Werk

Titel: Analysis

Jahr: 1866

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN235999628

PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN235999628|LOG_0021

OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235999628

ANZEIGEN.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1812 Februar 10.

Die logarithmischen und Kreisfunctionen, als die einfachsten Arten der transscendenten Functionen, sind diejenigen, womit sich die Analysten am meisten beschäftigt haben. Sie verdienten diese Ehre sowohl wegen ihres steten Eingreifens in fast alle mathematische Untersuchungen, theoretische und practische, als wegen des fast unerschöpflichen Reichthums an interessanten Wahrheiten, den ihre Theorie darbietet Weit weniger sind bisher andere transscendente Functionen bearbeitet, die sich auf jene nicht zurückführen lassen, sondern als eigne höhere Gattungen betrachtet werden müssen, die nur in speciellen Fällen mit jenen zusammenhängen. Und doch sind manche solcher Functionen nicht minder fruchtbar an interessanten Relationen, und daher dem, welcher die Analyse um ihrer selbst willen ehrt, nicht minder wichtig; so wie ihr häufiges Vorkommen bei mancherlei andern Untersuchungen sie dem empfehlen muss, der gern erst nach practischem Nutzen fragt. Professor GAUSS hat sich mit Untersuchungen über dergleichen höhere transscendente Functionen schon seit vielen Jahren beschäftigt. deren weit ausgedehnte Resultate das Gesagte bestätigen. Einen, verhältnissmässig freilich nur sehr kleinen, Theil derselben, der gleichsam als Einleitung zu einer künftig zu liefernden Reihe von Abhandlungen angesehen werden kann, hat er am 30. Januar unter der Aufschrift

Disquisitiones generales circa seriem infinitam

$$1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha.\alpha+1.\beta.\beta+1}{1.2.\gamma.\gamma+1}xx+\frac{\alpha.\alpha+1.\alpha+2.\beta.\beta+1.\beta+2}{1.2.3.\gamma.\gamma+1.\gamma+2}x^3+ etc.$$

Pars prior,

als eine Vorlesung der königl. Gesellschaft der Wissenschaften übergeben, woraus wir hier die Hauptmomente des Inhalts anzeigen wollen.

Die transscendenten Functionen haben ihre wahre Quelle allemal. offen liegend oder versteckt, im Unendlichen. Die Operationen des Integrirens, der Summationen unendlicher Reihen, der Entwickelung unendlicher Producte, ins Unendliche fortlaufender continuirlicher Brüche, oder überhaupt die Annäherung an eine Grenze durch Operationen, die nach bestimmten Gesetzen ohne Ende fortgesetzt werden — diess ist der eigentliche Boden, auf welchem die transscendenten Functionen erzeugt werden, oder wenn man lieber sich eines andern Bildes bedienen will, diess sind die eigentlichen Wege, auf welchen man dazu gelangt. Zu *einem* Ziele führen gewöhnlich mehrere solcher Wege: die Umstände und die Zwecke, welche man sich vorsetzt, müssen bestimmen, welchen man zuerst oder vorzugsweise wählen will. Die Reihe, welche den Gegenstand gegenwärtiger Abhandlung ausmacht, ist von einer sehr umfassenden Allgemeinheit. Sie stellt, je nachdem die Grössen α, β, γ (welche nebst x der Verfasser durch die Benennungen erstes, zweites, drittes, viertes *Element* unterscheidet, so wie er, Kürze halber, die ganze durch die Reihe dargestellte Function mit den Zeichen $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ bezeichnet) so oder anders bestimmt werden, algebraische, logarithmische, trigonometrische oder höhere transscendente Functionen dar, und man kann behaupten, dass bisher kaum irgend eine transscendente Function von den Analysten untersucht sei, die sich nicht auf diese Reihe zurückführen liesse. Eine grosse Menge von Wahrheiten, welche in Beziehung auf solche schon in Betrachtung gezogene Functionen schon aufgefunden sind, lassen sich aus der allgemeinen Natur der durch unsere Reihen dargestellten Function ableiten, und schon um desswillen würden Untersuchungen darüber die Aufmerksamkeit der Geometer verdienen, obwohl diess nur als Nebensache, und die Eröffnung des Zuganges zu neuen Wahrheiten als Hauptzweck zu betrachten ist. Gegenwärtige Abhandlung enthält nur erst die Hälfte von den allgemeinen Untersuchungen des Verfassers, deren zu grosser Umfang eine Theilung nothwendig machte. Hier gilt eben die Reihe selbst als Ursprung der transscendenten Functionen, welche in dem weitern Verfolg der Arbeit aus einer allgemeiner anwendbaren Quelle werden abgeleitet, und aus einem höheren Gesichtspunkte betrachtet werden. Die erstere Erzeugung macht, ihrer Natur nach, die Einschränkung auf die Fälle nothwendig, wo die Reihe convergirt, also wo das vierte Element x. positiv oder negativ, den Werth 1 nicht überschreitet: die andere Erzeugungsart wird diese Beschränkung wegräumen. Allein eben die erstere Erzeugungsart führt schon zu einer Menge merkwürdiger Wahrheiten auf einem bequemern und gleichsam mehr elementarischen Wege, und desswegen hat der Verf. damit den Anfang gemacht.

Diese erste Hälfte der Untersuchungen zerfällt in drei Abschnitte, welchen einige allgemeine Bemerkungen voraus geschickt sind. Um eine Probe von der ausgedehnten Anwendbarkeit der Reihe zu geben, sind auf dieselbe zuvörderst 23 verschiedene Reihenentwickelungen algebraischer, logarithmischer und trigonometrischer Functionen zurück geführt, so wie, als ein Beispiel höherer transcendenter Functionen, die Coëfficienten der aus der Entwickelung von $(aa+bb-2ab\cos\varphi)^n$ entspringenden, nach den Cosinus der Vielfachen von φ fortschreitenden, Reihe, und zwar letztere auf drei verschiedene Arten.

Der *erste Abschnitt* beschäftigt sich mit den Relationen zwischen solchen Reihen von der obigen Form, in welchen die Werthe eines der drei ersten Elemente um eine Einheit verschieden, die Werthe der drei übrigen hingegen gleich sind. Dergleichen Reihen nennt der Verf. *series contiguae*, im Deutschen könnte man sie etwa *verwandte Reihen* nennen. Jeder Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ stehen also sechs verwandte zur Seite, nämlich $F(\alpha+1, \beta, \gamma, x)$, $F(\alpha-1, \beta, \gamma, x)$, $F(\alpha, \beta+1, \gamma, x)$, $F(\alpha, \beta-1, \gamma, x)$, $F(\alpha, \beta, \gamma+1, x)$, $F(\alpha, \beta, \gamma-1, x)$, und es wird hier gezeigt, dass es zwischen der ersten und je zweien der verwandten eine lineare Gleichung gibt. Funfzehn Gleichungen entspringen auf diese Weise. Es folgt hieraus das wichtige Theorem, dass, wenn $\alpha'-\alpha$, $\alpha''-\alpha$, $\beta'-\beta$, $\beta''-\beta$, $\gamma'-\gamma$, $\gamma''-\gamma$, ganze Zahlen sind, auch zwischen $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$, $F(\alpha', \beta', \gamma', x)$, $F(\alpha'', \beta'', \gamma'', x)$, eine lineare Gleichung Statt findet, und also, allgemein zu reden, aus den Werthen zweier dieser Functionen der Werth der dritten abgeleitet werden kann. Einige der einfachsten oder sonst merkwürdigen Fälle hat der Verf. hier noch besonders zusammengestellt.

Der *zweite Abschnitt* gibt Verwandlungen in continuirliche Brüche, und zwar für die Quotienten

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}, \quad \frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}, \quad \frac{F(\alpha-1, \beta+1, \gamma, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}$$

auf welche sich noch drei andere durch die offenbar verstattete Vertauschung der beiden ersten Elemente zurück führen lassen. Von diesen Lehrsätzen sind fast alle bisher bekannte Entwickelungen in continuirliche Brüche nur specielle Fälle.

Vorzüglich merkwürdig ist der Fall, wo man in der zweiten Entwickelung $\beta = 0$ setzt. Es folgt daraus ein Lehrsatz, welchen wir seiner umfassenden Anwendbarkeit wegen hier beifügen. Die Function $F(\alpha, 1, \gamma. x)$ oder, was einerlei ist, die Reihe

$$1+\frac{\alpha}{\gamma}x+\frac{\alpha.\alpha+1}{\gamma.\gamma+1}xx+\frac{\alpha.\alpha+1.\alpha+2}{\gamma.\gamma+1.\gamma+2}x^3+\text{ etc.}$$

gibt den continuirlichen Bruch

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{ax}{1-\cfrac{bx}{1-\cfrac{cx}{1-\cfrac{dx}{1-\text{ etc.}}}}}}$$

wo die Coëfficienten a, b, c, d etc. nach folgendem Gesetze fortschreiten:

$$a=\frac{\alpha}{\gamma} \qquad b=\frac{\gamma-\alpha}{\gamma(\gamma+1)}$$
$$c=\frac{(\alpha+1)\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2)} \qquad d=\frac{2(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+2)(\gamma+3)}$$
$$e=\frac{(\alpha+2)(\gamma+1)}{(\gamma+3)(\gamma+4)} \qquad f=\frac{3(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+4)(\gamma+5)} \text{ u.s.f.}$$

Hiernach lassen sich z.B. die Potenz eines Binomium, die Reihen für $\log(1+x)$, $\log\frac{1+x}{1-x}$, für Exponentialgrössen, für den Bogen durch die Tangente oder durch den Sinus u. a. in unendliche continuirliche Brüche verwandeln. Auch beruhen hierauf die in der *Theoria motus corporum coelestium* gegebenen Verwandlungen in solche Brüche, deren Beweise hier von dem Verfasser nachgeholt werden.

Bei weitem den grössten Theil der Abhandlung nimmt der *dritte Abschnitt* ein, in welchem von dem Werthe der Reihe gehandelt wird, wenn man das vierte Element $= 1$ setzt. Nachdem zuvörderst mit geometrischer Schärfe bewiesen, dass die Reihe für $x = 1$ nur dann zu einer endlichen Summe convergire, wenn $\gamma-\alpha-\beta$ eine positive Grösse ist, führt der Verf. diese Summe, oder $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ auf den Ausdruck $\frac{\Pi(\gamma-1).\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1).\Pi(\gamma-\beta-1)}$ zurück, wo die Charakteristik Π eine eigene Art transcendenter Functionen andeutet, deren Erzeugung der Verf. auf ein unendliches Product gründet. Diese in der ganzen Analyse höchst wichtige Function ist im Grunde nichts anders als Eulers inexplicable Function

$$\Pi z = 1.2.3.4\ldots\ldots z$$

allein *diese* Erzeugungsart oder Definition ist, nach des Verf. Urtheil, durchaus unstatthaft, da sie nur für ganze positive Werthe von z einen klaren Sinn hat. Die vom Verf. gewählte Begründungsart ist allgemein anwendbar, und gibt selbst bei imaginären Werthen von z einen eben so klaren Sinn, wie bei reellen, und man läuft dabei durchaus keine Gefahr, auf solche Paradoxen und Widersprüche zu gerathen, wie ehedem Hr. Kramp bei seinen numerischen Facultäten, die sich, wie man leicht zeigen kann, auf obige Function zurückführen lassen, aber zur Aufnahme in die Analyse weniger geeignet scheinen, als diese, da jene von drei Grössen abhängig sind, diese nur von Einer abhängt, und doch als eben so allgemein betrachtet werden muss. Der Verf. wünscht dieser transscendenten Function Πz in der Analyse das Bürgerrecht gegeben zu sehen, wozu vielleicht die Wahl eines eigenen Namens für dieselbe am beförderlichsten sein würde: das Recht dazu mag demjenigen vorbehalten bleiben, der die wichtigsten Entdeckungen in der Theorie dieser der Anstrengungen der Geometer sehr würdigen Function machen wird. Hier ist von dem Verf. bereits eine bedeutende Anzahl merkwürdiger, sie betreffender, Theoreme zusammen gestellt, wovon ein Theil als neu zu betrachten ist. Der Raum verstattet uns nicht, in das Detail derselben hier einzugehen: nur das eine heben wir davon aus, dass der Werth des Integrals $\int x^{\lambda-1}(1-x^{\mu})^{\nu}\,dx$ von $x=0$ bis $x=1$ leicht auf die Function Π zurückgeführt werden kann, und dass alle die von Euler für dergleichen Integrale zum Theil mühsam gefundenen Relationen sich mit grösster Leichtigkeit aus den allgemeinen Eigenschaften jener Functionen ableiten lassen, so wie umgekehrt allemal Πz, wenn z eine Rationalgrösse ist, sich durch einige solche bestimmte Integrale darstellen lässt.

Nicht weniger merkwürdig ist die aus der Differentiation von Πz entspringende, gleichfalls transscendente, Function, oder vielmehr

$$\frac{d\log\Pi z}{dz}=\frac{d\Pi z}{\Pi z.dz}$$

welche der Verfasser mit Ψz bezeichnet hat, und die gleichfalls eine besondere *Benennung* verdiente. Von den zahlreichen merkwürdigen Eigenschaften dieser Function, welche in der Abhandlung aufgestellt sind, führen wir hier nur die Eine an, dass allgemein $\Psi z-\Psi 0$, wenn z eine rationale Grösse ist, auf Logarithmen und Kreisfunctionen zurückgeführt werden kann; $\Psi 0$ selbst aber ist die bekannte, von Euler und Andern untersuchte, Zahl $0,5772156649\ldots$ negativ genommen, welche der Verfasser hier, nach einer von ihm selbst geführten Rech-