Werk

Titel: Analysis
Jahr: 1866
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN235999628
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235999628
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235999628

LOG Id: LOG_0022
LOG Titel: Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi
LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235957348
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235957348
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235957348

nung, auf 23 Decimalen mittheilt, wovon die letzten von MASCHERONI's Bestimmung etwas abweichen. Uebrigens hängen sowohl Πz, als Ψz, mit mehreren merkwürdigen Integralen für bestimmte Werthe der veränderlichen Grösse zusammen.

Diesem dritten Abschnitte ist noch eine unter der Aufsicht des Professors GAUSS von Hrn. NICOLAI mit grösster Sorgfalt berechnete Tafel für $\log \Pi z$ und für Ψz beigefügt, worin das Argument z durch alle einzelnen Hunderttheile von 0 bis 1 fortschreitet; aus der Theorie dieser Functionen ist klar, dass man auf diese Werthe von z alle andere leicht zurück führen kann.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1814 September 26.

Der königl. Societät wurde am 16. September von dem Prof. GAUSS eine Vorlesung eingereicht überschrieben:

Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi.

Unter den verschiedenen Methoden zur genäherten Bestimmung der Integrale, oder wie es in der Sprache der ältern Analysten hiess, zur genäherten Quadratur krummliniger Figuren, ist die NEWTON-COTESische, welche sich auf die Interpolationsmethode gründet, eine der brauchbarsten. NEWTON hatte eine Auflösung der Aufgabe gegeben, durch eine beliebige Anzahl gegebener Punkte eine parabolische Curve zu ziehen, deren immer leicht ausführbare Quadratur dann näherungsweise die Stelle der Quadratur der eigentlich vorgegebenen durch jene Punkte gehenden Curve vertreten kann, und zwar desto genauer, je mehr Punkte man in Anwendung bringt. NEWTON hatte es indessen bei dieser allgemeinen Andeutung bewenden lassen und nur gleichsam beispielsweise für den Fall von vier in gleichen Zwischenräumen liegenden Ordinaten A, B, C, D den genäherten Flächenraum zwischen der ersten und letzten, wenn deren Entfernung $= R$ ist, durch $(\frac{1}{8}A + \frac{3}{8}B + \frac{3}{8}C + \frac{1}{8}D)R$ angeführt. COTES, welcher für sich, und noch ehe NEWTONS Schrift *Methodus differentialis* erschienen war, schon im Jahre 1707 ähnliche Untersuchungen angestellt hatte, wurde durch die zierliche Form, in welcher NEWTON das Endresultat in obigem Beispiele dargestellt hatte (*pulcherrima et* *utilissima regula* nennt es COTES) bewogen, diese Vorschriften weiter und bis auf den Fall von 11 Ordinaten auszudehnen. Immer erscheint so der verlangte Flächenraum in der Gestalt des Products der Basis, oder der Entfernung der äussersten Ordinaten, in die Summe der durch bestimmte Zahlcoëfficienten multiplicirten Ordinaten, und zwar haben zwei gleich weit vom Anfang und Ende abliegende Ordinaten allemal gleiche Coëfficienten. Diese Quadraturcoëfficienten bis zu dem Fall von 11 Ordinaten gibt COTES am Schluss der Abhandlung *de methodo differentiali*, welche einen Theil der *Harmonia mensurarum* ausmacht, ohne sich über das Verfahren, wodurch er sie berechnet hat, weiter zu erklären. Vielleicht hat man es dieser anspruchlosen Kürze, womit bloss das Endresultat dargestellt ist, zuzuschreiben, dass diese schöne und zweckmässige Methode von den Analysten weniger gekannt und benutzt zu sein scheint, als sie es verdient.

Bei dieser Methode liegt durchaus die Voraussetzung gleicher Abstände zwischen den Ordinaten zum Grunde. Allerdings scheint beim ersten Anblick diese Voraussetzung am einfachsten und natürlichsten zu sein, und es war noch nicht in Frage gekommen, ob es nicht demungeachtet noch vortheilhafter sein könne, Ordinaten in ungleichen Abständen zum Grunde zu legen. Um diese Frage zu entscheiden, musste zuerst die Theorie der Quadraturcoëfficienten in unbeschränkter Allgemeinheit entwickelt, und der Grad der Genauigkeit des Resultats bestimmt werden. Es zeigte sich, dass die Bedingungen, wovon dieser Grad der Genauigkeit abhängt, von der Art sind, dass man dieselbe durch zweckmässig gewählte Ordinaten in ungleichen Abständen allerdings verdoppeln kann, so dass man mit einer beliebigen Anzahl gehörig gewählter Ordinaten eben so weit reicht, als mit der doppelten Anzahl von Ordinaten in gleichen Abständen. Diese Untersuchungen, nebst der vollständigen Theorie der zweckmässigsten Auswahl der Ordinaten, der dabei anzuwendenden Quadraturcoëfficienten und der Bestimmung des Grades der Genauigkeit, welchen dieses Verfahren gewährt, machen den Hauptinhalt der vorliegenden Abhandlung aus.

Aus der kurzen Entwickelung der Theorie der COTESischen Quadraturcoëfficienten, welche der Verf. vorausschicken zu müssen glaubte, berühren wir hier nur dasjenige, was den Grad der Genauigkeit betrifft, welchen die dadurch gefundenen genäherten Integrale haben. Vor allen muss hier bemerkt werden, dass die Anwendbarkeit dieser Methode, eben so wie das Interpoliren, auf der Voraussetzung beruhe, dass die Ordinaten innerhalb des zu quadrirenden Raumes sich durch eine convergirende Reihe darstellen lassen. Es sei x die Absscisse, y die Ordinate, und das Integral $\int y\,\mathrm{d}x$ werde von $x = g$ bis $x = h$ verlangt. Man führe statt x eine andere veränderliche Grösse ein, indem man etwa $x = g + (h - g)t$, oder auch $x = \frac{1}{2}(g + h) + \frac{1}{2}(h - g)u$ setzt. Hier muss also y sich durch Reihen wie

$$\alpha + \alpha' t + \alpha'' tt + \alpha''' t^3 + \text{etc.}$$

oder

$$\beta + \beta' u + \beta'' uu + \beta''' u^3 + \text{etc.}$$

darstellen lassen, die convergiren, jene, wenigstens so lange t, diese so lange u nicht grösser wird als 1. Man mag daher Kürze wegen den Coëfficienten α' und β' die Ordnung 1, den Coëfficienten α'' und β'' die Ordnung 2 u.s.w. beilegen. Diess vorausgesetzt, wird gezeigt, dass die Fehler, denen man sich bei der Cotesischen Methode aussetzt, zwar immer von einer höhern Ordnung werden, je grösser die Anzahl der zum Grunde gelegten Werthe von y ist, jedoch so, dass eine ungerade Anzahl und die zunächst grössere gerade Anzahl immer Fehler von einerlei Ordnung hervorbringen. So ist für drei Ordinaten der Fehler sehr nahe $= \frac{1}{120}(h - g)\alpha''''$, für vier Ordinaten nahe $= \frac{1}{270}(h - g)\alpha''''$; sodann für fünf Ordinaten nahe $= \frac{1}{2688}(h - g)\alpha^{\text{VI}}$ und für sechs Ordinaten nahe $= \frac{11}{52500}(h - g)\alpha^{\text{VI}}$ u.s.f. Man sieht hieraus, dass es im Allgemeinen vortheilhaft sein wird, bei Anwendung der Cotesischen Methode eine ungerade Anzahl von Ordinaten zu benutzen.

Der Verf. geht hierauf zu der allgemeinen Untersuchung über, wo die Einschränkung, dass die Ordinaten gleiche Abstände von einander haben, wegfällt. Sind hier A, A', A'' u.s.w. die Werthe von y, die entsprechenden Werthe von t hingegen a, a', a'' u.s.w., oder b, b', b'' u.s.w. die entsprechenden Werthe von u, und ihre Anzahl $n+1$, so wird das genäherte Integral wiederum die Gestalt haben

$$(h - g)(RA + R'A' + R''A'' + \text{etc.})$$

wo R, R', R'' u.s.w. Zahlcoëfficienten sind, die unabhängig von der Function y bloss durch a, a', a'' u.s.w., oder durch b, b', b'' u.s.w. bestimmt werden. Die Untersuchungen des Verf. geben für diese Bestimmung folgendes Resultat. Es sei

$$T = (t - a)(t - a')(t - a'') \ldots .$$

Aus der Multiplication dieser ganzen Function von t, welche auf die Ordnung $n+1$ steigt, in die unendliche Reihe, welche den Logarithmen von $\frac{t}{t-1}$ vorstellt, nemlich

$$t^{-1}+\tfrac{1}{2}t^{-2}+\tfrac{1}{3}t^{-3}+ \text{etc.}$$

ergebe sich das Product $T'+T''$, so dass T' die darin enthaltene ganze Function von t bezeichnet, so wie T'' die übrige mit negativen Potenzen von t ins Unendliche fortlaufende Reihe. Diess vorausgesetzt, ergeben sich die Quadraturcoëfficienten R, R', R'' u. s. w., wenn man in $\frac{T'\mathrm{d}t}{\mathrm{d}T}$ für t der Reihe nach die Werthe a, a', a'' u. s. w. substituirt. Auf eine ähnliche und noch etwas bequemere Art leitet man jene Coëfficienten aus b, b', b'' u. s. w. ab, indem man die Function

$$(u-b)(u-b')(u-b'') \ldots .$$

durch U, ihr Product in die unendliche Reihe

$$u^{-1}+\tfrac{1}{3}u^{-3}+\tfrac{1}{5}u^{-5}+ \text{etc.}$$

durch $U'+U''$ bezeichnet (so dass U' die darin enthaltene ganze Function von u vorstellt), und dann in $\frac{U'\mathrm{d}u}{\mathrm{d}U}$ für u der Reihe nach die Werthe b, b', b'' u. s. w. substituirt. Statt der gebrochenen Functionen $\frac{T'\mathrm{d}t}{\mathrm{d}T}$, $\frac{U'\mathrm{d}u}{\mathrm{d}U}$ lassen sich auch ganze Functionen von t und u finden, welche die Stelle von jenen vertreten können, und für deren Bestimmung der Verf. eine allgemeine Methode entwickelt.

Der Grad der Genauigkeit der Integrationsformel hängt nun von der Beschaffenheit der Reihe T'' oder U'' ab. Im Allgemeinen ist der Fehler zwar von der Ordnung $n+1$; allein wenn von den ersten Gliedern jener Reihen einige ausfallen, so wird der Fehler von einer höhern Ordnung, so dass wenn T'' erst mit der Potenz t^{-m} oder U'' mit der Potenz u^{-m} anfängt, der Fehler von der Ordnung $n+m$ wird.

Hieraus ergab sich nun, dass in so fern die Werthe a, a', a'' u. s. w., oder b, b', b'' u. s. w. willkürlich gewählt werden können, diese sich so bestimmen lassen müssen, dass die ersten $n+1$ Glieder von T'' oder U'' wirklich ausfallen; wovon die Folge sein wird, dass der Fehler der Integrationsformel auf die Ordnung $2n+2$ kommt. Die Untersuchung schreitet demnach zu der Bestimmung derjenigen Functionen T und U, für jeden Werth von n, fort, wodurch der angegebenen Bedingung Genüge geleistet wird. Der beschränkte Raum erlaubt uns nicht, in das Einzelne dieser Untersuchung hier einzugehen: wir bemerken also hier nur, dass diese Functionen ein sehr einfaches Fortschreitungsgesetz befolgen, und in genauem Zusammenhange stehen mit der Entwicklung der Reihen

$$t^{-1} + \tfrac{1}{2}t^{-2} + \tfrac{1}{3}t^{-3} + \tfrac{1}{4}t^{-4} + \text{etc.}$$
$$u^{-1} + \tfrac{1}{3}u^{-3} + \tfrac{1}{5}u^{-5} + \tfrac{1}{7}u^{-7} + \text{etc.}$$

in continuirliche Brüche, die der Verf. in einer frühern Abhandlung [*Disquisitiones generales circa seriem infinitam* $1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x +$ *etc.*] gegeben hat. — Offenbar gibt demnächst die Auflösung der Gleichung $T = 0$ oder $U = 0$ die Werthe von a, a', a'' u.s.w. oder b, b', b'' u.s.w., und die Werthe der Quadraturcoëfficienten werden nach den allgemeinen Regeln bestimmt, die in diesem Falle noch besondere Vereinfachungen vertragen. Uebrigens werden allerdings in den meisten Fällen sowohl die Werthe von $a. a', a''$ u.s.w. als die Quadraturcoëfficienten Irrationalgrössen. Diess ist indess an sich sehr gleichgültig, sobald nur ihre numerischen Werthe ein für allemal mit einem angemessenen Grad von Genauigkeit berechnet sind. Ist diess der Fall, so wird die Anwendung dieser Methode auf irgend eine Anzahl von Ordinaten wenig oder gar nicht mehr Mühe machen, als die Anwendung der Cotesischen Methode auf eine eben so grosse Anzahl, da hingegen letztere auf eine doppelt so grosse Anzahl angewandt werden müsste, um ungefähr dieselbe Genauigkeit des Resultats zu geben, wie erstere.

Um für die Anwendung dieser neuen Methode nichts zu wünschen übrig zu lassen, hat der Verf. noch die numerischen Werthe von a, a', a'' u.s.w., so wie von R, R', R'' u.s.w., auf 16 Decimalen berechnet, mitgetheilt, zugleich mit den Briggischen Logarithmen der letztern auf 10 Decimalen, alles bis zu dem Fall von sieben Ordinaten. In diesem letzten Fall wird der Fehler der Integrationsformel nahe $= \frac{1}{1766179360}\alpha^{\text{XIV}}$, woraus man abnehmen kann, dass in den meisten in der Ausübung vorkommenden Fällen schon eine geringere Anzahl zureichen wird. Um die Anwendung der Vorschriften und ihre verhältnissmässige Schärfe noch mehr zu versinnlichen, ist als Beispiel die Berechnung von $\int \frac{dx}{\log x}$ von $x = 100000$ bis $x = 200000$ beigefügt, wo schon bei der Anwendung von vier Werthen der Fehler nur $\frac{1}{560000000}$ des Ganzen ist, und bei einer grössern Anzahl sich in den unvermeidlichen Fehlern verliert, die selbst die grössern Logarithmentafeln noch übrig lassen.