Die Beweise der Vorschriften wird sich jeder leicht selbst entwickeln können. Ein Beispiel des Gebrauchs mag zum Ueberfluss noch hergesetzt werden.

Es sei gegeben
$$\log p = 0{,}69897$$
$$\log q = 0{,}84510$$
$$\log r = 0{,}77815\,\mathrm{n}$$
Also
$$\log h = 0{,}14613$$
$$\log g = 9{,}93305\,\mathrm{n}$$
$$\log\left(-\frac{g}{h}\right) = 9{,}78692$$

Man sieht sogleich, dass hier der Fall IV. statt findet und also 9,78692 in der sechsten Columne unter $B-A$ oder F zu suchen sein wird. Was von der Tafel (S. 643) hier nöthig wäre ist nur Folgendes:

A	B	$B-A$ oder F
0,367	0,15520	9,78820
0,368	0,15489	9,78689

Zu $F = 9{,}78692$ gehört also

$$A = 0{,}36798 = \log a,\ \text{woraus}\ \log\frac{h}{a} = 9{,}77815,\quad \log ga = 0{,}30103\,\mathrm{n}\ \text{oder}$$
$$B = 0{,}15490 = \log b,\ \text{woraus}\ \log\left(-\frac{g}{b}\right) = 9{,}77815,\quad \log(-hb) = 0{,}30103\,\mathrm{n}.$$

Astronomische Nachrichten. Nr. 756. 1851. Mai 2.

Einige Bemerkungen zu VEGA's *Thesaurus Logarithmorum, von Herrn Geheimen Hofrath* GAUSS.

Der *Thesaurus Logarithmorum* von VEGA ist bekanntlich seinem grössten Theile nach ein neuer Abdruck der grössern VLACQ'schen Logarithmentafeln. In der Vorrede führt VEGA eine nicht unbeträchtliche Anzahl von Fehlern im Original an, die er verbessert hat, mit dem Zusatz, dass er ausser diesen noch eine sehr grosse Menge von Unrichtigkeiten an der letzten Ziffer der Logarithmen berichtigt habe, zu dem Betrage von einer, zwei, drei, vier Einheiten. Mit gleicher Sorgfalt seien auch die neu hinzugekommenen Tafeln (namentlich also die in den beiden ersten Graden für alle einzelnen Secunden angegebenen Logarithmen der trigonometrischen Grössen) berechnet, geprüft und berichtigt. Vega scheint nun mit der Hoffnung sich geschmeichelt zu haben, dass auf diese Weise seine Tafeln fast fehlerfrei geworden seien, und verspricht, um zu *vollkommen* fehlerfreien Tafeln zu gelangen, für die erste Anzeige jedes etwa noch stehen gebliebenen Fehlers, der zu falscher Rechnung Anlass geben könne (*pro sphalmatibus calculum turbantibus*) eine Prämie von einem Ducaten zu bezahlen. Ob diese vom 1sten October 1794 datirte Ausgelobung jemals Folge gehabt hat, ist mir nicht bekannt.

Es ist mir zweifelhaft, ob Vega sich ganz klar gemacht habe, was für Fehler als möglicher Weise zu falschen Rechnungen Anlass gebend betrachtet werden sollten. Für alle Tafeln, welche bestimmt sind, theoretisch feststehende irrationale Grössen darzustellen, gilt bekanntlich der Grundsatz, dass die Tabulargrösse dem wahren Werthe allemal so nahe kommen soll, als bei der gewählten Anzahl von Decimalstellen möglich ist, und es darf folglich die Abweichung niemals mehr als eine halbe Einheit der letzten Decimale betragen. Jeder Verstoss gegen diese strenge Norm ist ein Fehler, der möglicherweise einen sich auf die strenge Uebereinstimmung verlassenden Rechner zu einem unrichtigen Resultate verleiten kann. Lässt man diese strenge Auslegung fahren, und mischt in sein Urtheil eine Rücksicht auf *Erheblichkeit* der Unrichtigkeit ein, so verirrt sich die Entscheidung in das Gebiet der Willkühr. Der schon vorhin erwähnte Umstand, dass Vega selbst von Correctionen an den Vlacq'schen Tafeln spricht, die nur eine Einheit in der letzten Stelle betrugen, und dass er vollkommene Fehlerfreiheit wie sein Ziel bezeichnet, scheint allerdings darauf hinzudeuten, dass er die strenge Auslegung im Sinne gehabt. Auch habe ich den ersten Theil des Thesaurus, der die Logarithmen der laufenden ganzen Zahlen enthält, bei sehr vielen gelegentlich gemachten Vergleichungen mit mehrstelligen Bestimmungen immer sehr correct gefunden.

Es sind seit jener Zeit bei mehrern andern logarithmischen Tafeln, in der Absicht ihre Correctheit zu vervollständigen, ähnliche Ausbietungen von Preisen für die erste Anzeige von Fehlern in den Zahlen gemacht: ich weiss jedoch nicht, ob dieselben einen Erfolg gemacht haben, mit Ausnahme des bei Tauchnitz in Leipzig 1847 von Köhler herausgegebenen logarithmisch-trigonometrischen Handbuchs. Der Verleger dieser Tafeln versprach bei dem ersten Erscheinen, für die erste binnen einer gesetzten Frist eingesandte Anzeige eines jeden Fehlers, welcher falsche Resultate veranlassen könne, einen Louisd'or zu bezahlen, und nach einem gedruckten Bericht vom 1. Juli 1848 ist diese Prämie für vier zur Anzeige gebrachte Fehler wirklich ausgezahlt. Was nun dabei eine ehrende Erwähnung verdient, ist der Umstand, dass dem einen dieser Fehler jene Qualification nur unter Anerkennung obiger strengen Auslegung zugesprochen werden konnte. Es war nemlich der Logarithm von 103000, welcher, auf 12 Stellen genau,

$$= 5{,}012837224705$$

ist, in den ersten Abdrücken mit acht Ziffern

$$= 5{,}01283723$$

angesetzt, während die principmässig abgekürzte Zahl 5,01283722 ist. Es ist zu wünschen, dass in künftig vorkommenden ähnlichen Fällen, diese Entscheidung als Präcedenz respectirt werde.

Bekannte sich Vega zu derselben strengen Auslegung, so hätte es ihm leicht gehen mögen, wie dem König Shiram, dessen Kornkammern nicht ausreichten, dem Erfinder des Schachspiels die ihm zugesagte Belohnung zu gewähren.

Dass die von Vega ausgebotene Belohnung, unter jener Voraussetzung, ihm theuer zu stehen kommen konnte, lässt sich schon, ohne alles Nachrechnen, aus einem Umstande erkennen, der leicht zu bestätigen, jedoch meines Wissens anderweit noch nirgends zur Sprache gebracht ist. Dieser Umstand besteht darin, dass in der Tafel für die Logarithmen der trigonometrischen Grössen die Zahlen der Sinuscolumne fast ohne Ausnahme*) der Summe der Zahlen der Cosinuscolumne und der Tangentencolumne genau gleich sind. Da alle diese Zahlen nur abgekürzte Werthe der irrationalen genauen Grössen sind, so ist klar, dass bei streng richtiger Abkürzung jene Gleichheit nicht Statt finden wird, in allen den Fällen, wo die Abweichungen von den genauen Werthen in der zweiten und dritten Columne gleiche Zeichen haben, und ihre Summe mehr als eine halbe Einheit der letzten Decimale beträgt. Man übersieht leicht, dass bei einer grossen

*) Ich habe grosse Strecken der Tafel in dieser Beziehung prüfen lassen: allein unter Tausenden von Fällen ist nur eine einzige Ausnahme gefunden, nemlich bei dem Bogen 27°54'0". Ich kann jedoch diese Ausnahme, sowie etwanige andere, wenn dergl. noch hie und da vorkommen sollten, nur einem Versehen, und nicht einem Vorsatze zuschreiben.

Menge von Fällen dieser Ausnahmefall durchschnittlich einmal unter vieren vorkommen wird, was sich bei wirklicher Abzählung in solchen siebenziffrigen Tafeln, wo auf die Richtigkeit der letzten Ziffer mit Sorgfalt gehalten ist, bestätigt findet. (Es hat z. B. eine solche Abzählung in den erwähnten Köhler'schen Tafeln an den 900 einzelnen Minuten von $30^0 0'$ bis $44^0 59'$ genau 225 solcher Fälle ergeben, welche vollkommene Uebereinstimmung allerdings für zufällig zu halten ist). Vega's Thesaurus enthält die Logarithmen der Sinus, Cosinus und Tangenten von 22680 Bogen. Unter der Voraussetzung also, dass alle Zahlen in zweien dieser Columnen scharf nach dem Princip abgekürzt seien, wird man, mit einer geringen Unsicherheit im Mehr oder Weniger, in der dritten Columne 5670 Logarithmen erwarten dürfen, die um eine Einheit unrichtig angesetzt sind. Für den Preis von so vielen Ducaten würden wohl befähigte Personen zur vollständigen Neurechnung bereit gewesen sein.

Welche zwei Columnen die ursprünglichen sind, wird man aus der Vergleichung mit anderweitigen auf mehr als zehn Stellen zuverlässigen Bestimmungen erkennen können, schon an wenigen Bögen und mit Gewissheit, wenn die Voraussetzung der strengen Richtigkeit der ursprünglichen Columnen zutrifft, im entgegengesetzten Fall aber an einer etwas beträchtlichern Menge wenigstens mit überwiegender Wahrscheinlichkeit.

Einiges hiezu dienliche findet man schon fertig vor am Schluss der Decimaltafeln, welche Hobert und Ideler 1799 geliefert haben, und die zwar nur mit sieben Ziffern abgedruckt sind, aber in der Handschrift auf doppelt so viele vollendet waren. Es werden daselbst 138 fehlerhafte Logarithmen des Vega'schen Thesaurus angezeigt, von denen 127, um genau gesetzmässig zu werden, einer Correction von einer Einheit in der zehnten Stelle bedürfen, 10 einer Correction von zwei Einheiten, und eine drei Einheiten. Von den 127 fallen 49 auf Sinus, 35 auf Cosinus und 43 auf Tangenten; die übrigen 11 Correctionen, von 2 oder 3 Einheiten, beziehen sich blos auf Tangenten. Die betreffenden Bögen sind die mit 27 Minuten messbaren, und die nicht mit angeführten sind diejenigen, wo die Logarithmen keiner Correctionen bedurften. Es hätten übrigens diese Vergleichungen auch ohne die Hobert-Ideler'schen handschriftlichen Tafeln gemacht werden können, da die allgemein verbreiteten Callet'schen Tafeln die Logarithmen der Sinus und Cosinus auf 14 Ziffern für alle Tausendtheile des Quadranten enthalten. Wenn man aus diesen auch noch das Nöthige für alle Bögen unter zwei Grad entlehnt, die durch $5'24''$ aber nicht durch $27'$ messbar sind, so gewinnt man die Vergleichung Vega'scher Logarithmen von 118 Bögen mit schärfern Bestimmungen, wovon die Resultate in folgendem Abriss (I) zusammengestellt sind:

	Sin.	Cos.	Tang.
0	65	75	54
1	53	43	53
2			10
3			1

Die Bedeutung dieser Zahlen, z. B. der in der letzten Columne ist, dass unter 118 Tangenten-Logarithmen 54 richtig angesetzt sind, 53 einer Correction von einer Einheit in der zehnten Stelle bedürfen, 10 einer Correction von zwei Einheiten, und einer der Correction von drei Einheiten. Es folgt hieraus schon entschieden, dass *keine* Columne der Vega'schen Tafel durchaus richtig angesetzt ist, und mit überwiegender Wahrscheinlichkeit, dass die Tangenten-Logarithmen die abgeleiteten sind, durch die einfache Subtraction der Zahlen der Cosinuscolumne von denen der Sinuscolumne.

Die Verfasser der erwähnten Decimaltafeln hätten übrigens doppelt so viele Vergleichungen aus ihrer Handschrift geben können. Man kann sich aber eine noch viel grössere Ausbeute verschaffen, wenn man die höchst schätzbare Tafel von Brigg's (in der nach dessen Tode von Gellibrand 1633 herausgegebenen Trigonometria Britannica) benutzt, welche die Logarithmen der Sinus und Cosinus für alle Hunderttheile der gewöhnlichen Grade auf 14 Ziffern liefert, und aus welcher Callet die oben erwähnten Zahlen entlehnt hat. Sie enthält das Material, um Vega's Tafeln bei 1060 Bögen, also zusammen 3180 Logarithmen, prüfen zu können. Ich selbst habe mich jedoch darauf beschränkt, diese Prüfung an 81 Bögen oder an 243 Logarithmen, von $14^0 0'$ bis $18^0 0'$ vorzunehmen, wovon das Resultat hier folgt (II):

	Sin.	Cos.	Tang.
0	29	56	36
1	52	25	42
2			3

Wirft man die Gruppen (I) und (II) zusammen, so jedoch, dass man die beiden gemeinschaftlichen Bögen nur einmal in Rechnung bringt, so erhält man für 190 Bögen folgende Ausbeute (III):

	Sin.	Cos.	Tang.
0	89	126	87
1	101	64	90
2			12
3			1

Will man diese Zahlen zu einer Abschätzung des Verhältnisses zwischen den richtigen und unrichtigen Logarithmen anwenden, so muss man erst noch einen kleinen Abzug machen. Es ist in (I) der Logarithm des Sinus von 45^0 zweimal gezählt, nemlich zugleich auch als $\log\cos 45^0$; es ist ferner in der Tangentencolumne auch der Logarithm der Tangente von 45^0 mitgezählt, der doch rational ist. Dasselbe gilt von (III) und man muss daher, zu obigem Zweck, das Resultat davon so aussprechen, dass unter 568 geprüften irrationalen Logarithmen 301 sich als richtig, und 267 als unrichtig ausgewiesen haben. Dürfte man dies Verhältniss als durchschnittlich zutreffend betrachten, so würden unter den 68038 irrationalen Logarithmen des Vega'schen Thesaurus (indem man, wie billig, die Cotangenten nicht mitzählt) nach der Wahrscheinlichkeit etwa 31983 fehlerhafte anzunehmen sein.

Wahrscheinlich ist aber diese Zahl noch bedeutend zu klein. Ich finde in meinen Papieren die vor längerer Zeit und zu andern Zwecken auf 14 Ziffern gemachte Berechnung der trigonometrischen Logarithmen für ein paar Gruppen von Bögen, die nicht sprungsweise, sondern in denselben Intervallen wie die Vega'schen Tafeln, fortschreiten, woraus wenigstens hervorgeht, dass obiges Resultat (III) noch keinen richtigen Maassstab für die Ungenauigkeit dieser Tafeln abgibt. Während bei jenen 190 Bögen kein einziger Fall vorkommt, wo der Logarithm eines Sinus oder eines Cosinus um mehr als *eine* Einheit verbessert werden müsste, sind solche Fälle gar nicht selten bei denjenigen Bögen, die *nicht* in der Trigonometria Britannica vorkommen, und wo also das zur Vergleichung nöthige erst durch besondere Rechnung herbeigeschafft werden muss. Ich füge daher die Resultate jener Rechnungen hier bei, da sie dazu dienen können, unserer Vorstellung von dem Grade der Ungenauigkeit der Zahlen in Vega's Thesaurus eine festere Haltung zu geben.

Die Vergleichung der Zahlen im Thesaurus bei den 21 Bögen von $15^0 38' 20''$ bis $15^0 41' 40''$ mit den schärfer berechneten hat ergeben (IV):

	Sin.	Cos.	Tang.
0	4	12	1
1	9	8	8
2	6	1	6
3	2		4
4			2

Die Fälle, wo die grössten Abweichungen vorkommen, sind:

$15^0 40' 20''$, wo die Correctionen $+3$, -1, $+4$
$15\ 41\ 30$, wo folgende $+3$, 0, $+4$

an die Logarithmen des Sinus, des Cosinus und der Tangente angebracht werden müssen.

Ebenso hat die Vergleichung der Vega'schen Zahlen bei den 93 Bögen, von $1^0 19' 52''$ bis $1^0 21' 24''$ mit schärferer Rechnung folgende ergeben (V):

	Sin.	Cos.	Tang.
0	38	30	17
1	39	56	41
2	15	7	22
3	1		11
4			2

Die grössten Abweichungen finden Statt bei den Bögen $1^0 20' 10''$ und $1^0 20' 15''$; und die nöthigen Correctionen betragen bei ersterm -2, $+1$, -4, bei dem andern -2, $+2$, -4.

Die Gruppen IV und V haben nicht gleichen Ursprung, da die Zahlen des Thesaurus zu der Gruppe IV aus Vlacq's Trigonometria Artificialis genommen sind, die andern hingegen zu den neu hinzugekommenen gehören, welche unter Vega's Leitung und Aufsicht von dem Lieutenant Dorfmund berechnet sind. Nach obigen Abrissen erscheinen die letztern wie etwas weniger ungenau als die erstern, wiewohl die Gruppe IV zu wenig zahlreich ist, um ein sicheres Urtheil zu begründen. Jedenfalls folgt aus dem Zusammenwerfen beider Gruppen eine Schätzung für die Totalungenauigkeit der Tafeln, die eher etwas zu günstig sein wird, als umgekehrt. Aus dieser Vereinigung folgt, für 114 Bögen (VI):

	Sin.	Cos.	Tang.
0	42	42	18
1	48	64	49
2	21	8	28
3	3		15
4			4

Es sind also hier unter 342 Logarithmen nur 102, die keiner Verbesserung bedürfen, gegen 240 ungenaue. Nach diesem Verhältniss würde man unter den 68038 irrationalen Logarithmen 47746 ungenaue erwarten können.

Die Summe der Quadrate der Abweichungen findet sich für die Sinus 159, für die Cosinus 96, für die Tangenten 360. Als mittlern Fehler mag man also annehmen für die Sinus 1,18, für die Cosinus 0,92, für die Tangenten 1,78. Man kann hienach nicht zweifeln, dass die Tangenten-Logarithmen die abgeleiteten sind.

Dass die Zahlen der Cosinuscolumne weniger ungenau sind, als die der Sinuscolumne, rührt wohl ohne Zweifel wenigstens theilweise, daher, dass bei den erstern die zur Ausfüllung erforderlichen Interpolationsmethoden einfacher ausfallen, möglicherweise können indess noch andere Ursachen mitgewirkt haben, worüber sich nur unsichere Vermuthungen aufstellen lassen würden.