

Werk

Titel: Analysis

Jahr: 1866

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN235999628

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235999628>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235999628>

LOG Id: LOG_0008

LOG Titel: Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse

LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235957348

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235957348>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235957348>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

DEMONSTRATIO NOVA ALTERA
THEOREMATIS
OMNEM FUNCTIONEM ALGEBRAICAM
RATIONALEM INTEGRAM

UNIUS VARIABILIS
IN FACTORES REALES PRIMI VEL SECUNDI GRADUS
RESOLVI POSSE

AUCTORE
CAROLO FRIDERICO GAUSS

SOCIETATI REGIAE SCIENTIARUM TRADITA 1815. DEC. 7.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. III.
Gottingae MDCCCXVI.

DEMONSTRATIO NOVA ALTERA THEOREMATIS
 OMNEM FUNCTIONEM ALGEBRAICAM RATIONALEM INTEGRAM
 UNIUS VARIABILIS

IN FACTORES REALES PRIMI VEL SECUNDI GRADUS RESOLVI POSSE.

1.

Quamquam demonstratio theorematis de resolutione functionum algebraicarum integrarum in factores, quam in commentatione sedecim abhinc annis promulgata tradidi, tum respectu rigoris tum simplicitatis nihil desiderandum relinquere videatur, tamen haud ingratum fore geometris spero, si iterum ad eandem quaestionem gravissimam revertar, atque e principiis prorsus diversis demonstrationem alteram haud minus rigorosam adstruere coner. Pendet scilicet illa demonstratio prior, partim saltem, a considerationibus geometricis: contra ea, quam hic exponere aggredior, principiis mere analyticis innixa erit. Methodorum analyticarum, per quas usque ad illud quidem tempus alii geometrae theorema nostrum demonstrare susceperunt, insigniores loco citato recensui, et quibus vitiis laborent copiose exposui. Quorum gravissimum ac vere radicale omnibus illis conatibus, perinde ac recentioribus, qui quidem mihi innotuerunt, commune: quod tamen neutiquam inevitabile videri in demonstratione analytica, iam tunc declaravi. Esto iam penes peritos iudicium, an fides olim data per has novas curas plene sit liberata.

2.

Disquisitioni principali quaedam praeliminares praemittentur, tum ne quid deesse videatur, tum quod ipsa fors tractatio iis quoque, quae ab aliis iam de-

libata fuerant, novam qualemcunque lucem affundere poterit. Ac primo quidem de altissimo divisore communi duarum functionum algebraicarum integrarum unius indeterminatae agemus. Ubi praemonendum, hic semper tantum de functionibus integris sermonem esse: e qualibus duabus si productum conflatur, utraque huius *divisor* vocatur. Divisoris *ordo* ex exponente summae potestatis indeterminatae quam continet diiudicatur, nulla prorsus coefficientium numericorum ratione habita. Ceterum quae ad divisores communes functionum pertinent, eo brevius absolvere licet, quod iis, quae ad divisores communes numerorum spectant, omnino sunt analoga.

Propositis duabus functionibus Y, Y' indeterminatae x , quarum prior sit ordinis altioris aut saltem non inferioris quam posterior, formabimus aequationes sequentes

$$\begin{aligned} Y &= q Y' + Y'' \\ Y' &= q' Y'' + Y''' \\ Y'' &= q'' Y''' + Y^{(4)} \\ &\text{etc. usque ad} \\ Y^{(\mu-1)} &= q^{(\mu-1)} Y^{(\mu)} \end{aligned}$$

ea scilicet lege, ut primo Y dividatur sueto more per Y' ; dein Y' per residuum primae divisionis Y'' , quod erit ordinis inferioris quam Y' ; tunc rursus residuum primum per secundum Y''' et sic porro, donec ad divisionem absque residuo perveniatur, quod tandem necessario evenire debere inde patet, quod ordo functionum Y', Y'', Y''' etc. continuo decrescit. Quas functiones perinde atque quotientes q, q', q'' etc. esse functiones *integras* ipsius x , vix opus est monere. His praemissis, manifestum est,

I. regrediendo ab ultima istarum aequationum ad primam, functionem $Y^{(\mu)}$ esse divisorem singularum praecedentium, adeoque certo divisorem communem propositarum Y, Y' .

II. Progrediendo a prima aequatione ad ultimam, elucet, quemlibet divisorem communem functionum Y, Y' etiam metiri singulas sequentes, et proin etiam ultimam $Y^{(\mu)}$. Quamobrem functiones Y, Y' habere nequeunt ullum divisorem communem altioris ordinis quam $Y^{(\mu)}$, omnisque divisor communis eiusdem ordinis ut $Y^{(\mu)}$ erit ad hunc in ratione numeri ad numerum, unde hic ipse pro divisore communi summo erit habendus.

III. Si $Y^{(\mu)}$ est ordinis 0, i. e. numerus, nulla functio indeterminatae x proprie sic dicta ipsas Y, Y' metiri potest: in hoc itaque casu dicendum est, has functiones divisorem communem non habere.

IV. Excerptamus ex aequationibus nostris penultimam; dein ex hac eliminemus $Y^{(\mu-1)}$ adiumento aequationis antepenultimae; tunc iterum eliminemus $Y^{(\mu-2)}$ adiumento aequationis praecedentis et sic porro: hoc pacto habebimus

$$\begin{aligned} Y^{(\mu)} &= +k Y^{(\mu-2)} - k' Y^{(\mu-1)} \\ &= -k' Y^{(\mu-3)} + k'' Y^{(\mu-2)} \\ &= +k'' Y^{(\mu-4)} - k''' Y^{(\mu-3)} \\ &= -k''' Y^{(\mu-5)} + k'''' Y^{(\mu-4)} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

si functiones k, k', k'' etc. ex lege sequente formatas supponamus

$$\begin{aligned} k &= 1 \\ k' &= q^{(\mu-2)} \\ k'' &= q^{(\mu-3)} k' + k \\ k''' &= q^{(\mu-4)} k'' + k' \\ k'''' &= q^{(\mu-5)} k''' + k'' \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Erit itaque

$$\pm k^{(\mu-2)} Y \mp k^{(\mu-1)} Y' = Y^{(\mu)}$$

valentibus signis superioribus pro μ pari, inferioribus pro impari. In eo itaque casu, ubi Y et Y' divisorem communem non habent, invenire licet hoc modo duas functiones Z, Z' indeterminatae x tales, ut habeatur

$$ZY + Z'Y' = 1$$

V. Haec propositio manifesto etiam inversa valet, puta, si satisfieri potest aequationi

$$ZY + Z'Y' = 1$$

ita, ut Z, Z' sint functiones integrae indeterminatae x , ipsae Y et Y' certo divisorem communem habere nequeunt.

3.

Disquisitio praeliminaris altera circa transformationem functionum symmetricarum versabitur. Sint a, b, c etc. quantitates indeterminatae, ipsarum multitudo m , designemusque per λ' illarum summam, per λ'' summam productorum e binis, per λ''' summam productorum e ternis etc., ita ut ex evolutione producti

$$(x-a)(x-b)(x-c)\dots$$

oriatur

$$x^m - \lambda' x^{m-1} + \lambda'' x^{m-2} - \lambda''' x^{m-3} + \text{etc.}$$

Ipsae itaque $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ etc. sunt functiones symmetricae indeterminatarum a, b, c etc., i. e. tales, in quibus hae indeterminatae eodem modo occurrunt, sive clarius, tales, quae per qualemcunque harum indeterminatarum inter se permutationem non mutantur. Manifesto generalius, quaelibet functio integra ipsarum $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ etc. (sive has solas indeterminatas implicet, sive adhuc alias ab a, b, c etc. independentes contineat) erit functio symmetrica integra indeterminatarum a, b, c etc.

4.

Theorema inversum paullo minus obvium. Sit ρ functio symmetrica indeterminatarum a, b, c etc., quae igitur composita erit e certo numero terminorum formae

$$Ma^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\dots$$

denotantibus α, β, γ etc. integros non negativos, atque M coefficientem vel determinatum vel saltem ab a, b, c etc. non pendentem (si forte aliae adhuc indeterminatae praeter a, b, c etc. functionem ρ ingrediantur). Ante omnia inter singulos hos terminos ordinem certum stabiliemus, ad quem finem primo ipsas indeterminatas a, b, c etc. ordine certo per se quidem prorsus arbitrario disponemus, e. g. ita, ut a primum locum obtineat, b secundum, c tertium etc. Dein e duobus terminis

$$Ma^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\dots \text{ et } Ma^{\alpha'}b^{\beta'}c^{\gamma'}\dots$$

priori ordinem altiore tribuamus quam posteriori, si fit

$$\text{vel } \alpha > \alpha', \text{ vel } \alpha = \alpha' \text{ et } \beta > \beta', \text{ vel } \alpha = \alpha', \beta = \beta' \text{ et } \gamma > \gamma', \text{ vel etc.}$$

i. e. si e differentiis $\alpha - \alpha', \bar{\alpha} - \bar{\alpha}', \gamma - \gamma'$ etc. prima, quae non evanescit, positiva evadit. Quocirca quum termini eiusdem ordinis non differant nisi respectu coëfficientis M , adeoque in terminum unum conflari possint, singulos terminos functionis ρ ad ordines diversos pertinere supponemus.

Iam observamus, si $Ma^{\alpha}b^{\bar{\alpha}}c^{\gamma} \dots$ sit ex omnibus terminis functionis ρ is, cui ordo altissimus competat, necessario α esse maiorem, vel saltem non minorem, quam $\bar{\alpha}$. Si enim esset $\bar{\alpha} > \alpha$, terminus $Ma^{\bar{\alpha}}b^{\alpha}c^{\gamma} \dots$, quem functio ρ , utpote symmetrica, quoque involvet, foret ordinis altioris quam $Ma^{\alpha}b^{\bar{\alpha}}c^{\gamma} \dots$ contra hyp. Simili modo $\bar{\alpha}$ erit maior vel saltem non minor quam γ ; porro γ non minor quam exponens sequens δ etc.: proin singulae differentiae $\alpha - \bar{\alpha}$, $\bar{\alpha} - \gamma$, $\gamma - \delta$ etc. erunt integri non negativi.

Secundo perpendamus, si e quocunque functionibus integris indeterminatarum a, b, c etc. productum conflatur, huius terminum altissimum necessario esse ipsum productum e terminis altissimis illorum factorum. Aequè manifestum est, terminos altissimos functionum $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ etc. resp. esse a, ab, abc etc. Hinc colligitur, terminum altissimum e producto

$$p = M\lambda'^{\alpha-\bar{\alpha}}\lambda''^{\bar{\alpha}-\gamma}\lambda'''^{\gamma-\delta} \dots$$

prodeuntem esse $Ma^{\alpha}b^{\bar{\alpha}}c^{\gamma} \dots$; quocirca statuendo $\rho - p = \rho'$, terminus altissimus functionis ρ' certo erit ordinis inferioris quam terminus altissimus functionis ρ . Manifesto autem p , et proin etiam ρ' , fiunt functiones integrae symmetricae ipsarum a, b, c etc. Quamobrem ρ' perinde tractata, ut antea ρ , discerpatur in $p' + p''$, ita ut p' sit productum e potestatibus ipsarum $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ etc. in coëfficientem vel determinatum vel saltem ab a, b, c etc. non pendentem, p'' vero functio integra symmetrica ipsarum a, b, c etc. talis, ut ipsius terminus altissimus pertineat ad ordinem inferiorem, quam terminus altissimus functionis ρ' . Eodem modo continuando, manifesto tandem ρ ad formam $p + p' + p'' + p'''$ etc. redacta, i. e. in functionem integram ipsarum $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ etc. transformata erit.

5.

Theorema in art. praec. demonstratum etiam sequenti modo enunciare possumus: Proposita functione quacunque indeterminatarum a, b, c etc. integra symmetrica ρ , assignari potest functio integra totidem aliarum indeterminatarum l', l'', l''' etc. talis, quae per substitutiones $l' = \lambda', l'' = \lambda'', l''' = \lambda'''$ etc. transeat

in ρ . Facile insuper ostenditur, *hoc unico tantum modo fieri posse*. Supponamus enim, e duabus functionibus diversis indeterminatarum l', l'', l''' etc. puta tum ex r , tum ex r' post substitutiones $l' = \lambda', l'' = \lambda'', l''' = \lambda'''$ etc. resultare eandem functionem ipsarum a, b, c etc. Tunc itaque $r - r'$ erit functio ipsarum l', l'', l''' etc. per se non evanescens, sed quae identice destruitur post illas substitutiones. Hoc vero absurdum esse, facile perspicimus, si perpendamus, $r - r'$ necessario compositam esse e certo numero partium formae

$$M l'^{\alpha} l''^{\beta} l'''^{\gamma} \dots$$

quarum coëfficientes M non evanescant, et quae singulae respectu exponentium inter se diversae sint, adeoque terminos altissimos e singulis istis partibus prodeuntes exhiberi per

$$M a^{\alpha+\beta+\gamma+\text{etc.}} b^{\beta+\gamma+\text{etc.}} c^{\gamma+\text{etc.}} \dots$$

et proin ad ordines diversos referendos esse, ita ut terminus absolute altissimus nullo modo destrui possit.

Ceterum ipse calculus pro huiusmodi transformationibus pluribus compendiis insigniter abbreviari posset, quibus tamen hoc loco non immoramur, quum ad propositum nostrum sola transformationis possibilitas iam sufficiat.

6.

Consideremus productum ex $m(m-1)$ factoribus

$$\begin{aligned} & (a-b)(a-c)(a-d) \dots \\ & \times (b-a)(b-c)(b-d) \dots \\ & \times (c-a)(c-b)(c-d) \dots \\ & \times (d-a)(d-b)(d-c) \dots \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

quod per π denotabimus, et, quum indeterminatas a, b, c etc. symmetricè involvat, in formam functionis ipsarum $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ etc. redactum supponemus. Trans-eat haec functio in p , si loco ipsarum $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ etc. resp. substituuntur l', l'', l''' etc. His ita factis, ipsam p vocabimus *determinantem* functionis

$$y = x^m - l' x^{m-1} + l'' x^{m-2} - l''' x^{m-3} + \text{etc.}$$

Ita e. g. pro $m = 2$ habemus

$$p = -l'^2 + 4l''$$

Perinde pro $m = 3$ invenitur

$$p = -l'^2 l''^2 + 4l'^3 l''' + 4l''^3 - 18l'l''l''' + 27l'''^2$$

Determinans functionis y itaque est functio coefficientium l', l'', l''' etc. talis, quae per substitutiones $l' = \lambda', l'' = \lambda'', l''' = \lambda'''$ etc. transit in productum ex omnibus differentiis inter binas quantitatum a, b, c etc. In casu eo, ubi $m = 1$, i. e. ubi unica tantum indeterminata a habetur, adeoque nullae omnino adsunt differentiae, ipsum numerum 1 tamquam determinantem functionis y adoptare conveniet.

In stabilienda notione determinantis, coefficientes functionis y tamquam quantitates indeterminatas spectare oportuit. Determinans functionis cum coefficientibus determinatis

$$Y = x^m - L'x^{m-1} + L''x^{m-2} - L'''x^{m-3} + \text{etc.}$$

erit numerus determinatus P , puta valor functionis p pro $l' = L', l'' = L'', l''' = L'''$ etc. Quodsi itaque supponimus, Y resolvi posse in factores simplices

$$Y = (x - A)(x - B)(x - C) \dots$$

sive Y oriri ex

$$v = (x - a)(x - b)(x - c) \dots$$

statuendo $a = A, b = B, c = C$ etc., adeoque per easdem substitutiones $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ etc. resp. fieri L', L'', L''' etc., manifesto P aequalis erit producto e factoribus

$$\begin{aligned} & (A - B)(A - C)(A - D) \dots \\ & \times (B - A)(B - C)(B - D) \dots \\ & \times (C - A)(C - B)(C - D) \dots \\ & \times (D - A)(D - B)(D - C) \dots \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

Patet itaque, si fiat $P = 0$, inter quantitates A, B, C etc. duas saltem aequales reperiri debere; contra, si non fuerit $P = 0$, cunctas A, B, C etc. necessario inaequales esse. Iam observamus, si statuamus $\frac{dY}{dx} = Y'$, sive

$$Y' = mx^{m-1} - (m-1)L'x^{m-2} + (m-2)L''x^{m-3} - (m-3)L'''x^{m-4} + \text{etc.}$$

haberi

$$\begin{aligned} Y' = & (x-B)(x-C)(x-D) \dots \\ & + (x-A)(x-C)(x-D) \dots \\ & + (x-A)(x-B)(x-D) \dots \\ & + (x-A)(x-B)(x-C) \dots \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

Si itaque duae quantitatum A, B, C etc. aequales sunt, e. g. $A = B$, Y' per $x-A$ divisibilis erit, sive Y et Y' implicabunt divisorem communem $x-A$. Vice versa, si Y' cum Y ullum divisorem communem habere supponitur, necessario Y' aliquem factorem simplicem ex his $x-A, x-B, x-C$ etc. implicare debebit, e. g. primum $x-A$, quod manifesto fieri nequit, nisi A alicui reliquarum B, C, D etc. aequalis fuerit. Ex his omnibus itaque colligimus duo

THEOREMATA:

- I. Si determinans functionis Y fit $= 0$, certo Y cum Y' divisorem communem habet, adeoque, si Y et Y' divisorem communem non habent, determinans functionis Y nequit esse $= 0$.
- II. Si determinans functionis Y non est $= 0$, certo Y et Y' divisorem communem habere nequeunt; vel, si Y et Y' divisorem communem habent, necessario determinans functionis Y esse debet $= 0$.

7.

At probe notandum est, totam vim huius demonstrationis simplicissimae inniti suppositioni, functionem Y in factores simplices resolvi posse: quae ipsa suppositio, hocce quidem loco, ubi de demonstratione generali huius resolubilitatis agitur, nihil esset nisi petitio principii. Et tamen a paralogismis huic prorsus similibus non sibi caverunt omnes, qui demonstrationes analyticas theorematis principalis tentaverunt, cuius speciosae illusionis originem iam in ipsa disquisitionis enunciatione animadvertimus, quum omnes in *formam* tantum radicum aequationum inquisiverint, dum *existentiam* temere suppositam demonstrare oportuisset. Sed de tali procedendi modo, qui nimis a rigore et claritate abhorret, satis iam in commentatione supra citata dictum est. Quamobrem iam theoremata art. praec.,

quorum altero saltem ad propositum nostrum non possumus carere, solidiori fundamento superstruemus: a secundo, tamquam faciliori initium faciemus.

8.

Denotemus per ρ functionem

$$\begin{aligned} & \frac{\pi(x-b)(x-c)(x-d) \dots}{(a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2 \dots} \\ & + \frac{\pi(x-a)(x-c)(x-d) \dots}{(b-a)^2(b-c)^2(b-d)^2 \dots} \\ & + \frac{\pi(x-a)(x-b)(x-d) \dots}{(c-a)^2(c-b)^2(c-d)^2 \dots} \\ & + \frac{\pi(x-a)(x-b)(x-c) \dots}{(d-a)^2(d-b)^2(d-c)^2 \dots} \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

quae, quoniam π per singulos denominatores est divisibilis, fit functio integra indeterminatarum x, a, b, c etc. Statuamus porro $\frac{dv}{dx} = v'$, ita ut habeatur

$$\begin{aligned} v' &= (x-b)(x-c)(x-d) \dots \\ & + (x-a)(x-c)(x-d) \dots \\ & + (x-a)(x-b)(x-d) \dots \\ & + (x-a)(x-b)(x-c) \dots \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

Manifesto pro $x = a$, fit $\rho v' = \pi$, unde concludimus, functionem $\pi - \rho v'$ indefinite divisibilem esse per $x - a$, et perinde per $x - b, x - c$ etc., nec non per productum v . Statuendo itaque

$$\frac{\pi - \rho v'}{v} = \sigma$$

erit σ functio integra indeterminatarum x, a, b, c etc., et quidem, perinde ut ρ , symmetrica ratione indeterminatarum a, b, c etc. Erui poterunt itaque functiones duae integrae r, s , indeterminatarum x, l', l'', l''' etc., tales quae per substitutiones $l' = \lambda', l'' = \lambda'', l''' = \lambda'''$ etc. transeant in ρ, σ resp. Quodsi itaque analogiam sequentes, functionem

$$mx^{m-1} - (m-1)l'x^{m-2} + (m-2)l''x^{m-3} - (m-3)l'''x^{m-4} + \text{etc.}$$

i. e. quotientem differentialem $\frac{dy}{dx}$ per y' denotemus, ita ut y' per easdem illas

substitutiones transeat in v' , patet, $p - sy - ry'$ per easdem substitutiones transire in $\pi - \sigma v - \rho v'$, i. e. in 0, adeoque necessario iam per se identice evanescere debere (art. 5): habemus proin aequationem identicam

$$p = sy + ry'$$

Hinc si supponamus, ex substitutione $l' = L'$, $l'' = L''$, $l''' = L'''$ etc. prodire $r = R$, $s = S$, erit etiam identice

$$P = SY + RY'$$

ubi quum S, R sint functionis integrae ipsius x , P vero quantitas determinata seu numerus, sponte patet, Y et Y' divisorem communem habere non posse, nisi fuerit $P = 0$. Quod est ipsum theorema posterius art. 6.

9.

Demonstrationem theorematism prioris ita absolvemus, ut ostendamus, in casu eo, ubi Y et Y' non habent divisorem communem, certo fieri non posse $P = 0$. Ad hunc finem primo, per praecepta art. 2 erutas supponimus duas functiones integras indeterminatae x , puta fx et φx , tales, ut habeatur aequatio identica

$$fx.Y + \varphi x.Y' = 1$$

quam hic ita exhibemus:

$$fx.v + \varphi x.v' = 1 + fx.(v - Y) + \varphi x.\frac{d(v - Y)}{dx}$$

sive, quoniam habemus

$$v' = (x - b)(x - c)(x - d) \dots \\ + (x - a) \cdot \frac{d[(x - b)(x - c)(x - d) \dots]}{dx}$$

in forma sequente:

$$\varphi x.(x - b)(x - c)(x - d) \dots \\ + \varphi x.(x - a) \cdot \frac{d[(x - b)(x - c)(x - d) \dots]}{dx} \\ + fx.(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) \dots = 1 + fx.(v - Y) + \varphi x.\frac{d(v - Y)}{dx}$$

Exprimamus brevitatism caussa

$$fx.(y - Y) + \varphi x.\frac{d(y - Y)}{dx}$$

quae est functio integra indeterminatarum x, l', l'', l''' etc.

per $F(x, l', l'', l'''$ etc.)

unde erit identice

$$1 + f x \cdot (v - Y) + \varphi x \cdot \frac{d(v - Y)}{dx} = 1 + F(x, l', l'', l''' \text{ etc.})$$

Habebimus itaque aequationes identicas [1]

$$\begin{aligned} \varphi a \cdot (a - b)(a - c)(a - d) \dots &= 1 + F(a, l', l'', l''' \text{ etc.}) \\ \varphi b \cdot (b - a)(b - c)(b - d) \dots &= 1 + F(b, l', l'', l''' \text{ etc.}) \\ \varphi c \cdot (c - a)(c - b)(c - d) \dots &= 1 + F(c, l', l'', l''' \text{ etc.}) \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

Supponendo itaque, productum ex omnibus

$$\begin{aligned} 1 + F(a, l', l'', l''' \text{ etc.}) \\ 1 + F(b, l', l'', l''' \text{ etc.}) \\ 1 + F(c, l', l'', l''' \text{ etc.}) \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

quod erit functio integra indeterminatarum a, b, c etc., l', l'', l''' etc. et quidem functio symmetrica respectu ipsarum a, b, c etc., exhiberi per

$$\psi(l', l'', l''' \text{ etc.}, l', l'', l''' \text{ etc.})$$

e multiplicatione cunctarum aequationum [1] resultabit aequatio identica nova [2]

$$\pi \varphi a \cdot \varphi b \cdot \varphi c \dots = \psi(l', l'', l''' \text{ etc.}, l', l'', l''' \text{ etc.})$$

Porro patet, quum productum $\varphi a \cdot \varphi b \cdot \varphi c \dots$ indeterminatas a, b, c etc. symmetrice involvat, inveniri posse functionem integram indeterminatarum l', l'', l''' etc. talem, quae per substitutiones $l' = \lambda', l'' = \lambda'', l''' = \lambda'''$ etc. transeat in $\varphi a \cdot \varphi b \cdot \varphi c \dots$. Sit t illa functio, eritque etiam identice [3]

$$pt = \psi(l', l'', l''' \text{ etc.}, l', l'', l''')$$

quoniam haec aequatio per substitutiones $l' = \lambda', l'' = \lambda'', l''' = \lambda'''$ etc. in identicam [2] transit.

Iam ex ipsa definitione functionis F sequitur, identice haberi

$$F(x, L', L'', L''' \text{ etc.}) = 0$$

Hinc etiam identice erit

$$\begin{aligned} 1 + F(a, L', L'', L''' \text{ etc.}) &= 1 \\ 1 + F(b, L', L'', L''' \text{ etc.}) &= 1 \\ 1 + F(c, L', L'', L''' \text{ etc.}) &= 1 \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

et proin erit etiam identice

$$\phi(\lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.}, L', L'', L''' \text{ etc.}) = 1$$

adeoque etiam identice [4]

$$\phi(l', l'', l''' \text{ etc.}, L', L'', L''' \text{ etc.}) = 1$$

Quamobrem e combinatione aequationum [3] et [4], et substituendo $l' = L'$, $l'' = L''$, $l''' = L'''$ etc. habebimus [5]

$$PT = 1$$

si per T denotamus valorem functionis t illis substitutionibus respondentem. Qui valor quum necessario fiat quantitas finita, P certo nequit esse $= 0$. Q. E. D.

10.

E praecedentibus iam perspicuum est, quamlibet functionem integram Y unius indeterminatae x , cuius determinans sit $= 0$, decomponi posse in factores, quorum nullus habeat determinantem 0 . Investigato enim divisore communi altissimo functionum Y et $\frac{dY}{dx}$, illa iam in duos factores resoluta habebitur. Si quis horum factorum *) iterum habet determinantem 0 , eodem modo in duos factores resolvitur, eodemque pacto continuabimus, donec Y in factores tales tandem resoluta habeatur, quorum nullus habeat determinantem 0 .

Facile porro perspicietur, inter hos factores, in quos Y resolvitur, ad mi-

*) Revera quidem non nisi factor iste, qui est ille divisor communis, determinantem 0 habere potest. Sed demonstratio huius propositionis hocce loco in quasdam ambages perduceret; neque etiam hic necessaria est, quum factorem alterum, si et huius determinans evanescere posset, eodem modo tractare, ipsumque in factoresolvere liceret.

nimum unum reperiri debere ita comparatum. ut inter factores numeri, qui eius ordinem exprimit, binarius saltem non pluries occurrat, quam inter factores numeri m , qui exprimit ordinem functionis Y : puta, si statuatur $m = k \cdot 2^\mu$, denotante k numerum imparem, inter factores functionis Y ad minimum unus reperietur ad ordinem $k' \cdot 2^\nu$ referendus, ita ut etiam k' sit impar, atque vel $\nu = \mu$, vel $\nu < \mu$. Veritas huius assertionis sponte sequitur inde, quod m est aggregatum numerorum, qui ordinem singulorum factorum ipsius Y exprimunt.

11.

Antequam ulterius progrediamur, expressionem quandam explicabimus, cuius introductio in omnibus de functionibus symmetricis disquisitionibus maximam utilitatem affert, et quae nobis quoque peropportuna erit. Supponamus, M esse functionem quarundam ex indeterminatis a, b, c etc., et quidem sit μ multitudo earum, quae in expressionem M ingrediuntur, nullo respectu habito aliarum indeterminatarum, si quas forte implicet ipsa M . Permutatis illis μ indeterminatis omnibus quibus fieri potest modis tum inter se tum cum $m - \mu$ reliquis ex a, b, c etc., orientur ex M aliae expressiones ipsi M similes, ita ut omnino habeantur

$$m(m-1)(m-2)(m-3) \dots (m-\mu+1)$$

expressiones, ipsa M inclusa, quarum complexum simpliciter dicemus *complexum omnium* M . Hinc sponte patet, quid significet aggregatum omnium M , productum ex omnibus M etc. Ita e. g. π dicetur productum ex omnibus $a - b$, ν productum ex omnibus $x - a$, ν' aggregatum omnium $\frac{\nu}{x-a}$ etc.

Si forte M est functio symmetrica respectu quarundam ex μ indeterminatis, quas continet, istarum permutationes inter se functionem M non variant, quamobrem in complexu omnium M quilibet terminus pluries, et quidem $1.2.3 \dots \nu$ vicibus reperietur, si ν est multitudo indeterminatarum, quarum respectu M est symmetrica. Si vero M non solum respectu ν indeterminatarum symmetrica est, sed insuper respectu ν' aliarum, nec non respectu ν'' aliarum etc., ipsa M non variabitur, sive binae e primis ν indeterminatis inter se permutentur, sive binae e secundis ν' , sive binae e tertiis ν'' etc., ita ut semper

$$1.2.3 \dots \nu. \quad 1.2.3 \dots \nu'. \quad 1.2.3 \dots \nu'' \text{ etc.}$$

permutationes terminis identicis respondeant. Quare si ex his terminis identicis semper unicum tantum retineamus, omnino habebimus

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3) \dots (m-\mu+1)}{1.2.3 \dots \nu. 1.2.3 \dots \nu'. 1.2.3 \dots \nu'' \text{ etc.}}$$

terminos, quorum complexum dicemus *complexum omnium M exclusis repetitionibus*, ut a *complexu omnium M admissis repetitionibus* distinguatur. Quoties nihil expressis verbis monitum fuerit, repetitiones admitti semper subintelligemus.

Ceterum facile perspicietur, aggregatum omnium *M*, vel productum ex omnibus *M*, vel generaliter quamlibet functionem symmetricam omnium *M* semper fieri functionem symmetricam indeterminatarum *a, b, c* etc., sive admittantur repetitiones, sive excludantur.

12.

Iam considerabimus, denotantibus *u, x* indeterminatas, productum ex omnibus $u - (a+b)x + ab$, exclusis repetitionibus, quod per ζ designabimus. Erit itaque ζ productum ex $\frac{1}{2}m(m-1)$ factoribus his

$$\begin{aligned} &u - (a+b)x + ab \\ &u - (a+c)x + ac \\ &u - (a+d)x + ad \\ &\text{etc.} \\ &u - (b+c)x + bc \\ &u - (b+d)x + bd \\ &\text{etc.} \\ &u - (c+d)x + cd \\ &\text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Quae functio quum indeterminatas *a, b, c* etc. symmetrice implicet, assignari poterit functio integra indeterminatarum *u, x, l', l'', l'''* etc., per *z* denotanda, quae transeat in ζ , si loco indeterminatarum *l', l'', l'''* etc. substituantur $\lambda', \lambda'', \lambda'''$ etc. Denique designemus per *Z* functionem solarum indeterminatarum *u, x*, in quam *z* transit, si indeterminatis *l', l'', l'''* etc. tribuamus valores determinatos *L', L'', L'''* etc.

Hae tres functiones ζ, z, Z considerari possunt tamquam functiones integre ordinis $\frac{1}{2}m(m-1)$ indeterminatae *u* cum coefficientibus indeterminatis, qui

quidem coëfficientes erunt

pro ζ , functiones indeterminatarum x, a, b, c etc.
 pro z , functiones indeterminatarum x, l', l'', l''' etc.
 pro Z , functiones solius indeterminatae x .

Singuli vero coëfficientes ipsius z transibunt in coëfficientes ipsius ζ per substitutiones $l' = \lambda', l'' = \lambda'', l''' = \lambda'''$ etc. nec non in coëfficientes ipsius Z per substitutiones $l' = L', l'' = L'', l''' = L'''$ etc. Eadem, quae modo de coëfficientibus diximus, etiam de determinantibus functionum ζ, z, Z valebunt. Atque in hos ipsos iam propius inquiremus, et quidem eum in finem, ut demonstretur

THEOREMA. *Quoties non est $P = 0$, determinans functionis Z certo nequit esse identice $= 0$.*

13.

Perfacilis quidem esset demonstratio huius theorematis. si supponere liceret, Y resolvi posse in factores simplices

$$(x - A)(x - B)(x - C)(x - D) \dots$$

Tunc enim certum quoque esset, Z esse productum ex omnibus $u - (A + B)x + AB$, atque determinantem functionis Z productum e differentiis inter binas quantitatum

$$\begin{aligned} &(A + B)x - AB \\ &(A + C)x - AC \\ &(A + D)x - AD \\ &\text{etc.} \\ &(B + C)x - BC \\ &(B + D)x - BD \\ &\text{etc.} \\ &(C + D)x - CD \\ &\text{etc. etc} \end{aligned}$$

Hoc vero productum identice evanescere nequit, nisi aliquis factorum per se identice fiat $= 0$, unde sequeretur, duas quantitatum A, B, C etc. aequales esse, adeoque determinantem P functionis Y fieri $= 0$, contra hyp.

At seposita tali argumentatione, quam ad instar art. 6 a petitione principii proficisci manifestum est, statim ad demonstrationem stabilem theorematis art. 12 explicandam progredimur.

14.

Determinans functionis ζ erit productum ex omnibus differentiis inter binas $(a+b)x-ab$, quarum differentiarum multitudo est

$$\frac{1}{2}m(m-1)(\frac{1}{2}m(m-1)-1) = \frac{1}{4}(m+1)m(m-1)(m-2)$$

Hic numerus itaque indicat ordinem determinantis functionis ζ respectu indeterminatae x . Determinans functionis z quidem ad eundem ordinem pertinebit: contra determinans functionis Z utique ad ordinem inferiorem pertinere potest, quoties scilicet quidam coëfficientes inde ab altissima potestate ipsius x evanescent. Nostrum iam est demonstrare, in determinante functionis Z omnes certo coëfficientes evanescere non posse.

Propius considerando differentias illas, quarum productum est determinans functionis ζ , deprehendemus, partem ex ipsis (puta differentias inter binas $(a+b)x-ab$ tales, quae elementum commune habent) suppeditare

$$\text{productum ex omnibus } (a-b)(x-c)$$

e reliquis vero (puta e differentiis inter binas $(a+b)x-ab$ tales, quarum elementa diversa sunt) oriri

$$\text{productum ex omnibus } (a+b-c-d)x-ab+cd, \text{ exclusis repetitionibus.}$$

Productum prius factorem unumquemque $a-b$ manifesto $m-2$ vicibus continebit, quemvis factorem $x-c$ autem $(m-1)(m-2)$ vicibus, unde facile concludimus, hocce productum fieri

$$= \pi^{m-2} \circ^{(m-1)(m-2)}$$

Quodsi ita productum posterius per ρ designamus, determinans functionis ζ erit

$$= \pi^{m-2} \circ^{(m-1)(m-2)} \rho$$

Denotando porro per r functionem indeterminatarum x, l', l'', l''' etc. eam, quae transit in ρ per substitutiones $l' = \lambda', l'' = \lambda'', l''' = \lambda'''$ etc., nec non per R

functionem solius x , eam, in quam transit r per substitutiones $l' = L'$, $l'' = L''$, $l''' = L'''$ etc., patet determinantem functionis z fieri

$$= p^{m-2} y^{(m-1)(m-2)} r$$

determinantem functionis Z autem

$$= P^{m-2} Y^{(m-1)(m-2)} R$$

Quare quum per hypothesin P non sit $= 0$, res iam in eo vertitur, ut demonstramus, R certo identice evanescere non posse.

15.

Ad hunc finem adhuc aliam indeterminatam w introducemus, atque productum ex omnibus

$$(a + b - c - d)w + (a - c)(a - d)$$

exclusis repetitionibus considerabimus, quod quum ipsas a, b, c etc. symmetrice involvat, tamquam functio integra indeterminatarum $w, \lambda', \lambda'', \lambda'''$ etc. exhiberi poterit. Denotabimus hanc functionem per $f(w, \lambda', \lambda'', \lambda'''$ etc.). Multitudo illorum factorum $(a + b - c - d)w + (a - c)(a - d)$ erit

$$= \frac{1}{2} m(m-1)(m-2)(m-3)$$

unde facile colligimus, fieri

$$f(0, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.}) = \pi^{(m-2)(m-3)}$$

et proin etiam

$$f(0, l', l'', l''' \text{ etc.}) = p^{(m-2)(m-3)}$$

nec non

$$f(0, L', L'', L''' \text{ etc.}) = P^{(m-2)(m-3)}$$

Functio $f(w, L', L'', L'''$ etc.) generaliter quidem loquendo ad ordinem

$$\frac{1}{2} m(m-1)(m-2)(m-3)$$

referenda erit: at in casibus specialibus utique ad ordinem inferiorem pertinere potest, si forte contingat, ut quidam coëfficientes inde ab altissima potestate ipsius w evanescant: impossibile autem est, ut illa functio tota sit identice $= 0$, quum

aequatio modo inventa doceat, functionis saltem terminum ultimum non evanescere. Supponemus, terminum altissimum functionis $f(w, L', L'', L''' \text{ etc.})$, qui quidem coëfficientem non evanescentem habeat, esse Nw^γ . Si igitur substituimus $w = x - a$, patet, $f(x - a, L', L'', L''' \text{ etc.})$ esse functionem integram indeterminatarum x, a , sive quod idem est, functionem ipsius x cum coëfficientibus ab indeterminata a pendentibus, ita tamen ut terminus altissimus sit Nx^γ , et proin coëfficientem determinatum ab a non pendentem habeat, qui non sit $= 0$. Perinde $f(x - b, L', L'', L''' \text{ etc.})$, $f(x - c, L', L'', L''' \text{ etc.})$ erunt functiones integrae indeterminatae x , tales ut singularum terminus altissimus sit Nx^γ , terminorum sequentium autem coëfficientes resp. a b, c etc. pendeant. Hinc productum ex m factoribus

$$\begin{aligned} &f(x - a, L', L'', L''' \text{ etc.}) \\ &f(x - b, L', L'', L''' \text{ etc.}) \\ &f(x - c, L', L'', L''' \text{ etc.}) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

erit functio integra ipsius x , cuius terminus altissimus erit $N^m x^{m\gamma}$, dum terminorum sequentium coëfficientes pendent ab indeterminatis a, b, c etc.

Consideremus iam porro productum ex m factoribus his

$$\begin{aligned} &f(x - a, l', l'', l''' \text{ etc.}) \\ &f(x - b, l', l'', l''' \text{ etc.}) \\ &f(x - c, l', l'', l''' \text{ etc.}) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

quod quum sit functio indeterminatarum, x, a, b, c etc., l', l'', l''' etc., et quidem symmetrica respectu ipsarum a, b, c etc., exhiberi poterit tamquam functio indeterminatarum $x, \lambda', \lambda'', \lambda'''$ etc. l', l'', l''' etc. per

$$\varphi(x, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.}, l', l'', l''' \text{ etc.})$$

denotanda. Erit itaque

$$\varphi(x, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.}, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.})$$

productum ex factoribus

$$\begin{aligned} &f(x - a, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.}) \\ &f(x - b, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.}) \\ &f(x - c, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.}) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

et proin indefinite divisibilis per ρ , quum facile perspiciatur, quemlibet factorem ipsius ρ in aliquo illorum factorum implicari. Statuemus itaque

$$\varphi(x, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.}, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.}) = \rho \psi(x, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.})$$

ubi characteristicam ψ functionem integram exhibebit. Hinc vero facile deducitur, etiam identice esse

$$\varphi(x, L', L'', L''' \text{ etc.}, L', L'', L''' \text{ etc.}) = R \psi(x, L', L'', L''' \text{ etc.})$$

Sed supra demonstravimus, productum e factoribus

$$f(x-a, L', L'', L''' \text{ etc.})$$

$$f(x-b, L', L'', L''' \text{ etc.})$$

$$f(x-c, L', L'', L''' \text{ etc.})$$

etc.

quod erit $= \varphi(x, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.}, L', L'', L''' \text{ etc.})$ habere terminum altissimum $N^m x^{m'}$; eundem proin terminum altissimum habebit functio $\varphi(x, L', L'', L''' \text{ etc.}, L', L'', L''' \text{ etc.})$ adeoque certo non est identice $= 0$. Quocirca etiam R nequit esse identice $= 0$, neque adeo etiam determinans functionis Z . Q. E. D.

16.

THEOREMA. Denotet $\varphi(u, x)^*$ productum ex quocunque factoribus talibus, in quos indeterminatae u, x lineariter tantum ingrediuntur, sive qui sint formae

$$\alpha + \beta u + \gamma x$$

$$\alpha' + \beta' u + \gamma' x$$

$$\alpha'' + \beta'' u + \gamma'' x$$

etc.

sit porro w alia indeterminata. Tunc functio

$$\varphi(u + w \cdot \frac{d\varphi(u, x)}{dx}, x - w \cdot \frac{d\varphi(u, x)}{du}) = \Omega$$

indefinite erit divisibilis per $\varphi(u, x)$.

*) Vel nobis non monentibus quisque videbit, signa in art. praec. introducta restringi ad istum solum articulum, et proin significationem characterum φ, w praesentem non esse confundendam cum pristina.

Dem. Statuendo

$$\begin{aligned}\varphi(u, x) &= (\alpha + \delta u + \gamma x) Q \\ &= (\alpha' + \delta' u + \gamma' x) Q' \\ &= (\alpha'' + \delta'' u + \gamma'' x) Q'' \\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

erunt Q, Q', Q'' etc. functiones integrae indeterminatarum $u, x, \alpha, \delta, \gamma, \alpha', \delta', \gamma', \alpha'', \delta'', \gamma''$ etc. atque

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi(u, x)}{dx} &= \gamma Q + (\alpha + \delta u + \gamma x) \cdot \frac{dQ}{dx} \\ &= \gamma' Q' + (\alpha' + \delta' u + \gamma' x) \cdot \frac{dQ'}{dx} \\ &= \gamma'' Q'' + (\alpha'' + \delta'' u + \gamma'' x) \cdot \frac{dQ''}{dx} \\ &\text{etc.} \\ \frac{d\varphi(u, x)}{du} &= \delta Q + (\alpha + \delta u + \gamma x) \cdot \frac{dQ}{du} \\ &= \delta' Q' + (\alpha' + \delta' u + \gamma' x) \cdot \frac{dQ'}{du} \\ &= \delta'' Q'' + (\alpha'' + \delta'' u + \gamma'' x) \cdot \frac{dQ''}{du} \\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

Substitutis hisce valoribus in factoribus, e quibus conflatur productum Ω , puta in

$$\begin{aligned}&\alpha + \delta u + \gamma x + \delta w \cdot \frac{d\varphi(u, x)}{dx} - \gamma w \cdot \frac{d\varphi(u, x)}{du} \\ &\alpha' + \delta' u + \gamma' x + \delta' w \cdot \frac{d\varphi(u, x)}{dx} - \gamma' w \cdot \frac{d\varphi(u, x)}{du} \\ &\alpha'' + \delta'' u + \gamma'' x + \delta'' w \cdot \frac{d\varphi(u, x)}{dx} - \gamma'' w \cdot \frac{d\varphi(u, x)}{du} \\ &\text{etc. resp.}\end{aligned}$$

hi obtinent valores sequentes

$$\begin{aligned}&(\alpha + \delta u + \gamma x) (1 + \delta w \cdot \frac{dQ}{dx} - \gamma w \cdot \frac{dQ}{du}) \\ &(\alpha' + \delta' u + \gamma' x) (1 + \delta' w \cdot \frac{dQ'}{dx} - \gamma' w \cdot \frac{dQ'}{du}) \\ &(\alpha'' + \delta'' u + \gamma'' x) (1 + \delta'' w \cdot \frac{dQ''}{dx} - \gamma'' w \cdot \frac{dQ''}{du}) \\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

quapropter Ω erit productum ex $\varphi(u, x)$ in factores

$$\begin{aligned} 1 + \bar{\epsilon} w \cdot \frac{dQ}{dx} - \gamma w \cdot \frac{dQ}{du} \\ 1 + \bar{\epsilon}' w \cdot \frac{dQ'}{dx} - \gamma' w \cdot \frac{dQ'}{du} \\ 1 + \bar{\epsilon}'' w \cdot \frac{dQ''}{dx} - \gamma'' w \cdot \frac{dQ''}{du} \end{aligned}$$

etc. i. e. ex $\varphi(u, x)$ in functionem integram indeterminatarum $u, x, w, \alpha, \bar{\epsilon}, \gamma, \alpha', \bar{\epsilon}', \gamma', \alpha'', \bar{\epsilon}'', \gamma''$ etc. Q. E. D.

17.

Theorema art. praec. manifesto applicabile est ad functionem ζ , quam abhinc per

$$f(u, x, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.})$$

exhiberi supponemus, ita ut

$$f(u + w \cdot \frac{d\zeta}{dx}, x - w \cdot \frac{d\zeta}{du}, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.})$$

indefinite divisibilis evadat per ζ : quotientem, qui erit functio integra indeterminatarum u, x, w, a, b, c etc., symmetrica respectu ipsarum a, b, c etc., exhibebimus per

$$\psi(u, x, w, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.})$$

Hinc concludimus, fieri etiam identice

$$f(u + w \cdot \frac{dz}{dx}, x - w \cdot \frac{dz}{du}, l', l'', l''' \text{ etc.}) = z\psi(u, x, w, l', l'', l''' \text{ etc.})$$

nec non

$$f(u + w \cdot \frac{dZ}{dx}, x - w \cdot \frac{dZ}{du}, L', L'', L''' \text{ etc.}) = Z\psi(u, x, w, L', L'', L''' \text{ etc.})$$

Quodsi itaque functionem Z simpliciter exhibemus per $F(u, x)$, ita ut habeatur

$$f(u, x, L', L'', L''' \text{ etc.}) = F(u, x)$$

erit identice

$$F(u + w \cdot \frac{dZ}{dx}, x - w \cdot \frac{dZ}{du}) = Z\psi(u, x, w, L', L'', L''' \text{ etc.})$$

18.

Si itaque e valoribus determinatis ipsarum u, x , puta ex $u = U, x = X$, prodire supponimus

$$\frac{dZ}{dx} = X', \quad \frac{dZ}{du} = U'$$

erit identice

$$F(U + wX', X - wU') = F(U, X) \cdot \phi(U, X, w, L', L'', L''' \text{ etc.})$$

Quoties U' non evanescit, statuere licebit

$$w = \frac{X - x}{U'}$$

unde emergit

$$F(U + \frac{XX'}{U'} - \frac{X'x}{U'}, x) = F(U, X) \cdot \phi(U, X, \frac{X-x}{U'}, L', L'', L''' \text{ etc.})$$

quod etiam ita enunciare licet:

Si in functione Z statuitur $u = U + \frac{XX'}{U'} - \frac{X'x}{U'}$, transibit ea in

$$F(U, X) \cdot \phi(U, X, \frac{X-x}{U'}, L', L'', L''' \text{ etc.})$$

19.

Quum in casu eo, ubi non est $P = 0$, determinans functionis Z sit functio indeterminatae x per se non evanescens, manifesto multitudo valorum determinantum ipsius x , per quos hic determinans valorem 0 nancisci potest, erit numerus finitus, ita ut infinite multi valores determinati ipsius x assignari possint, qui determinanti illi valorem a 0 diversum concilient. Sit X talis valor ipsius x (quem insuper *realem* supponere licet). Erit itaque determinans functionis $F(u, X)$ non $= 0$, unde sequitur, per theorema II. art. 6, functiones

$$F(u, X) \quad \text{et} \quad \frac{dF(u, X)}{du}$$

habere non posse divisorem ullum communem. Supponamus porro, exstare aliquem valorem determinatum ipsius u , puta U (sive realis sit, sive imaginarius i. e. sub forma $g + h\sqrt{-1}$ contentus), qui reddat $F(u, X) = 0$, i. e. esse $F(U, X) = 0$. Erit itaque $u - U$ factor indefinitus functionis $F(u, X)$, et proin functio $\frac{dF(u, X)}{du}$ certo per $u - U$ non divisibilis. Supponendo itaque, hanc functionem

$\frac{dF(u, X)}{du}$ nancisci valorem U' , si statuatur $u = U$, certo esse nequit $U' = 0$. Manifesto autem U' erit valor quotientis differentialis partialis $\frac{dZ}{du}$ pro $u = U$, $x = X$: quodsi itaque insuper pro iisdem valoribus ipsarum u, x valorem quotientis differentialis partialis $\frac{dZ}{dx}$ per X' denotemus, perspicuum est per ea quae in art. praec. demonstrata sunt, functionem Z per substitutionem

$$u = U + \frac{XX'}{U'} - \frac{X'x}{U'}$$

identice evanescere, adeoque per factorem

$$u + \frac{X'}{U'}x - (U + \frac{XX'}{U'})$$

indefinite esse divisibilem. Quocirca statuendo $u = xx$, patet, $F(xx, x)$ divisibilem esse per

$$xx + \frac{X'}{U'}x - (U + \frac{XX'}{U'})$$

adeoque obtinere valorem 0, si pro x accipiatur radix aequationis

$$xx + \frac{X'}{U'}x - (U + \frac{XX'}{U'}) = 0$$

i. e. si statuatur

$$x = \frac{-X' \pm \sqrt{(4UU'U' + 4XX'U' + X'X')}}{2U'}$$

quos valores vel reales esse vel sub forma $g + h\sqrt{-1}$ contentos constat.

Facile iam demonstratur, per eosdem valores ipsius x etiam functionem Y evanescere debere. Manifesto enim $f(xx, x, \lambda', \lambda'', \lambda''' \text{ etc.})$ est productum ex omnibus $(x - a)(x - b)$ exclusis repetitionibus, et proin $= y^{m-1}$. Hinc sponte sequitur

$$\begin{aligned} f(xx, x, l', l'', l''' \text{ etc.}) &= y^{m-1} \\ f(xx, x, L', L'', L''' \text{ etc.}) &= Y^{m-1} \end{aligned}$$

sive $F(xx, x) = Y^{m-1}$, cuius itaque valor determinatus evanescere nequit, nisi simul evanescat valor ipsius Y .

20.

Adiumento disquisitionum praecedentium reducta est *solutio* aequationis $Y = 0$, i. e. inventio valoris determinati ipsius x , vel realis vel sub forma $g + h\sqrt{-1}$ contenti, qui illi satisfaciat, ad solutionem aequationis $F(u, X) = 0$,

siquidem determinans functionis Y non fuerit $= 0$. Observare convenit, si omnes coëfficientes in Y , i. e. numeri L', L'', L''' etc. sint quantitates reales, etiam omnes coëfficientes in $F(u, X)$ reales fieri, siquidem, quod licet, pro X quantitas realis accepta fuerit. Ordo aequationis secundariae $F(u, X) = 0$ exprimitur per numerum $\frac{1}{2}m(m-1)$: quoties igitur m est numerus par formae $2^\mu k$ denotante k indefinite numerum imparem, ordo aequationis secundariae exprimitur per numerum formae $2^{\mu-1}k$.

In casu eo, ubi determinans functionis Y fit $= 0$, assignari poterit per art. 10 functio alia $\mathfrak{Y}$ ipsam metiens, cuius determinans non sit $= 0$, et cuius ordo exprimat per numerum formae $2^\nu k$, ita ut sit vel $\nu < \mu$, vel $\nu = \mu$. Quaelibet solutio aequationis $\mathfrak{Y} = 0$ etiam satisfaciet aequationi $Y = 0$: solutio aequationis $\mathfrak{Y} = 0$ iterum reducetur ad solutionem alius aequationis, cuius ordo exprimetur per numerum formae $2^{\nu-1}k$.

Ex his itaque colligimus, generaliter solutionem cuiusvis aequationis, cuius ordo exprimat per numerum parem formae $2^\mu k$, reduci posse ad solutionem alius aequationis, cuius ordo exprimat per numerum formae $2^{\mu'} k$, ita ut sit $\mu' < \mu$. Quoties hic numerus etiamnum par est, i. e. μ' non $= 0$, eadem methodus denuo applicabitur, atque ita continuabimus, donec ad aequationem perveniamus, cuius ordo exprimat per numerum imparem; et huius aequationis coëfficientes omnes erunt reales, siquidem omnes coëfficientes aequationis primitivae reales fuerunt. Talem vero aequationem ordinis imparis certo solubilem esse constat, et quidem per radicem realem, unde singulae quoque aequationes antecedentes solubiles erunt, sive per radices reales sive per radices formae $g + h\sqrt{-1}$.

Evictum est itaque, functionem quamlibet Y formae $x^m - L'x^{m-1} + L''x^{m-2} -$ etc., ubi L', L'' etc. sunt quantitates determinatae reales, involvere factorem indefinitum $x - A$, ubi A sit quantitas vel realis vel sub forma $g + h\sqrt{-1}$ contenta. In casu posteriori facile perspicitur, Y nancisci valorem 0 etiam per substitutionem $x = g - h\sqrt{-1}$, adeoque etiam divisibilem esse per $x - (g - h\sqrt{-1})$, et proin etiam per productum $xx - 2gx + gg + hh$. Quaelibet itaque functio Y certo factorem indefinitum realem primi vel secundi ordinis implicat, et quum idem iterum de quotiente valeat, manifestum est, Y in factores reales primi vel secundi ordinis resolvi posse. Quod demonstrare erat propositum huius commentationis.
