ANZEIGEN.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1815 Juli 1.

Der Königl. Societät ist durch Hrn. Prof. Gauss eine handschriftliche Abhandlung des Hrn. Prof. Pfaff in Halle vorgelegt, überschrieben:

Methodus generalis, aequationes differentiarum partialium, nec non aequationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis, inter quotcunque variabiles, complete integrandi.

Die Lehre von den partiellen Differentialgleichungen des ersten Grades verdankt bekanntlich Lagrange zwei wichtige Erweiterungen, nemlich die allgemeine Integration derselben, wenn sie entweder, bei einer beliebigen Anzahl veränderlicher Grössen, die partiellen Differentialquotienten bloss linearisch enthalten, oder ohne Einschränkung in Rücksicht der Form, wenn der veränderlichen Grössen nur drei sind. Ueber diese beiden Fälle war man eigentlich bisher noch nicht hinausgegangen, und das von Lagrange bei den partiellen Differentialgleichungen dreier veränderlicher Grössen angewandte Verfahren würde bei einer grössern Anzahl besondere Schwierigkeiten haben. Wir haben es daher als eine merkwürdige Bereicherung der Integralrechnung anzusehen, dass es dem scharfsinnigen Verfasser der vorliegenden Abhandlung gelungen ist, die allgemeine Integration der partiellen Differentialgleichungen des ersten Grades für *jede* Anzahl von veränderlichen Grössen zu finden. Er hat bei dieser Untersuchung einen eigenthümlichen Weg gewählt, und sie an einen andern nicht weniger interessanten Zweig der Integralrechnung angeknüpft, nemlich an die Lehre von den gewöhnlichen Differentialgleichungen (des ersten Grades) zwischen mehr als zwei veränderlichen Grössen, deren wahre Natur bekanntlich erst MONGE uns kennen gelehrt hat, obwohl die Integration derselben von diesem Geometer nur für die einfachsten Fälle vollendet ist. Von dieser Gattung von Differentialgleichungen giebt Hr. PFAFF die allgemeine Integration, und die der partiellen Differentialgleichungen erscheint dann nur als ein besonderer Fall von jener. Bei diesen Untersuchungen wird die allgemeine Integration der Differentialgleichungen von jedem Grade zwischen zwei veränderlichen Grössen *vorausgesetzt*, welches ganz in der Ordnung ist, eben so wie man in den höhern Theilen der Mathematik die allgemeine Auflösung der algebraischen Gleichungen postulirt.

Wir glauben den Freunden der höhern Mathematik einen angenehmen Dienst zu erweisen, wenn wir sie durch gegenwärtige Anzeige in den Besitz dieser schönen Erweiterung der Integralrechnung setzen. Freilich würde ein Auszug aus der 144 Quartseiten starken Abhandlung, in welchem wir dem Verfasser Schritt für Schritt folgen und nichts Wesentliches übergehen wollten, die Grenzen des uns vergönnten Raumes weit überschreiten. Wir wollen daher versuchen, indem wir uns bloss an die *Sache* halten, in einer etwas veränderten Darstellung das Wesentliche so herauszuheben, dass Kenner sich dasselbe vollkommen aneignen können.

Als die Hauptoperation des ganzen Geschäfts muss angesehen werden die Reduction eines Differentialausdrucks

$$\Omega = p\,\mathrm{d}x + p'\mathrm{d}x' + p''\mathrm{d}x'' + \text{etc.} + p^{(n-1)}\mathrm{d}x^{(n-1)}$$

wo jeder der Coëfficienten p, p', p'' u. s. w. Function der veränderlichen Grössen x, x', x'' u. s. w. ist auf die Form

$$\Omega = \lambda(q\,\mathrm{d}y + q'\mathrm{d}y' + q''\mathrm{d}y'' + \text{etc.} + q^{(n-2)}\mathrm{d}y^{(n-2)})$$

so dass λ, y, y', y'' u. s. f. Functionen von $x.x', x''$ u. s. w. seien, hingegen q, q', q'' u.s.f. Functionen von y, y', y'' u. s. w., und dass die Anzahl der letztern veränderlichen Grössen um eine kleiner sei, als die Anzahl der veränderlichen Grössen x, x', x'' u.s.f.

Diese Verwandlung, welche wir Kürze halber mit (I) bezeichnen wollen, beschränkt sich auf den Fall, wo n eine gerade Zahl ist; wir werden weiter unten entwickeln, wie sie ausgeführt werden müsse, und sie, um die Uebersicht nicht zu stören, hier einstweilen voraussetzen.

In dem Fall. wo n eine ungerade Zahl ist, würde die Verwandlung I nur unter speciellen Bedingungen zwischen den Coëfficienten $p, p', p'' \ldots$ möglich sein; allgemein aber lässt sich in diesem Falle Ω auf die Form

$$p^* \mathrm{d}x + \lambda(q\,\mathrm{d}y + q'\mathrm{d}y' + q''\mathrm{d}y'' + \text{etc.} + q^{(n-3)}\mathrm{d}y^{(n-3)})$$

bringen. Man sehe nemlich einstweilen x in Ω als constant an, und verwandle unter dieser Voraussetzung nach (I)

$$p'\mathrm{d}x' + p''\mathrm{d}x'' + p'''\mathrm{d}x''' + \text{etc.} + p^{(n-1)}\,\mathrm{d}x^{(n-1)}$$

wo nunmehr die Anzahl der veränderlichen Grössen $x', x'', x''' \ldots$ gerade sein wird, in

$$\lambda(q\,\mathrm{d}y + q'\mathrm{d}y' + q''\mathrm{d}y'' + \text{etc.} + q^{(n-3)}\mathrm{d}y^{(n-3)}) = \lambda\Omega'$$

Hier werden also q, q', q'' u. s. w. Functionen von y, y', y'' u. s. w. sein, diese hingegen, eben so wie λ, Functionen von $x, x', x'', x''' \ldots$, von welchen Grössen jedoch die erste x als constant behandelt werden muss, um aus der Entwickelung von $\lambda\Omega'$

$$p'\mathrm{d}x' + p''\mathrm{d}x'' + p'''\mathrm{d}x''' + \text{etc.}$$

zu erhalten. Das Glied, welches noch hinzukommt, wenn bei jener Entwicklung auch x als veränderlich betrachtet wird, ist

$$= (q \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + q' \cdot \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} + q'' \cdot \frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}x} + \text{etc.})\,\lambda\,\mathrm{d}x$$

Man hat daher, um die obige Form zu erhalten, nur

$$p^* = p - \lambda(q \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + q' \cdot \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} + q'' \cdot \frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}x} + \text{etc.})$$

zu setzen. Diese Verwandlung von Ω in $p^*\mathrm{d}x + \lambda\Omega'$, welche auf ungerade Werthe von n beschränkt ist, wollen wir mit II bezeichnen. Offenbar kann dieselbe Reduction abermals auf Ω' angewandt und

$$\begin{aligned}\Omega' &= q^*\mathrm{d}y + \lambda'(r\,\mathrm{d}z + r'\mathrm{d}z' + r''\mathrm{d}z'' + \text{etc.} + r^{(n-5)}\,\mathrm{d}z^{(n-5)}) \\ &= q^*\mathrm{d}y + \lambda'\Omega''\end{aligned}$$

gesetzt werden, und so abermals $\Omega'' = r^* \mathrm{d}z + \lambda''\Omega'''$ bis man zuletzt auf einen Ausdruck kommt, der bloss Eine veränderliche Grösse enthält. Dadurch ist also Ω auf die Form

$$p^* \mathrm{d}x + \lambda q^* \mathrm{d}y + \lambda\lambda' r^* \mathrm{d}z + \text{etc.}$$

gebracht, oder auf die Form

$$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z + \text{etc.}$$

wo die Anzahl der veränderlichen Grössen x, y, z u. s. w. $= \frac{1}{2}(n+1)$, und wo die sämmtlichen n Grössen y, z u. s. w. P, Q, R u. s. w. Functionen von x, x', x'' u. s. w. sein werden. Diess Reductionsverfahren mag durch III bezeichnet werden.

Wendet man diess Verfahren III in dem Fall, wo ursprünglich eine gerade Anzahl veränderlicher Grössen vorgegeben war, auf den durch die Reduction I erhaltenen Ausdruck

$$q\mathrm{d}y + q'\mathrm{d}y' + q''\mathrm{d}y'' + \text{etc.}$$

an, so kommt dadurch

$$\Omega = p\mathrm{d}x + p'\mathrm{d}x' + p''\mathrm{d}x'' + \text{etc.} + p^{(n-1)}\mathrm{d}x^{(n-1)} \quad \text{in die Form}$$
$$Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z + \text{etc.}$$

so dass die Anzahl der veränderlichen Grössen y, z u. s. w. $= \frac{1}{2}n$ wird. und alle n Grössen Q, R u. s. f. y, z u. s. f. Functionen von x, x', x'' u. s. w. werden. Diese Reduction werde mit IV bezeichnet.

Diese allgemeine Transformabilität der Differentialausdrücke nach III und IV ist ein eben so neuer als merkwürdiger Lehrsatz, der sich zwar in der Abhandlung des Hrn Pfaff nicht ausdrücklich ausgesprochen findet, aber sich leicht aus den dortigen Untersuchungen folgern lässt.

Es lassen sich nun daraus die Auflösungen der im Eingange dieser Anzeige erwähnten Aufgaben mit Leichtigkeit ableiten.

1) Um die Differentialgleichung

$$0 = p\mathrm{d}x + p'\mathrm{d}x' + p''\mathrm{d}x'' + \text{etc.}$$

oder

$$0 = \Omega$$

zu integriren, wo p, p', p'' u. s. w. gegebne Functionen der n veränderlichen Grössen x, x', x'' u. s. w. sind, wird man, wenn n gerade ist nach IV

$$\Omega = Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z + S\mathrm{d}u + \text{ etc.}$$

machen, wo Q, y, R, z, S, u u. s. w. zusammen n gegebne Functionen von x, x', x'' sein werden. Die Differentialgleichung

$$0 = Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z + S\mathrm{d}u + \text{ etc.}$$

wird also der vorgegebnen gleichgeltend und ihre allgemeinste Integration in folgendem System von $\frac{1}{2}n$ Gleichungen enthalten sein:

$$0 = \varphi(y, z, u \text{ etc.}), \quad \frac{1}{Q} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi(y, z, u \ldots)}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi(y, z, u \ldots)}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{S} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi(y, z, u \ldots)}{\mathrm{d}u} = \text{ etc.}$$

wo φ eine willkürliche Function vorstellt. und die Differentialquotienten, wie sich von selbst versteht, *partielle* sind. In so fern vermittelst der Gleichung $0 = \varphi(y, z, u \text{ etc.})$ die Grösse y sich durch die übrigen bestimmen lässt, kann man die Auflösung auch durch folgende Gleichungen darstellen:

$$y = \psi(z, u \ldots .)$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi(z, u \ldots .)}{\mathrm{d}z} = -\frac{R}{Q}$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi(z, u \ldots .)}{\mathrm{d}u} = -\frac{S}{Q}$$

u. s. f.

Genau genommen wäre indessen diese Auflösung weniger allgemein, da die willkürliche Function $\varphi(y, z, u \ldots .)$ auch solche unter sich begreift, in welchen y nicht mit vorkommt.

2) Zur Integration derselben Differentialgleichung in dem Falle, wo n ungerade ist, wird man Ω nach III in folgende Form setzen

$$\Omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z + \text{ etc.}$$

wo P, Q, y, R, z u. s. w. zusammen n gegebne Functionen von x, x', x'' u. s. w. sein werden. Die allgemeinste Integration der Differentialgleichung $\Omega = 0$ beruhet dann auf folgendem System von $\frac{1}{2}(n+1)$ Gleichungen:

$$0 = \varphi(x, y, z \ldots), \quad \frac{1}{P} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi(x, y, z \ldots)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{Q} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi(x, y, z \ldots)}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\mathrm{d}\varphi(x, y, z \ldots)}{\mathrm{d}z} = \text{ etc.}$$

3) Die allgemeine Integration einer gegebnen partiellen Differentialgleichung des ersten Grades, d. i. einer endlichen Gleichung zwischen den partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x'} = p', \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x''} = p'', \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x'''} = p''', \text{ u. s. f.}$$

und x, x', x'', x''' u. s. w. (wo x eine erst zu bestimmende Function der m veränderlichen Grössen x', x'', x''' u. s. w. vorstellt) ist nichts anders, als die allgemeine Integration der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$0 = -\mathrm{d}x + p'\mathrm{d}x' + p''\mathrm{d}x'' + p'''\mathrm{d}x''' + \text{etc.}$$

Da nemlich vermöge jener endlichen Gleichung eine der Grössen p', p'', p''' u. s. w. z. B. p' als Function der übrigen p'', p''' u. s. w. und x, x', x'', x''' u. s. w. dargestellt werden kann, so ist die eben angegebne Differentialgleichung als eine zwischen den $2m$ veränderlichen Grössen x, x', x'' u. s. w. p'', p''' u. s. w. zu betrachten, in welcher die Differentiale $\mathrm{d}p''$, $\mathrm{d}p'''$ u. s. w. mit dem Coëfficienten 0 behaftet sind. Um also die Integration auszuführen, wird man den Differentialausdruck

$$-\mathrm{d}x + p'\mathrm{d}x' + p''\mathrm{d}x'' + p'''\mathrm{d}x''' + \text{etc.}$$

auf die Form

$$Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z + S\mathrm{d}u + \text{etc.}$$

bringen, wo die $2m$ Grössen Q, y, R, z, S, u u. s. w. bekannte Functionen von x, x', $x'' \ldots p''$, $p''' \ldots$ sein werden. Die Integration ist sodann in demselben System von Gleichungen wie oben (1) enthalten, und wenn man sich aus ihnen p'', p''' u. s. w. eliminirt denkt, bleibt Eine endliche Gleichung zwischen x, x', x'', x''' etc. zurück. Die *wirkliche* Elimination kann freilich nur ausgeführt werden, in so fern für φ *bestimmte* Functionen angenommen werden; allein dieser Umstand beruhet auf der Natur des Problems und nicht auf der Unvollkommenheit der Analyse, welche, so lange sie beim Allgemeinen stehen bleibt, die Auflösung nur in jener Form geben kann.

Uebrigens sieht man von selbst, dass auf ähnliche Art die Integration *mehrerer* neben einander bestehender partieller Differentialgleichungen in unsrer Gewalt ist.

Es bleibt uns jetzt nichts weiter übrig, als nur noch eine allgemeine Methode für die oben mit (I) bezeichnete Transformation anzugeben. Was für Functionen von x, x', x'' u. s. w. auch immer für y, y', y'' u. s. w. angenommen werden, so ist klar, dass, wenigstens allgemein zu reden, durch Elimination die Grössen x', x'', x''' u. s. w. sich als Functionen von x, y, y', y'' u. s. w. werden darstellen lassen, deren Differentiation $n-1$ Gleichungen hervorbringen wird:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x' &= \xi'\mathrm{d}x + \alpha'\mathrm{d}y + \beta'\mathrm{d}y' + \gamma'\mathrm{d}y'' + \text{ etc.}\\
\mathrm{d}x'' &= \xi''\mathrm{d}x + \alpha''\mathrm{d}y + \beta''\mathrm{d}y' + \gamma''\mathrm{d}y'' + \text{ etc.}\\
\mathrm{d}x''' &= \xi'''\mathrm{d}x + \alpha'''\mathrm{d}y + \beta'''\mathrm{d}y' + \gamma'''\mathrm{d}y'' + \text{ etc. u.s.w.}
\end{aligned}$$

Hier sind also die Coëfficienten ξ', ξ'', ξ''' u. s. w. $\alpha', \alpha'', \alpha'''$ u. s. w. Functionen von x, y, y', y'' u. s. w., und in dieser Beziehung werden wir ihre partiellen Differentialquotienten nach x durch Einschliessung in Klammern unterscheiden: offenbar können jene Grössen auch als Functionen von x, x', x'', x''' u. s. w. angesehen werden, in welcher Beziehung wir den partiellen Differentialquotienten nach x ohne Klammer schreiben wollen, so dass $\left(\frac{\mathrm{d}\xi'}{\mathrm{d}x}\right)$ wohl von $\frac{\mathrm{d}\xi'}{\mathrm{d}x}$ unterschieden werden muss. Dasselbe gilt von $\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\right)$ und $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$ u. s. w. Damit nun Ω nach Substitution jener Werthe von $\mathrm{d}x', \mathrm{d}x'', \mathrm{d}x'''$ u. s. w. die vorgeschriebene Form erhalte, muss offenbar *erstlich* $\mathrm{d}x$ herausfallen, also folgende Bedingungsgleichung [1] Statt finden:

$$0 = p + p'\xi' + p''\xi'' + p'''\xi''' + \text{ etc.}$$

Ferner sollen die Coëfficienten von $\mathrm{d}y, \mathrm{d}y', \mathrm{d}y''$ u. s. w. nemlich

$$\begin{aligned}
p'\alpha' + p''\alpha'' + p'''\alpha''' + \text{etc.} &= A\\
p'\beta' + p''\beta'' + p'''\beta''' + \text{etc.} &= B\\
p'\gamma' + p''\gamma'' + p'''\gamma''' + \text{etc.} &= C, \text{ u.s.w.}
\end{aligned}$$

die Form $\lambda q, \lambda q', \lambda q''$ u. s. w. erhalten, so dass q, q', q'' u. s. w. bloss Functionen von y, y', y'' u. s. w. werden; damit diess geschehe, müssen wir *zweitens* haben [2]:

$$\frac{1}{A}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{1}{B}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{1}{C}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}\right)\text{etc.} = \frac{1}{\lambda}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x}\right)$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x}\right) = {} & p'\left(\frac{\mathrm{d}\alpha'}{\mathrm{d}x}\right) + p''\left(\frac{\mathrm{d}\alpha''}{\mathrm{d}x}\right) + p'''\left(\frac{\mathrm{d}\alpha'''}{\mathrm{d}x}\right) + \text{ etc.}\\
& + \alpha'\left(\frac{\mathrm{d}p'}{\mathrm{d}x}\right) + \alpha''\left(\frac{\mathrm{d}p''}{\mathrm{d}x}\right) + \alpha'''\left(\frac{\mathrm{d}p'''}{\mathrm{d}x}\right) + \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Substituirt man hier

$$\left(\frac{d\alpha'}{dx}\right) = \frac{d\xi'}{dy}, \quad \left(\frac{d\alpha''}{dx}\right) = \frac{d\xi''}{dy}. \text{ etc.}$$

und subtrahirt

$$\begin{aligned} 0 = \frac{dp}{dy} + \xi' \cdot \frac{dp'}{dy} + \xi'' \cdot \frac{dp''}{dy} + \text{etc.} \\ + p' \cdot \frac{d\xi'}{dy} + p'' \cdot \frac{d\xi''}{dy} + \text{etc.} \end{aligned}$$

welche Gleichung entsteht, wenn man [1] nach y differentiirt, so wird

$$\left(\frac{dA}{dx}\right) = \begin{cases} \quad + \alpha' \cdot \left(\frac{dp'}{dx}\right) + \alpha'' \cdot \left(\frac{dp''}{dx}\right) + \text{etc.} \\ - \frac{dp}{dy} - \xi' \cdot \frac{dp'}{dy} - \xi'' \cdot \frac{dp''}{dy} - \text{etc.} \end{cases}$$

Da man nun ferner hat

$$\begin{aligned} \left(\frac{dp'}{dx}\right) &= \frac{dp'}{dx} + \xi' \cdot \frac{dp'}{dx'} + \xi'' \cdot \frac{dp'}{dx''} + \text{etc.} \\ \left(\frac{dp''}{dx}\right) &= \frac{dp''}{dx} + \xi' \cdot \frac{dp''}{dx'} + \xi'' \cdot \frac{dp''}{dx''} + \text{etc.}, \quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dy} &= \alpha' \cdot \frac{dp}{dx'} + \alpha'' \cdot \frac{dp}{dx''} + \alpha''' \cdot \frac{dp}{dx'''} + \text{etc.} \\ \frac{dp'}{dy} &= \alpha' \cdot \frac{dp'}{dx'} + \alpha'' \cdot \frac{dp'}{dx''} + \alpha''' \cdot \frac{dp'}{dx'''} + \text{etc.}, \quad \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

so wird nach diesen Substitutionen

$$\left(\frac{dA}{dx}\right) = k'\alpha' + k''\alpha'' + k'''\alpha''' + \text{etc.}$$

werden, wo

$$\begin{aligned} k' &= (1,0) \quad * \quad + (1,2)\xi'' + (1,3)\xi''' + \text{etc.} \\ k'' &= (2,0) + (2,1)\xi' \quad * \quad + (2,3)\xi''' + \text{etc.} \\ k''' &= (3,0) + (3,1)\xi' + (3.2)\xi'' - \quad * \quad + \text{etc.} \end{aligned}$$

u. s. w. wenn man Kürze halber allgemein

$$\frac{dp^{(\mu)}}{dx^{(\nu)}} - \frac{dp^{(\nu)}}{dx^{(\mu)}}$$

durch (μ, ν) bezeichnet, so dass allgemein $(\mu, \mu) = 0$, und $(\nu, \mu) = -(\mu. \nu)$ wird. Ferner sieht man leicht, dass auch

$$\begin{aligned} \left(\frac{dB}{dx}\right) &= k'\beta' + k''\beta'' + k'''\beta''' + \text{etc.} \\ \left(\frac{dC}{dx}\right) &= k'\gamma' + k''\gamma'' + k'''\gamma''' + \text{etc.} \end{aligned}$$

u. s. w. wird, und dass folglich den Gleichungen [2] werde Genüge geleistet werden, wenn k', k'', k''' u. s. w. resp. den Grössen p'. p'', p''' u. s. w. proportional werden. Setzt man übrigens noch

$$k = \quad * \quad + (0,1)\xi' + (0,2)\xi'' + (0,3)\xi''' + \text{etc.}$$

so hat man die identische Gleichung

$$0 = k + k'\xi' + k''\xi'' + k'''\xi''' + \text{etc.}$$

aus welcher mit [1] verbunden leicht gefolgert wird, dass auch k der Grösse p proportional sein muss; diese letztere Proportionalität kann die Stelle der Gleichung [1] vertreten. Mit Hülfe der $n-1$ Gleichungen

$$\frac{k}{p} = \frac{k'}{p'} = \frac{k''}{p''} = \frac{k'''}{p'''} = \text{u. s. w.}$$

können nun die bisher unbekannten Functionen ξ', ξ'', ξ''' u. s. w., deren Anzahl gleichfalls $n-1$ ist, bestimmt werden; jedoch zeigt eine nähere Betrachtung, dass diese Bestimmung nur für gerade Werthe von n ausführbar ist; für ungerade n wird allemal, sobald die Grössen ξ'. ξ'', ξ''' u. s. w. bis auf eine eliminirt sind, diese von selbst herausfallen und bloss eine *Bedingungsgleichung* zwischen p, p', p'' u. s. w. übrig bleiben. In diesem Umstande liegt der Grund, warum die Verwandlung (I) auf gerade Werthe von n beschränkt werden muss.

Die Bedingungen der Verwandlung I sind also jetzt darauf zurückgeführt, dass die partiellen Differentialquotienten $\left(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}x}\right)$, $\left(\frac{\mathrm{d}x''}{\mathrm{d}x}\right)$, $\left(\frac{\mathrm{d}x'''}{\mathrm{d}x}\right)$ u. s. w., in so fern x', x'', x''' u s. w. als Functionen von x, y, y', y'' u. s. w. betrachtet werden, die jetzt als bekannte Functionen von x, x', x'' u. s. w. dargestellten Werthe ξ', ξ'', ξ''' u. s. w. erhalten. Diess lässt sich auch so ausdrücken: In so fern y, y', y'' u. s. w. als constant und also x', x'', x''' u. s. w. bloss als Functionen der veränderlichen Grösse x betrachtet werden, muss folgenden $n-1$ Differentialgleichungen Genüge geleistet werden

$$\mathrm{d}x' = \xi'\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}x'' = \xi''\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}x''' = \xi'''\mathrm{d}x, \quad \text{u. s. w.}$$

oder wenn man die ursprünglichen Gleichungen vorzieht, aus deren Combination diese eigentlich entstanden waren, folgenden:

$$\begin{array}{llll} * & +\frac{(0,1)}{p}.\,\mathrm{d}x'+\frac{(0,2)}{p}.\,\mathrm{d}x''+\frac{(0,3)}{p}.\,\mathrm{d}x'''+\text{ etc.} \\ =\frac{(1,0)}{p'}.\,\mathrm{d}x & * \quad +\frac{(1,2)}{p'}.\,\mathrm{d}x''+\frac{(1,3)}{p'}\,\mathrm{d}x'''+\text{ etc.} \\ =\frac{(2,0)}{p''}.\,\mathrm{d}x+\frac{(2,1)}{p''}.\,\mathrm{d}x' & * \quad +\frac{(2,3)}{p''}.\,\mathrm{d}x'''+\text{ etc.} \\ =\text{u. s. w.} \end{array}$$

Die Integration dieser Gleichungen gehört aber in das Gebiet der gewöhnlichen Integralrechnung, und wird hier vorausgesetzt; sie wird, allgemein zu reden, $n-1$ von einander unabhängige Constanten enthalten H, H', H'', H''' u. s. w., die als gegebne Functionen von x', x'', x''' u. s. w. erscheinen, so dass man $n-1$ endliche Gleichungen erhält

$$H=X, \quad H'=X', \quad H''=X'', \quad \text{u. s. w.}$$

wenn X, X', X'' u. s. w. diese Functionen vorstellen. Es erhellt also aus dieser Analyse, dass den vorgeschriebenen Bedingungen Genüge geleistet sein wird, wenn man eben diese Functionen für y, y', y'' u. s. w. wählt, oder

$$y=X, \quad y'=X', \quad y''=X'', \quad \text{u. s. w.}$$

setzt.

Eine Bemerkung wollen wir hier noch beifügen. Wir haben mit Vorbedacht gesetzt, dass die Integration, *allgemein zu reden*, $n-1$ von einander unabhängige Constanten gebe. In speciellen Fällen nemlich, d. i. wenn die Coefficienten p, p', p'' u. s. w. so beschaffen sind, dass obige $n-1$ Differentialgleichungen nicht von einander unabhängig sind, sondern eine schon aus Combination der übrigen abgeleitet werden kann, gilt diess nicht mehr: hier wird auch die Bestimmung von ξ', ξ'', ξ''' u. s. w. durch Elimination nicht mehr ausführbar sein. Dieser Fall müsste eigentlich als Ausnahme besonders behandelt werden; wir begnügen uns indessen hier um so mehr mit einer *kurzen Andeutung*, wie man sich dabei verhalten könne, da der Verf. ihn nicht berührt hat. Man braucht nemlich an die Stelle der einen von obigen Differentialgleichungen, die schon in den andern enthalten ist, nur irgend eine andere willkürliche in diesen noch nicht enthaltene linearische Gleichung zwischen $\mathrm{d}x, \mathrm{d}x', \mathrm{d}x''$ u. s. w. zu setzen, um das vorige anwenden zu können. Am bequemsten wird es immer sein, eines von diesen Differentialien $=0$ zu setzen, oder eine von den veränderlichen Grössen x, x', x'' u. s. w.

als constant zu behandeln, z. B. x, wenn nicht zufällig $dx = 0$ schon aus den vorhandenen Gleichungen folgt. In diesem Fall wird eine von den Integralgleichungen sein

$$H = x$$

und wenn man $y = x$ setzt, so lässt sich zeigen, dass in dem verwandelten Ausdrucke von Ω allemal von selbst $q = 0$ wird.

BEMERKUNGEN ÜBER LOGARITHMENTAFELN.

Monatliche Correspondenz, herausg. vom Freih. v. ZACH. 1802 Nov.

2.

Zu dem S. 497 des vorigen Heftes gegebenen Verzeichniss aller Druckfehler der Stereotype-Ausgabe der CALLET'schen logarithm. Tafeln hat Dr. GAUSS die Güte gehabt, noch folgende Errata anzuzeigen:

Log. Sin. de Seconde en Seconde $4^0\ 15'\ 5''$ sin 8.8690096 lies 8.8700096
$4\ \ 15\ \ 6$ sin 8.8690379 — 8.8700379

Log. Sin. de 10 *en* 10 *Secondes* Arc $21^0\ 27'\ 20''$ lies $21^0\ 27'\ 30''$.

Für 33^0 unten statt 59 Deg. lies 56 Deg. (nur in einigen Abdrücken).

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1811 Mai 25.

Logarithmische Tafeln für die Zahlen, Sinus und Tangenten, neu geordnet von MORITZ VON PRASSE, *ordentlichem Professor der Mathematik zu Leipzig.* 80 Seiten in Octav. Leipzig. In Commission bei P. J. Besson.

Diese Tafeln enthalten dasselbe, was die beliebten kleinen Tafeln von LALANDE haben, nemlich die Logarithmen aller Zahlen bis 10000, und die Logarithmen der Sinus und Tangenten für alle einzelnen Minuten des Quadranten; alles auf fünf Decimalen. Allein Hr. v. PRASSE hat dieses bei einem nicht viel grössern Format auf den dritten Theil der Seitenzahl reducirt, indem er die bei den grössern Tafeln übliche Einrichtung anwandte, immer je zehn Logarithmen in Eine Zeile, und die ersten Ziffern nur Einmal anzusetzen, wobei aber alle Differenzen haben wegbleiben müssen. Es scheint also hierdurch an Bequemlichkeit wieder verloren zu gehen, was an Kürze gewonnen wird. Da indessen hierüber nur nach wirklichem Gebrauche geurtheilt werden kann, so hat Rec., der sich an die kleinen LALANDE'schen Tafeln gewöhnt hat, diese eine Zeitlang bei Seite gelegt, und sich der vorliegenden zu bedienen versucht. Er hat gefunden, dass jene kleinen Unbequemlichkeiten von dem Vortheile, viel weniger blättern zu müssen, bei den Logarithmen der Zahlen, die hier auf 31, bei LALANDE auf 111 Seiten stehen, merklich überwogen werden, und er bedient sich daher dieser neuen Tafeln gern. Nicht so hat er es bei den trigonometrischen Tafeln gefunden, die hier 40, bei LALANDE 90 Seiten einnehmen, besonders desswegen, weil bei Hrn. v. PRASSE die Bogen von 0 bis 90 Grad fortlaufen, und daher die Sinus und Tangenten von den Cosinus und Cotangenten getrennt sind. Diess ist um so beschwerlicher, da die Fälle so sehr häufig sind, wo man z. B. von einem Bogen den Sinus und Cosinus zugleich nöthig hat, oder wo man, ohne den Bogen selbst zu brauchen, aus dem Sinus oder der Tangente den Cosinus verlangt. Hier würde er also allemal die LALANDE'schen Tafeln vorziehen, und er hätte gewünscht, dass Hr. v. PRASSE lieber jede Seite noch einmal in der Mitte durch eine Horizontallinie getheilt hätte, um jene unangenehme Trennung zu vermeiden, wobei die Zusammendrängung in den kleinen Raum doch hätte Statt finden können.

Ausserdem unterscheiden sich diese Tafeln noch dadurch, dass allemal die letzte Ziffer eines jeden Logarithmen, wenn sie vergrössert worden ist, mit einer andern Schrift gesetzt ist. Hr. v. P. glaubt dadurch grössere Genauigkeit bei den Rechnungen befördern zu können. Allein da man doch meistens in der Ausübung nur mit Logarithmen zu rechnen hat, die interpolirt werden müssen, so kann man nicht ohne Beschwerde auf jenen Umstand Rücksicht nehmen, und so oft man glaubt, dass die nur auf eine halbe Einheit in der fünften Decimale zuverlässigen Logarithmen nicht genug genaue Resultate geben können, so thut man besser, grössere Tafeln mit sechs oder sieben Decimalen anzuwenden. Rec. kann daher diese Einrichtung, die, allgemein zu reden, allerdings die Genauigkeit der

Rechnung zu *verdoppeln* dienen kann, nicht für sehr nützlich anerkennen, zumal da die Cursivzahlen neben den andern dem Auge unangenehm, und hin und wieder nicht scharf genug sind. Sonst ist der Druck nett; nur werden diejenigen, die dergleichen Tafeln viel brauchen, stärkeres Papier wünschen.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1814 December 19.

Tables logarithmiques pour les nombres, les sinus et les tangentes, disposées dans un nouvel ordre par M. de Prasse, *professeur des mathématiques à Berlin* (zu Leipzig) *corrigées et précédées d'une introduction traduite de l'allemand et accompagnée de notes et d'un avertissement par* M. Halma 1814. Paris. 80 Seiten. Preis Ein Frank.

Ein neuer Abdruck der geschmeidigen von Prasse'schen Tafeln, welche wir in diesen Blättern [1811 Mai 25] angezeigt haben. Unser dortiges Urtheil über die von dem französischen Herausgeber unverändert beibehaltene Anordnung der Tafeln haben wir durch einen drei Jahre länger fortgesetzten Gebrauch derselben in allen Stücken bestätigt gefunden. In Ansehung der Schönheit des Drucks und Papiers scheint uns die Französische Ausgabe der Deutschen eher nachzustehen; doch sind mehrere Druckfehler der letztern hier berichtigt. Wenn man übrigens bei einem Werke dieser Art, das der verstorbene von Prasse gewiss nicht Gewinnes halber, sondern zum Dienste der Wissenschaft auf seine Kosten unternahm, auch nicht weiter untersuchen will, in wie fern Hr. Halma zu einem neuen Abdrucke berechtigt war, so kann man doch nicht umhin, sich zu wundern, dass derselbe, aus Besorgniss seinerseits wieder nachgedruckt zu werden, die einzelnen Exemplare mit seinem Namenszuge bezeichnet hat, und die Nachdrucker gerichtlich zu belangen droht.

Monatliche Correspondenz, herausg. vom Freih. v. Zach. 1812. Nov.

Tafel zur bequemern Berechnung des Logarithmen der Summe oder Differenz zweier Grössen, welche selbst nur durch ihre Logarithmen gegeben sind. Von Herrn Prof. Gauss.

Je weiter sich beständig die Geschäfte der rechnenden Astronomen ausdehnen, desto wichtiger wird ihnen jede, wenn auch an sich nur kleine Erleichterung derselben. Die *Monatliche Correspondenz* hat sich hierin schon vielfältige Verdienste erworben, indem sie mancherlei Tafeln aufgenommen hat, deren kleiner Umfang nicht verstattete, sie besonders herauszugeben. Ich lege daher gern in derselben eine kleine Tafel nieder, die freilich nicht eigentlich astronomisch ist, aber besonders doch den rechnenden Astronomen willkommen sein wird, und die etwa in Zukunft sehr zweckmässig mit einem neuen Abdruck der kleinen La Lande'schen Tafeln verbunden werden könnte. Das Geschäft, was sie erleichtern soll, kommt bei astronomischen Rechnungen alle Augenblick vor; es erfordert sonst ein dreimaliges, oder wenn man eine leichte Verwandlung anwendet, doch nothwendig ein zweimaliges Aufschlagen in den Logarithmen-Tafeln, was hier auf ein einziges gebracht wird. Die Idee dazu hat Leonelli, so viel ich weiss, zuerst angegeben; allein seine Meinung war, eine solche Tafel für Rechnungen mit 14 Decimalen zu construiren, und gerade dies kann ich nicht zweckmässig finden. Sie würde bei einer solchen Ausdehnung einen grossen Folioband füllen, ihre Berechnung würde eine ungeheuere Arbeit und Zeit erfordern, und sie würde fast nie von Nutzen, und immer nur von wenig Nutzen sein, da so scharfe Rechnungen so selten — in der eigentlichen practischen Astronomie nie — vorkommen, dass die verhältnissmässig doch nur kleine Erleichterung die Construction, ja nicht einmal den Ankauf einer solchen Tafel belohnen würde. Ich habe diese Tafel zu meinem eigenen Gebrauch für Rechnungen mit 5 Decimalen, die in der Ausübung die häufigsten sind, schon vor vielen Jahren construirt, und die, wenn auch *jedesmal* kleine, doch wenn sie viele Tausendmale wiederkehrt, sehr erhebliche Erleichterung, hat mir die darauf gewandte Mühe bereits reichlich ersetzt. Es wäre zu wünschen, dass jemand sich der Arbeit unterzöge, eine ähnliche Tafel in 10 oder 100 mal so grosser Ausdehnung für Rechnungen mit 7 Decimalen zu construiren, die als ein sehr schätzbares Supplement den gewöhnlichen Logarithmen-Tafeln beigefügt werden könnte.

Die Einrichtung der aus drei Columnen bestehenden Tafel ist sehr einfach. Die erste Columne A geht von 0 bis 2 durch alle Tausendtheile, von da bis 3,4 durch alle Hunderttheile, und von 3,4 bis 5,0 durch alle Zehntheile; mit 5,0 kann die Tafel für 5 Decimalen als geschlossen angesehen werden, da die zweite Columne für diesen und für grössere Werthe von A verschwindet, und die Zahlen der dritten Columne denen der ersten gleich werden. Setzt man eine Zahl der ersten Columne $A = \log m$, so ist in der zweiten Columne $B = \log(1+\frac{1}{m})$ und in der dritten Columne $C = \log(1+m)$, so dass immer $C = A + B$. Man kann also auch die Zahlen der drei Columnen als die doppelten Logarithmen der Tangenten, Cosecanten und Secanten der Winkel von 45^0 bis 90^0 betrachten. Die Anwendung davon ist nun folgende:

I. *Aus den Logarithmen zweier Grössen a, b den Logarithmen der Summe zu finden.*

Es sei $\log a$ der grössere Logarithm., man gehe mit $\log a - \log b$ in die Columne A ein, und nehme daneben entweder aus der zweiten Columne B, oder aus der dritten Columne C. Man hat dann

$$\log(a+b) = \log a + B$$

oder

$$\log(a+b) = \log b + C.$$

II. *Aus den Logarithmen zweier Grössen a, b den Logarithmen der Differenz zu finden.*

Erstens, ist die Differenz der Logarithmen $\log a - \log b$ grösser als 0,30103, so suche man dieselbe in C, wodurch man hat

$$\log(a-b) = \log a - B$$

oder

$$\log(a-b) = \log b + A$$

Zweitens, ist $\log a - \log b$ kleiner als 0,30103, so suche man es in B, wodurch wird

$$\log(a-b) = \log a - C$$

oder

$$\log(a-b) = \log b - A$$

Es gibt daher bei jeder Aufgabe zwei Auflösungsarten; man thut aber wohl, sich an eine bestimmte zu gewöhnen, um sich den Gebrauch der Tafel desto leichter mechanisch zu machen. Mir ist dies bei der jedesmal zuerst angesetzten Manier am bequemsten gefallen.

Beispiele:

I. Aus $\log a = 0{,}36173$ und $\log b = 0{,}23045$ den Logarithmen der Summe zu finden, sucht man $0{,}13128$ in A, wobei man findet

B	0,24033	C	0,37161
$\log a$	0,36173	$\log b$	0,23045
$\log(a+b)$ ..	0,60206		0,60206

II. Aus $\log a = 0{,}89042$, und $\log b = 0{,}24797$ den Logarithm. der Differenz zu finden. Da $\log a - \log b = 0{,}64245$ grösser als $0{,}30103$, so sucht man es in der Columne C, woneben man findet

B	0,11227	A	0,53018
$\log a$	0,89042	$\log b$	0,24797
$\log(a-b)$ ..	0,77815		0,77815

III. Aus $\log a = 0{,}25042$, $\log b = 0{,}19033$ den Logarithmen der Differenz zu finden. Hier gibt $\log a - \log b = 0{,}06009$ in B aufgesucht.

C	0,88871	A	0,82862
$\log a$	0,25042	$\log b$	0,19033
$\log(a-b)$ ..	9,36171		9,36171

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1817 October 4.

Abgekürzte Logarithmisch-Trigonometrische Tafeln, mit neuen Zusätzen zur Abkürzung und Erleichterung trigonometrischer Rechnungen, herausgegeben von Joh. Pasquich, *Director der Königl. Ofner Sternwarte.* Leipzig. In der Weidmannschen Buchhandlung 1817. XXXII und 228 Seiten in Octav. (Auch mit Lateinischem Titel.)

Kleinere logarithmische Tafeln, mit fünf Decimalen, sind bei denjenigen, die viel mit Zahlenrechnungen zu verkehren haben, besonders bei den Astronomen, sehr beliebt, weil in der That die Fälle, wo sie ausreichen, häufig, ja die häufigeren, sind, und durch ein bequemes Format und eine mässige Grösse die Arbeit sehr erleichtert wird. Die kleinen netten LALANDE'schen und die PRASSE'schen Tafeln sind in Jedermanns Händen; bei letztern ist das Zusammendrängen in einen kleinen Raum so weit wie möglich getrieben, zum Theil aber allerdings auf Kosten der Bequemlichkeit. Die Herausgabe der vorliegenden auch nur auf fünf Stellen gehenden Tafeln ist, wie in der Vorrede berichtet wird, durch den von GAUSS in der monatlichen Correspondenz 1812 geäusserten Wunsch veranlasst, dass die daselbst zuerst abgedruckte Tafel zur bequemen Berechnung der Logarithmen der Summen und Differenzen einer neuen Ausgabe der LALANDE'schen Tafeln einverleibt werden möchte. Der neue Abdruck dieser Hülfstafel in gegenwärtiger Sammlung wird denjenigen angenehm sein, denen der erste Abdruck nicht zu Gebote stand, oder denen der Gebrauch derselben in der M. C. zu beschwerlich war. Ausserdem zeichnet sich diese Sammlung noch durch eine neue von Hrn. PASQUICH berechnete den trigonometrischen Tafeln beigefügte Hülfstafel aus, deren wir unten mit mehrern erwähnen werden.

Die Logarithmen der Zahlen gehen, wie bei LALANDE und VON PRASSE bis 10000, und sind, so wie bei jenen, hier in ihrer natürlichen Ordnung gedruckt. Doch vermisst man ungern ein Paar Erleichterungsmittel, welche bei den LALANDE'schen Tafeln Statt finden; es sind nemlich theils die *Differenzen* nicht beigefügt, theils die untersten Logarithmen jeder Spalte oben in der nächstfolgenden nicht wiederholt. In den PRASSE'schen Tafeln findet man zwar diese Bequemlichkeit auch nicht, allein dort werden sie durch den kleinen Raum der Tafel mehr als ersetzt, da jene auf 24 Seiten eben dasselbe liefern, was bei PASQUICH auf 56 Seiten eines beträchtlich grössern Formats steht. Dies scheinen zwar nur Kleinigkeiten, und sie sind es auch für alle, die nur dann und wann einmal Logarithmen aufzuschlagen haben, aber nicht für solche, die Logarithmen-Tafeln beständig zur Hand haben müssen.

In den trigonometrischen Tafeln enthält immer jede Seite zur linken die Logarithmen der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten, und zwar so, dass je drei Seiten zwei Grade fassen. Diese Einrichtung, welche durch das gewählte Format und die Schrift herbeigeführt wurde, scheint uns etwas unbequem;

wir hätten entweder ein kleineres Format, immer mit einem halben Grad auf der Seite, oder ein etwas weniges längeres mit kleinerer Schrift, so dass ein ganzer Grad auf die Seite gekommen wäre (wie in SHERVINS Tafeln) vorgezogen. Von diesen Logarithmen sind immer nur die vier, drei oder zwei letzten Ziffern, so lange die vorgehenden ungeändert bleiben, abgedruckt, wodurch dem Copiisten, dem Setzer und dem Corrector die Arbeit erleichtert wurde, und die Tafeln ein reinlicheres Ansehen erhalten: dem ungeachtet können wir diese Einrichtung bei Tafeln, die zum täglichen Gebrauch bestimmt sind, nicht unbedingt billigen, da das Auge immer die, wenn auch nur kleine, Mühe hat, in der Columne erst in die Höhe zu gehen, und die übrigen Ziffern zu finden. Die Differenzen der Logarithmen findet man hier sogleich mit 60 dividirt; eine Einrichtung, welche auch in einigen andern Tafeln gewählt ist, in der Absicht, das Interpoliren zu erleichtern. Ob diese Erleichterung wirklich Statt findet, oder nicht, wird von der Gewöhnung des Rechners abhängen. Rec. findet in dieser Beziehung die LALANDEschen Tafeln, wo die ganzen Differenzen angesetzt sind, wenigstens nicht unbequemer. Bei der Kleinheit der Zahlen, mit denen zu operiren ist, macht ein etwas geübter Rechner die zum Behuf des Interpolirens nöthigen Operationen leicht im Kopfe, und findet fast immer diesen oder jenen Local-Vortheil zu benutzen Gelegenheit. Dabei hat man noch die angenehme Gewissheit, sein Interpolations-Resultat so scharf zu erhalten, als es möglich ist; bei der von Hrn. PASQUICH gewählten Einrichtung hingegen ist, allgemein zu reden, der Fehler des Interpolirens etwas grösser, welches indessen ausführlicher zu entwickeln hier nicht der Ort ist.

Die Seite zur rechten enthält bei den trigonometrischen Tafeln die Quadrate der Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten, welche zur Erleichterung des Interpolirens dienen sollen, wenn man aus dem Logarithmen eines Sinus, Cosinus, einer Tangente oder Cotangente den Logarithmen einer der drei andern trigonometrischen Functionen verlangt, ohne den Bogen selbst nöthig zu haben. Diese Operation kömmt allerdings äusserst häufig vor, und das gewöhnliche Verfahren erfordert beim Interpoliren eine Multiplication und eine Division, wo mit Hrn. PASQUICH's Hülfstafel eine Multiplication ausreicht. Es ist nemlich, für das Interpoliren hinreichend genau,

$$\Delta \log \cos\varphi \;=\; -\operatorname{tang}\varphi^2 \,.\, \Delta \log \sin\varphi$$
$$\Delta \log \operatorname{tang}\varphi = -\Delta \log \operatorname{cotang}\varphi = (1+\operatorname{tang}\varphi^2) \,.\, \Delta \log \sin\varphi$$
$$\Delta \log \sin\varphi \;=\; -\operatorname{cotang}\varphi^2 \,.\, \Delta \log \cos\varphi$$
$$\Delta \log \operatorname{tang}\varphi = -\Delta \log \operatorname{cotang}\varphi = -(1+\operatorname{cotang}\varphi^2) \,.\, \Delta \log \cos\varphi$$
$$\Delta \log \sin\varphi \;=\; \cos\varphi^2 \,.\, \Delta \log \operatorname{tang}\varphi = -\cos\varphi^2 \,.\, \Delta \log \operatorname{cotang}\varphi$$
$$\Delta \log \cos\varphi \;=\; -\sin\varphi^2 \,.\, \Delta \log \operatorname{tang}\varphi = \sin\varphi^2 \,.\, \Delta \log \operatorname{cotang}\varphi$$

Inzwischen muss Rec. gestehen, dass er dem ungeachtet das gewöhnliche Verfahren zum Interpoliren nicht bloss eben so bequem, sondern sogar bequemer findet. Theils wird es immer erst einige Mühe kosten, sich die obigen sechs Formeln so mechanisch zu machen, dass man sie ohne alles Besinnen oder ohne ein besonderes Blatt neben sich zu legen, richtig anwendet; theils ist es beschwerlich, den Multiplications-Factor erst auf der andern Seite aufzusuchen, oder vielmehr zusammen zu suchen, da die oben erwähnte Trennung der ersten und letzten Ziffern auch hier beim Abdruck gewählt ist; endlich hat man bei dem gewöhnlichen Verfahren es immer nur mit kleinen Zahlen zu thun, mit denen man leicht im Kopf rechnet, da hingegen die Quadrate in Pasquich's Tafeln mit fünf Decimalen angesetzt sind, die man freilich nicht alle braucht, aber die gerade deswegen, wie jeder erfahrne Rechner weiss, störend sind. Ausserdem können wir hier nicht unerwähnt lassen, dass das gewöhnliche Verfahren, allgemein zu reden, *schärfer* ist, als diese künstlichere Interpolation (die Gründe dieser Behauptung, von der man vielleicht bei einer weniger genauen Prüfung gerade das Gegentheil glauben könnte, würden für diesen Ort zu weitläuftig sein). Wir begnügen uns das Gesagte bloss durch ein Beispiel zu erläutern. Soll zu $\log\cos\varphi = 9{,}92478$ der $\log\operatorname{tang}\varphi$ gesucht werden, so findet man den Proportionaltheil aus Pasquich's Tafel durch die Berechnung von $4\times(1+2{,}4170) = 13{,}668$ oder am nächsten $= 14$, also $\log\operatorname{tang}\varphi = 9{,}80850$, während die gewöhnliche Methode den Proportionaltheil eben so bequem durch die Entwicklung von $\frac{4\times 28}{9} = 12\frac{4}{9}$, am nächsten $= 12$, und den gesuchten Logarithmen $= 9{,}80848$ gibt. In diesem Beispiele ist auch das Resultat der gewöhnlichen Methode das schärfere; in andern Fällen kann auch das umgekehrte Verhältniss Statt finden, aber im Durchschnitt wird der Vortheil in dieser Beziehung auf Seiten des gewöhnlichen Verfahrens sein. Uebrigens wollen wir nicht in Abrede stellen, dass dieser Theil der Tafel, wenn auch das Interpoliren nicht dadurch gewinnt, doch zuweilen für andere Zwecke angenehm sein könne; allein die Bequemlichkeit logarithmischer Handtafeln, die man zum täglichen Gebrauch bestimmt, verliert natürlich in demselben Verhältniss, als ihr Umfang vergrössert wird. Wir bemerken noch, dass in dem ersten Grade die trigonometrischen Logarithmen von 10 zu 10 Secunden bis 56 Minuten, und in den vier letzten Minuten von 20 zu 20 Secunden angesetzt sind.

Die Gaussische Tafel für die Logarithmen der Summen und Differenzen ist ganz unverändert abgedruckt. Inconsequent scheint es uns aber zu sein, wenn der Verf. in der Einleitung den Nutzen einer ähnlichen Tafel mit sieben Decimalen in Zweifel zieht. Ist anders eine solche Tafel zweckmässig eingerichtet, so ist ihr Nutzen bei scharfen Rechnungen gerade eben so gross, als der Nutzen der hier wieder abgedruckten Tafeln bei Rechnungen mit fünf Decimalen: bei den kleinern Tafeln, eben so wie bei den grössern, wird der dadurch zu erhaltende Zeitgewinn natürlich nur solchen Personen fühlbar, die *viel* zu rechnen haben. Wir haben jetzt bald die Erscheinung einer solchen grössern Tafel, von einer geschickten Hand berechnet, zu erwarten.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1819 Januar 30.

[E. A. Matthiessen.] *Tafel zur bequemern Berechnung des Logarithmen der Summe oder Differenz zweier Grössen, welche selbst nur durch ihre Logarithmen gegeben sind.* Altona 1818. Bei J. F. Hammerich. Einleitung 33 S. Die Tafeln 212 S. in Quart. (Titel und Einleitung auch in lateinischer Sprache.)

Bei etwas ausgedehnten Rechnungen ist jede Abkürzung schätzbar; auch solche Hülfsmittel, die bei einer einmaligen Anwendung nur einen kleinen Vortheil gewähren, werden durch oft wiederkehrende Benutzung wichtig. Ein solches Erleichterungsmittel ist eine im Jahr 1812 in der monatlichen Correspondenz zuerst gegebene Hülfstafel, um aus den Logarithmen zweier Grössen unmittelbar die Logarithmen ihrer Summe oder Differenz abzuleiten: man erreicht dadurch mit Einem Aufschlagen, wozu man sonst ein dreimaliges oder wenigstens zweimaliges nöthig hätte. Im Besitz einer solchen Tafel wird man mit Vortheil manche

Formeln in ihrer ursprünglichen Gestalt beibehalten können, denen man sonst wohl, durch Einführung von Hülfswinkeln, eine zur Rechnung bequemere Form zu geben sucht. Die erwähnte Tafel war nur für Rechnungen mit fünf Decimalen bestimmt: eben weil solche Rechnungen am häufigsten vorkommen, lag dies Bedürfniss am nächsten. Der bei Bekanntmachung derselben geäusserte Wunsch, dass jemand sich der Mühe unterziehen möchte, eine ähnliche Tafel in grösserm Umfange und mit sieben Decimalen zu berechnen, hat die vorliegenden Tafeln veranlasst, deren Verfasser, Hr. Mathiessen, sich durch diese mühsame Arbeit ein Recht auf den Dank aller derer erworben hat, die viel mit logarithmischen Rechnungen zu thun haben. Die Vorrede gibt Nachricht von der Methode, deren sich der Verfasser zur Berechnung bedient hat, und von seiner lobenswerthen Sorgfalt, die Tafel auch in der letzten Ziffer durchgehends zuverlässig zu machen. Bei Tafeln dieser Art ist auch die äussere Einrichtung keinesweges gleichgültig. Der Verf. hatte anfangs eine Anordnung im Sinn, deren Zweck war, die Tafel in den möglich kleinsten Raum zusammenzudrängen. Allein da die ganze Bestimmung der Tafel nur dahin geht, die Rechnungen zu *erleichtern*, so würde jene ganz verfehlt werden, wenn die Anordnung der Tafel zu künstlich wäre, und eine beschwerliche Aufmerksamkeit erforderte. Der Verf. entschloss sich daher bei reiferer Ueberlegung mit Recht, jene wenn gleich sinnreiche Anordnung bei Seite zu setzen, und statt derselben eine einfachere zu wählen, obgleich der Umfang des Bandes dadurch beträchtlich vergrössert wurde. Vielleicht wird mancher, der die Tafeln gebraucht, mit uns wünschen, dass der Verf. hierin lieber noch etwas weiter gegangen wäre, und die Columne B und C jede vollständig hätte abdrucken lassen, deren vier letzte, beiden gemeinschaftliche, Ziffern nur einmal dastehen. Der Ueberblick würde dadurch noch bequemer geworden sein, und das Format wäre auch dadurch nicht vergrössert, wenn etwas kleinere Schrift gewählt wäre, welches ohne Nachtheil, vielleicht selbst mit Vortheil für das gefällige Ansehen, hätte geschehen können. Auch die fast zu strenge Oekonomie mit den Ziffern, wo in der Regel nur die vierte abgedruckt ist, so lange die vorhergehenden ungeändert bleiben, und mit den Proportionaltheilen, die immer nur Einmal angesetzt sind, und also zuweilen ein Zurück- oder Vorausblättern nöthig machen, thut der Bequemlichkeit einigen Eintrag. Endlich hätten wir gewünscht, dass der letzte Theil der Tafel S. 212 in einer zehnmal grössern Ausdehnung gegeben wäre, um die zweiten Differenzen unmerklich zu machen; es wäre dazu nur Eine Seite mehr erforderlich gewesen. Alle diese Bemerkungen, die zum Theil mit auf individueller Gewöhnung beruhen mögen, sollen das Verdienstliche dieser Arbeit keinesweges schmälern, welches gewiss von allen anerkannt wird, die von derselben Gebrauch zu machen Gelegenheit nehmen werden.

Astronomische Nachrichten, herausg. v. SCHUMACHER. Nr. 24. Beilage 2. 1822 Dec.

GAUSS an SCHUMACHER.

Göttingen 1822. Nov. 25.

—— Den von Herrn Professor ENCKE geäusserten Wunsch Logarithmentafeln mit 6 Ziffern betreffend, habe ich schon öfters gehegt, und Sie werden sich gewiss vielfältigen Dank erwerben, wenn Sie solche veranlassten. Alles, was Herr ENCKE über das Aeussere und Innere sagt, unterschreibe ich als meine eigene Meinung, nur die Proportionaltheile scheinen mir überflüssig, und alles Ueberflüssige schadet dem leichten übersichtlichen Gebrauch. Bei solchen Dingen hängt freilich manches von individueller Gewöhnung ab; indessen wenn einige, die Gebrauch von Tafeln machen, anders gewöhnt sind als ich, so sind doch auch wohl andere eben so gewöhnt; und daher berühre ich noch einen Umstand, nemlich die Abänderung der 4^{ten} Ziffer für die Logarithmentafeln. Sie kennen die Einrichtung, die in dieser Beziehung in CALLET's Tafeln gemacht ist, und einige haben dies als eine Verbesserung betrachtet. Ich gestehe, dass ich der entgegengesetzten Meinung bin, und die *regelmässige* Abtheilung von 5 zu 5 Zeilen durch horizontale Striche, wie sie in SHERWIN's und andern Tafeln ist, für etwas, bei häufigem Gebrauche *viel* wesentlicheres und bequemeres halte, daher ich mich der CALLET'schen Logarithmen auch niemals bedienen mag. Bei meiner vieljährigen Praxis weiss ich auch nicht einen einzigen Fall, wo der Gebrauch der SHERWIN'schen Tafeln mich bei der 4^{ten} Ziffer zu einem Rechnungsfehler verleitet hätte, daher ich auch auf die Sternchen bei VEGA und andern Tafeln gar keinen Werth lege, und des bessern Papiers und der schönern Ziffern wegen, mich lieber an die SHERWIN'schen halte. Wer auf solche Warnungszeichen einen Werth setzt, kann sich leicht in seinem Exemplare an den betreffenden Stellen rothe oder grüne Punkte machen. —

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1828 Januar 19.

Table of logarithms of the natural numbers, from 1 *to* 108000, *by* Charles Babbage. *Stereotyped. London. Printed for J. Mawman.* 1827. 202 S. gr. 8.

Dieser neue Abdruck der Logarithmentafeln zeichnet sich vor andern durch eine geflissentlichere Beachtung kleiner Nebenumstände aus. Wer nur von Zeit zu Zeit einmal veranlasst wird, einige Logarithmen in den Tafeln aufzusuchen, verlangt von ihnen hauptsächlich nur möglich grösste Correctheit. Allein für andere, denen die Tafeln ein tägliches Arbeitsgeräth sind, bleiben auch die geringfügigsten Umstände, die auf die Bequemlichkeit des Gebrauchs Einfluss haben können, nicht mehr gleichgültig. Farbe, Stärke und Schönheit des Papiers; Format; Grösse, Schärfe und gefälliger Schnitt der Typen: Beschaffenheit der Druckerschwärze; Anordnung der Zahlen, um das was man sucht ohne Ermüdung des Auges schnell und sicher zu finden; Vorhandensein von allem, was man braucht, aber auch Abwesenheit von allem, was man nicht brauchen mag, und was sonst die leichte Uebersicht nur stören würde, alle diese Umstände erhalten eine gewisse Wichtigkeit bei einem Geschäfte, welches man täglich hundert mal wiederholt. Freilich hängt dabei manches von der Individualität des Rechnenden und von seiner Gewohnheit ab, so dass nicht wohl Eine Ausgabe allen am besten gefallen kann; dem Kurzsichtigen ist ein grosses Format beschwerlich, und er zieht kleinere Typen vor, während es sich bei dem Weitsichtigen umgekehrt verhält; der weniger geübte Rechner legt einen Werth auf diesen oder jenen Zusatz, welchen der geübtere, der mehrere Theile der Operationen ohne Anstrengung im Kopf macht, lieber wegwünscht, weil alles Ueberflüssige nur störend wirkt. Inzwischen gibt es doch auch allgemeingültige Regeln. Der Herausgeber der vorliegenden Tafeln hat in der Vorrede ein Dutzend solcher Vorschriften zusammengestellt, die er aus der Vergleichung vieler Logarithmentafeln abgeleitet hat, und die meistens sogleich von selbst einleuchten, obwohl einige davon nur unter Einschränkungen anzuerkennen sein möchten.

Was die gegenwärtige Ausgabe der Logarithmentafeln am meisten von andern unterscheidet, ist, dass sie auf farbiges (gelbes) Papier abgedruckt ist: man gewöhnt sich daran bald, und findet es, besonders zum Gebrauche bei Licht, angenehmer als weisses. Die Anordnung ist im Wesentlichen die gewöhnliche. Nach einem Wechsel der dritten Ziffer ist für die übrigen Logarithmen in derselben Zeile die vierte Ziffer mit andern Typen, etwa halb so gross wie die übrigen, gesetzt. Für Ref., der überhaupt auf solche Warnungszeichen wenig Werth setzt, haben diese Typen, auch nach einem Gebrauch von ein paar Monaten, noch nicht das fremdartig Störende verloren, und er würde den in Vega's Tafel gebrauchten Sternchen, oder den Punkten, die in die bessern Exemplare von Taylor's Tafeln eingedruckt sind, den Vorzug geben. Sternchen hat der Herausgeber desswegen nicht gebrauchen wollen, weil sonst die Columnen zu breit geworden, und dann für die Verwandlung der Zahlen, als Secunden betrachtet, in Grade, Minuten und Secunden kein Raum geblieben wäre. Referent würde diese Verwandlungscolumne (eben so eingerichtet, wie man sie aus Callet's Tafeln kennt) gern entbehrt haben; ein geübter Rechner wird nicht, einer so leicht selbst im Kopfe zu machenden Verwandlung wegen, erst die Tafeln aufblättern; zweckmässig ist es aber, dass der Herausgeber diese Columnen wenigstens durch eine starke Linie von der Logarithmentafel geschieden hat. Endlich ist der Fall wo die letzte Ziffer eine Vergrösserung erlitten hat, (weil der weiter fortlaufende Logarithm als achte Ziffer 5 oder eine grössere gehabt haben würde) durch einen unter diese siebente Ziffer gesetzten Punkt ausgezeichnet; diese Einrichtung ist wenigstens besser, als die von Prasse gewählte, durch Typen von anderer Form; doch behalten auch so einige Ziffern noch etwas unangenehm Fremdartiges, was nach unserer schon bei Anzeige der Prasse'schen Tafeln in diesen Blättern [1811 Mai 25] erwähnten Ansicht durch den Nutzen nicht aufgewogen wird.

Uebrigens lassen Typen und Papier bei dieser Ausgabe der Logarithmentafeln nichts zu wünschen übrig, und auf die Correctheit ist die ausgezeichnetste Sorgfalt verwandt. Bei einer Ausgabe, wo auf die kleinen die Bequemlichkeit des Gebrauchs angehenden Umstände so viel Sorgfalt verwandt ist, fällt die spärliche Ansetzung der Proportionaltheile auf; häufig muss man, um diejenigen zu finden, die man eben braucht, voraus- oder zurückblättern.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1831 März 31.

Tabulae logarithmicae et trigonometricae notis septem decimalibus expressae. In forma minima. Purgatae ab erroribus praecedentium tabularum cura F. K. HASSLER. New York. G. C. und H. Carvill.

Diese transatlantische Ausgabe der Logarithmentafeln zeichnet sich durch eine ganz vorzügliche Nettigkeit des stereotypisch ausgeführten Drucks aus. Sie enthält, durchgehends auf sieben Decimalstellen, die Logarithmen der Zahlen bis 100000, die Logarithmen der Sinus, Tangenten, Cosinus und Cotangenten im ersten Grade durch alle Secunden, in den beiden folgenden von zehn zu zehn Secunden, und für alle übrigen Grade des Quadranten von dreissig zu dreissig Secunden. Ausserdem die natürlichen Sinus und Tangenten durchgehends von dreissig zu dreissig Secunden. Und diess alles in dem Raum von 312 Seiten in klein Octav oder gross Duodez. Eine solche Zusammendrängung war freilich nur durch sehr kleine Typen zu erreichen, welche, bei aller Schönheit, doch wohl für die meisten nicht kurzsichtigen Augen zum täglichen Gebrauch fast zu klein sein möchten. Auf die Correctheit scheint eine ganz besondere Sorgfalt gewandt zu sein, wenigstens ist uns bei dem eine Zeitlang versuchten häufigen Gebrauch gar kein Druckfehler aufgestossen.

VEGA und HÜLSSE. Sammlung mathematischer Tafeln. 1840.

Auflösung quadratischer Gleichungen in der Form, dass nicht die Coëfficienten der Gleichung selbst, sondern deren Logarithmen gegeben sind, und dass man auch nicht ihre Wurzeln selbst (oder eine derselben), sondern vielmehr deren Logarithmen zu anderweitiger Benutzung nöthig hat.

Die Ausführung dieses Geschäfts, bloss mit Hülfe der gewöhnlichen Logarithmentafeln, erfordert nothwendig ein vierfaches Aufschlagen in denselben; man reicht mit einem zweifachen Aufschlagen aus, wenn man entweder die trigonometrischen Logarithmentafeln oder die Tafeln für Logarithmen von Summen und

Differenzen benutzt; man reicht mit einem einfachen Aufschlagen aus, wenn letztere Tafel, wie hier, durch die Zusatzcolumnen D, E und F erweitert ist.

Die vierte Columne, D, enthält $B+C$, die fünfte, E, enthält $A+C$, die sechste, F, enthält $B-A$. Nehmen wir an, dass die Zahlen selbst, denen die Logarithmen A, B, C zugehören, beziehungsweise a, b, c sind, so enthielte also die vierte Columne die Logarithmen von bc, die fünfte die von ac, die sechste die von $\frac{b}{a}$.

Es mag noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass die Logarithmen in der sechsten Columne F, welche bis zu $A = 0{,}208$ positiv sind, von $A = 0{,}209$ an negativ werden (S. 640); es ist ziemlich gleichgültig, ob sie in dieser negativen Form oder, wie hier, durch ihre Complemente angesetzt werden; also könnte z.B. für $A = 0{,}367$ unter F stehen $-0{,}21180$ oder, wie hier, $9{,}78820$.

Für die Anwendung dieser Zusatzcolumnen auf die Auflösung der quadratischen Gleichung

$$pxx+qx+r = 0$$

selbst müssen vier verschiedene Fälle unterschieden werden, nemlich

I. p und r haben gleiche Zeichen und $\frac{qq}{pr}$ ist nicht kleiner als 4;

II. p und r haben gleiche Zeichen und $\frac{qq}{pr}$ ist kleiner als 4;

III. p und r haben entgegengesetzte Zeichen und $-\frac{pr}{qq}$ ist grösser als 2;

IV. p und r haben entgegengesetzte Zeichen und $-\frac{pr}{qq}$ ist kleiner als 2.

Der Fall, wo $-\frac{pr}{qq} = 2$ ist, kann sowohl zu III. als zu IV. gezählt werden.

Im Falle II. sind die Wurzeln imaginär, in den übrigen erhält man jede der beiden Wurzeln auf eine doppelte Art. Durch folgendes Schema ist alles leicht zu übersehen, wobei

$$\frac{q}{p} = h, \quad \frac{r}{q} = g$$

gesetzt ist, theils zur Abkürzung, theils weil die Rechnung wirklich in dieser Form am bequemsten geführt wird.

		Erste Wurzel.	*Zweite Wurzel.*
I.	$+\frac{h}{g} = bc = d$	$-\frac{h}{b} = -gc$	$-gb = -\frac{h}{c}$
II.	$+\frac{h}{g} < 4$	Imaginär.	Imaginär.
III.	$-\frac{g}{h} = ac = e$	$+ha = -\frac{g}{c}$	$+\frac{g}{a} = -hc$
IV.	$-\frac{g}{h} = \frac{b}{a} = f$	$+\frac{h}{a} = -\frac{g}{b}$	$+ga = -hb$

Die Beweise der Vorschriften wird sich jeder leicht selbst entwickeln können. Ein Beispiel des Gebrauchs mag zum Ueberfluss noch hergesetzt werden.

$$
\begin{array}{lrl}
\text{Es sei gegeben} & \log p = & 0{,}69897 \\
& \log q = & 0{,}84510 \\
& \log r = & 0{,}77815\,\mathrm{n} \\
\text{Also} & \log h = & 0{,}14613 \\
& \log g = & 9{,}93305\,\mathrm{n} \\
& \log(-\frac{g}{h}) = & 9{,}78692
\end{array}
$$

Man sieht sogleich, dass hier der Fall IV. statt findet und also 9,78692 in der sechsten Columne unter $B-A$ oder F zu suchen sein wird. Was von der Tafel (S. 643) hier nöthig wäre ist nur Folgendes:

A	B	$B-A$ oder F
0,367	0,15520	9,78820
0,368	0,15489	9,78689

Zu $F = 9{,}78692$ gehört also

$A = 0{,}36798 = \log a$, woraus $\log \frac{h}{a} = 9{,}77815$, $\log ga = 0{,}30103\,\mathrm{n}$ oder
$B = 0{,}15490 = \log b$, woraus $\log(-\frac{g}{b}) = 9{,}77815$, $\log(-hb) = 0{,}30103\,\mathrm{n}$.

Astronomische Nachrichten. Nr. 756. 1851. Mai 2.

Einige Bemerkungen zu VEGA's *Thesaurus Logarithmorum, von Herrn Geheimen Hofrath* GAUSS.

Der *Thesaurus Logarithmorum* von VEGA ist bekanntlich seinem grössten Theile nach ein neuer Abdruck der grössern VLACQ'schen Logarithmentafeln. In der Vorrede führt VEGA eine nicht unbeträchtliche Anzahl von Fehlern im Original an, die er verbessert hat, mit dem Zusatz, dass er ausser diesen noch eine sehr grosse Menge von Unrichtigkeiten an der letzten Ziffer der Logarithmen berichtigt habe, zu dem Betrage von einer, zwei, drei, vier Einheiten. Mit gleicher Sorgfalt seien auch die neu hinzugekommenen Tafeln (namentlich also die in den beiden ersten Graden für alle einzelnen Secunden angegebenen Logarithmen der trigonometrischen Grössen) berechnet, geprüft und berichtigt. VEGA scheint nun mit der Hoffnung sich geschmeichelt zu haben, dass auf diese Weise seine Tafeln fast fehlerfrei geworden seien, und verspricht, um zu *vollkommen* fehlerfreien Tafeln zu gelangen, für die erste Anzeige jedes etwa noch stehen gebliebenen Fehlers, der zu falscher Rechnung Anlass geben könne (*pro sphalmatibus calculum turbantibus*) eine Prämie von einem Ducaten zu bezahlen. Ob diese vom 1^{sten} October 1794 datirte Ausgelobung jemals Folge gehabt hat, ist mir nicht bekannt.

Es ist mir zweifelhaft, ob VEGA sich ganz klar gemacht habe, was für Fehler als möglicher Weise zu falschen Rechnungen Anlass gebend betrachtet werden sollten. Für alle Tafeln, welche bestimmt sind, theoretisch feststehende irrationale Grössen darzustellen, gilt bekanntlich der Grundsatz, dass die Tabulargrösse dem wahren Werthe allemal so nahe kommen soll, als bei der gewählten Anzahl von Decimalstellen möglich ist, und es darf folglich die Abweichung niemals mehr als eine halbe Einheit der letzten Decimale betragen. Jeder Verstoss gegen diese strenge Norm ist ein Fehler, der möglicherweise einen sich auf die strenge Uebereinstimmung verlassenden Rechner zu einem unrichtigen Resultate verleiten kann. Lässt man diese strenge Auslegung fahren, und mischt in sein Urtheil eine Rücksicht auf *Erheblichkeit* der Unrichtigkeit ein, so verirrt sich die Entscheidung in das Gebiet der Willkühr. Der schon vorhin erwähnte Umstand, dass VEGA selbst von Correctionen an den VLACQ'schen Tafeln spricht, die nur eine Einheit in der letzten Stelle betrugen, und dass er vollkommene Fehlerfreiheit wie sein Ziel bezeichnet, scheint allerdings darauf hinzudeuten, dass er die strenge Auslegung im Sinne gehabt. Auch habe ich den ersten Theil des Thesaurus, der die Logarithmen der laufenden ganzen Zahlen enthält, bei sehr vielen gelegentlich gemachten Vergleichungen mit mehrstelligen Bestimmungen immer sehr correct gefunden.

Es sind seit jener Zeit bei mehrern andern logarithmischen Tafeln, in der Absicht ihre Correctheit zu vervollständigen, ähnliche Ausbietungen von Preisen für die erste Anzeige von Fehlern in den Zahlen gemacht: ich weiss jedoch nicht, ob dieselben einen Erfolg gemacht haben, mit Ausnahme des bei Tauchnitz in Leipzig 1847 von KÖHLER herausgegebenen logarithmisch-trigonometrischen Handbuchs. Der Verleger dieser Tafeln versprach bei dem ersten Erscheinen, für die erste binnen einer gesetzten Frist eingesandte Anzeige eines jeden Fehlers, welcher falsche Resultate veranlassen könne, einen Louisd'or zu bezahlen, und nach einem gedruckten Bericht vom 1. Juli 1848 ist diese Prämie für vier zur Anzeige gebrachte Fehler wirklich ausgezahlt. Was nun dabei eine ehrende Erwähnung verdient, ist der Umstand, dass dem einen dieser Fehler jene Qualification nur unter Anerkennung obiger strengen Auslegung zugesprochen werden konnte. Es war nemlich der Logarithm von 103000, welcher, auf 12 Stellen genau,

$$= 5{,}012837224705$$

ist, in den ersten Abdrücken mit acht Ziffern

$$= 5{,}01283723$$

angesetzt, während die principmässig abgekürzte Zahl 5,01283722 ist. Es ist zu wünschen, dass in künftig vorkommenden ähnlichen Fällen, diese Entscheidung als Präcedenz respectirt werde.

Bekannte sich Vega zu derselben strengen Auslegung, so hätte es ihm leicht gehen mögen, wie dem König Shiram, dessen Kornkammern nicht ausreichten, dem Erfinder des Schachspiels die ihm zugesagte Belohnung zu gewähren.

Dass die von Vega ausgebotene Belohnung, unter jener Voraussetzung, ihm theuer zu stehen kommen konnte, lässt sich schon, ohne alles Nachrechnen, aus einem Umstande erkennen, der leicht zu bestätigen, jedoch meines Wissens anderweit noch nirgends zur Sprache gebracht ist. Dieser Umstand besteht darin, dass in der Tafel für die Logarithmen der trigonometrischen Grössen die Zahlen der Sinuscolumne fast ohne Ausnahme*) der Summe der Zahlen der Cosinuscolumne und der Tangentencolumne genau gleich sind. Da alle diese Zahlen nur abgekürzte Werthe der irrationalen genauen Grössen sind, so ist klar, dass bei streng richtiger Abkürzung jene Gleichheit nicht Statt finden wird, in allen den Fällen, wo die Abweichungen von den genauen Werthen in der zweiten und dritten Columne gleiche Zeichen haben, und ihre Summe mehr als eine halbe Einheit der letzten Decimale beträgt. Man übersieht leicht, dass bei einer grossen

*) Ich habe grosse Strecken der Tafel in dieser Beziehung prüfen lassen: allein unter Tausenden von Fällen ist nur eine einzige Ausnahme gefunden, nemlich bei dem Bogen 27°54′0″. Ich kann jedoch diese Ausnahme, sowie etwanige andere, wenn dergl. noch hie und da vorkommen sollten, nur einem Versehen, und nicht einem Vorsatze zuschreiben.

Menge von Fällen dieser Ausnahmefall durchschnittlich einmal unter vieren vorkommen wird, was sich bei wirklicher Abzählung in solchen siebenziffrigen Tafeln, wo auf die Richtigkeit der letzten Ziffer mit Sorgfalt gehalten ist, bestätigt findet. (Es hat z. B. eine solche Abzählung in den erwähnten Köhler'schen Tafeln an den 900 einzelnen Minuten von $30^0 0'$ bis $44^0 59'$ genau 225 solcher Fälle ergeben, welche vollkommene Uebereinstimmung allerdings für zufällig zu halten ist). Vega's Thesaurus enthält die Logarithmen der Sinus, Cosinus und Tangenten von 22680 Bogen. Unter der Voraussetzung also, dass alle Zahlen in zweien dieser Columnen scharf nach dem Princip abgekürzt seien, wird man, mit einer geringen Unsicherheit im Mehr oder Weniger, in der dritten Columne 5670 Logarithmen erwarten dürfen, die um eine Einheit unrichtig angesetzt sind. Für den Preis von so vielen Ducaten würden wohl befähigte Personen zur vollständigen Neurechnung bereit gewesen sein.

Welche zwei Columnen die ursprünglichen sind, wird man aus der Vergleichung mit anderweitigen auf mehr als zehn Stellen zuverlässigen Bestimmungen erkennen können, schon an wenigen Bögen und mit Gewissheit, wenn die Voraussetzung der strengen Richtigkeit der ursprünglichen Columnen zutrifft, im entgegengesetzten Fall aber an einer etwas beträchtlichern Menge wenigstens mit überwiegender Wahrscheinlichkeit.

Einiges hiezu dienliche findet man schon fertig vor am Schluss der Decimaltafeln, welche Hobert und Ideler 1799 geliefert haben, und die zwar nur mit sieben Ziffern abgedruckt sind, aber in der Handschrift auf doppelt so viele vollendet waren. Es werden daselbst 138 fehlerhafte Logarithmen des Vega'schen Thesaurus angezeigt, von denen 127, um genau gesetzmässig zu werden, einer Correction von einer Einheit in der zehnten Stelle bedürfen, 10 einer Correction von zwei Einheiten, und eine drei Einheiten. Von den 127 fallen 49 auf Sinus, 35 auf Cosinus und 43 auf Tangenten; die übrigen 11 Correctionen, von 2 oder 3 Einheiten, beziehen sich blos auf Tangenten. Die betreffenden Bögen sind die mit 27 Minuten messbaren, und die nicht mit angeführten sind diejenigen, wo die Logarithmen keiner Correctionen bedurften. Es hätten übrigens diese Vergleichungen auch ohne die Hobert-Ideler'schen handschriftlichen Tafeln gemacht werden können, da die allgemein verbreiteten Callet'schen Tafeln die Logarithmen der Sinus und Cosinus auf 14 Ziffern für alle Tausendtheile des Quadranten enthalten. Wenn man aus diesen auch noch das Nöthige für alle Bögen unter zwei Grad entlehnt, die durch $5'24''$ aber nicht durch $27'$ messbar sind, so gewinnt man die Vergleichung VEGA'scher Logarithmen von 118 Bögen mit schärfern Bestimmungen, wovon die Resultate in folgendem Abriss (I) zusammengestellt sind:

	Sin.	Cos.	Tang.
0	65	75	54
1	53	43	53
2			10
3			1

Die Bedeutung dieser Zahlen, z. B. der in der letzten Columne ist, dass unter 118 Tangenten-Logarithmen 54 richtig angesetzt sind, 53 einer Correction von einer Einheit in der zehnten Stelle bedürfen, 10 einer Correction von zwei Einheiten, und einer der Correction von drei Einheiten. Es folgt hieraus schon entschieden, dass *keine* Columne der VEGA'schen Tafel durchaus richtig angesetzt ist, und mit überwiegender Wahrscheinlichkeit, dass die Tangenten-Logarithmen die abgeleiteten sind, durch die einfache Subtraction der Zahlen der Cosinuscolumne von denen der Sinuscolumne.

Die Verfasser der erwähnten Decimaltafeln hätten übrigens doppelt so viele Vergleichungen aus ihrer Handschrift geben können. Man kann sich aber eine noch viel grössere Ausbeute verschaffen, wenn man die höchst schätzbare Tafel von BRIGG's (in der nach dessen Tode von GELLIBRAND 1633 herausgegebenen Trigonometria Britannica) benutzt, welche die Logarithmen der Sinus und Cosinus für alle Hunderttheile der gewöhnlichen Grade auf 14 Ziffern liefert, und aus welcher CALLET die oben erwähnten Zahlen entlehnt hat. Sie enthält das Material, um VEGA's Tafeln bei 1060 Bögen, also zusammen 3180 Logarithmen, prüfen zu können. Ich selbst habe mich jedoch darauf beschränkt, diese Prüfung an 81 Bögen oder an 243 Logarithmen, von $14^0 0'$ bis $18^0 0'$ vorzunehmen, wovon das Resultat hier folgt (II):

	Sin.	Cos.	Tang.
0	29	56	36
1	52	25	42
2			3

Wirft man die Gruppen (I) und (II) zusammen, so jedoch, dass man die beiden gemeinschaftlichen Bögen nur einmal in Rechnung bringt, so erhält man für 190 Bögen folgende Ausbeute (III):

	Sin.	Cos.	Tang.
0	89	126	87
1	101	64	90
2			12
3			1

Will man diese Zahlen zu einer Abschätzung des Verhältnisses zwischen den richtigen und unrichtigen Logarithmen anwenden, so muss man erst noch einen kleinen Abzug machen. Es ist in (I) der Logarithm des Sinus von 45^0 zweimal gezählt, nemlich zugleich auch als $\log \cos 45^0$; es ist ferner in der Tangentencolumne auch der Logarithm der Tangente von 45^0 mitgezählt, der doch rational ist. Dasselbe gilt von (III) und man muss daher, zu obigem Zweck, das Resultat davon so aussprechen, dass unter 568 geprüften irrationalen Logarithmen 301 sich als richtig, und 267 als unrichtig ausgewiesen haben. Dürfte man dies Verhältniss als durchschnittlich zutreffend betrachten, so würden unter den 68038 irrationalen Logarithmen des Vega'schen Thesaurus (indem man, wie billig, die Cotangenten nicht mitzählt) nach der Wahrscheinlichkeit etwa 31983 fehlerhafte anzunehmen sein.

Wahrscheinlich ist aber diese Zahl noch bedeutend zu klein. Ich finde in meinen Papieren die vor längerer Zeit und zu andern Zwecken auf 14 Ziffern gemachte Berechnung der trigonometrischen Logarithmen für ein paar Gruppen von Bögen, die nicht sprungsweise, sondern in denselben Intervallen wie die Vega'schen Tafeln, fortschreiten, woraus wenigstens hervorgeht, dass obiges Resultat (III) noch keinen richtigen Maassstab für die Ungenauigkeit dieser Tafeln abgibt. Während bei jenen 190 Bögen kein einziger Fall vorkommt, wo der Logarithm eines Sinus oder eines Cosinus um mehr als *eine* Einheit verbessert werden müsste, sind solche Fälle gar nicht selten bei denjenigen Bögen, die *nicht* in der Trigonometria Britannica vorkommen, und wo also das zur Vergleichung nöthige erst durch besondere Rechnung herbeigeschafft werden muss. Ich füge daher die Resultate jener Rechnungen hier bei, da sie dazu dienen können, unserer Vorstellung von dem Grade der Ungenauigkeit der Zahlen in Vega's Thesaurus eine festere Haltung zu geben.

Die Vergleichung der Zahlen im Thesaurus bei den 21 Bögen von $15^0 38' 20''$ bis $15^0 41' 40''$ mit den schärfer berechneten hat ergeben (IV):

	Sin.	Cos.	Tang.
0	4	12	1
1	9	8	8
2	6	1	6
3	2		4
4			2

Die Fälle, wo die grössten Abweichungen vorkommen, sind:

$15^0 40' 20''$, wo die Correctionen $+3$, -1, $+4$
$15\ 41\ 30$, wo folgende $+3$, 0, $+4$

an die Logarithmen des Sinus, des Cosinus und der Tangente angebracht werden müssen.

Ebenso hat die Vergleichung der Vega'schen Zahlen bei den 93 Bögen, von $1^0 19' 52''$ bis $1^0 21' 24''$ mit schärferer Rechnung folgende ergeben (V):

	Sin.	Cos.	Tang.
0	38	30	17
1	39	56	41
2	15	7	22
3	1		11
4			2

Die grössten Abweichungen finden Statt bei den Bögen $1^0 20' 10''$ und $1^0 20' 15''$; und die nöthigen Correctionen betragen bei ersterm -2, $+1$, -4, bei dem andern -2, $+2$, -4.

Die Gruppen IV und V haben nicht gleichen Ursprung, da die Zahlen des Thesaurus zu der Gruppe IV aus Vlacq's Trigonometria Artificialis genommen sind, die andern hingegen zu den neu hinzugekommenen gehören, welche unter Vega's Leitung und Aufsicht von dem Lieutenant Dorfmund berechnet sind. Nach obigen Abrissen erscheinen die letztern wie etwas weniger ungenau als die erstern, wiewohl die Gruppe IV zu wenig zahlreich ist, um ein sicheres Urtheil zu begründen. Jedenfalls folgt aus dem Zusammenwerfen beider Gruppen eine Schätzung für die Totalungenauigkeit der Tafeln, die eher etwas zu günstig sein wird, als umgekehrt. Aus dieser Vereinigung folgt, für 114 Bögen (VI):

	Sin.	Cos.	Tang.
0	42	42	18
1	48	64	49
2	21	8	28
3	3		15
4			4

Es sind also hier unter 342 Logarithmen nur 102, die keiner Verbesserung bedürfen, gegen 240 ungenaue. Nach diesem Verhältniss würde man unter den 68038 irrationalen Logarithmen 47746 ungenaue erwarten können.

Die Summe der Quadrate der Abweichungen findet sich für die Sinus 159, für die Cosinus 96, für die Tangenten 360. Als mittlern Fehler mag man also annehmen für die Sinus 1,18, für die Cosinus 0,92, für die Tangenten 1,78. Man kann hienach nicht zweifeln, dass die Tangenten-Logarithmen die abgeleiteten sind.

Dass die Zahlen der Cosinuscolumne weniger ungenau sind, als die der Sinuscolumne, rührt wohl ohne Zweifel wenigstens theilweise, daher, dass bei den erstern die zur Ausfüllung erforderlichen Interpolationsmethoden einfacher ausfallen, möglicherweise können indess noch andere Ursachen mitgewirkt haben, worüber sich nur unsichere Vermuthungen aufstellen lassen würden.