Werk

Titel: Analysis

Jahr: 1866

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN235999628

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN235999628> | LOG_0040

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235999628>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

BEMERKUNGEN.

Die vorliegende Abhandlung über Interpolation ist die wiederholte Ausarbeitung einer Untersuchung, von welcher ein früherer Entwurf im October 1805 begonnen zu sein scheint. Sie enthält die Methoden, die bei der Berechnung der Ausdrücke für die durch Störungskräfte hervorgebrachten Aenderungen der Elemente einer Planetenbahn vielfach angewandt worden sind. Dieser Ausmittlung der Störungen steht ein anderes Verfahren zur Seite, das direct die Werthe der Bahnelemente für einzelne Zeitpunkte ergibt und das, wie aus den im vorgefundenen handschriftlichen Nachlasse aufgezeichneten schliesslichen Formeln hervorgeht, auf folgenden Principien beruht.

Bilden die Werthe des Arguments, für welche die Werthe der Function gegeben sind, eine arithmetische Reihe, und hat man ein Argument x eingeführt, das bei jenen Werthen wie die ganzen Zahlen fortschreitet, bezeichnet die gegebenen Werthe mit fx , führt deren aufeinanderfolgende Differenzenreihen ein:

$$f(x+1) - fx = f^1(x + \frac{1}{2}), \quad f^1(x + \frac{1}{2}) - f^1(x - \frac{1}{2}) = f^2x, \quad f^2(x+1) - f^2x = f^3(x + \frac{1}{2}) \text{ u. s. f.}$$

ferner deren mit beliebigen Anfangsgliedern beginnende Summenreihen $f^{-1}(x + \frac{1}{2})$, $f^{-2}x$, $f^{-3}(x + \frac{1}{2})$ u. s. f. für welche

$$fx = f^{-1}(x + \frac{1}{2}) - f^{-1}(x - \frac{1}{2}), \quad f^{-1}(x + \frac{1}{2}) = f^{-2}(x+1) - f^{-2}x \text{ u. s. f.}$$

endlich die Mittelwerthe der aufeinander folgenden Glieder der so entstandenen Reihen nemlich

$$\dots f^{-1}x = \frac{1}{2}f^{-1}(x + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}f^{-1}(x - \frac{1}{2}), \quad f(x + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}f(x+1) + \frac{1}{2}fx, \quad f^1x = \frac{1}{2}f^1(x + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}f^1(x - \frac{1}{2}) \dots$$

also in übersichtlicher Anordnung zusammengestellt folgendes System von gegebenen und daraus zunächst berechneten Werthen

M. W.	II. Summe.	M. W.	I. Summe	gegeben. W.	M. W.	I. Differ.	M. W.	II. Differ.	M. W.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	$f^{-2}(x-1)$	$f^{-1}(x-1)$	.	$f(x-1)$	.	.	$f^1(x-1)$	$f^2(x-1)$	.
.	$f^{-2}(x-\frac{1}{2})$	$f^{-1}x$	$f^{-1}(x-\frac{1}{2})$	$f(x-\frac{1}{2})$	$f^1(x-\frac{1}{2})$	f^1x	f^2x	$f^2(x-\frac{1}{2})$	.
.	$f^{-2}(x+\frac{1}{2})$	$f^{-1}(x+1)$	$f^{-1}(x+\frac{1}{2})$	$f(x+\frac{1}{2})$	$f^1(x+\frac{1}{2})$	$f^1(x+\frac{1}{2})$	$f^2(x+\frac{1}{2})$	$f^2(x+\frac{1}{2})$	.
.	$f^{-2}(x+1)$	.	.	$f(x+1)$	.	.	$f^2(x+1)$	.	.

so gibt Art. 4, wenn man 1^s für $t, a, b, c, d, e \dots$ resp. $x+t, x, x+1, x-1, x+2, x-2$ 2^s für $t, a, b, c, d, e \dots$ resp. $x+t, x, x-1, x+1, x-2, x+2 \dots$ setzt, 3^s aus den entsprechenden Seiten der beiden so erhaltenen Gleichungen die halbe Summe bildet, 4^s aus denselben Gleichungen, nachdem zuvor in der zweiten $x+1$ und $t-1$ resp. für x und t gesetzt ist, die halbe Summe bildet und 5^s in der zuletzt erhaltenen Gleichung $t = \frac{1}{2}$ macht, folgende Gleichungen für die durch Interpolation zu bestimmenden Werthe $\varphi(x+t)$ und $\varphi(x+\frac{1}{2})$ derjenigen Function φx , die bei jedem ganzzahligen Werthe von x der gegebenen Grösse $f x$ gleich wird:

$$\begin{aligned} \varphi(x+t) &= f x + t \cdot f^1(x+\frac{1}{2}) + \frac{t \cdot t-1}{1 \cdot 2} f^2 x + \frac{t \cdot t-1 \cdot t+1}{1 \cdot 2 \cdot 3} f^3(x+\frac{1}{2}) + \dots \\ &+ \frac{\prod(t+n-1)}{\prod 2n \cdot \prod(t-n-1)} f^{2n} x + \frac{\prod(t+n)}{\prod(2n+1) \cdot \prod(t-n-1)} f^{2n+1}(x+\frac{1}{2}) \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x+t) &= f x + t \cdot f^1(x-\frac{1}{2}) + \frac{t \cdot t+1}{1 \cdot 2} f^2 x + \frac{t \cdot t+1 \cdot t-1}{1 \cdot 2 \cdot 3} f^3(x-\frac{1}{2}) + \dots \\ &+ \frac{\prod(t+n)}{\prod 2n \cdot \prod(t-n)} f^{2n} x + \frac{\prod(t+n)}{\prod(2n+1) \cdot \prod(t-n-1)} f^{2n+1}(x-\frac{1}{2}) \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x+t) &= f x + t \cdot f^1 x + \frac{t \cdot t}{1 \cdot 2} f^2 x + \frac{t \cdot t-1 \cdot t+1}{1 \cdot 2 \cdot 3} f^3 x + \dots \\ &+ \frac{\prod(t+n-1)}{\prod 2n \cdot \prod(t-n)} t f^{2n} x + \frac{\prod(t+n)}{\prod(2n+1) \prod(t-n-1)} f^{2n+1} x + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x+t) &= f(x+\frac{1}{2}) + (t-\frac{1}{2}) f^1(x+\frac{1}{2}) + \frac{t \cdot t-1}{1 \cdot 2} f^2(x+\frac{1}{2}) + \frac{t \cdot t-1}{1 \cdot 2} (t-\frac{1}{2}) f^3(x+\frac{1}{2}) + \dots \\ &+ \frac{\prod(t+n-1)}{\prod 2n \cdot \prod(t-n-1)} f^{2n}(x+\frac{1}{2}) + \frac{\prod(t+n-1)}{\prod(2n+1) \cdot \prod(t-n-1)} (t-\frac{1}{2}) f^{2n+1}(x+\frac{1}{2}) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x+\frac{1}{2}) &= f(x+\frac{1}{2}) - \frac{1}{2} f^2(x+\frac{1}{2}) + \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f^3(x+\frac{1}{2}) - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} f^4(x+\frac{1}{2}) + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} f^5(x+\frac{1}{2}) \dots \\ &+ (-1)^n \frac{\prod 2n}{\prod n \cdot \prod n} 2^{-2n} \cdot f^{2n}(x+\frac{1}{2}) + \dots \end{aligned}$$

Die Coëfficienten von f^m in der dritten, vierten und fünften Gleichung sind gleich den Coëfficienten von $(2i \sin \omega)^m$ in den Reihenentwickelungen resp. für $\cos 2t\omega + i \frac{\sin 2t\omega}{\cos \omega}$, $\frac{\cos(2t-1)\omega}{\cos \omega} + i \sin(2t-1)\omega$ und $\frac{1}{\cos \omega}$ nach Potenzen der Grösse $2i \sin \omega$.

Setzt man nun

$$\Phi(x + \frac{1}{2}) = f^{-1}(x + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} f^1(x + \frac{1}{2}) - \frac{1}{8} f^3(x + \frac{1}{2}) + \frac{3}{8} f^5(x + \frac{1}{2}) - \frac{5}{16} f^7(x + \frac{1}{2}) + \frac{35}{256} f^9(x + \frac{1}{2}) - \dots$$

$$\Phi x = f^{-1}x - \frac{1}{2} f^1x + \frac{1}{8} f^3x - \frac{3}{8} f^5x + \frac{5}{16} f^7x - \frac{35}{256} f^9x + \frac{63}{2048} f^{11}x - \dots$$

$$\Psi x = f^{-2}x + \frac{1}{2} f^2x - \frac{1}{8} f^4x + \frac{3}{8} f^6x - \frac{5}{16} f^8x + \frac{35}{256} f^{10}x - \dots$$

$$\Psi(x + \frac{1}{2}) = f^{-2}(x + \frac{1}{2}) - \frac{1}{2} f^2(x + \frac{1}{2}) + \frac{1}{8} f^4(x + \frac{1}{2}) - \frac{3}{8} f^6(x + \frac{1}{2}) + \dots$$

indem man als Coëfficienten von f^m in diesen vier Gleichungen die Coëfficienten nimmt, die bei den Entwicklungen resp. für $\frac{1}{2i\omega}$, $\frac{1}{2i\omega \cos \omega}$, $-\frac{1}{4\omega}$, $-\frac{1}{4\omega \cos \omega}$ noch Potenzen von $2i \sin \omega$ entstehen, so sind $\Phi(x + \frac{1}{2})$, Φx , Ψx , $\Psi(x + \frac{1}{2})$ die besonderen Werthe solcher Functionen $\Phi(x + t)$, $\Psi(x + t)$, für welche die Gleichungen

$$\Phi(x + t) - \Phi(x + t_0) = \int_{t_0}^t \varphi(x + t) dt, \quad \Psi(x + t) - \Psi(x + t_1) = \int_{t_1}^t \varphi(x + t) dt$$

Statt haben, sie werden also bestimmten Integralen von $\varphi(x + t) dt$ und $\varphi(x + t) \cdot dt \cdot dt$ gleich, wenn man die Anfangswerthe der Summenreihen $f^{-1}(x - \frac{1}{2})$, $f^{-1}(x + \frac{1}{2}) \dots$, $f^{-2}x$, $f^{-2}(x + 1) \dots$ auf geeignete Weise ausgewählt.

Die Ableitung der Reihen für Φ und Ψ aus der dritten und vierten der obigen Gleichungen für $\varphi(x + t)$ erhält man unmittelbar, wenn man die Integrationen so ausführt, dass zunächst die Ausdrücke für $\Phi(x + \frac{1}{2}) - \Phi(x - \frac{1}{2})$, $\Phi(x + 1) - \Phi x$, $\Psi(x + 1) - 2\Psi x + \Psi(x - 1)$ und $\Psi(x + \frac{3}{2}) - 2\Psi(x + \frac{1}{2}) + \Psi(x - \frac{1}{2})$ entstehen.

SCHERING.