1)}$ seien durch die Bedingungen $\{(B_0, \bar{B}_0)z,\ z \in H\} \subset F_7^{(1)}$ bzw. $\{(B_2, \bar{B}_2)z, z \in H\} \subset F_3^{(1)}$ definiert. Es gilt

$$\mathfrak{F}(\Delta_4^2(28,a)) = 2(F_3^{(a)} + F_7^{(a)}), \qquad a \in \{1,2\}$$

sowie $\mathfrak{F}\left(\frac{\Pi(28,1)}{\Delta_4(28,1)}\right) = \mathfrak{F}\left(\frac{\Pi(28,2)}{\Delta_4(28,2)}\right) = F_6$. Letzteres impliziert

$$\Delta_6 =: \frac{\Pi(28,1)}{\Delta_4(28,1)} \in \mathbb{C}\frac{\Pi(28,2)}{\Delta_4(28,2)}.$$

Man kann $\Delta_6 \in [\tilde{G}_{28}, 3, 1]$ zeigen. Es gilt

$$\operatorname{Div}(\omega^*(\Delta(28))) = 2(F_3 + F_7) + S_0 - S_2 - S_3 + S_5 - S_7 - S_8 + 2E^{(1)} + E^{(2)} + E^{(3)},$$

wobei die $E^{(i)}$ zu den Fixpunkten der Ordnung 2 gehören, die auf F_7 liegen. Weiter gilt

$$\operatorname{Div}(\omega^*(\Delta_6^2)) = 2F_6 + S_0 + S_1 - S_2 - S_3 + S_4 + S_5 + S_6 - S_7 - S_8 + S_9 - E_3^{(1)} - E_3^{(2)},$$

wobei die $E_3^{(i)}$ die zu den beiden Fixpunkten der Ordnung drei und der ersten Art gehörenden (-3)-Kurven sind. Das geometrische Geschlecht von $Y_-(28)$ ist eins. Bis auf einen konstanten Faktor gibt es also genau eine Γ_{28}-Spitzenform vom Gewicht zwei. Sie sei mit Ω bezeichnet.

Satz 5. *Ω ist eine symmetrische Γ_{28}-Spitzenform vom Gewicht zwei mit $\Omega(\varepsilon_0(z)) = \Omega(z)$ und $\mathfrak{F}(\Omega) = F_3$.*

Beweis. Die Einschränkung von Ω auf F_3 liefert $\mathfrak{F}(\Omega) \geqq F_3$. Daraus ergibt sich

$$\mathfrak{F}(T_2(\alpha_2, \Omega)) \geqq F_6, \qquad (\alpha_2 = 9 + \sqrt{7})$$

und wegen $\mathfrak{F}(\Delta_6) = F_6$ sogar $\mathfrak{F}(T_2(\alpha_2, \Omega)) = F_6$, woraus $\mathfrak{F}(\Omega) \leqq F_3$ folgt. Wäre Ω schiefsymmetrisch oder nicht invariant unter $z \mapsto \varepsilon_0 z$, so würde es auf F_6 Nullstellen von Ω geben, was wegen $F_3 \cap F_6 = \emptyset$ nicht möglich ist.

Folgerung. $\operatorname{Div}(\omega^*(\Omega))$ ist ein effektiver und modularer kanonischer Divisor auf $Y_-(28)$.

<u>$D = 60$</u>

$\omega = \dfrac{15 + \sqrt{15}}{15} = [[\overline{2, 2, 2, 3, 2, 2}]]$, $B_{-1} = \sqrt{15}\omega$, $B_0 = \sqrt{15}$. Die zwei Idealklassen in $\mathbb{Q}(\sqrt{60})$ können durch $\mathfrak{o}_{60}$ und $\mathfrak{o}_2$ repräsentiert werden. Dazu gehören zwei Zykel von je zwölf rationalen Kurven S_{ik}, $i \in \{1,2\}$, $k = 0, \dots, 11$. Es gilt $\operatorname{Div}(\omega^*(\Pi(60))) = 4(F_{15} + F_{14}) + 2F_{11} + 8F_6$

$$\sum_{i=1}^{2} (20(S_{i0} + S_{i6}) + 18(S_{i1} + S_{i5} + S_{i7} + S_{i7} + S_{i11}) + 11(S_{i2} + S_{i4} + S_{i8} + S_{i10}) + 4(S_{i3} + S_{i9}))$$

und

$$\operatorname{Div}(\omega^*(\Delta(60)))=4F_{15}+2F_{11}+\sum_{i=1}^{2}(8(S_{i0}+S_{i6})+6(S_{i1}+S_{i5}+S_{i7}+S_{i11})$$
$$+4(S_{i2}+S_{i4}+S_{i8}+S_{i10})\,.$$

In den beiden letzten Beispielen bezeichnen $E^{(i)}$, $i=1,\ldots,4$ (-2)-Kurven, die von Fixpunkten der Ordnung zwei herkommen. Es gilt $E^{(i)}\cdot F_i=1$, $i=1,2$ und $E^{(3)}\cdot F_N=E^{(4)}\cdot F_N=1$ mit $N=5$ im Fall $D=41$ und $N=26$ falls $D=113$. E_3 ist eine (-3)-Kurve mit $E_3\cdot F_1=1$.

$\underline{D=41}$

$$\omega=\frac{7+\sqrt{41}}{2}=[[\overline{7,4,2,3,2,2,2,2,3,2,4}]],\ B_{-1}=\varepsilon_0\omega,\ B_0=\varepsilon_0\,.$$

$$\operatorname{Div}(\omega^*(\Pi(41)))=2(F_1+F_2+F_4+F_8+F_{10})-3S_0-2(S_1+S_{10})-2(S_2+S_9)$$
$$+4(S_4+S_7)+6(S_5+S_6)-E_3+E^{(1)}+E^{(2)}+E^{(3)}+E^{(4)}\,,$$
$$\operatorname{Div}(\omega^*(\theta(41)))=8(F_1+F_2)+S_1+S_{10}-(S_3+S_8+S_4+S_7+S_5+S_6)$$
$$+2E_3+4(E^{(1)}+E^{(2)})\,,$$
$$\operatorname{Div}(\omega^*(\theta(41,1)\vartheta(41,2)))=4F_1+2F_2+F_4+E_3+2E^{(1)}+E^{(2)}\,.$$

$\underline{D=113}$

$$\omega=\frac{11+\sqrt{113}}{2}=[[\overline{11,6,2,4,2,2,2,3,\underbrace{2,\ldots,2}_{8\times},3,2,2,2,4,2,6}]]\,,$$
$$B_{-1}=\varepsilon_0\omega,\ B_0=\varepsilon_0\,,$$

$$\operatorname{Div}(\omega^*(\theta(113)))=8(F_1+F_2+F_4+F_7)+S_1+S_{22}+6(S_2+S_{21})$$
$$+3(S_3+S_{20})+2(S_4+S_{19})$$
$$+(S_5+S_{18})-(S_7+S_{16}+S_8+S_{15}+S_9+S_{14}+S_{10}+S_{13}+S_{11}+S_{12})$$
$$+2(E_3+E_3^{(2)}+E_3^{(3)})+4(E^{(1)}+E^{(2)})\,.$$
$$\operatorname{Div}(\omega^*(\theta(113,1)\vartheta(113,2))^2)=8F_1+8F_2+4F_4+2F_7$$
$$+2F_8+2F_{14}+S_1+S_{22}+2(S_2+S_{21})$$
$$+(S_3+S_{20})+2(S_4+S_{19})+3(S_5+S_{18})+2(S_6+S_{17})+S_7+S_{16}$$
$$+S_8+S_{15}+S_9+S_{14}+S_{10}+S_{13}+S_{11}+S_{12}+2E_3\,.$$
$$\operatorname{Div}(\omega^*(\vartheta(113,7)))=8F_1+2F_7+F_{14}+F_{28}+F_{49}-(S_1+S_{22})$$
$$-(S_3+S_{20})+S_5+S_{18}+S_6+S_{17}+S_7+S_{16}+3(S_8+S_{15})$$
$$+4(S_9+S_{14})+5(S_{10}+S_{13})+6(S_{11}+S_{12})+2E_3+4E^{(1)}\,.$$

Die Summe der beiden 2-kanonischen modularen Divisoren $\operatorname{Div}(\omega^*(\theta(113)))$ und $\operatorname{Div}(\omega^*(\vartheta(113,7)))$ ist effektiv.

Literatur

1. Franke, H.G.: Kurven in Hilbertschen Modulflächen und Humbertsche Flächen im Siegelraum. Bonn. Math. Schr. **104** (1978)
2. Hausmann, W.: Kurven auf Hilbertschen Modulflächen. Bonn. Math. Schr. **123** (1980)
3. Hermann, C.F.: Thetareihen und modulare Spitzenformen zu den Hilbertschen Modulgruppen reell-quadratischer Körper. Math. Ann. **277**, 327–344 (1987)
4. Hirzebruch, F.: Hilbert modular surfaces. L'Enseignement Math. **19**, 183–281 (1973)
5. Hirzebruch, F., Zagier, D.: Classification of Hilbert modular surfaces. In: Complex analysis and algebraic geometry, pp. 43–77, Iwanami Shoten – Cambridge: University Press 1977
6. Van der Geer, G.: Hilbert modular surfaces. Berlin Heidelberg New York: Springer 1987
7. Zaiger, D.B.: Zetafunktionen und quadratische Körper. Berlin Heidelberg New York: Springer 1981

Eingegangen am 11. November 1987; revidiert am 21. März 1988 und 31. August 1988