Werk

Titel: Analysis

Jahr: 1866

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN235999628

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN235999628|LOG_0014

OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235999628

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1816 März 2.

Nachdem die in diesen Anzeigen vom v. J. angezeigte Vorlesung des Herrn Prof. GAUSS bereits abgedruckt war, hatte derselbe bei fortgesetzter Beschäftigung mit demselben Gegenstande das Glück, dasselbe Ziel noch auf einem ganz neuen Wege zu erreichen. Er hat hierüber am 30. Januar der königl. Societät eine kleine Abhandlung eingereicht, die die Aufschrift führt:

Theorematis de resolubilitate functionum algebraicarum integrarum in factores reales demonstratio tertia.

Die beiden frühern Beweise des wichtigsten Lehrsatzes in der Lehre von den Gleichungen unterschieden sich dadurch, dass der erstere sehr kurz und einfach, aber zum Theil auf geometrische Betrachtungen gegründet war, der andere hingegen rein analytisch aber viel complicirter, so dass es unmöglich wurde, in dem engen Raume dieser Blätter einen genügenden Auszug daraus zu geben. Dagegen ist nun der gegenwärtige dritte auf gänzlich verschiedenen Principien beruhende Beweis ebenfalls rein analytisch, übertrifft aber selbst den ersten so sehr an Einfachheit und Kürze, dass wir hier ganz füglich alles Wesentliche desselben auf wenigen Seiten mittheilen können.

Es bezeichne X die algebraische Function der unbestimmten Grösse x,

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \text{u.s.w.}$$

wo die Coëfficienten A, B, C u. s. w. bestimmte reelle Grössen sind. Es seien ferner r und φ zwei neue unbestimmte Grössen, und man setze

$$r^m \cos m\varphi + Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi + Br^{m-2}\cos(m-2)\varphi + Cr^{m-3}\cos(m-3)\varphi + \text{u. s. w.} = t$$
$$r^m \sin m\varphi + Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi + Br^{m-2}\sin(m-2)\varphi + Cr^{m-3}\sin(m-3)\varphi + \text{u. s. w.} = u$$

$$mr^m \cos m\varphi + (m-1)Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi + (m-2)Br^{m-2}\cos(m-2)\varphi + (m-3)Cr^{m-3}\cos(m-3)\varphi + \text{u.s.w.} = t'$$
$$mr^m \sin m\varphi + (m-1)Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi + (m-2)Br^{m-2}\sin(m-2)\varphi + (m-3)Cr^{m-3}\sin(m-3)\varphi + \text{u.s.w.} = u'$$

$$mmr^m \cos m\varphi + (m-1)^2Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi + (m-2)^2Br^{m-2}\cos(m-2)\varphi + (m-3)^2Cr^{m-3}\cos(m-3)\varphi + \text{u.s.w.} = t''$$
$$mmr^m \sin m\varphi + (m-1)^2Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi + (m-2)^2Br^{m-2}\sin(m-2)\varphi + (m-3)^2Cr^{m-3}\sin(m-3)\varphi + \text{u.s.w.} = u''$$

$$\frac{(tt+uu)(tt''+uu'')+(tu'-ut')^2-(tt'+uu')^2}{r(tt+uu)^2} = y$$

Der Factor r kann offenbar aus dem Nenner des Ausdrucks für y weggeschafft werden, da t', u', t'', u'' durch r theilbar sind.

Es sei ferner R eine beliebige bestimmte positive Grösse, mit der einzigen Einschränkung, dass sie grösser sei als die grösste von folgenden

$$mA\sqrt{2},\quad \sqrt{(mB\sqrt{2})},\quad \sqrt[3]{(mC\sqrt{2})},\quad \sqrt[4]{(mD\sqrt{2})} \text{ etc.}$$

abgesehen von dem Zeichen von A, B, C u. s. w., oder indem man alle als positiv betrachtet.

Endlich mögen noch folgende Bezeichnungen Statt finden:

$$R^m \cos 45^0 + AR^{m-1}\cos(45^0+\varphi) + BR^{m-2}\cos(45^0+2\varphi) + CR^{m-3}\cos(45^0+3\varphi) + \text{u. s. w.} = T$$
$$R^m \sin 45^0 + AR^{m-1}\sin(45^0+\varphi) + BR^{m-2}\sin(45^0+2\varphi) + CR^{m-3}\sin(45^0+3\varphi) + \text{u. s. w.} = U$$

$$mR^m \cos 45^0 + (m-1)AR^{m-1}\cos(45^0+\varphi) + (m-2)BR^{m-2}\cos(45^0+2\varphi) + (m-3)CR^{m-3}\cos(45^0+3\varphi) + \text{u.s.w.} = T'$$
$$mR^m \sin 45^0 + (m-1)AR^{m-1}\sin(45^0+\varphi) + (m-2)BR^{m-2}\sin(45^0+2\varphi) + (m-3)CR^{m-3}\sin(45^0+3\varphi) + \text{u.s.w.} = U'$$

Nach allen diesen Vorbereitungen, welche wir der bequemern Uebersicht wegen zusammengestellt haben, ergeben sich leicht nachstehende Folgerungen:

I. Die Grösse T ist nothwendig positiv, welchen Werth man auch immer der Grösse φ beilege. Dies ist leicht zu übersehen, wenn man T in folgende Form bringt:

$$\begin{aligned}
&\frac{R^{m-1}}{m\sqrt{2}}(R + mA\sqrt{2}\,.\cos(45^0+\varphi))\\
&+\frac{R^{m-2}}{m\sqrt{2}}(RR + mB\sqrt{2}\,.\cos(45^0+2\varphi))\\
&+\frac{R^{m-3}}{m\sqrt{2}}(R^3 + mC\sqrt{2}\,.\cos(45^0+3\varphi))\\
&+\frac{R^{m-4}}{m\sqrt{2}}(R^4 + mD\sqrt{2}\,.\cos(45^0+4\varphi))\\
&+\text{u. s. w.}
\end{aligned}$$

da jeder Theil einzeln genommen nothwendig positiv wird. Auf ähnliche Weise ist leicht zu beweisen, dass für jeden Werth von φ auch U, T', U' nothwendig positiv werden.

II. Für $r = R$ erhalten die Functionen t, u, t', u' der Reihe nach folgende Werthe

$$\begin{gathered} T\cos(45^0 + m\varphi) + U\sin(45^0 + m\varphi) \\ T\sin(45^0 + m\varphi) - U\cos(45^0 + m\varphi) \\ T'\cos(45^0 + m\varphi) + U'\sin(45^0 + m\varphi) \\ T'\sin(45^0 + m\varphi) - U'\cos(45^0 + m\varphi) \end{gathered}$$

Hieraus folgt, dass für $r = R$, $tt + uu = TT + UU$, $tt' + uu' = TT' + UU'$ also beide nothwendig positiv werden.

III. Es kann also für keinen Werth von r, der grösser ist als jede der Grössen $mA\sqrt{2}$, $\sqrt{(mB\sqrt{2})}$, $\sqrt[3]{(mC\sqrt{2})}$ u. s. w., zugleich $t = 0$ und $u = 0$ werden.

Das Haupttheorem ist nun folgendes:

Innerhalb der Grenzen $r = 0$, $r = R$, *und* $\varphi = 0$, $\varphi = 360^0$ (*einschl.*) *gibt es gewiss Werthe für* r *und* φ, *aus denen zugleich* $t = 0$ *und* $u = 0$ *wird.*

Der Beweis davon wird auf folgende Art geführt. Wenn man annimmt, das Theorem sei nicht wahr, so folgt, dass $tt + uu$ für jede Werthe von r und φ zwischen den angegebenen Grenzen immer positiv, und folglich y immer *endlich* werden muss. Betrachten wir nur den Werth des doppelten Integrals

$$\iint y\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

von $r = 0$ bis $r = R$, und von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 360^0$ erstreckt, der also eine ganz bestimmte endliche Grösse haben wird. Dieser mit Ω zu bezeichnende Werth kann auf zwiefache Art gefunden werden, indem man entweder zuerst nach φ und dann nach r integrirt, oder in umgekehrter Ordnung. Beide Wege müssen nothwendig zu einerlei Resultate führen.

Nun hat man aber, wenn man r als beständig betrachtet, unbestimmt

$$\int y\,\mathrm{d}\varphi = \frac{tu' - ut'}{r(tt + uu)}$$

wie man sich leicht durch Differentiation versichern kann. Eine beständige Grösse ist bei der Integration nicht hinzuzufügen, insofern diese von $\varphi = 0$ anfangen soll, da für diesen Werth offenbar

$$\frac{tu'-ut'}{tt+uu} = 0$$

wird: und da eben dies für $\varphi = 360^0$ gilt, so ist der Werth von $\int y \,\mathrm{d}\varphi$, von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 360^0$ erstreckt, $= 0$, bei jedem Werthe von r. Hieraus schliessen wir also $\Omega = 0$.

Von der andern Seite hat man, wenn man φ als beständig betrachtet, unbestimmt

$$\int y \,\mathrm{d}r = \frac{tt'+uu'}{tt+uu}$$

wie ebenfalls leicht durch die Differentiation nach r bestätigt wird. Auch hier ist keine beständige Grösse hinzuzusetzen, insofern die Integration von $r = 0$ anfangen soll. Das Integral $\int y \,\mathrm{d}r$, von $r = 0$ bis $r = R$ ausgedehnt, wird folglich nach II

$$= \frac{TT'+UU'}{TT+UU}$$

also gewiss positiv für jeden Werth von φ. Hieraus wird demnach auch Ω, d. i. der Werth des Integrals

$$\int \frac{TT'+UU'}{TT+UU} \mathrm{d}\varphi$$

von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 360^0$ ausgedehnt, nothwendig positiv werden, welches mit dem erstern Resultate in Widerspruch steht. Die Voraussetzung war folglich unstatthaft, und dadurch ist die Wahrheit des Theorems selbst bewiesen.

Dass nun für jede Werthe von r und φ, welche zugleich $t = 0$ und $u = 0$ geben,

$$r(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1}) \quad \text{und} \quad r(\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})$$

Wurzeln der Gleichung $X = 0$ sind, oder dass die Function X dann entweder den Factor der zweiten Ordnung

$$xx - 2r\cos\varphi . x + rr$$

(wenn weder r noch $\sin\varphi$ verchwinden) oder den Factor der ersten Ordnung

$$x \mp r$$

(wenn entweder $\sin\varphi = 0$, also $\cos\varphi = \pm 1$, oder $r = 0$ wird) enthält, ist bekannt genug, und braucht hier nicht erst weiter entwickelt zu werden. Was von X so eben bewiesen ist, gilt nachher wieder von dem Quotienten, wenn X durch jenen Factor dividirt ist, u. s. f., woraus die vollständige Zerlegbarkeit der Function X in dergleichen Factoren erhellet.

Durch diese kurze Reihe von Schlüssen ist das eigentliche Ziel vollständig erreicht. Nicht gefordert, aber doch gewünscht werden konnte noch eine Erläuterung, in wiefern der obige Widerspruch — der unvermeidlich war, wenn man das Theorem als unwahr ansah — wegfalle, wenn man von der Wahrheit des Theorems ausgeht. Der Verf. hat darüber einige Winke gegeben, die hier nur kurz berührt werden können. Ist das Theorem wahr, so sind nicht mehr alle Werthe von y endlich; es ist folglich nicht mehr ohne weiteres verstattet, $\iint y\, dr\, d\varphi$ als eine wirkliche bestimmte Grösse anzunehmen, und man darf sich daher nicht wundern, dass der blosse blinde Mechanismus des Calcüls, auf verschiedenen Wegen widersprechende Resultate liefert. Die Analyse pflegt sehr häufig sich so zu helfen, dass sie auf Fragen, die man ihr ohne Einschränkung vorlegt, obgleich sie in gewissen Fällen ungereimt sein können, nur halbbestimmte Antworten gibt. So ist es bei der Bestimmung des Werthes des Integrals $\iint y\, dr\, d\varphi$. Soll dasselbe allgemein, von $r = k$ bis $r = l$ und von $\varphi = K$ bis $\varphi = L$ erstreckt werden, und bezeichnet man den Werth von $\frac{u}{t}$

$$\begin{array}{llll} \text{für } r = k, & \varphi = K & \text{durch } \theta \\ \phantom{\text{für }} r = k, & \varphi = L & \text{durch } \theta' \\ \phantom{\text{für }} r = l, & \varphi = K & \text{durch } \theta'' \\ \phantom{\text{für }} r = l, & \varphi = L & \text{durch } \theta''' \end{array}$$

so geben die analytischen Operationen für jenes Integral den Ausdruck

$$\operatorname{Arc\,tg} \theta - \operatorname{Arc\,tg} \theta' - \operatorname{Arc\,tg} \theta'' + \operatorname{Arc\,tg} \theta'''$$

Das Integral hat in der That nur dann einen wahren Werth, wenn y innerhalb der angegebenen Grenzen immer endlich bleibt: dieser wahre Werth ist dann unter obigem Ausdruck allerdings begriffen, aber an sich dadurch noch nicht ganz bestimmt, da die Function Arc. tg. eine vielförmige ist, und erst aus anderweitigen (übrigens nicht schwierigen) Betrachtungen muss entschieden werden, *welche*

Werthe dieser Function im bestimmten Fall zu nehmen sind. So oft hingegen innerhalb der angegebenen Grenzen y irgendwo unendlich wird, ist eigentlich die Frage nach dem Werthe von $\int\int y\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi$ ungereimt; unterfängt man sich, diese Ungereimtheit ignorirend, dennoch, sie zu beantworten, so darf man sich nicht befremden lassen, auf einem Wege diese, auf anderm jene Antwort zu erhalten, welche verschiedene Beantwortungen inzwischen allemal unter dem obigen halbbestimmten Ausdrucke begriffen sind.

Handschriftliche Bemerkungen.

Die *Bedingung* für R kann auch so gestellt werden, dass es grösser ist als 1 und als die absolute Summe der Grössen A, B, C etc. in $\sqrt{2}$ multiplicirt. Es sei diese absolute Summe $= \alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D +$ etc. so dass jeder der Coëfficienten α, β, γ etc. entweder $+1$ oder -1 wird. Dann ist der positive Werth von T u. s. w. aus folgender Form klar

$$T = R^{m-1}\cos 45^\circ(R - \sqrt{2}.(\alpha A + \beta B + \gamma C + \text{etc.})) + R^{m-1}(\alpha A + A\cos(45^\circ + \varphi)) + R^{m-2}(\beta BR + B\cos(45^\circ + 2\varphi)) + \text{etc.}$$

Lehrsatz. Sind $a, b, c \ldots m, n$ die Wurzeln der Gleichung $fx = 0$, $a', b', c' \ldots m'$ die Wurzeln der Gleichung $f'x = 0$. wo $f'x = \frac{\mathrm{d}fx}{\mathrm{d}x}$, und werden durch dieselben Buchstaben die entsprechenden Punkte in plano bezeichnet, so ist, wenn man sich in $a, b, c \ldots m, n$ gleiche abstossende oder anziehende Massen denkt, die im umgekehrten Verhältniss der Entfernung wirken, in $a', b', c' \ldots m'$ Gleichgewicht.
