DETERMINATIO ATTRACTIONIS

QUAM IN PUNCTUM QUODVIS POSITIONIS DATAE

EXERCERET PLANETA SI EIUS MASSA

PER TOTAM ORBITAM

RATIONE TEMPORIS QUO SINGULAE PARTES DESCRIBUNTUR

UNIFORMITER ESSET DISPERTITA

AUCTORE

CAROLO FRIDERICO GAUSS

SOCIETATI REGIAE SCIENTIARUM EXHIBITA 1818. IAN. 17.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. IV.
Gottingae MDCCCXVIII.

332

DETERMINATIO ATTRACTIONIS
QUAM IN PUNCTUM QUODVIS POSITIONIS DATAE
EXERCERET PLANETA SI EIUS MASSA
PER TOTAM ORBITAM
RATIONE TEMPORIS QUO SINGULAE PARTES DESCRIBUNTUR
UNIFORMITER ESSET DISPERTITA.

1.

Variationes saeculares, quas elementa orbitae planetariae a perturbatione alius planetae patiuntur, ab huius positione in orbita sunt independentes, atque eaedem forent, sive planeta perturbans in orbita elliptica secundum Kepleri leges incedat, sive ipsius massa per orbitam eatenus aequabiliter dispertita concipiatur, ut orbitae partibus, alias aequali temporis intervallo descriptis, iam aequales massae partes tribuantur, siquidem tempora revolutionum planetae perturbati et perturbantis non sint commensurabilia. Theorema hoc elegans, si a nemine hucusque disertis verbis propositum est, saltem perfacile ex astronomiae physicae principiis demonstratur. Problema itaque se offert tum per se, tum propter plura artificia, quae eius solutio requirit, attentione perdignum: attractionem orbitae planetariae, aut si mavis, annuli elliptici, cuius crassities infinite parva, atque secundum legem modo explicatam variabilis, in punctum quodlibet positione datum exacte determinare.

2.

Denotando excentricitatem orbitae per e, atque puncti cuiusvis in ipsa anomaliam excentricam per E, huius elemento $\mathrm{d}E$ respondebit elementum anomaliae mediae $(1-e\cos E)\mathrm{d}E$; quamobrem elementum massae ei orbitae portiunculae, cui respondent illa elementa, tribuendum, erit ad massam integram, quam pro unitate accipiemus, ut $(1-e\cos E)\mathrm{d}E$ ad 2π, exprimente π semicircumferentiam circuli pro radio 1. Statuendo itaque distantiam puncti attracti a puncto orbitae $= \rho$, attractio ab orbitae elemento producta erit

$$= \frac{(1-e\cos E)\,\mathrm{d}E}{2\pi\rho\rho}$$

Designabimus semiaxem maiorem per a, semiaxem minorem per b, atque illum tamquam lineam abscissarum, centrumque ellipsis tamquam initium adoptabimus. Hinc erit $aa - bb = aaee$, abscissa puncti orbitae $= a\cos E$, ordinata $= b\sin E$. Denique distantiam puncti attracti a plano orbitae denotabimus per C, atque coordinatas reliquas axi maiori et minori parallelas per A et B. His ita praeparatis, attractio elementi orbitae decomponetur in duas axi maiori et minori parallelas atque tertiam plano orbitae normalem, puta

$$\frac{(A-a\cos E)(1-e\cos E)\,\mathrm{d}E}{2\pi\rho^3} = \mathrm{d}\xi$$

$$\frac{(B-b\sin E)(1-e\cos E)\,\mathrm{d}E}{2\pi\rho^3} = \mathrm{d}\eta$$

$$\frac{C(1-e\cos E)\,\mathrm{d}E}{2\pi\rho^3} = \mathrm{d}\zeta$$

ubi $\rho = \sqrt{((A-a\cos E)^2 + (B-b\sin E)^2 + CC)}$.

Integratis hisce differentialibus ab $E = 0$ usque ad $E = 360^0$, prodibunt attractiones partiales ξ, η, ζ secundum directiones, directionibus coordinatarum oppositas, e quibus attractio integra composita erit. et quas per methodum notam ad quaslibet alias directiones referre licebit.

3.

Rei summa iam in eo versatur, ut introducta loco ipsius E alia variabili, quantitas radicalis in formam simpliciorem redigatur. Ad hunc finem statuemus

$$\cos E = \frac{\alpha + \alpha'\cos T + \alpha''\sin T}{\gamma + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T}, \qquad \sin E = \frac{\beta + \beta'\cos T + \beta''\sin T}{\gamma + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T}$$

ubi autem novem coëfficientes α, α', α'' etc. manifesto non sunt penitus arbitrarii, sed certis conditionibus satisfacere debent, quas ante omnia perscrutari oportet. Primo observamus, substitutionem eandem manere, si omnes coëfficientes per eundem factorem multiplicentur, ita ut absque generalitatis detrimento uni ex ipsis valorem determinatum tribuere, e. g. statuere liceret $\gamma = 1$: attamen concinnitatis caussa omnes novem aliquantisper indefiniti maneant. Porro monemus, excludi debere valores tales, ubi $\alpha, \alpha', \alpha''$ vel β, β', β'' ipsis $\gamma, \gamma', \gamma''$ resp. proportionales essent: alioquin enim E haud amplius indeterminata maneret. Nequeunt igitur $\gamma'\alpha''-\gamma''\alpha'$, $\gamma''\alpha-\gamma\alpha''$, $\gamma\alpha'-\gamma'\alpha$ simul evanescere.

Manifesto coëfficientes $\alpha, \alpha', \alpha''$ etc. ita comparati esse debent, ut fiat indefinite

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha+\alpha'\cos T+\alpha''\sin T)^2\\ +(\beta+\beta'\cos T+\beta''\sin T)^2\\ -(\gamma+\gamma'\cos T+\gamma''\sin T)^2\end{array}\right\} = 0$$

unde necessario haec functio habere debet formam

$$k(\cos T^2+\sin T^2-1)$$

Hinc colligimus sex aequationes conditionales

$$\left.\begin{array}{rl}-\alpha\alpha-\beta\beta+\gamma\gamma = & k\\ -\alpha'\alpha'-\beta'\beta'+\gamma'\gamma' = & -k\\ -\alpha''\alpha''-\beta''\beta''+\gamma''\gamma'' = & -k\\ -\alpha'\alpha''-\beta'\beta''+\gamma'\gamma'' = & 0\\ -\alpha''\alpha-\beta''\beta+\gamma''\gamma = & 0\\ -\alpha\alpha'-\beta\beta'+\gamma\gamma' = & 0\end{array}\right\} \quad \text{(I)}$$

Ab his aequationibus pendent plures aliae, quas evolvere operae pretium erit. Statuendo brevitatis caussa

$$\alpha\beta'\gamma''+\alpha'\beta''\gamma+\alpha''\beta\gamma'-\alpha\beta''\gamma'-\alpha'\beta\gamma''-\alpha''\beta'\gamma = \varepsilon \;\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

e combinatione aequationum (I) facile derivantur novem sequentes:

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon\alpha = -k(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')\\ \varepsilon\beta = -k(\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma'')\\ \varepsilon\gamma = +k(\alpha'\beta''-\beta'\alpha'')\\ \varepsilon\alpha' = +k(\beta''\gamma-\gamma''\beta)\\ \varepsilon\beta' = +k(\gamma''\alpha-\alpha''\gamma)\\ \varepsilon\gamma' = -k(\alpha''\beta-\beta''\alpha)\\ \varepsilon\alpha'' = +k(\beta\gamma'-\gamma\beta')\\ \varepsilon\beta'' = +k(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')\\ \varepsilon\gamma'' = -k(\alpha\beta'-\beta\alpha')\end{array}\right\} \quad \text{(III)}$$

E tribus primis harum aequationum rursus deducimus hanc:

$$\begin{aligned}&\varepsilon\alpha(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')+\varepsilon\beta(\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma'')+\varepsilon\gamma(\alpha'\beta''-\beta'\alpha'')\\ =&-k(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')^2-k(\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma'')^2+k(\alpha'\beta''-\beta'\alpha'')^2\end{aligned}$$

cui aequivalens est haec:

$$\varepsilon\varepsilon=k(-\alpha'\alpha'-\beta'\beta'+\gamma'\gamma')(-\alpha''\alpha''-\beta''\beta''+\gamma''\gamma'')-k(-\alpha'\alpha''-\beta'\beta''+\gamma'\gamma'')^2$$

quae adiumento aequationum 2, 3, 4 in (I) mutatur in hanc:

$$\varepsilon\varepsilon=k^3 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (\text{IV})$$

Aeque facile ex aequationibus (I) derivantur hae:

$$\left.\begin{aligned}(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')^2&=-k(k-\alpha'\alpha'-\alpha''\alpha'')\\(\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma'')^2&=-k(k-\beta'\beta'-\beta''\beta'')\\(\alpha'\beta''-\beta'\alpha'')^2&=+k(k+\gamma'\gamma'+\gamma''\gamma'')\\(\beta''\gamma-\gamma''\beta)^2&=+k(k+\alpha\alpha-\alpha''\alpha'')\\(\gamma''\alpha-\alpha''\gamma)^2&=+k(k+\beta\beta-\beta''\beta'')\\(\alpha''\beta-\beta''\alpha)^2&=-k(k-\gamma\gamma+\gamma''\gamma'')\\(\beta\gamma'-\gamma\beta')^2&=+k(k+\alpha\alpha-\alpha'\alpha')\\(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2&=+k(k+\beta\beta-\beta'\beta')\\(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2&=-k(k-\gamma\gamma+\gamma'\gamma')\end{aligned}\right\}\;(\text{V})$$

Exempli caussa evolutionem primae adscribimus, ad cuius instar reliquae facile formabuntur. Aequationes 4, 2, 3 in (I) scilicet suppeditant

$$(\gamma'\gamma''-\beta'\beta'')^2-(\gamma'\gamma'-\beta'\beta')(\gamma''\gamma''-\beta''\beta'')=\alpha'\alpha'\alpha''\alpha''-(\alpha'\alpha'-k)(\alpha''\alpha''-k)$$

quae aequatio evoluta protinus ipsam primam in (V) sistit.

Ex his aequationibus (V) concludimus, valorem $k=0$ in disquisitione nostra haud admissibilem esse; hinc enim omnes novem quantitates $\beta'\gamma''-\gamma'\beta''$ etc. necessario evanescerent, i. e. coëfficientes α, α', α'' tum ipsis β, β', β'', tum ipsis γ, γ', γ'' proportionales evaderent. Hinc etiam, propter aequationem IV, quantitas ε evanescere nequit; quamobrem k necessario debet esse quantitas positiva, siquidem omnes coëfficientes α, α', α'' etc. debent esse reales. Combinatis tribus aequationibus primis in (III) cum tribus primis in (V), hae novae prodeunt, quae manifesto a valore ipsius k non evanescente pendent:

$$\left.\begin{aligned} \alpha\alpha-\alpha'\alpha'-\alpha''\alpha'' &= -k \\ \beta\beta-\beta'\beta'-\beta''\beta'' &= -k \\ \gamma\gamma-\gamma'\gamma'-\gamma''\gamma'' &= +k \end{aligned}\right\} \text{(VI)}$$

Combinatio reliquarum easdem produceret. His denique adiungimus tres sequentes:

$$\left.\begin{aligned} \beta\gamma-\beta'\gamma'-\beta''\gamma'' &= 0 \\ \gamma\alpha-\gamma'\alpha'-\gamma''\alpha'' &= 0 \\ \alpha\beta-\alpha'\beta'-\alpha''\beta'' &= 0 \end{aligned}\right\} \text{(VII)}$$

quae facile ex aequationibus III derivantur; e. g. secunda, quinta et octava suppeditant:

$$\varepsilon\beta\gamma-\varepsilon\beta'\gamma'-\varepsilon\beta''\gamma'' = -k\gamma(\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma'')-k\gamma'(\gamma''\alpha-\alpha''\gamma)-k\gamma''(\gamma\alpha'-\alpha\gamma') = 0$$

Manifesto hae quoque aequationes ab exclusione valoris $k = 0$ sunt dependentes*).

Quoniam, ut iam supra monuimus, omnes coëfficientes α, α', α'' etc. per eundem factorem multiplicare licet, unde valor ipsius k per quadratum eiusdem factoris multiplicatus prodibit, abhinc semper supponemus

$$k = 1$$

quo pacto necessario quoque erit vel $\varepsilon = +1$ vel $\varepsilon = -1$. Patet itaque, novem coëfficientes α, α', α'' etc., inter quos sex aequationes conditionales adsunt, ad tres quantitates ab invicem independentes reducibiles esse debere, quod quidem commodissime per tres angulos sequenti modo efficitur:

$$\begin{aligned} \alpha &= \cos L \operatorname{tang} N \\ \beta &= \sin L \operatorname{tang} N \\ \gamma &= \sec N \\ \alpha' &= \cos L \cos M \sec N \pm \sin L \sin M \\ \beta' &= \sin L \cos M \sec N \mp \cos L \sin M \\ \gamma' &= \cos M \operatorname{tang} N \\ \alpha'' &= \cos L \sin M \sec N \mp \sin L \cos M \\ \beta'' &= \sin L \sin M \sec N \pm \cos L \cos M \\ \gamma'' &= \sin M \operatorname{tang} N \end{aligned}$$

*) Forsan haud superfluum erit monere, nos analysin praecedentem consulto elegisse atque alii derivationi relationum III—VII praetulisse, quae quamquam aliquantulum elegantior videretur, tamen, accurate examinata, quibusdam dubiis obnoxia inventa est, quae non sine ambagibus removere licuisset.

ubi signorum ambiguorum superiora referuntur ad casum $\varepsilon = +1$, inferiora ad casum $\varepsilon = -1$. Attamen tractatio analytica ad maximam partem elegantius sine usu horum angulorum absolvitur. Ceterum haud difficile foret, significationem geometricam tum horum angulorum, tum reliquarum quantitatum auxiliarium in hac disquisitione occurrentium assignare; hanc vero interpretationem ad institutum nostrum haud necessariam lectori perito explicandam linquimus.

4.

Si iam in expressione distantiae ρ pro $\cos E$ et $\sin E$ valores supra assumti substituuntur, illa in hanc formam transibit:

$$\rho = \frac{\sqrt{(G + G'\cos T^2 + G''\sin T^2 + 2H\cos T\sin T + 2H'\sin T + 2H''\cos T)}}{\gamma + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T}$$

ubi coëfficientes α, α', α'' etc. ita determinabimus, ut salvis sex aequationibus conditionalibus

$$\left.\begin{array}{rl} -\alpha\alpha - \beta\beta + \gamma\gamma = & 1 \\ -\alpha'\alpha' - \beta'\beta' + \gamma'\gamma' = & -1 \\ -\alpha''\alpha'' - \beta''\beta'' + \gamma''\gamma'' = & -1 \\ -\alpha'\alpha'' - \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = & 0 \\ -\alpha''\alpha - \beta''\beta + \gamma''\gamma = & 0 \\ -\alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma' = & 0 \end{array}\right\} \quad [1]$$

adeoque etiam reliquis inde demanantibus, fiat

$$H = 0, \quad H' = 0, \quad H'' = 0$$

quo pacto problema generaliter loquendo erit determinatum. Quodsi itaque denominatorem ipsius ρ per t denotamus, transire debet functio trium quantitatum t, $t\cos E$, $t\sin E$ haec

$$(AA + BB + CC)tt + aa(t\cos E)^2 + bb(t\sin E)^2 - 2aAt.t\cos E - 2bBt.t\sin E$$

per substitutionem

$$\begin{aligned} t\cos E &= \alpha + \alpha'\cos T + \alpha''\sin T \\ t\sin E &= \beta + \beta'\cos T + \beta''\sin T \\ t &= \gamma + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T \end{aligned}$$

in

$$G + G' \cos T^2 + G'' \sin T^2$$

Manifesto hoc idem est, ac si dicas, functionem trium indeterminatarum x, y, z hanc (W)

$$aaxx + bbyy + (AA + BB + CC)zz - 2aAxz - 2bByz$$

per substitutionem

$$\begin{aligned} x &= \alpha u + \alpha' u' + \alpha'' u'' \\ y &= \beta u + \beta' u' + \beta'' u'' \\ z &= \gamma u + \gamma' u' + \gamma'' u'' \end{aligned}$$

in functionem indeterminatarum u, u', u'' hanc

$$Guu + G'u'u' + G''u''u''$$

transire debere. At quum ex his formulis, adiumento aequationum [1], facile sequatur

$$\begin{aligned} u &= -\alpha x - \beta y + \gamma z \\ u' &= \quad \alpha' x + \beta' y - \gamma' z \\ u'' &= \quad \alpha'' x + \beta'' y - \gamma'' z \end{aligned}$$

manifesto functio W identica esse debebit cum hac

$$G(-\alpha x - \beta y + \gamma z)^2 + G'(\alpha' x + \beta' y - \gamma' z)^2 + G''(\alpha'' x + \beta'' y - \gamma'' z)^2$$

unde habemus sex aequationes

$$\left.\begin{aligned} aa &= G\alpha\alpha + G'\alpha'\alpha' + G''\alpha''\alpha'' \\ bb &= G\beta\beta + G'\beta'\beta' + G''\beta''\beta'' \\ AA + BB + CC &= G\gamma\gamma + G'\gamma'\gamma' + G''\gamma''\gamma'' \\ bB &= G\beta\gamma + G'\beta'\gamma' + G''\beta''\gamma'' \\ aA &= G\gamma\alpha + G'\gamma'\alpha' + G''\gamma''\alpha'' \\ 0 &= G\alpha\beta + G'\alpha'\beta' + G''\alpha''\beta'' \end{aligned}\right\} \quad [2]$$

Ex his duodecim aequationibus [1] et [2] incognitas nostras $G, G', G'', \alpha, \alpha', \alpha''$ etc., determinare oportebit.

5.

E combinatione aequationum [1] et [2] facile derivantur sequentes:

$$-\alpha aa + \gamma aA = \alpha G$$
$$-\beta bb + \gamma bB = \beta G$$
$$\gamma(AA + BB + CC) - \alpha aA - \beta bB = \gamma G$$

unde fit porro

$$\alpha = \frac{\gamma aA}{aa + G} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad [3]$$
$$\beta = \frac{\gamma bB}{bb + G} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad [4]$$
$$AA + BB + CC - \frac{aaAA}{aa + G} - \frac{bbBB}{bb + G} = G$$

Ultimam sic quoque exhibere possumus

$$\frac{AA}{aa + G} + \frac{BB}{bb + G} + \frac{CC}{G} = 1 \quad \ldots \ldots \quad [5]$$

Perinde e combinatione aequationum [1] et [2] deducimus

$$\alpha' aa - \gamma' aA = \alpha' G'$$
$$\beta' bb - \gamma' bB = \beta' G'$$
$$-\gamma'(AA + BB + CC) + \alpha' aA + \beta' bB = \gamma' G'$$

atque hinc

$$\alpha' = \frac{\gamma' aA}{aa - G'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad [6]$$
$$\beta' = \frac{\gamma' bB}{bb - G'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad [7]$$
$$\frac{AA}{aa - G'} + \frac{BB}{bb - G'} - \frac{CC}{G'} = 1 \quad \ldots \ldots \quad [8]$$

et prorsus simili modo

$$\alpha'' = \frac{\gamma'' aA}{aa - G''} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad [9]$$
$$\beta'' = \frac{\gamma'' bB}{bb - G''} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad [10]$$
$$\frac{AA}{aa - G''} + \frac{BB}{bb - G''} - \frac{CC}{G''} = 1 \quad \ldots \ldots \quad [11]$$

Patet itaque, G, $-G'$, $-G''$ esse radices aequationis

$$\frac{AA}{aa + x} + \frac{BB}{bb + x} + \frac{CC}{x} = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad [12]$$

quae rite evoluta ita se habet

$$x^3 - (AA + BB + CC - aa - bb)xx + (aabb - aaBB - aaCC - bbAA - bbCC)x$$
$$- aabbCC = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [13]$$

6.

Iam de indole huius aequationis cubicae sequentia sunt notanda.

I. Ex aequationis termino ultimo $-aabbCC$ concluditur, eam certe habere radicem unam realem, et quidem vel positivam, vel, si $C = 0$, cifrae aequalem. Denotemus hanc radicem realem non negativam per g.

II. Subtrahendo ab aequatione 12, ita exhibita

$$x = \frac{AAx}{aa+x} + \frac{BBx}{bb+x} + CC$$

hanc

$$g = \frac{AAg}{aa+g} + \frac{BBg}{bb+g} + CC$$

et dividendo per $x - g$, oritur nova, duas reliquas radices complectens

$$1 = \frac{aaAA}{(aa+x)(aa+g)} + \frac{bbBB}{(bb+x)(bb+g)}$$

quae rite ordinata et soluta suppeditat [14]

$$2x = \frac{aaAA}{aa+g} + \frac{bbBB}{bb+g} - aa - bb \pm \sqrt{\left(\left(aa - bb - \frac{aaAA}{aa+g} + \frac{bbBB}{bb+g}\right)^2 + \frac{4aabbAABB}{(aa+g)(bb+g)}\right)}$$

Haec expressio, quum quantitas sub signo radicali natura sua sit positiva, vel saltem non negativa, monstrat, etiam duas reliquas radices semper fieri reales.

III. Subtrahendo autem ab invicem aequationes istas sic exhibitas

$$gx = \frac{AAgx}{aa+x} + \frac{BBgx}{bb+x} + gCC$$
$$gx = \frac{AAgx}{aa+g} + \frac{BBgx}{bb+g} + xCC$$

et dividendo per $g - x$, prodit aequatio duas reliquas radices continens in hacce forma:

$$0 = \frac{AAgx}{(aa+g)(aa+x)} + \frac{BBgx}{(bb+g)(bb+x)} + CC$$

cui manifesto, si g est quantitas positiva, per valorem positivum ipsius x satisfieri nequit. Unde concludimus, aequationem nostram cubicam radices positivas plures quam unam habere non posse.

IV. Quoties itaque 0 non est inter radices aequationis nostrae, aderunt necessario radix una positiva cum duabus negativis. Quoties vero $C = 0$, adeoque 0 una radicum, reliquas complectetur aequatio

$$xx - (AA + BB - aa - bb)x + aabb - aaBB - bbAA = 0$$

unde hae radices exprimentur per

$$\tfrac{1}{2}(AA + BB - aa - bb) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{((AA - BB - aa + bb)^2 + 4AABB)}$$

Tres casus hic iterum distinguere oportebit.

Primo si terminus ultimus $aabb - aaBB - bbAA$ est positivus (i. e. si punctum attractum in plano ellipsis attrahentis *intra* curvam iacet), ambae radices, quum reales esse debeant, eodem signo affectae erunt, adeoque quum simul positivae esse nequeant, necessario erunt negativae. Ceterum hoc etiam independenter ab iis, quae iam demonstrata sunt, inde concludi potest, quod coëfficiens medius, quem ita exhibere licet

$$(aabb - aaBB - bbAA)\left(\frac{1}{aa} + \frac{1}{bb}\right) + \frac{bbAA}{aa} + \frac{aaBB}{bb}$$

manifesto in hoc casu sit positivus.

Secundo, si terminus ultimus est negativus, sive punctum attractum in plano ellipsis *extra* curvam situm, necessario altera radix positiva erit, altera negativa.

Tertio autem, si terminus ultimus ipse evanesceret, sive punctum attractum in ipsa ellipsis circumferentia iaceret, etiam radix secunda fieret $= 0$, atque tertia

$$= -\frac{bbAA}{aa} - \frac{aaBB}{bb}$$

i. e. negativa. Ceterum hunc casum, physice impossibilem, et in quo attractio ipsa infinite magna evaderet, a disquisitione nostra, hocce saltem loco, excludemus.

7.

Ad determinandos coëfficientes $\gamma, \gamma', \gamma''$, ex aequationibus 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10 invenimus

$$\left.\begin{aligned}
\gamma &= \frac{1}{\sqrt{(1-(\frac{aA}{aa+G})^2-(\frac{bB}{bb+G})^2)}}\\
\gamma' &= \frac{1}{\sqrt{((\frac{aA}{aa-G'})^2+(\frac{bB}{bb-G'})^2-1)}}\\
\gamma'' &= \frac{1}{\sqrt{((\frac{aA}{aa-G''})^2+(\frac{bB}{bb-G''})^2-1)}}
\end{aligned}\right\}\quad [15]$$

Ex his aequationibus rite cum 5, 8, 11 combinatis etiam sequitur:

$$\left.\begin{aligned}
\gamma &= \sqrt{\frac{G}{(\frac{AG}{aa+G})^2+(\frac{BG}{bb+G})^2+CC}}\\
\gamma' &= \sqrt{\frac{G'}{(\frac{AG'}{aa-G'})^2+(\frac{BG'}{bb-G'})^2+CC}}\\
\gamma'' &= \sqrt{\frac{G''}{(\frac{AG''}{aa-G''})^2+(\frac{BG''}{bb-G''})^2+CC}}
\end{aligned}\right\}\quad [16]$$

Hae posteriores expressiones ostendunt, nullam quantitatum G, G', G'' negativam esse posse, siquidem γ, γ', γ'' debent esse reales.

In casu itaque eo, ubi non est $C = 0$, necessario G aequalis statui debet radici positivae aequationis B, patetque adeo, $-G'$ aequalem esse debere alteri radici negativae, atque $-G''$ aequalem alteri*); utram vero radicem pro $-G'$, utram pro $-G''$ adoptemus, prorsus arbitrarium erit.

Quoties $C = 0$, punctumque attractum intra curvam situm, duas radices negativas aequationis 13 necessario pro $-G'$ et $-G''$ adoptare et proin $G = 0$ statuere oportet. Quoniam vero in hoc casu formula prima in 16 fit indeterminata, formulam primam in 15 eius loco retinebimus, quae suppeditat

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{(1-\frac{AA}{aa}-\frac{BB}{bb})}}$$

Quoties autem pro $C = 0$ punctum attractum extra ellipsin iacet. aequa-

*) Proprie quidem ex analysi praecedenti tantummodo sequitur, $-G'$ et $-G''$ satisfacere debere aequationi 13, unde dubium esse videtur, annon liceat, utramque $-G'$ et $-G''$ *eidem* radici negativae aequalem ponere, prorsus neglecta radice tertia. Sed facile perspicietur, siquidem aequationis radix secunda et tertia sint inaequales, ex $-G' = -G''$ sequi $\gamma' = \gamma''$, $\alpha' = \alpha''$, $\beta' = \beta''$, et proin $-\alpha'\alpha''-\beta'\beta''+\gamma'\gamma'' = -\alpha'\alpha'-\beta'\beta'+\gamma'\gamma' = 1$, quod aequationi quartae in [1] est contrarium. Conf. quae infra de casu duarum radicum aequalium aequationis 13 dicentur.

tionis 13 radix positiva statuenda est $= G$, atque vel negativa $= -G'$, et $G'' = 0$, vel radix negativa $= -G''$, et $G' = 0$; coëfficientem γ'' vel γ' vero inveniemus per formulam

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{AA}{aa}+\frac{BB}{bb}-1\right)}}$$

Ceterum in casu iam excluso, ubi punctum attractum in ipsa circumferentia ellipsis situm supponeretur, coëfficientes γ et γ', vel γ et γ'' evaderent infiniti, quod indicat, transformationem nostram ad hunc casum omnino non esse applicabilem.

8.

Quamquam formulae 15, 16 ad determinationem coëfficientium $\gamma, \gamma', \gamma''$ sufficere possent, tamen etiam elegantiores assignare licet. Ad hunc finem multiplicabimus aequationem [5] per $aabb - GG$, unde prodit, levi reductione facta,

$$\frac{aaAA(bb+G)}{aa+G} - AAG + \frac{bbBB(aa+G)}{bb+G} - BBG + \frac{aabbCC}{G} - CCG = aabb - GG$$

Sed e natura aequationis cubicae fit

summa radicum $G - G' - G'' = AA + BB + CC - aa - bb$
productum radicum $GG'G'' = aabbCC$

Hinc aequatio praecedens transit in sequentem:

$$\frac{aaAA(bb+G)}{aa+G} + \frac{bbBB(aa+G)}{bb+G} + G'G'' - G(G-G'-G''+aa+bb) = aabb - GG$$

quam etiam sic exhibere licet

$$\frac{aaAA(bb+G)}{aa+G} + \frac{bbBB(aa+G)}{bb+G} - (aa+G)(bb+G) + (G+G')(G+G'') = 0$$

Hinc valor coëfficientis γ e formula prima in [15] transmutatur in sequentem:

$$\gamma = \sqrt{\frac{(aa+G)(bb+G)}{(G+G')(G+G'')}} \quad \ldots\ldots\ldots [17]$$

Per analysin prorsus similem invenitur

$$\gamma' = \sqrt{\frac{(aa-G')(bb-G')}{(G+G')(G''-G')}} \quad \ldots\ldots\ldots [18]$$

$$\gamma'' = \sqrt{\frac{(aa-G'')(bb-G'')}{(G+G'')(G'-G'')}} \quad \ldots\ldots\ldots [19]$$

Postquam coëfficientes $\gamma, \gamma', \gamma''$ inventi sunt, reliqui $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha'', \beta''$ inde per formulas 3, 4, 6, 7, 9, 10 derivabuntur.

9.

Signa expressionum radicalium, per quas $\gamma, \gamma', \gamma''$ determinavimus, ad lubitum accipi posse facile perspicitur. Operae autem pretium est, inquirere, quomodo signum quantitatis ε cum signis istis nexum sit. Ad hunc finem consideremus aequationem tertiam in III art. 3.

$$\varepsilon\gamma = \alpha'\beta'' - \beta'\alpha''$$

quae per formulas 6, 7, 9, 10 transmutatur in hanc:

$$\begin{aligned}\varepsilon\gamma &= \frac{abAB\gamma'\gamma''}{(aa-G')(bb-G'')} - \frac{abAB\gamma'\gamma''}{(aa-G'')(bb-G')}\\ &= \frac{ab(aa-bb)AB(G''-G')\gamma'\gamma''}{(aa-G')(aa-G'')(bb-G')(bb-G'')}\end{aligned}$$

Sed e consideratione aequationis 13 facile deducimus

$$\begin{aligned}(aa+G)(aa-G')(aa-G'') &= aa(aa-bb)AA\\ (bb+G)(bb-G')(bb-G'') &= -bb(aa-bb)BB\end{aligned}$$

Hinc aequatio praecedens fit

$$\varepsilon\gamma = \frac{(aa+G)(bb+G)(G'-G'')\gamma'\gamma''}{ab(aa-bb)AB}$$

quae combinata cum aequatione 17 suppeditat

$$\gamma\gamma'\gamma'' = \frac{\varepsilon ab(aa-bb)AB}{(G+G')(G+G'')(G'-G'')}$$

Hinc patet, si pro $-G'$ electa sit aequationis cubicae radix negativa absolute maior, simulque coëfficientes $\gamma, \gamma', \gamma''$ omnes positive accepti sint, ε idem signum nancisci, quod habet AB, idemque evenire, si his quatuor conditionibus, vel omnibus vel duabus ex ipsis, contraria acta sint, oppositum vero, si uni vel tribus conditionibus adversatus fueris. Ceterum sequentes adhuc relationes notare convenit, e praecedentibus facile derivandas:

$$
\begin{aligned}
\alpha\alpha'\alpha'' &= \frac{\varepsilon aabAAB}{(G+G')(G+G'')(G'-G'')} \\
6 6' 6'' &= -\frac{\varepsilon abbABB}{(G+G')(G+G'')(G'-G'')} \\
\alpha 6 &= \frac{abAB}{(G+G')(G+G'')} \\
\alpha' 6' &= -\frac{abAB}{(G+G')(G'-G'')} \\
\alpha'' 6'' &= \frac{abAB}{(G+G'')(G'-G'')}
\end{aligned}
$$

10.

Formulae nostrae quibusdam casibus indeterminatae fieri possunt, quos seorsim considerare oportet. Ac primo quidem discutiemus casum eum. ubi aequationis cubicae radices negativae $-G'$, $-G''$ aequales fiunt, unde, per formulas 18, 19, coëfficientes γ, γ'' valores infinitos nancisci videntur, qui autem revera sunt indeterminati.

Statuendo in formula 14, $g = G$, patet, ut duo valores ipsius x, i. e. ut $-G'$ et $-G''$ fiant aequales, necessario esse debere

$$AB = 0, \quad aa - bb - \frac{aaAA}{aa+G} + \frac{bbBB}{bb+G} = 0$$

Hinc facile intelligitur, quum $aa - bb$ natura sua sit vel quantitas positiva, vel $= 0$, esse debere

$$
\begin{aligned}
&B = 0 \\
&aa - bb = \frac{aaAA}{aa+G}, \quad \text{sive} \quad aa + G = \frac{aaAA}{aa-bb}
\end{aligned}
$$

Substituendo hos valores in aequatione 14, fit

$$G' = G'' = bb$$

Substituendo porro valorem $x = -bb$ in aequatione cubica 13, prodit

$$(aa-bb)(CC+bb) = bbAA$$

Quoties haec aequatio conditionalis simul cum aequatione $B = 0$ locum habet, casus, quem hic tractamus, adducitur. Et quum fiat

$$G = \frac{aaAA}{aa-bb} - aa = \frac{aaCC}{bb}$$

formula 17 suppeditat

$$\gamma = \sqrt{\frac{aabbAA}{(aa-bb)(aaCC+b^4)}} = \sqrt{\frac{aaCC+aabb}{aaCC+b^4}}$$

ac dein formulae 3, 4

$$\alpha = \frac{\gamma(aa-bb)}{aA} = \frac{\gamma bbA}{a(CC+bb)} = \sqrt{\frac{bb(aa-bb)}{aaCC+b^4}} = \sqrt{\frac{b^4AA}{(CC+bb)(aaCC+b^4)}}$$
$$\beta = 0$$

Valores coëfficientium γ', γ'' per formulas 18, 19 in hoc casu indeterminati manent, atque sic etiam valores coëfficientium reliquorum α', β', α'', β''. Nihilominus per unum horum coëfficientium omnes quinque reliqui exprimi possunt, e. g. fit per formulam 6

$$\alpha' = \frac{\gamma' aA}{aa-bb}$$

ac dein

$$\beta' = \sqrt{(1-\alpha'\alpha'+\gamma'\gamma')},\quad \gamma'' = \sqrt{(\gamma\gamma-1-\gamma'\gamma')},\quad \alpha'' = \frac{\gamma'' aA}{aa-bb},\quad \beta'' = \sqrt{(1-\alpha''\alpha''+\gamma''\gamma'')}$$

Sed concinnius hoc ita perficitur. Ex

$$\gamma\gamma = 1+\alpha\alpha,\quad \alpha\alpha' = \gamma\gamma',\quad 1 = \alpha'\alpha'+\beta'\beta'-\gamma'\gamma'$$

sequitur

$$\beta'\beta'+\frac{\gamma'\gamma'}{\alpha\alpha} = 1-\alpha'\alpha'+\frac{\gamma\gamma\gamma'\gamma'}{\alpha\alpha} = 1$$

Quapropter statuere possumus

$$\beta' = \cos f,\quad \gamma' = \alpha\sin f,\quad \alpha' = \gamma\sin f$$

Dein vero e formulis

$$\varepsilon\alpha'' = \beta\gamma'-\gamma\beta',\quad \varepsilon\beta'' = \gamma\alpha'-\alpha\gamma',\quad \varepsilon\gamma'' = \beta\alpha'-\alpha\beta',\quad \varepsilon\varepsilon = 1$$

invenimus

$$\alpha'' = -\varepsilon\gamma\cos f,\quad \beta'' = \varepsilon\sin f,\quad \gamma'' = -\varepsilon\alpha\cos f$$

Valor anguli f hic arbitrarius est, nec non pro lubitu statui poterit vel $\varepsilon = +1$ vel $\varepsilon = -1$.

11.

Si G', G'' sunt inaequales, valores coëfficientium γ, γ', γ'' per formulas 17, 18, 19 indeterminati esse nequeunt, sed quoties aliqua quantitatum

$aa - G'$, $bb - G'$, $aa - G''$, $bb - G''$ evanescit, valor coëfficientis α', β', α'', γ'' per formulam 6, 7, 9, 10 resp. indeterminatus manere primo aspectu videtur, quod tamen secus se habere levis attentio docebit.

Supponumus e. g., esse $aa - G' = 0$, fietque, per aequationem 18, $\gamma' = 0$, nec non per aequationem 7, $\beta' = 0$ (siquidem non fuerit simul $aa = bb$) unde necessario esse debet $\alpha' = \pm 1$. Si vero simul $aa = bb$, formula, quae praecedit sextam in art. 5, suppeditat $\alpha' A + \beta' B = 0$, quae aequatio cum $\alpha'\alpha' + \beta'\beta' = 1$ iuncta, producit

$$\alpha' = \frac{B}{\sqrt{(AA+BB)}}, \quad \beta' = \frac{-A}{\sqrt{(AA+BB)}}$$

Hae expressiones manifesto indeterminatae esse nequeunt, nisi simul fuerit $A = 0$, $B = 0$; tunc vero ad casum in art. praec. iam consideratum delaberemur.

12.

Postquam duodecim quantitates $G, G', G'', \alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta'', \gamma, \gamma', \gamma''$ complete determinare docuimus, ad evolutionem differentialis $\mathrm{d}E$ progredimur. Statuamus

$$t = \gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T \quad \ldots\ldots\ldots [20]$$

ita ut fiat

$$t \cos E = \alpha + \alpha' \cos T + \alpha'' \sin T \quad \ldots\ldots\ldots [21]$$
$$t \sin E = \beta + \beta' \cos T + \beta'' \sin T \quad \ldots\ldots\ldots [22]$$

Hinc deducimus

$$\begin{aligned} t\,\mathrm{d}E &= \cos E\,\mathrm{d}.\,t \sin E - \sin E\,\mathrm{d}.\,t\cos E \\ &= \cos E(\beta''\cos T - \beta'\sin T)\,\mathrm{d}T - \sin E(\alpha''\cos T - \alpha'\sin T)\,\mathrm{d}T \end{aligned}$$

adeoque

$$\begin{aligned} tt\,\mathrm{d}E &= (\alpha\beta'' - \alpha''\beta)\cos T\,\mathrm{d}T + (\alpha'\beta - \beta'\alpha)\sin T\,\mathrm{d}T + (\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')\,\mathrm{d}T \\ &= \varepsilon\gamma'\cos T\,\mathrm{d}T + \varepsilon\gamma''\sin T\,\mathrm{d}T + \varepsilon\gamma\,\mathrm{d}T = \varepsilon t\,\mathrm{d}T \end{aligned}$$

sive

$$t\,\mathrm{d}E = \varepsilon\,\mathrm{d}T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [23]$$

Observare convenit, quantitatem t natura sua semper positivam esse, si coëfficiens γ sit positivus, vel semper negativam, si γ sit negativus. Quum enim sit $(\gamma'\cos T + \gamma''\sin T)^2 + (\gamma''\cos T - \gamma'\sin T)^2 = \gamma'\gamma' + \gamma''\gamma'' = \gamma\gamma - 1$, erit semper

$\gamma' \cos T + \gamma'' \sin T$, sine respectu signi, minor quam γ. Hinc concludimus, quoties $\varepsilon\gamma$ sit quantitas positiva, variabiles E et T semper simul crescere; quoties autem $\varepsilon\gamma$ sit quantitas negativa, necessario alteram variabilem semper decrescere, dum altera augeatur.

13.

Nexus inter variabiles E et T adhuc melius illustratur per ratiocinia sequentia. Statuendo $\sqrt{(\gamma\gamma - 1)} = \delta$, ita ut fiat $\delta\delta = \alpha\alpha + \beta\beta = \gamma'\gamma' + \gamma''\gamma''$, ex aequationibus 20, 21, 22 deducimus

$$\begin{aligned} t(\delta + \alpha \cos E + \beta \sin E) \\ &= \gamma\delta + \alpha\alpha + \beta\beta + (\gamma'\delta + \alpha\alpha' + \beta\beta')\cos T + (\gamma''\delta + \alpha\alpha'' + \beta\beta'')\sin T \\ &= (\gamma + \delta)(\delta + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T) \end{aligned}$$

Perinde ex aequationibus 21, 22 sequitur

$$t(\alpha \sin E - \beta \cos E) = \varepsilon(\gamma' \sin T - \gamma'' \cos T)$$

Hae aequationes, statuendo

$$\frac{\alpha}{\delta} = \cos L, \quad \frac{\beta}{\delta} = \sin L, \quad \frac{\gamma'}{\delta} = \cos M, \quad \frac{\gamma''}{\delta} = \sin M$$

nanciscuntur formam sequentem:

$$\begin{aligned} t(1 + \cos(E - L)) &= (\gamma + \delta)(1 + \cos(T - M)) \\ t \sin(E - L) &= \varepsilon \sin(T - M) \end{aligned}$$

unde fit per divisionem, propter $(\gamma + \delta)(\gamma - \delta) = 1$,

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(E - L) &= \varepsilon(\gamma - \delta) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(T - M) \\ \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(T - M) &= \varepsilon(\gamma + \delta) \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(E - L) \end{aligned}$$

Hinc non solum eadem conclusio derivatur, ad quam in fine art. praec. deducti sumus, sed insuper etiam patet, si valor ipsius E crescat 360 gradibus, valorem ipsius T tantundem vel crescere vel diminui, prout $\varepsilon\gamma$ sit vel quantitas positiva vel negativa. Ceterum statuendo $\delta = \operatorname{tang} N$, $\gamma = \sec N$, manifesto erit

$$\gamma - \delta = \operatorname{tang}(45^0 - \tfrac{1}{2}N), \quad \gamma + \delta = \operatorname{tang}(45^0 + \tfrac{1}{2}N)$$

14.

E combinatione aequationum 20, 21, 22 cum aequationibus art. 5 obtinemus:

$$at(A - a\cos E) = \alpha G - \alpha' G'\cos T - \alpha'' G''\sin T$$
$$bt(B - b\sin E) = \beta G - \beta' G'\cos T - \beta'' G''\sin T$$

Statuendo itaque brevitatis gratia

$$(\alpha G - \alpha' G'\cos T - \alpha'' G''\sin T)(\gamma - e\alpha + (\gamma' - e\alpha')\cos T + (\gamma'' - e\alpha'')\sin T) = aX$$
$$(\beta G - \beta' G'\cos T - \beta'' G''\sin T)(\gamma - e\alpha + (\gamma' - e\alpha')\cos T + (\gamma'' - e\alpha'')\sin T) = bY$$
$$C(\gamma + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T)(\gamma - e\alpha + (\gamma' - e\alpha')\cos T + (\gamma'' - e\alpha'')\sin T) = Z$$

fit

$$\mathrm{d}\xi = \frac{\varepsilon X \mathrm{d}T}{2\pi t^3 \rho^3}, \quad \mathrm{d}\eta = \frac{\varepsilon Y \mathrm{d}T}{2\pi t^3 \rho^3}, \quad \mathrm{d}\zeta = \frac{\varepsilon Z \mathrm{d}T}{2\pi t^3 \rho^3}$$

Sed habetur

$$t\rho = \pm\sqrt{(G + G'\cos T^2 + G''\sin T^2)}$$

signo superiore vel inferiore valente, prout t est quantitas positiva vel negativa (ρ enim natura sua semper positive accipitur), i. e. prout coëfficiens γ est positivus vel negativus. Hinc

$$\frac{\varepsilon \mathrm{d}T}{2\pi t^3 \rho^3} = \pm \frac{\mathrm{d}T}{2\pi(G + G'\cos T^2 + G''\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ubi signum ambiguum a signo quantitatis $\gamma\varepsilon$ pendet.

Ut iam valores ipsarum ξ, η, ζ obtineamus, integrationes differentialium exsequi oportet, a valore ipsius T, cui respondet $E = 0$, usque ad valorem, cui respondet $E = 360^0$, sive etiam (quod manifesto eodem redit) a valore ipsius T, cui respondet valor arbitrarius ipsius E, usque ad valorem, cui respondet valor ipsius E auctus 360^0; licebit itaque integrare a $T = 0$ usque ad $T = 360^0$, quoties $\varepsilon\gamma$ est quantitas positiva, vel a $T = 360^0$ usque ad $T = 0$, quoties $\varepsilon\gamma$ est negativa. Manifesto itaque, independenter a signo ipsius $\varepsilon\gamma$, erit:

$$\xi = \int \frac{X \mathrm{d}T}{2\pi(G + G'\cos T^2 + G''\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\eta = \int \frac{Y \mathrm{d}T}{2\pi(G + G'\cos T^2 + G''\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\zeta = \int \frac{Z \mathrm{d}T}{2\pi(G + G'\cos T^2 + G''\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$

integrationibus a $T = 0$ usque ad $T = 360^0$ extensis.

15.

Nullo negotio perspicitur, integralia

$$\int \frac{\cos T \,\mathrm{d}\, T}{(G+G'\cos T^2+G''\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\int \frac{\sin T \,\mathrm{d}\, T}{(G+G'\cos T^2+G''\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\int \frac{\cos T \sin T \,\mathrm{d}\, T}{(G+G'\cos T^2+G''\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$

a $T = 180^0$ usque ad $T = 360^0$ extensa obtinere valores aequales iis, quos nanciscantur, si a $T = 0$ usque ad $T = 180^0$ extendantur, sed signis oppositis affectos; quapropter ista integralia a $T = 0$ usque ad $T = 360^0$ extensa manifesto fiunt $= 0$. Hinc colligimus, esse

$$\xi = \int \frac{((\gamma - e\alpha)\alpha G - (\gamma' - e\alpha')\alpha' G'\cos T^2 - (\gamma'' - e\alpha'')\alpha'' G''\sin T^2)\,\mathrm{d}\, T}{2\pi a(G+G'\cos T^2+G''\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\eta = \int \frac{((\gamma - e\alpha)\mathfrak{b} G - (\gamma' - e\alpha')\mathfrak{b}' G'\cos T^2 - (\gamma'' - e\alpha'')\mathfrak{b}'' G''\sin T^2)\,\mathrm{d}\, T}{2\pi b(G+G'\cos T^2+G''\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\zeta = \int \frac{((\gamma - e\alpha)\gamma + (\gamma' - e\alpha')\gamma'\cos T^2 + (\gamma'' - e\alpha'')\gamma''\sin T^2)\, C\,\mathrm{d}\, T}{2\pi (G+G'\cos T^2+G''\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$

integralibus a $T = 0$ usque ad $T = 360^0$ extensis. Quodsi itaque valores integralium, eadem extensione acceptorum,

$$\int \frac{\cos T^2 \,\mathrm{d}\, T}{2\pi((G+G')\cos T^2+(G+G'')\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\int \frac{\sin T^2 \,\mathrm{d}\, T}{2\pi((G+G')\cos T^2+(G+G'')\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$

per P, Q denotamus, erit

$$a\xi = ((\gamma - e\alpha)\alpha G - (\gamma' - e\alpha')\alpha' G')P + ((\gamma - e\alpha)\alpha G - (\gamma'' - e\alpha'')\alpha'' G'')Q$$
$$b\eta = ((\gamma - e\alpha)\mathfrak{b} G - (\gamma' - e\alpha')\mathfrak{b}' G')P + ((\gamma - e\alpha)\mathfrak{b} G - (\gamma'' - e\alpha'')\mathfrak{b}'' G'')Q$$
$$\zeta = ((\gamma - e\alpha)\gamma + (\gamma' - e\alpha')\gamma')\, CP + ((\gamma - e\alpha)\gamma + (\gamma'' - e\alpha'')\gamma'')\, CQ$$

quo pacto problema nostrum complete solutum est.

16.

Quod attinet ad quantitates P, Q, manifesto quidem utraque fit

$$= \frac{1}{2(G+G')^{\frac{3}{2}}}$$

quoties $G' = G''$, in omnibus vero reliquis casibus ad transscendentes sunt referendae. Quas quomodo per series exprimere liceat, abunde constat. Lectoribus autem gratum fore speramus, si hacce occasione determinationem harum aliarumque transscendentium per algorithmum peculiarem expeditissimum explicemus, quo per multos iam abhinc annos frequenter usi sumus, et de quo alio loco copiosius agere propositum est.

Sint m, n duae quantitates positivae, statuamusque

$$m' = \tfrac{1}{2}(m+n), \quad n' = \sqrt{mn}$$

ita ut m', n' resp. sit medium arithmeticum et geometricum inter m et n. Medium geometricum semper positive accipi supponemus. Perinde fiat

$$\begin{aligned} m'' &= \tfrac{1}{2}(m'+n'), \quad & n'' &= \sqrt{m'n'} \\ m''' &= \tfrac{1}{2}(m''+n''), \quad & n''' &= \sqrt{m''n''} \end{aligned}$$

et sic porro, quo pacto series m, m', m'', m''' etc., atque n, n', n'', n''' etc. versus *limitem communem* rapidissime convergent, quem per μ designabimus, atque simpliciter *medium arithmetico-geometricum* inter m et n vocabimus. Iam demonstrabimus, $\frac{1}{\mu}$ esse valorem integralis

$$\int \frac{dT}{2\pi\sqrt{(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)}}$$

a $T = 0$ usque ad $T = 360^0$ extensi.

Demonstr. Supponamus, variabilem T ita per aliam T' exprimi, ut fiat

$$\sin T = \frac{2m\sin T'}{(m+n)\cos T'^2 + 2m\sin T'^2}$$

perspicieturque facile, dum T' a valore 0 usque ad 90^0, 180^0, 270^0, 360^0 augeatur, etiam T (etsi inaequalibus intervallis) a 0 usque ad 90^0, 180^0, 270^0, 360^0 crescere. Evolutione autem rite facta, invenitur esse

$$\frac{dT}{\sqrt{(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)}} = \frac{dT'}{\sqrt{(m'm'\cos T'^2 + n'n'\sin T'^2)}}$$

adeoque valores integralium

$$\int \frac{\mathrm{d}\,T}{2\pi\sqrt{(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)}}, \quad \int \frac{\mathrm{d}\,T'}{2\pi\sqrt{(m'm'\cos T'^2 + n'n'\sin T'^2)}}$$

si utriusque variabilis a valore 0 usque ad valorem 360^0 extenditur, inter se aequales. Et quum perinde ulterius continuare liceat, patet, his valoribus etiam aequalem esse valorem integralis

$$\int \frac{\mathrm{d}\theta}{2\pi\sqrt{(\mu\mu\cos\theta^2 + \mu\mu\sin\theta^2)}}$$

a $\theta = 0$ usque ad $\theta = 360^0$, qui manifesto fit $= \frac{1}{\mu}$. Q. E. D.

17.

Ex aequatione, relationem inter T et T' exhibente,

$$(m-n)\sin T.\sin T'^2 = 2m\sin T' - (m+n)\sin T$$

facile deducitur

$$\sqrt{(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)} = m - (m-n)\sin T.\sin T'$$
$$\sqrt{(m'm'\cos T'^2 + n'n'\sin T'^2)} = m\,\text{cotang}\, T.\text{tang}\, T'$$

atque hinc, adiumento eiusdem aequationis,

$$\sin T.\sin T'.\sqrt{(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)} + m'(\cos T^2 - \sin T^2)$$
$$= \cos T.\cos T'.\sqrt{(m'm'\cos T'^2 + n'n'\sin T'^2)} - \tfrac{1}{2}(m-n)\sin T'^2$$

Multiplicata hac aequatione per

$$\frac{\mathrm{d}\,T}{\sqrt{(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)}} = \frac{\mathrm{d}\,T'}{\sqrt{(m'm'\cos T'^2 + n'n'\sin T'^2)}}$$

prodit

$$\frac{m'(\cos T^2 - \sin T^2)\,\mathrm{d}\,T}{\sqrt{(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)}} = -\frac{\frac{1}{2}(m-n)\sin T'^2\,\mathrm{d}\,T'}{\sqrt{(m'm'\cos T'^2 + n'n'\sin T'^2)}} + \mathrm{d}.\sin T'\cos T$$

Multiplicando hanc aequationem per $\frac{m-n}{\pi}$, substituendo $m'(m-n) = \frac{1}{2}(mm-nn)$, $(m-n)^2 = 4(m'm'-n'n')$, $\sin T'^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(\cos T'^2 - \sin T'^2)$, et integrando, a valoribus T et $T' = 0$ usque ad 360^0, habemus:

$$(mm-nn)\int\frac{(\cos T^2 - \sin T^2).\mathrm{d}\,T}{2\pi\sqrt{(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)}}$$
$$= -\frac{2(m'm'-n'n')}{\mu} + 2(m'm'-n'n')\int\frac{(\cos T'^2 - \sin T'^2)\,\mathrm{d}\,T'}{2\pi\sqrt{(m'm'\cos T'^2 + n'n'\sin T'^2)}}$$

Et quum integrale definitum ad dextram perinde transformare liceat, manifesto integrale

$$\int \frac{(\cos T^2 - \sin T^2)\, dT}{2\pi \sqrt{(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)}}$$

exprimetur per seriem infinitam citissime convergentem

$$-\frac{2(m'm'-n'n') + 4(m''m''-n''n'') + 8(m'''m'''-n'''n''') + \text{etc.}}{(mm-nn)\mu} = -\frac{\nu}{\mu}$$

Calculus numericus commodissime per logarithmos perficitur, si statuimus

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{(mm-nn)} = \lambda,\quad \tfrac{1}{4}\sqrt{(m'm'-n'n')} = \lambda',\quad \tfrac{1}{4}\sqrt{(m''m''-n''n'')} = \lambda'' \text{ etc.}$$

unde erit

$$\lambda' = \frac{\lambda\lambda}{m'},\quad \lambda'' = \frac{\lambda'\lambda'}{m''},\quad \lambda''' = \frac{\lambda''\lambda''}{m'''} \text{ etc. atque}$$

$$\nu = \frac{2\lambda'\lambda' + 4\lambda''\lambda'' + 8\lambda'''\lambda''' + \text{etc.}}{\lambda\lambda}$$

18.

Per methodum hic explicatam etiam integralia *indefinita* (a valore variabilis $= 0$ inchoantia) maxima concinnitate assignare licet. Scilicet, si T'' perinde per m', n', T' determinari supponitur, uti T' per m, n, T, ac perinde rursus T''' per m'', n'', T'' et sic porro, etiam pro quovis valore determinato ipsius T, valores terminorum serie T, T', T'', T''' etc. ad limitem θ citissime convergent, eritque

$$\int \frac{dT}{\sqrt{(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)}} = \frac{\theta}{\mu}$$

$$\int \frac{(\cos T^2 - \sin T^2)\, dT}{\sqrt{(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)}} = -\frac{\nu\theta}{\mu} + \frac{\lambda'\cos T\sin T' + 2\lambda''\cos T'\sin T'' + 4\lambda'''\cos T''\sin T''' + \text{etc.}}{\lambda\lambda}$$

Sed haec obiter hic addigitavisse sufficiat, quum ad institutum nostrum non sint necessaria.

19.

Quodsi iam statuimus $m = \sqrt{(G+G')}$, $n = \sqrt{(G+G'')}$, valores quantitatum P, Q facile ad transscendentes μ, ν reducentur. Quum enim P, Q sint valores integralium

$$\int \frac{\cos T^2 \, \mathrm{d}T}{2\pi(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \int \frac{\sin T^2 \, \mathrm{d}T}{2\pi(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$

a $T = 0$ usque ad $T = 360^0$ extensorum, primo statim obvium est, haberi

$$mmP + nnQ = \frac{1}{\mu} \ldots\ldots\ldots\ldots [24]$$

Porro fit

$$\frac{(\cos T^2 - \sin T^2)\,\mathrm{d}T}{2\pi\sqrt{(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)}} + \frac{(mm\cos T^2 - nn\sin T^2)\,\mathrm{d}T}{2\pi(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(mm\cos T^4 - nn\sin T^4)\,\mathrm{d}T}{\pi(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \mathrm{d}.\frac{\cos T\sin T}{\pi\sqrt{(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)}}$$

Integrando hanc aequationem a $T = 0$ usque ad $T = 360^0$, prodit

$$-\frac{\nu}{\mu} + mmP - nnQ = 0 \ldots\ldots\ldots [25]$$

E combinatione aequationum 24, 25 denique colligimus

$$P = \frac{1+\nu}{2mm\mu}, \quad Q = \frac{1-\nu}{2nn\mu}$$

356

ANZEIGE.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1818 Februar 9.

Am 17^{ten} Januar übergab Hr. Hofr. GAUSS der Königl. Societät eine Vorlesung:

Determinatio attractionis, quam in punctum quodlibet positionis datae exerceret planeta, cuius massa per totam eius orbitam, ratione temporis, quo singulae partes describuntur, uniformiter esset dispertita.

Vermöge eines, vielleicht bis jetzt noch von niemand ausdrücklich ausgesprochenen, aber aus den Gründen der physischen Astronomie leicht zu beweisenden Lehrsatzes, sind die Säcularveränderungen einer Planetenbahn durch die Störung eines andern Planeten dieselben, der störende Planet mag seine elliptische Bahn nach Keplers Gesetzen wirklich beschreiben, oder seine Masse mag auf den Umfang der Ellipse in dem Masse vertheilt angenommen werden, dass auf Stücke der Ellipse, die sonst in gleich grossen Zeiten beschrieben werden, gleich grosse Antheile an der ganzen Masse kommen: vorausgesetzt, dass die Umlaufszeiten des gestörten und des störenden Planeten nicht in rationalem Verhältnisse zu einander stehen. Die Aufgabe, welche den Gegenstand dieser Abhandlung ausmacht, nemlich die nicht genäherte, sondern genaue, nicht von mässiger Excentricität der Ellipse abhängige, sondern allgemeine, Bestimmung der Anziehung, welche ein elliptischer Ring von unendlich kleiner und nach obigem

Gesetze unveränderlicher Dicke gegen einen jeden Punkt im Raume ausübt, ist daher für die physische Astronomie von hohem Interesse. Inzwischen ist sie nicht weniger auch in rein mathematischer Hinsicht merkwürdig, wegen der mancherlei Kunstgriffe, welche ihre vollständige Auflösung erfordert.

Von der Auflösung selbst ist es nicht wohl thunlich, hier einen Auszug zu geben. Der Verf. hat eine rein analytische Behandlung gewählt; Kenner, welche ihr mit Aufmerksamkeit folgen, werden leicht die geometrischen Correlate der einzelnen in der Untersuchung vorkommenden Grössen, und die Umschmelzbarkeit in eine geometrische Form wahrnehmen. Hier mag es genügen, nur das Endresultat anzuführen. Drei unbekannte Grössen G, G', G'' werden durch die Wurzeln einer cubischen Gleichung bestimmt, aus deren Beschaffenheit sich beweisen lässt, dass sie alle Mal drei reelle Wurzeln habe. Die nach einer beliebigen Richtung zerlegte Anziehung des elliptischen Ringes wird sodann durch einen Ausdruck von der Form $pP+qQ$ dargestellt, wo p und q algebraisch von G, G', G'' abhängen, P und Q hingegen die bestimmten Werthe der Integrale

$$\int \frac{\cos T^2 . \mathrm{d}T}{2\pi(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\int \frac{\sin T^2 . \mathrm{d}T}{2\pi(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$

bedeuten, wenn die Integrationen von $T = 0$ bis $T = 360^0 = 2\pi$ ausgedehnt werden, und wo

$$m = \sqrt{(G+G')}, \quad n = \sqrt{(G+G'')}$$

Da diese Integrale ($m = n$ ausgenommen) transscendenter Natur sind. und bekannter Massen mit andern in der Perturbationsrechnung vorkommenden vielbehandelten Transscendenten zusammenhängen, so konnte die Auflösung, nachdem sie bis auf diesen Punkt geführt war, als vollendet angesehen werden. Der Verfasser hat indessen diese erste sich ihm darbietende Gelegenheit benutzt, um die ersten Linien eines *neuen Algorithmus* zu geben, dessen er sich schon seit einer langen Reihe von Jahren zur Bestimmung dieser Transscendenten bedient hat, und worüber er in Zukunft eine ausgedehnte zu vielen merkwürdigen Resultaten führende Untersuchung bekannt machen wird. Hier können nur die Hauptsätze, mit Uebergehung der Beweise angeführt werden. Wenn man aus zwei gegebenen positiven Grössen m und n, andere m', m'', m''' u. s. w., n', n'', n''' u. s. w. nach folgenden Gesetzen ableitet:

$$\begin{aligned} m' &= \tfrac{1}{2}(m+n), & n' &= \sqrt{mn} \\ m'' &= \tfrac{1}{2}(m'+n'), & n'' &= \sqrt{m'n'} \\ m''' &= \tfrac{1}{2}(m''+n''), & n''' &= \sqrt{m''n''} \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

d. i. wenn m', n' resp. das arithmetische und geometrische Mittel zwischen m und n ist; eben so m'', n'' das arithmetische und geometrische Mittel zwischen m' und n' u. s. f.: so nähern sich die Glieder sowohl der Reihe m, m', m'', m''' u. s. w., als die der Reihe n, n', n'', n''' u. s. w. äusserst schnell einer gemeinschaftlichen Grenze $= \mu$, welche der Verfasser das arithmetisch-geometrische Mittel von m und n nennt. Offenbar ist μ zugleich das arithmetisch-geometrische Mittel von m' und n', oder überhaupt von je zweien zusammengehörigen Gliedern der beiden Reihen. Der Verfasser beweist nun, dass $\frac{1}{\mu}$ der Werth des Integrals

$$\int \frac{\mathrm{d}\,T}{2\pi\sqrt{(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)}}$$

ist, wenn die Integration von $T = 0$ bis $T = 360^0$ ausgedehnt wird. Man wird leicht sehen, dass diess auch auf folgende Art hätte ausgesprochen werden können: Wenn die Entwicklung der Function

$$\frac{1}{\sqrt{(\alpha + \beta\cos\psi)}}$$

die Reihe

$$A + B\cos\psi + C\cos 2\psi + D\cos 3\psi + \text{ etc.}$$

gibt, so ist allezeit $\frac{1}{A}$ das arithmetisch-geometrische Mittel der beiden Grössen $\sqrt{(\alpha+\beta)}$ und $\sqrt{(\alpha-\beta)}$.

Ein zweites eben so wichtiges Theorem ist, dass wenn man die Summe der unendlichen jederzeit sehr schnell convergirenden Reihe

$$2(m'm' - n'n') + 4(m''m'' - n''n'') + 8(m'''m''' - n'''n''') + \text{ u. s. w.}$$

wo die Zahlencoëfficienten eine geometrische Progression bilden, $= (mm - nn)\nu$ setzt, der Werth des Integrals

$$\int \frac{\cos 2T.\,\mathrm{d}\,T}{2\pi\sqrt{(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)}}$$

von $T = 0$ bis $T = 360^0$ erstreckt, $= -\frac{\nu}{\mu}$ wird. Offenbar ist denn hierdurch auch der zweite Coëfficient obiger Reihe bekannt, nemlich $B = -\frac{\nu}{2\mu}$ wenn man $m = \sqrt{(\alpha + \beta)}$, $n = \sqrt{(\alpha - \beta)}$ gesetzt hat. Alle folgenden Coëfficienten C, D, u. s. w. aber werden bekanntlich durch die beiden ersten A und B algebraisch und einfach bestimmt. Für die numerische Berechnung der Grössen $m'm' - n'n'$, $m''m'' - n''n''$ u. s. w. wird in der Abhandlung selbst noch ein besonderes sehr bequemes Verfahren gelehrt.

Die Anwendung auf die Transscendenten der gegenwärtigen Untersuchung gibt endlich noch die einfachen Ausdrücke

$$P = \frac{1+\nu}{2mm\mu}, \quad Q = \frac{1-\nu}{2nn\mu}$$

Aufmerksamen Lesern wird es nicht entgehen, wie viele interessante Aufgaben, die mit den hier betrachteten Transscendenten zusammenhangen, durch den erklärten Algorithmus mit grösster Leichtigkeit aufgelöst werden. Als ein Beispiel führen wir hier die Rectification der Ellipse an. Setzt man ihre halbe grosse Axe $= m$, die halbe kleine Axe $= n$, so wird die Peripherie

$$= \frac{2\pi}{\mu}\{m'm' - 2(m''m'' - n''n'') - 4(m'''m''' - n'''n''') - 8(m''''m'''' - n''''n'''') - \text{u. s. w.}\}$$

Ein anderes Beispiel gibt die Dauer der Pendelschwingungen bei endlichen Bogen, welche sich zu der Dauer der unendlich kleinen Schwingungen verhält, wie die Einheit zu dem arithmetisch-geometrischen Mittel zwischen 1 und dem Cosinus von einem Viertel des ganzen Schwingungsbogens.

Schliesslich mus noch bemerkt werden, dass der Verf. diese Resultate, so wie er sie schon vor vielen Jahren unabhängig von ähnlichen Untersuchungen Lagrange's und Legendre's gefunden hat, in ihrer ursprünglichen Form darstellen zu müssen geglaubt hat, obgleich sie zum Theil aus den Entdeckungen dieser Geometer leicht hätten abgeleitet werden können, theils weil jene Form ihm wesentliche Vorzüge zu haben schien, theils weil sie gerade so den Anfang einer viel ausgedehntern Theorie ausmachen, wo seine Arbeit eine ganz verschiedene Richtung von der der genannten Geometer genommen hat.

NACHLASS.

[ARITHMETISCH GEOMETRISCHES MITTEL.]

PARS I.

DE ORIGINE PROPRIETATIBUSQUE GENERALIBUS NUMERORUM MEDIORUM ARITHM. GEOMETRICORUM.

1.

Sint $\begin{Bmatrix} a, a', a'', a''' \ldots \\ b, b', b'', b''' \ldots \end{Bmatrix}$ duae progressiones quantitatum ea lege formatae, ut quilibet ipsarum termini correspondentes sint *media* inter terminos antecedentes, et quidem termini progressionis superioris media arithmetica, progressionis inferioris geometrica, puta

$$a' = \tfrac{1}{2}(a+b),\; b' = \sqrt{ab},\; a'' = \tfrac{1}{2}(a'+b'),\; b'' = \sqrt{a'b'},\; a''' = \tfrac{1}{2}(a''+b''),\; b''' = \sqrt{a''b''} \text{ etc.}$$

Supponemus autem, ipsos a, b esse reales positivos, et pro radicibus quadraticis ubique accipi valores positivos; quo pacto progressiones quousque libuerit produci poterunt, omnes ipsarum termini erunt plene determinati valoresque positivos reales nanciscentur. Porro prima hic se fronte offerunt observationes sequentes:

I. Si $a = b$, omnes utriusque seriei termini erunt $= a = b$.

II. Si vero a, b sunt inaequales, erit $(a'-b')(a'+b') = \frac{1}{4}(a-b)^2$, unde concluditur $b' < a'$, et perinde erit $b'' < a''$, $b''' < a'''$ etc., i. e. quivis terminus seriei inferioris minor erit quam correspondens superioris. Quocirca in hoc casu supponemus, esse etiam $b < a$.

III. Eadem suppositione erit $a' < a$, $b' > b$; $a'' < a'$, $b'' > b'$ etc.; progressio itaque superior continuo decrescit, inferior continuo crescit; hinc manifestum est, utramque habere limitem; hi limites commode exprimuntur per a^∞, b^∞.

IV. Denique ex $\frac{a'-b'}{a-b} = \frac{(a-b)}{4(a'+b')} = \frac{a-b}{2(a+b)+4b'}$ sequitur $a'-b' < \frac{1}{2}(a-b)$, eodemque modo erit $a''-b'' < \frac{1}{2}(a'-b')$ etc. Hinc concluditur, $a-b$, $a'-b'$,

$a''-b''$, $a'''-b'''$ etc. constituere progressionem continuo decrescentem atque ipsius limitem esse $=0$. Hinc $a^\infty=b^\infty$, i. e. progressio superior et inferior eundem limitem habebunt, quo illa semper manet maior, haec minor.

Hunc limitem vocamus *numerum medium arithmetico-geometricum inter a et b*, et per $\mathrm{M}(a, b)$ designamus.

2.

Radices aequationis $xx-2ax+bb=0$ erunt reales positivi, siquidem $a\geqq b$; medium arithmeticum inter has radices erit a, geometricum b; designata itaque una radice (et quidem maiore si sunt inaequales) per $'a$, altera per $'b$, poterit $'a$ spectari tamquam terminus progressionis superioris terminum a praecedens, eodemque modo $'b$ tamquam terminus progressionis inferioris ante b. Similiter designando

$$\begin{array}{llll}\text{aequationis} & xx-2\,'ax+\,'b\,'b=0 & \text{radicem maiorem per } ''a & \text{minorem per } ''b\\ & xx-2\,''ax+\,''b\,''b=0 & \qquad\qquad\qquad '''a & \qquad\qquad '''b\\ & xx-2\,'''ax+\,'''b\,'''b=0 & \qquad\qquad\qquad ''''a & \qquad\qquad ''''b\end{array}$$

poterunt $'a$, $''a$, $'''a$ etc. spectari tamquam continuatio progressionis superioris versus laevam, atque $'b$, $''b$, $'''b$ etc. tamquam continuatio progressionis inferioris, ita ut iam habeantur duae progressiones utrimque in infinitum continuabiles

$$\ldots\ldots ''''a,\quad '''a,\quad ''a,\quad 'a,\quad a,\quad a',\quad a'',\quad a''',\quad a''''\ldots\ldots \tag{I}$$
$$\ldots\ldots ''''b,\quad '''b,\quad ''b,\quad 'b,\quad b,\quad b',\quad b'',\quad b''',\quad b''''\ldots\ldots \tag{II}$$

Quivis itaque terminus progressionis (I) erit maior quam correspondens seriei (II); series illa a laeva ad dextram continuo decrescit, a dextra ad laevam crescit: haec a laeva ad dextram continuo crescit sensuque contrario decrescit. Versus dextram utraque series eundem limitem habet; versus laevam autem (I) super omnes limites crescit, (II) habet limitem 0 (nisi omnes utriusque progressionis termini sunt aequales). Nam $'a=a+\sqrt{(aa-bb)}$; $'b=a-\sqrt{(aa-bb)}$; hinc $'a'a-'b'b=4a\sqrt{(aa-bb)}>4(aa-bb)$, similiterque $''a''a-''b''b>4('a'a-'b'b)$ etc., unde patet, seriem $aa-bb$, $'a'a-'b'b$, $''a''a-''b''b$ etc. et proin etiam hanc a, $'a$, $''a$ etc. quemvis limitem superare posse; $\frac{'b}{b}=\frac{b}{'a}<\frac{b}{a}$ similiterque $\frac{''b}{'b}<\frac{'b}{'a}$ etc. i. e. $\frac{^{n+1}b}{^{n}b}$ infra quemvis limitem deprimi potest augendo ipsum n, adeoque limes seriei b, $'b$, $''b$ etc. $=0$.

Ex definitione numeri medii arithmetico-geometrici tam manifestum est, ut explicatione ampliore iam non opus sit, sequens

THEOREMA. *Numerus medius inter terminos quoscunque correspondentes progressionum I, II idem est atque inter a et b.*

3.

Quo clarius perspiciatur, quanta rapiditate series (I) et (II) ad dextram versus limitem suum approximent, et quomodo versus laevam illa crescat, haec decrescat, exempla quaedam hic sistimus:

Exemplum 1. $a = 1,\ b = 0,2$

${}''''a = 15,83795\ 47919\ 02$	${}''''b = 0,00000\ 00000\ 00000\ 00005\ 7$
${}'''a = 7,91897\ 73959\ 512$	${}'''b = 0,00000\ 00013\ 481$
${}''a = 3,95948\ 86986\ 4971$	${}''b = 0,00010\ 30955\ 7682$
${}'a = 1,97979\ 58971\ 13271\ 23927\ 9$	${}'b = 0,02020\ 41028\ 86728\ 76072\ 1$
$a = 1,00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$	$b = 0,20000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$
$a' = 0,60000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$	$b' = 0,44721\ 35954\ 99957\ 93928\ 2$
$a'' = 0,52360\ 67977\ 49978\ 96964\ 1$	$b'' = 0,51800\ 40128\ 22268\ 36005\ 0$
$a''' = 0,52080\ 54052\ 86123\ 66484\ 5$	$b''' = 0,52079\ 78709\ 39876\ 24344\ 0$
$a'''' = 0,52080\ 16381\ 12999\ 95414\ 3$	$b'''' = 0,52080\ 16380\ 99375$
$a^{\mathrm{V}} = 0,52080\ 16381\ 06187$	$b^{\mathrm{V}} = 0,52080\ 16381\ 06187$

Hic a^{V}, b^{V} in 23^{a} demum figura discrepant; ${}^{\mathrm{V}}b$ est minor quam $(\frac{1}{10})^{40}$; ${}''''a, {}^{\mathrm{V}}a, {}^{\mathrm{VI}}a$ etc. sensibiliter formant progressionem geometricam, cuius exponens $= 2$.

Exemplum 2. $a = 1,\ b = 0,6.$

${}''''a = 14,35538\ 2913$	${}''''b = 0,00000\ 00000$
${}'''a = 7,17769\ 14569\ 307$	${}'''b = 0,00001\ 73070$
${}''a = 3,58885\ 43819\ 99831\ 75712\ 7$	${}''b = 0,01114\ 56180\ 00168\ 24287\ 3$
${}'a = 1,80000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$	${}'b = 0,20000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$
$a = 1,00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$	$b = 0,60000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$
$a' = 0,80000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$	$b' = 0,77459\ 66692\ 41483\ 37703\ 6$
$a'' = 0,78729\ 83346\ 20741\ 68851\ 8$	$b'' = 0,78719\ 58685\ 06172\ 16741\ 6$
$a''' = 0,78724\ 71015\ 63456\ 92796\ 7$	$b''' = 0,78724\ 70999$
$a'''' = 0,78724\ 71007\ 8$	$b'''' = 0,78724\ 71007\ 8$

Exemplum 3. $a = 1,\ b = 0{,}8.$

$^{\mathrm{v}}a =$	25,19190 722	$^{\mathrm{v}}b =$	0,00000 00000 0
$''''a =$	12,59595 36116 78	$''''b =$	0,00000 00133 367
$'''a =$	6,29797 68125 07655 42373 4	$'''b =$	0,00040 98644 58278 08440 9
$''a =$	3,14919 33384 82966 75407 2	$''b =$	0,05080 66615 17033 24592 8
$'a =$	1,60000 00000 00000 00000 0	$'b =$	0,40000 00000 00000 00000 0
$a =$	1,00000 00000 00000 00000 0	$b =$	0,80000 00000 00000 00000 0
$a' =$	0,90000 00000 00000 00000 0	$b' =$	0,89442 71909 99915 87856 4
$a'' =$	0,89721 35954 99957 93928 2	$b'' =$	0,89720 92687 32734
$a''' =$	0,89721 14321 16346	$b''' =$	0,89721 14321 13738
$a'''' =$	0,89721 14321 15042	$b'''' =$	0,89721 14321 15042

Exemplum 4. $a = \sqrt{2},\ b = 1.$

$''''a =$	19,17024 37557 69475 31905 0	$''''b =$	0,00000 00009 32560 02627 6
$'''a =$	9,58512 18783 51017 67266 3	$'''b =$	0,00013 37064 06056 69181 0
$''a =$	4,79262 77923 78537 18223 7	$''b =$	0,03579 93323 67652 95745 7
$'a =$	2,41421 35623 73095 04880 2	$'b =$	0,41421 35623 73095 04880 2
$a =$	1,41421 35623 73095 04880 2	$b =$	1,00000 00000 00000 00000 0
$a' =$	1,20710 67811 86547 52440 1	$b' =$	1,18920 71150 02721 06671 7
$a'' =$	1,19815 69480 94634 29555 9	$b'' =$	1,19812 35214 93120 12260 7
$a''' =$	1,19814 02347 93877 20908 3	$b''' =$	1,19814 02346 77307 20579 8
$a'''' =$	1,19814 02347 35592 20744 1	$b'''' =$	1,19814 02347 35592 20743 9

4.

Habeantur praeter progressiones

$$\ldots '''a,\quad ''a,\quad 'a,\quad a,\quad a',\quad a'',\quad a'''\ldots$$
$$\ldots '''b,\quad ''b,\quad 'b,\quad b,\quad b',\quad b'',\quad b'''\ldots$$

duae aliae

$$\ldots '''c,\quad ''c,\quad 'c,\quad c,\quad c',\quad c'',\quad c'''\ldots$$
$$\ldots '''d,\quad ''d,\quad 'd,\quad d,\quad d',\quad d'',\quad d'''\ldots$$

simili modo formatae; supponamusque, duos terminos in posterioribus duobus in prioribus *proportionales* esse, e. g. $a:b = c:d$, sive $a:c = b:d = 1:n$. Tunc omnes termini in I ad terminos in III, omnesque in II ad terminos in IV (similiter relative ad a, b, c, d siti ac sitos) in eadem ratione erunt, puta

$$c' = na', \quad c'' = na'', \quad c''' = na''', \quad 'c = 'an, \quad d^{\text{v}} = nb^{\text{v}}, \quad {}^{\text{v}}d = {}^{\text{v}}bn$$

Hinc facile deducitur, etiam limitem serierum I, II, fore ad limitem serierum III, IV ut 1 ad n, sive generaliter $\mathrm{M}(na, nb) = n\mathrm{M}(a, b)$. Erit itaque generaliter $\mathrm{M}(a, b) = a\mathrm{M}(1, \frac{b}{a}) = b\mathrm{M}(\frac{a}{b}, 1)$.

5.

Problema. *Exprimere medium arithmetico-geometricum inter numerum unitate maiorem* $1+x$ *et unitatem, per seriem secundum potestates ipsius* x *progredientem.*

Sol. Quum $\mathrm{M}(1, 1) = 1$, supponamus

$$\mathrm{M}(1+x, 1) = 1 + h'x + h''x^2 + h'''x^3 + h''''x^4 + \text{etc.}$$

ita ut h', h'', h''', h'''' sint coëfficientes constantes ab x non pendentes. Sit $x = 2t + tt$, eritque

$$\mathrm{M}(1+x, 1) = \mathrm{M}(1 + t + \tfrac{1}{2}tt,\ 1+t) = (1+t)\mathrm{M}(1 + \tfrac{\frac{1}{4}tt}{1+t}, 1).$$

Quare habebitur

$$\begin{aligned} & 1 + h'(2t+tt) + h''(2t+tt)^2 + h'''(2t+tt)^3 + \text{etc.} \\ = {} & 1 + t + h'(\tfrac{1}{2}tt) + h''\frac{\frac{1}{4}t^4}{1+t} + h'''\frac{\frac{1}{8}t^6}{(1+t)^2} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Hinc prodeunt aequationes

$$\begin{aligned} & 2h' = 1 \\ & 4h'' + h' = \tfrac{1}{2}h' \\ & 8h''' + 4h'' = 0 \\ & 16h'''' + 12h''' + h'' = \tfrac{1}{4}h'' \\ & 32h^{\text{v}} + 32h'''' + 6h''' = -\tfrac{1}{4}h'' \\ & 64h^{\text{vi}} + 80h^{\text{v}} + 24h'''' + h''' = \tfrac{1}{4}h'' + \tfrac{1}{8}h''' \\ & 128h^{\text{vii}} + 192h^{\text{vi}} + 80h^{\text{v}} + 8h'''' = -\tfrac{1}{4}h'' - \tfrac{3}{8}h''' \\ & 256h^{\text{viii}} + 448h^{\text{vii}} + 240h^{\text{vi}} + 40h^{\text{v}} + h'''' = \tfrac{1}{4}h'' + \tfrac{3}{8}h''' + \tfrac{1}{16}h'''' \end{aligned}$$

etc. unde fit

$$h' = \tfrac{1}{2}, \quad h'' = -\tfrac{1}{16}, \quad h''' = \tfrac{1}{32}, \quad h'''' = -\tfrac{21}{1024}, \quad h^{\text{v}} = \tfrac{31}{2048}, \quad h^{\text{vi}} = -\tfrac{195}{16384}$$

Quare

$$\mathrm{M}(1+x, 1) = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{16}xx + \tfrac{1}{32}x^3 - \tfrac{21}{1024}x^4 + \tfrac{31}{2048}x^5 - \tfrac{195}{16384}x^6 \text{ etc.}$$

Ceterum nullo negotio perspicitur, medium inter 1 et numerum unitate minorem

$1-x$ fore $1-h'x+h''xx-h'''x^3+\text{etc.} = 1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{16}xx-\frac{1}{32}x^3-\frac{21}{1024}x^4-\text{etc.}$ Quum hi coëfficientes legem obviam non exhibeant, has series praetergredimur, aliamque viam tentamus, quae successum feliciorem praestabit.

6.

Problema. *Exprimere medium ar. g. inter* $1+x$ *et* $1-x$ *per seriem secundum potestates ipsius* x *progredientem.*

Sol. Quum habeatur

$$M(1+x,\ 1-x) = (1-x)M(1+\frac{2x}{1-x},\ 1)$$

statim habetur e serie art. praec. substituendo ibi $\frac{2x}{1-x}$ pro x

$$M(1+\frac{2x}{1-x},\ 1) = 1+x+\frac{3}{4}xx+\frac{3}{4}x^3+\frac{43}{64}x^4+\frac{43}{64}x^5+\frac{161}{256}x^6+\text{etc.}$$

atque hinc

$$M(1+x,\ 1-x) = 1-\frac{1}{4}xx-\frac{5}{64}x^4-\frac{11}{256}x^6+\text{etc.}$$

Coëfficientes huius seriei etiam independenter a serie art. praec. per methodum sequentem erui possunt. Ponatur $x = \frac{2t}{1+tt}$ eritque

$$M(1+x,\ 1-x) = M(\frac{1-tt}{1+tt},\ 1) = \frac{1}{1+tt}M(1+tt,\ 1-tt)$$

Quare statuendo

$$M(1+x,\ 1-x) = 1+\alpha xx+\beta x^4+\gamma x^6+\delta x^8+\text{etc.}$$

(nam potestates ipsius x cum exponente impari non adesse sponte patet) habebitur

$$(1+tt)\{1+\alpha(\frac{2t}{1+tt})^2+\beta(\frac{2t}{1+tt})^4+\gamma(\frac{2t}{1+tt})^6+\delta(\frac{2t}{1+tt})^8+\text{etc.}\}$$
$$= 1+\alpha t^4+\beta t^8+\gamma t^{12}+\delta t^{16}+\text{etc.}$$

Hinc prodeunt aequationes

$1+4\alpha = 0$	unde $\alpha = -\frac{1}{4}$
$-4\alpha+16\beta = \alpha$	$\beta = -\frac{5}{64}$
$4\alpha-48\beta+64\gamma = 0$	$\gamma = -\frac{11}{256}$
$-4\alpha+96\beta-320\gamma+256\delta = \beta$	$\delta = -\frac{29}{1024}-\frac{5}{16384} = -\frac{469}{16384}$
etc.	etc.

In hac quoque serie coëfficientes legi simplici non subiecti sunt: at si unitas per illam seriem dividitur, prodit

$$\frac{1}{\mathrm{M}(1+x,\ 1-x)} = 1+\tfrac{1}{4}xx+\tfrac{9}{64}x^4+\tfrac{25}{256}x^6+\tfrac{1225}{16384}x^8+ \text{etc.}$$

ubi primo aspectu videmus, coëfficientes esse quadrata radicum $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}.\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{8}$, adeoque secundum legem persimplicem progredi. Sed methodus, per quam ad hanc conclusionem pulcherrimam pervenimus, inductionis tantummodo vim habet; quam ad certitudinis gradum evehere in disquisitionibus sqq. nobis proponimus.

7.

Supponendo

$$\frac{1}{\mathrm{M}(1+x,\ 1-x)} = 1+Axx+Bx^4+Cx^6+ \text{etc.}$$

atque ut in art. praec. $x=\frac{2t}{1+tt}$ habemus

$$1+A\left(\frac{2t}{1+tt}\right)^2+B\left(\frac{2t}{1+tt}\right)^4+C\left(\frac{2t}{1+tt}\right)^6+D\left(\frac{2t}{1+tt}\right)^8+ \text{etc.}$$
$$= 1+tt+At^4+At^6+Bt^8+Bt^{10}+Ct^{12}+Ct^{14}+Dt^{16}+Dt^{18}+ \text{etc.}$$

unde emergunt aequationes

$$\begin{aligned}
4A &= 1\\
-8A+16B &= A\\
12A-64B+64C &= A\\
-16A+160B-384C+256D &= B \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

atque hinc $A=\frac{1}{4}$, $B=\frac{1}{4}.\frac{9}{16}$, $C=\frac{1}{4}.\frac{9}{16}.\frac{25}{36}$, $D=\frac{1}{4}.\frac{9}{16}.\frac{25}{36}.\frac{49}{64}$, ut supra: sed legis ratio hinc operosius deduceretur: quare methodum sequentem praeferimus. Ex aequatione

$$\frac{2t}{1+tt}+A\left(\frac{2t}{1+tt}\right)^3+B\left(\frac{2t}{1+tt}\right)^5+ \text{etc.} = 2t(1+At^4+Bt^8\ldots)$$

demanant aequationes sequentes:

$$\begin{aligned}
1 &= 1 && [1]\\
0 &= 1-4A && [2]\\
A &= 1-12A+16B && [3]\\
0 &= 1-24A+80B-64C && [4]\\
B &= 1-40A+240B-448C+256D && [5]\\
0 &= 1-60A+560B-1792C+2304D-1024E && [6]
\end{aligned}$$

ubi coëfficientes facile subiiciuntur formulae generali: scilicet aequatio n^{ta} erit

$$M = 1 - 4A \times \frac{n.n-1}{1.2} + 16B \times \frac{n+1.n.n-1.n-2}{1.2.3.4} - 64C \times \frac{n+2.n+1.n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4.5.6}$$
$$+ 256D \times \frac{n+3.n+2.n+1.n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5.6.7.8} - \text{etc.}$$

ubi M erit vel $= 0$ (quando n par), vel aequalis termino $\frac{1}{2}(n+1)^{\text{to}}$ seriei $1, A, B, C, D$ etc. (quando n impar). Iam ex his aequationibus sequentes novas deducimus*).

$$\begin{array}{lrl}
[2], & 0 = & 1 - 4A \\
4[3] - [1], & 4A - 1 = & 3 - 48A + 64B \\
9[4] - 4[2], & 0 = & 5 - 200A + 720B - 576C \\
16[5] - 9[3], & 16B - 9A = & 7 - 532A + 3696B - 7168C + 4096D \\
25[6] - 16[4], & 0 = & 9 - 1116A + 12720B - 43776C + 57600D - 25600E
\end{array}$$

etc., ubi coëfficientes legi generali facile subiiciuntur. Scilicet aequatio n^{ta} erit

$$nnN - (n-1)^2 L = (2n-1)\Big(1 - 4A \times \frac{3nn-3n+2}{1.2} + 16B \times \frac{n.n-1.5nn-5n+6}{1.2.3.4}$$
$$- 16C \times \frac{n+1.n.n-1.n-2.7nn-7n+12}{1.2.3.4.5.6}$$
$$+ 64D \times \frac{n+2.n+1.n.n-1.n-2.n-3.9nn-9n+20}{1.2.3.4.5.6.7.8} - \text{etc.}\Big) \text{**)}$$

ubi factorum progressio obvia est (puta praeter factores simplices in singulos coëfficientes ingreditur factor duplex talis $knn - kn + \frac{1}{4}(kk-1)$). Hae aequationes simplicius sequenti modo exhibentur, singularum membris ad dextram in binas partes discerptis (praeter aequ. primam, quae immutata retinetur):

$$\begin{array}{rl}
0 = & 1 - 4A \\
4A - 1 = & \{3 - 36A \\
& \quad - 12A + 64B\} \\
0 = & \{5 - 180A + 400B \\
& \quad - 20A + 320B - 576C\} \\
16B - 9A = & \{7 - 504A + 2800B - 3136C \\
& \quad - 28A + 896B - 4032C + 4096D\} \\
0 = & \{9 - 1080A + 10800B - 28224C + 20736D \\
& \quad - 36A + 1920B - 15552C + 36864D - 25600E\}
\end{array}$$

*) Signa derivationis explicantur in *Disquisitionibus Arithmeticis* art. 162.

**) L et N hic sunt vel utraque $= 0$ (quando n impar), vel resp. terminis $\frac{1}{2}n^{\text{tis}}$, $\frac{1}{2}n+1^{\text{tis}}$ seriei $1, A, B, C, D, E$ etc. aequales.

scilicet generaliter aequatio n^{ta}

$$nnN-(n-1)^2L$$

$$=(2n-1)\begin{cases} 1-3.4A\frac{n.n-1}{1.2}+5.16B\frac{n+1.n.n-1.n-2}{1.2.3.4}-7.64C\frac{n+2.n+1\ldots n-3}{1.2\ldots 6} \\ -\ 4A\frac{2}{1.2}\quad+\quad 16B\frac{n.n-1.16}{1.2.3.4}\qquad-\quad 64C\frac{n+1.n.n-1.n-2.54}{1.2.3.4.5.6} \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \ldots\ldots\pm k.2^{k-1}K\dfrac{n+\frac{k-3}{2}.n+\frac{k-5}{2}.n+\frac{k-7}{2}\ldots n-\frac{k-1}{2}}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ .\ .\ .\ .\ k-1}\ldots \\ \ldots\ldots\pm\quad 2^{k-1}K\dfrac{n+\frac{k-5}{2}.n+\frac{k-7}{2}\ldots n-\frac{k-3}{2}.\frac{1}{4}(k-1)^2}{1\ .\ 2\ldots\ldots\ldots k-1}\ldots \end{matrix}\right\}$$

designante k indefinite quemvis imparem, sint ita

$$0=1-4A$$

$$4A-1=3(1-4A)-4(9A-16B)$$

$$0=5(1-4A)-20(9A-16B)+16(25B-36C)$$

$$16B-9A=7(1-4A)-56(9A-16B)+112(25B-36C)-64(49C-64D)$$

$$0=9(1-4A)-120(9A-16B)+432(25B-36C)-576(49C-64D)+256(81D-100E)$$

etc. et generaliter aequ. n^{ta}

$$nnN-(n-1)^2L$$

$$=(2n-1)(1-4A)-4\frac{2n-1.n.n-1}{1.2.3}(9A-16B)+16\frac{2n-1.n+1.n.n-1.n-2}{1.2.3.4.5}(25B-36C)$$

$$-64\frac{2n-1.n+2.n+1.n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4.5.6.7}(49C-64D)+\text{etc.}$$

ubi legis obviae universalitas e calculo sponte demanat. **Hinc vero perspicuum** est, fieri necessario

$$0=1-4A,\ 0=9A-16B,\ 0=25B-36C,\ 0=49C-64D,\ 0=81D-100E$$

etc. in inf. adeoque

$$A=\tfrac{1}{4},\ B=\tfrac{1}{4}.\tfrac{9}{16},\ C=\tfrac{1}{4}.\tfrac{9}{16}.\tfrac{25}{36},\ D=\tfrac{1}{4}.\tfrac{9}{16}.\tfrac{25}{36}.\tfrac{49}{64},\ E=\tfrac{1}{4}.\tfrac{9}{16}.\tfrac{25}{36}.\tfrac{49}{64}.\tfrac{81}{100}$$

et sic porro in infinitum. Q. E. D.

8.

Si statuimus

$$1+\tfrac{1}{4}xx+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{9}{16}x^4+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{9}{16}\cdot\tfrac{25}{36}x^6+\text{etc.}=y$$

fit

$$\tfrac{1}{2}xx+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{9}{4}x^4+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{9}{16}\cdot\tfrac{25}{6}x^6+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{9}{16}\cdot\tfrac{25}{36}\cdot\tfrac{49}{8}x^8+\text{etc.}=\frac{x\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

atque

$$xx+\tfrac{1}{4}\cdot 9x^4+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{9}{16}\cdot 25x^6+\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{9}{16}\cdot\tfrac{25}{36}\cdot 49x^8+\text{etc.}=\frac{xx\,\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{x\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

unde sponte sequitur

$$\frac{xx\,\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}x^2}+3\frac{x\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\frac{1}{xx}\left(xx\frac{\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{x\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

sive

$$(x^3-x)\frac{\mathrm{dd}y}{\mathrm{d}x^2}+(3xx-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+xy=0$$

Hoc itaque modo media nostra arithmetico-grometrica ad quantitates integrales revocata sunt, solutionemque particularem huiusce aequationis differentio-differentialis subministrant.

Eiusdem aequationis int. compl. est $\frac{\mathfrak{A}}{M(1+x,\ 1-x)}+\frac{\mathfrak{B}}{M(1,x)}$.

Sit φ angulus indefinitus, eritque valor integralis $\int\cos\varphi^2\mathrm{d}\varphi$, a $\varphi=0$ usque ad $\varphi=\pi$, ut vulgo notum est, $=\frac{1}{2}\pi$; eodem modo fit valor integralis $\int\cos\varphi^4\mathrm{d}\varphi$ inter eosdem limites $=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\pi$; valor integralis $\int\cos\varphi^6\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\pi$ etc. — denique, ut sponte patet, $\int\mathrm{d}\varphi=\pi$. Hinc perspicuum est, valorem integralis

$$\int\mathrm{d}\varphi\times(1+\tfrac{1}{2}x^2\cos\varphi^2+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}x^4\cos\varphi^4+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}x^6\cos\varphi^6+\text{etc.})$$

sive huius $\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{(1-xx\cos\varphi^2)}}$, fieri $=\pi y$, si sumatur a $\varphi=0$ usque ad $\varphi=\pi$, spectando quantitatem x tamquam constantem.

Quodsi functio $\frac{1}{\sqrt{(1-xx\cos\varphi^2)}}$ in seriem talem evolvi supponatur,

$$P+2Q\cos 2\varphi+2R\cos 4\varphi+2S\cos 6\varphi+\text{etc.}$$

ita ut coëfficientes P, Q, R, S etc. a sola x pendeant: valor integralis supra traditi completus erit

$$P\varphi+Q\sin 2\varphi+\tfrac{1}{2}R\sin 4\varphi+\tfrac{1}{3}S\sin 6\varphi+\text{etc.}+\text{Const.}$$

adeoque valor intra limites ante allatos, $= P\varphi$, unde $y = P$. Iam observamus, quum sit $\frac{1}{y} = \mathrm{M}(1+x, 1-x)$ fieri quoque $\frac{1}{y} = \mathrm{M}(1, \sqrt{(1-xx)})$. Hinc facillime derivatur sequens theorema generalius: Si expressio talis $\frac{\alpha}{\sqrt{(6-\gamma\cos\varphi^2)}} = W$ in seriem secundum cosinus angulorum 2φ, 4φ, 6φ etc. progredientem evolvatur, cuius terminus constans designetur per P; valores maximus et minimus ipsius W autem (puta $\frac{\alpha}{\sqrt{(6-\gamma)}}$ et $\frac{\alpha}{\sqrt{6}}$) denotentur per v, v': erit $\frac{1}{P}$ medium arithmetico-geometricum inter $\frac{1}{v}$ et $\frac{1}{v'}$. Proxime quidem ratiocinia praecedentia pro eo tantummodo casu valent, ubi γ est quantitas positiva: sed facillime ad eum quoque casum extenduntur, ubi γ est negativus. In hocce enim casu fit $W = \frac{\alpha}{\sqrt{(6-\gamma+\gamma\cos\psi^2)}}$ ponendo $\psi = 90-\varphi$; unde $\frac{1}{P}$ med. inter $\frac{\sqrt{6}}{\alpha}$ et $\frac{\sqrt{(6-\gamma)}}{\alpha}$. Ut supra. Ceterum nullo negotio patet, idem theorema sine ulla mutatione etiam ad expressiones tales $\frac{\alpha}{\sqrt{(6+\gamma\cos\varphi)}}$ extendi, puta ut $\frac{1}{\text{Term. Const.}}$ fiat

$$= \mathrm{M}\left(\frac{1}{\text{valor max.}}, \frac{1}{\text{valor minim.}}\right) = \mathrm{M}\left(\frac{\sqrt{(6-\gamma)}}{\alpha}, \frac{\sqrt{(6+\gamma)}}{\alpha}\right)$$

huiusmodi enim functiones reducentur ad formam $\frac{\alpha}{\sqrt{(6-\gamma+2\gamma\cos\psi^2)}}$, ei de qua modo diximus prorsus similem, si scribatur $\varphi = 2\psi$ *).

Denique monemus, in sequentibus demonstrationem multo generaliorem eorundem theorematum ex principiis magis genuinis datum iri; praetereaque mox etiam omnes reliquos coëfficientes Q, R, S etc. per methodos aeque expeditas eruere docebimus. Hoc loco haec disquisitio eam quoque utilitatem praestabit, ut iis, qui dum veritatum aeternarum sublimitatem atque divinam venustatem non sapiunt, earum pretium ex solo usu, qui inde in partes matheseos applicatae redundare potest aestimare noverunt, — hasce investigationes cariores reddat. Quantae enim utilitatis sit evolutio coëfficientium P, Q, R, S etc. tam rapida, ut ea quae ex his principiis promanat, in astronomia physica sive theoria perturbationum planetarum, nemo ignorat.

*) Ceterum ex praecedd. sponte sequitur, si plures expressiones tales $\frac{\alpha}{\sqrt{(6+\gamma\cos\varphi)}}$ ita comparatae sint, ut ipsarum valores extremi aequales sint: terminos constantes ex ipsarum evolutione prodeuntes necessario aequales fieri, etiamsi omnes reliqui coëfficientes valde discrepent.

PARS II.

DE FUNCTIONIBUS TRANSSCENDENTIBUS QUAE EX DIFFERENTIATIONE MEDIORUM ARITHMETICO-GEOMETRICORUM ORIUNTUR.

9.

Sint

$$\begin{cases} x, & x', & x'', & x''' \ldots\ldots & \text{(I)} \\ y, & y', & y'', & y''' \ldots\ldots & \text{(II)} \end{cases}$$

series perinde formatae ut series in art. 1., puta ut quivis terminus in $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{I} \\ \text{II} \end{smallmatrix} \right\}$ sit medium $\left\{ \begin{smallmatrix} \text{arithmeticum} \\ \text{geometricum} \end{smallmatrix} \right\}$ inter duos terminos praecedentes, adeoque $x^\infty = y^\infty = \mathrm{M}(x,y)$: patetque, omnes has quantitates et proin etiam ipsarum limitem esse functiones duarum variabilium x, y, atque variari, simulacque harum alteruter aut uterque mutationem patiatur. Hic nobis de solis mutationibus infinite parvis sermo erit. Fit itaque

$$\mathrm{d}x' = \tfrac{1}{2}\mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}y' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{y}{x}}\,.\,\mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{x}{y}}\,.\,\mathrm{d}y = \tfrac{1}{2}\tfrac{y'}{x}\mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}\tfrac{y'}{y}\mathrm{d}y$$

et perinde

$$\mathrm{d}x'' = \tfrac{1}{2}\mathrm{d}x' + \tfrac{1}{2}\mathrm{d}y', \quad \mathrm{d}y'' = \tfrac{1}{2}\tfrac{y''}{x'}\,.\,\mathrm{d}x' + \tfrac{1}{2}\tfrac{y''}{y'}\mathrm{d}y' \quad \text{etc.}$$

Hoc modo differentialia omnium terminorum in I et II per differentialia ipsarum x, y adiumento substitutionum exhiberi possent: sed lex progressiones magnopere obscura hinc prodiret. Quam ut clarissime ob oculos producamus, sequentibus scribendi compendiis utemur: Scribemus

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{\mathrm{d}y}{y}=f,\quad \frac{\mathrm{d}x'}{x'}+\frac{\mathrm{d}y'}{y'}=f',\quad \frac{\mathrm{d}x''}{x''}+\frac{\mathrm{d}y''}{y''}=f''\ \text{etc.}$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{x}-\frac{\mathrm{d}y}{y}=g,\quad \frac{\mathrm{d}x'}{x'}-\frac{\mathrm{d}y'}{y'}=g',\quad \frac{\mathrm{d}x''}{x''}-\frac{\mathrm{d}y''}{y''}=g''\ \text{etc.}$$

unde statim prodit

$$f'=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{x'}+\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{\mathrm{d}y}{x'}+\frac{\mathrm{d}y}{y}\right)=f+\tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x}{xx'}(x-x')+\tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}y}{yx'}(y-x')$$
$$=f+\tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x}{xx'}(x-x')-\tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}y}{yx'}(x-x')=f+\tfrac{1}{2}g\frac{x-x'}{x'}$$

et prorsus simili modo

$$f''=f'+\tfrac{1}{2}g'\frac{x'-x''}{x''},\quad f'''=f''+\tfrac{1}{2}g''\frac{x''-x'''}{x'''}\quad \text{etc.}$$

Perinde fit

$$g'=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{x'}-\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{\mathrm{d}y}{x'}-\frac{\mathrm{d}y}{y}\right)=\tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}x}{xx'}(x-x')+\tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}y}{yx'}(y-x')=\tfrac{1}{2}g\left(\frac{x-x'}{x'}\right)$$

eodemque modo $g''=\tfrac{1}{2}g'\frac{x'-x''}{x''}$, $g'''=\tfrac{1}{2}g''\frac{x''-x'''}{x'''}$ etc. Nec non hinc patet esse $f'=f+g'$, $f''=f+g'+g''$, $f'''=f+g'+g''+g'''$ etc. Nullo negotio perspicitur, seriem $\frac{g'}{g}$, $\frac{g''}{g}$, $\frac{g'''}{g}$ etc. celerrime infra omnes limites decrescere, quamobrem habebimus per seriem infinitam rapidissime convergentem

$$f^\infty=f+g\left\{\tfrac{1}{2}\frac{x-x'}{x'}+\tfrac{1}{4}\frac{x-x'}{x'}\cdot\frac{x'-x''}{x''}+\tfrac{1}{8}\frac{x-x'}{x'}\cdot\frac{x'-x''}{x''}\cdot\frac{x''-x'''}{x'''}+\text{etc.}\right\},\quad g^\infty=0$$

hinc $\dfrac{2\,\mathrm{d}x^\infty}{x^\infty}=\dfrac{2\,\mathrm{d}y^\infty}{y^\infty}=\dfrac{2\,\mathrm{d}\,\mathrm{M}(x,y)}{\mathrm{M}(x,y)}$

$$=\frac{\mathrm{d}x}{x}+\frac{\mathrm{d}y}{y}+\left\{\frac{\mathrm{d}x}{x}-\frac{\mathrm{d}y}{y}\right\}\times\left\{\tfrac{1}{2}\frac{x-x'}{x}+\tfrac{1}{4}\frac{x-x'}{x'}\cdot\frac{x'-x''}{x''}+\text{etc.}\right\}\quad \text{sive}$$

$$\mathrm{d}\,\mathrm{M}(x,y)=\mathrm{M}(x,y)\times\left\{\frac{\mathrm{d}x}{x}\times\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\frac{x-x'}{x'}+\tfrac{1}{8}\frac{x-x'}{x'}\cdot\frac{x'-x''}{x''}+\text{etc.}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\mathrm{d}y}{y}\times\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}\frac{x-x'}{x'}-\tfrac{1}{8}\frac{x-x'}{x'}\cdot\frac{x'-x''}{x''}-\text{etc.}\right)\right\}$$

Calculum aliquantum commodiorem nanciscimur sequenti modo: Fit

$$\frac{x-x'}{x'}=\frac{x-y}{x+y}=\frac{(x-y)^2}{xx-yy}=\frac{(x+y)^2-4xy}{xx-yy}=4\frac{x'x'-y'y'}{xx-yy}\text{*)}$$

unde promanat

$$\mathrm{dM}(x,y)=\frac{\mathrm{M}(x,y)}{2(xx-yy)}\times\left\{\frac{\mathrm{d}x}{x}\times(xx-yy+2(x'x'-y'y')+4(x''x''-y''y'')+8(x'''x'''-y'''y''')\ldots)\right.$$
$$\left.+\frac{\mathrm{d}y}{y}\times(xx-yy-2(x'x'-y'y')-4(x''x''-y''y'')-8(x'''x'''-y'''y''')\ldots)\right\}$$

---

*) et perinde $\frac{x'-x''}{x''}=4\frac{x''x''-y''y''}{x'x'-y'y'}$, $\frac{x''-x'''}{x'''}=4\frac{x'''x'''-y'''y'''}{x''x''-y''y''}$ etc.

Ut computus maxima facilitate per logarithmos confici possit, sequentes formulas adiicimus, ex algorithmo serierum I. II sponte demanantes:

$$(x'x'-y'y') = \frac{(xx-yy)^2}{16x'x'}, \quad x''x''-y''y'' = \frac{(x'x'-y'y')^2}{16x''x''} \text{ etc.}$$

quae simul protinus ostendunt, quanta velocitate series nostrae convergere debeant.

Si magis arridet, etiam sequentes formulae poterunt adhiberi:

$$x'x'-y'y' = \tfrac{1}{4}(x-y)^2, \quad x''x''-y''y'' = \tfrac{1}{4}(x'-y')^2 \text{ etc.}$$

10.

Rapiditatem convergentiae harum serierum monstrabunt exempla sequentia:

I. Sit $x = \sqrt{2}$, $y = 1$ (Conf. art. 3). Hic habetur $xx-yy = 1$

$$\begin{array}{rlll}
2(x'x'-y'y') & = \tfrac{1}{2}(x-y)^2 & = 0{,}0857864376 & 2690 \\
4(x''x''-y''y'') & = (x'-y')^2 & = 0,\ldots 3203980 & 4927 \\
8(x'''x'''-y'''y''') & = 2(x''-y'')^2 & = 0,\ldots\ldots\ldots 22 & 3462 \\
16(x''''x''''-y''''y'''') & = 4(x'''-y''') & = 0, & \\
\hline
& \text{Summa} & = 0{,}0861068379 & 10
\end{array}$$

Hinc fit $dM(x,y) = M(x,y) \times \left\{\frac{dx}{2\sqrt{2}} \times 1{,}0861068379\ldots + \frac{dy}{2} \times 0{,}9138931621\ldots\right\}$
sive in numeris $= dx \times 0{,}460082\ldots. + dy \times 0{,}5474860839$

II. Sit

$$x = 5{,}202778 + 2{,}784072 = 7{,}986850, \quad y = 5{,}202778 - 2{,}784072 = 2{,}418706$$

ubi x, y sunt distantiae maximae et minimae Iovis et Cereris (neglecta excentricitate planorumque inclinatione). Quare

$$\begin{array}{lll}
x = 7{,}9868500 & y = 2{,}4187060 & xx - y'y' = 59, \\
x' = 5{,}2027780 & y' = 4{,}395207 & 2(x'x' - y'y') = 1{,}28 \\
x'' = 4{,}7989925 & y'' = 4{,}781975 & 4(x''x'' - y''y'') = \\
x''' = 4{,}7904838 & y''' = 4{,}790476 & 8(x'''x''' - y'''y''') = \\
x'''' = 4{,}790480 & &
\end{array}$$

11.

Facile iam etiam coëfficientes sequentes serie

FORTSETZUNG DER UNTERSUCHUNGEN

ÜBER DAS ARITHMETISCH GEOMETRISCHE MITTEL.

[Die weiteren Untersuchungen von GAUSS über das Arithmetisch geometrische Mittel sind so unvollständig, nur in den Endformeln, und mit so wechselnder Bezeichnung niedergeschrieben, dass fast alle Übersicht fehlen würde, wenn der Abdruck nur jene Formeln ohne nebenhergehende Erläuterung wiedergäbe. In den folgenden Artikeln habe ich die im Nachlasse gefundenen Stellen hervorgehoben und durch solchen Gedankengang verbunden, wie er vielleicht die Veranlassung gewesen ist, dass GAUSS die betreffenden Resultate unter einem erkennbaren gemeinsamen Gesichtspunkte aufgestellt hat.]

12.

[An mehren Stellen bedient sich GAUSS neben den in den vorhergehenden Artikeln betrachteten beiden ursprünglichen Reihen von Grössen (a, b), welche sich auf dasselbe arithmetisch geometrische Mittel beziehen, auch noch einer dritten Reihe von Grössen (c), die mit jenen durch die Gleichung $aa = bb + cc$, welche für jeden gemeinsamen Index der drei Glieder (a, b, c) gilt, zusammenhängt. Nach den Festsetzungen in Art. 2 können die Gleichungen zur Berechnung der rück- und vorwärts folgenden aus a, b, c abgeleiteten Grössen in die Form gebracht werden:

$$\begin{array}{llllll} \ldots & {}''a = {}'a + {}'c, & {}'a = a + c, & a, & 2a' = a + b, & 2a'' = a' + b', \ldots \\ \ldots & {}''b = {}'a - {}'c, & {}'b = a - c, & b, & b'b' = ab, & b''b'' = a'b', \ldots \\ \ldots & {}''c''c = 4\,{}'a'c, & {}'c'c = 4ac, & c, & 2c' = a - b, & 2c'' = a' - b', \ldots \end{array}$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar dass, während

$$M(a,b) = M(a^{\mathrm{n}}, b^{\mathrm{n}}) = M({}^{\mathrm{n}}a, {}^{\mathrm{n}}b) = \lim a^{\mathrm{m}} = \lim b^{\mathrm{m}} \quad \text{für} \quad m = \infty$$

ist,

$$M(a,c) = 2^{n} M(a^{\mathrm{n}}, c^{\mathrm{n}}) = 2^{-n} M({}^{\mathrm{n}}a, {}^{\mathrm{n}}c) = \lim \frac{{}^{\mathrm{m}}a}{2^m} = \lim \frac{{}^{\mathrm{m}}c}{2^m} \quad \text{für} \quad m = \infty$$

wird und sich damit die dem ersten Beispiel in Art. 3 angefügte Bemerkung, dass die ${}^{\mathrm{n}}a$, ${}^{\mathrm{n+1}}a$, ${}^{\mathrm{n+2}}a$ etwa wie die Glieder einer geometrischen Reihe mit dem Quotienten 2 zunehmen als allgemein gültig erweist, ferner dass für den im Beispiel 4 Art. 3 berechneten Fall $a = b\sqrt{2} = c\sqrt{2}$ bei jedem n: ${}^{\mathrm{n}}a = 2^{n}.a^{\mathrm{n}}$, ${}^{\mathrm{n}}b = 2^{n}.c^{\mathrm{n}}$, ${}^{\mathrm{n}}c = 2^{n}.b^{\mathrm{n}}$ ist.

Die Art der Annäherung jener Grössen an ihre Grenzwerthe ergibt sich aus den folgenden Reihenentwickelungen

$$M(a,b) = a^{\mathrm{n}} - c^{\mathrm{n+1}} - c^{\mathrm{n+2}} - \ldots - c^{\mathrm{n+m}} - \ldots$$

$$M(a,b) = b^{\mathrm{n}} + c^{\mathrm{n+1}} - c^{\mathrm{n+2}} - \ldots - c^{\mathrm{n+m}} - \ldots$$

$$M(a,c) = 2^{-n}.\,{}^{\mathrm{n}}a - 2^{-n-1}.\,{}^{\mathrm{n+1}}b - 2^{-n-2}.\,{}^{\mathrm{n+2}}b - \ldots - 2^{-n-m}.\,{}^{\mathrm{n+m}}b - \ldots$$

$$M(a,c) = 2^{-n}.\,{}^{\mathrm{n}}c + 2^{-n-1}.\,{}^{\mathrm{n+1}}b - 2^{-n-2}.\,{}^{\mathrm{n+2}}b - \ldots - 2^{-n-m}.\,{}^{\mathrm{n+m}}b - \ldots$$

$$M(a,b)^2 = a^{\mathrm{n}}.a^{\mathrm{n}} - \tfrac{1}{2}c^{\mathrm{n}}.c^{\mathrm{n}} - \tfrac{3}{2}c^{\mathrm{n+1}}.c^{\mathrm{n+1}} - \ldots - \tfrac{3}{2}c^{\mathrm{n+m}}.c^{\mathrm{n+m}} - \ldots$$

$$M(a,b)^2 = b^{\mathrm{n}}.b^{\mathrm{n}} + \tfrac{1}{2}c^{\mathrm{n}}.c^{\mathrm{n}} - \tfrac{3}{2}c^{\mathrm{n+1}}.c^{\mathrm{n+1}} - \ldots - \tfrac{3}{2}c^{\mathrm{n+m}}.c^{\mathrm{n+m}} - \ldots$$

$$M(a,c)^2 = 2^{-2n}.\,{}^{\mathrm{n}}c.\,{}^{\mathrm{n}}c + \tfrac{1}{2}2^{-2n}.\,{}^{\mathrm{n}}b.\,{}^{\mathrm{n}}b - \tfrac{3}{2}2^{-2n-2}.\,{}^{\mathrm{n+1}}b.\,{}^{\mathrm{n+1}}b - \ldots - \tfrac{3}{2}2^{-2n-2m}.\,{}^{\mathrm{n+m}}b.\,{}^{\mathrm{n+m}}b - \ldots$$

$$M(a,c)^2 = 2^{-2n}.\,{}^{\mathrm{n}}a.\,{}^{\mathrm{n}}a - \tfrac{1}{2}2^{-2n}.\,{}^{\mathrm{n}}b.\,{}^{\mathrm{n}}b - \tfrac{3}{2}2^{-2n-2}.\,{}^{\mathrm{n+1}}b.\,{}^{\mathrm{n+1}}b - \ldots - \tfrac{3}{2}2^{-2n-2m}.\,{}^{\mathrm{n+m}}b.\,{}^{\mathrm{n+m}}b - \ldots$$

$$\sqrt{M(a,b)} = \sqrt{a^{\mathrm{n}}} - \sqrt{c^{\mathrm{n+2}}} - \sqrt{c^{\mathrm{n+4}}} - \ldots - \sqrt{c^{\mathrm{n+2m}}} - \ldots$$

$$\sqrt{M(a,b)} = \sqrt{b^{\mathrm{n}}} + \sqrt{c^{\mathrm{n+2}}} - \sqrt{c^{\mathrm{n+4}}} - \ldots - \sqrt{c^{\mathrm{n+2m}}} - \ldots$$

$$\sqrt{\mathrm{M}(a,c)} = \sqrt{2^{-n}}.{}^{\mathrm{n}}a - \sqrt{2^{-n-2}}.{}^{\mathrm{n+2}}b - \sqrt{2^{-n-4}}.{}^{\mathrm{n+4}}b - \ldots - \sqrt{2^{-n-2m}}.{}^{\mathrm{n+2m}}b - \ldots$$

$$\sqrt{\mathrm{M}(a,c)} = \sqrt{2^{-n}}.{}^{\mathrm{n}}c + \sqrt{2^{-n-2}}.{}^{\mathrm{n+2}}b - \sqrt{2^{-n-4}}.{}^{\mathrm{n+4}}b - \ldots - \sqrt{2^{-n-2m}}.{}^{\mathrm{n+2m}}b - \ldots$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\mathrm{M}(a,b)}{\mathrm{M}(a,c)} = \frac{1}{2^n}\log 4\frac{a^{\mathrm{n}}}{c^{\mathrm{n}}} - \frac{1}{2^n}\log\frac{a^{\mathrm{n}}}{a^{\mathrm{n+1}}} - \ldots - \frac{1}{2^{n+m}}\log\frac{a^{\mathrm{n+m}}}{a^{\mathrm{n+m+1}}} - \ldots$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\mathrm{M}(a,b)}{\mathrm{M}(a,c)} = \frac{1}{2^n}\log 4\frac{b^{\mathrm{n+1}}}{c^{\mathrm{n}}} + \frac{3}{2^{n+1}}\log\frac{b^{\mathrm{n+2}}}{b^{\mathrm{n+1}}} + \ldots + \frac{3}{2^{n+m}}\log\frac{b^{\mathrm{n+m+1}}}{b^{\mathrm{n+m}}} + \ldots$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\mathrm{M}(a,c)}{\mathrm{M}(a,b)} = \frac{1}{2^n}\log 2\frac{{}^{\mathrm{n}}a}{{}^{\mathrm{n}}b} - \frac{1}{2^n}\log 2\frac{{}^{\mathrm{n}}a}{{}^{\mathrm{n+1}}a} - \ldots - \frac{1}{2^{n+m}}\log 2\frac{{}^{\mathrm{n+m}}a}{{}^{\mathrm{n+m+1}}a} - \ldots$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\mathrm{M}(a,c)}{\mathrm{M}(a,b)} = \frac{1}{2^n}\log 2\frac{{}^{\mathrm{n+1}}c}{{}^{\mathrm{n}}b} + \frac{3}{2^{n+1}}\log\frac{1}{2}\frac{{}^{\mathrm{n+2}}c}{{}^{\mathrm{n+1}}c} + \ldots + \frac{3}{2^{n+m}}\log\frac{1}{2}\frac{{}^{\mathrm{n+m+1}}c}{{}^{\mathrm{n+m}}c} + \ldots$$

In den vier letzten Gleichungen ist $\frac{\pi}{2}$ statt der für beständig wachsendes m geltenden Grenzwerthe beziehungsweise von

$$\frac{\mathrm{M}(a^{\mathrm{m}},c^{\mathrm{m}})}{\mathrm{M}(a^{\mathrm{m}},b^{\mathrm{m}})}.\log 4\frac{a^{\mathrm{m}}}{c^{\mathrm{m}}}, \qquad \frac{\mathrm{M}(a^{\mathrm{m}},c^{\mathrm{m}})}{\mathrm{M}(a^{\mathrm{m}},b^{\mathrm{m}})}.\log 4\frac{b^{\mathrm{m+1}}}{c^{\mathrm{m}}}, \qquad \frac{\mathrm{M}({}^{\mathrm{m}}a,{}^{\mathrm{m}}b)}{\mathrm{M}({}^{\mathrm{m}}a,{}^{\mathrm{m}}c)}.\log 4\frac{{}^{\mathrm{m}}a}{{}^{\mathrm{m}}b}, \qquad \frac{\mathrm{M}({}^{\mathrm{m}}a,{}^{\mathrm{m}}b)}{\mathrm{M}({}^{\mathrm{m}}a,{}^{\mathrm{m}}c)}.\log 2\frac{{}^{\mathrm{m+1}}c}{{}^{\mathrm{m}}b}$$

das ist statt des Grenzwerthes von $\mathrm{M}(1,\varepsilon)\log\frac{4}{\varepsilon}$ für bis zur Null abnehmende positive Werthe des ε gesetzt. Es folgt nemlich zunächst aus jenen Gleichungen, in welchen, wie die Relationen

$$\frac{a'}{a} = 1 - \frac{c'}{a}, \qquad \left(\frac{b'}{b}\right)^4 = 1 + \frac{cc}{bb}, \qquad \frac{'a}{a} = 2 - \frac{'b}{a}, \qquad \left(\frac{1}{2}\frac{'c}{c}\right)^4 = 1 + \frac{bb}{cc}$$

leicht erkennen lassen, die zu logarithmirenden Werthe, so bald sie alle reell sind, vom zweiten Gliede der Reihe an beständig bis zur Einheit hin abnehmen, dass die gesuchte Grösse eine völlig bestimmte und z. B., wenn man $a = b\sqrt{2} = c\sqrt{2}$ setzt, eine zwischen den Grenzen $\frac{9}{4}\log 2$ und $\frac{10}{4}\log 2$ eingeschlossene Grösse ist. Die obigen Gleichnngen gelten auch für complexe Werthe der Veränderlichen, wenn man $n = 0$ setzt und diejenigen Werthe der $\log{}^{\mathrm{m}}a$, $\log{}^{\mathrm{m}}c$, $\log a$, $\log b$, $\log c$, $\log a^{\mathrm{m}}$, $\log b^{\mathrm{m}}$ zu Grunde legt, welche durch stetige Änderung derselben aus den reellen Grössen folgen. Nimmt man nun als ein System (a, b, c) das der Bedingung $a = b\sqrt{2} = c\sqrt{2}$ unterworfene und aus reellen Grössen bestehende, ferner als anderes System (α, β, γ) dasjenige, für welches $\alpha = c$, $\beta = b\sqrt{-1}$, $\gamma = a = b\sqrt{2} = c\sqrt{2}$ ist und die durch Wurzel-Ausziehung zu bestimmenden Werthe von β^{m} und ${}^{\mathrm{m}}\gamma$ positive reelle Theile erhalten, so kann man ein drittes veränderliches System (A, B, C) aufstellen, welches von dem einen (a, b, c) zu dem andern (α, β, γ) stetig übergeht, und zwar so, dass bei diesem Übergang keine der Veränderlichen ${}^{\mathrm{m}}A$, ${}^{\mathrm{m}}C$, $A, B, C, A^{\mathrm{m}}, B^{\mathrm{m}}$ den Werth Null berührt oder einen negativen reellen Theil erhält. Die letzte jener Gleichungen, n gleich Null gesetzt, gilt also sowol für das System (a, b, c) wie für $(\alpha, \mathfrak{b}, \gamma)$ und da

$$\mathrm{M}(\alpha, \mathfrak{b}) = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{-1})\mathrm{M}(a, b), \qquad \mathrm{M}(\alpha, \gamma) = \mathrm{M}(a, c) = \mathrm{M}(a, b)$$

ist, wird $\frac{\pi}{2}\sqrt{-1} = \log\sqrt{-1}$; es hat also π die gebräuchliche Bedeutung als Verhältniss-Zahl der Länge des Umfangs eines Kreises zu dessen Durchmesser.

Mit Hülfe dieser Betrachtung lässt sich auch die Richtigkeit der folgenden von Gauss aufgezeichneten Bemerkung erweisen, der ich die hier benutzte Bezeichnungsweise zu Grunde lege und ein von Gauss berechnetes Beispiel folgen lasse:]

Die Arithmetisch-Geometrischen Mittel gestalten sich anders, wenn man für ein b', b'', b'''. . den negativen Werth wählt: doch sind alle Resultate in folgender Form begriffen:

$$\frac{1}{\mathfrak{M}(a, b)} = \frac{1}{\mathrm{M}(a, b)} + \frac{4ik}{\mathrm{M}(a, c)}$$

[wo k eine ganze reelle Zahl bedeutet.]

Beispiel für einen imaginären Werth des A. G. Mittels

a	$= 3.0000000$	log . . 0.4771213	a	$= 3.0000000$	log . . 0.4771213
b	$= 1.0000000$	0.0000000	c	$= 2.8284270$	0.4515450
a'	$= 2.0000000$	0.3010300	$\frac{1}{2}.'a$	$= 2.9142135$	0.4645214
b'	$= 1.7320508$	0.2385606	$\frac{1}{2}.'c$	$= 2.9129510$	0.4643332
a''	$= 1.8660254$	0.2709175	$\frac{1}{4}.''a$	$= 2.9135822$	0.4644273
b''	$= 1.8612098$	0.2697953			
a'''	$= 1.8636176$	0.2703568			
b'''	$= 1.8636159$	0.2703564			
a''''	$= 1.8636167$	0.2703566			

$a = 3.0000000$		log . . 0.4771213	0			
$b = 1.0000000$		0.0000000	360^0			
$a' = 2.0000000$		0.3010300	0			
$b' = -1.7320508$		0.2385606	180^0			
$a'' = 0.1339746$		9.1270225	0			
$b'' =$	$+1.8612098i$	0.2697953	90^0			
$a''' = 0.0669873$	$+0.9306049i$	9.9698876	85^0	$52'$	$58''10$	
$b''' = 0.3530969$	$+0.3530969i$	9.6984089	45	0	0	
$a'''' = 0.2100421$	$+0.6418509i$	9.8295254	71	52	46.58	
$b'''' = 0.2836930$	$+0.6208239i$	9.8341482	65	26	29.05	
$a^{\mathrm{V}} = 0.2468676$	$+0.6313374i$	9.8311572	68	38	36.05	
$b^{\mathrm{V}} = 0.2470649$	$+0.6324002i$	9.8318368	68	39	37.82	
$a^{\mathrm{VI}} = 0.24699625$	$+0.6318688i$	9.8314971	68	39	6.95	
$b^{\mathrm{VI}} = 0.24699625$	$+0.6318685i$	9.8314970	68	39	6.93	
$a^{\mathrm{VII}} = 0.24699625$	$+0.63186865i$	9.83149705	68	39	6.94	

$$\frac{1}{\mathfrak{M}(a,b)} = +0.5365910 - 1.3728774\,i = \frac{1}{\mathrm{M}(a,b)} + \frac{4i}{\mathrm{M}(a,c)}$$

13.

[Die Differentiale erster Ordnung der einzelnen Glieder des vollständigen Algorithmus eines arithmetisch geometrischen Mittels sind in Artikel 9 auf zweierlei Weise zu einander in Beziehung gesetzt. Die eine umfasst nur die Differentiale der Logarithmen der Quotienten jener Grössen, sie ergibt sich aus der wiederholten Anwendung der beiden Relationen $aa = bb + cc$, $\frac{a'}{c'} = \frac{a+b}{a-b}$, und kann durch Benutzung der im vorhergehenden Artikel gewonnenen Resultate zu einer Werthbestimmung des Differentials vom Quotienten zweier zusammengehöriger arithmetisch geometrischer Mittel erweitert und so dargestellt werden, dass $\frac{1}{cc}\,\mathrm{d}\log\frac{a}{b}$, welches mit Δ bezeichnet werden mag, für jedes positive und negative n, wenn nemlich ein negativer nachstehender Index n als gleichbedeutend mit einem voranstehenden positiven Index von gleicher absoluter Grösse gedeutet wird,

$$= \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{a^n a^n}\,\mathrm{d}\log\frac{c^n}{b^n} = \frac{1}{2^{\pi}}\cdot\frac{1}{b^n b^n}\,\mathrm{d}\log\frac{c^n}{a^n} = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{c^n c^n}\,\mathrm{d}\log\frac{a^n}{b^n} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\mathrm{M}(a,b)\,.\,\mathrm{M}(a,c)}\,\mathrm{d}\log\frac{\mathrm{M}(a,c)}{\mathrm{M}(a,b)}$$

ist. Die andere Beziehung erstreckt sich auch mit auf die Differentiale der Logarithmen von zweigliedrigen Producten, sie folgt aus $b'b' = ab$ und $'c'c = 4ac$ in der Form

$$\mathrm{d}\log(a^m\,.\,b^m) = \mathrm{d}\log(a^{m+1}\,.\,b^{m+1}) - \Delta\,.\,2^{m+1}\,.\,c^{m+1}\,.\,c^{m+1}$$
$$\mathrm{d}\log({}^{m}a\,.\,{}^{m}c) = \mathrm{d}\log({}^{m+1}a\,.\,{}^{m+1}c) + \Delta\,.\,\frac{1}{2^{m+1}}\,.\,{}^{m+1}b\,.\,{}^{m+1}b$$

und ergibt, wenn man m bis zur unendlichen Grenze wachsen lässt, die in Artikel 9 aufgestellte Gleichung und die dieser entsprechende nemlich:

$$2\,\mathrm{d}\log\mathrm{M}(a,b) = \mathrm{d}\log(a^n\,.\,b^n) + \Delta\,\{2^{n+1}\,.\,c^{n+1}\,.\,c^{n+1} + \,.\, + 2^{n+m}\,.\,c^{n+m}\,.\,c^{n+m} + \,.\}$$
$$2\,\mathrm{d}\log\mathrm{M}(a,c) = \mathrm{d}\log({}^{n}a\,.\,{}^{n}c) - \Delta\,\{2^{-n-1}\,.\,{}^{n+1}b\,.\,{}^{n+1}b + \,.\, + 2^{-n-m}\,.\,{}^{n+m}b\,.\,{}^{n+m}b + \,.\}$$

Hieraus kann durch Elimination der Differentiale mit Hülfe des oben gefundenen Ausdrucks für Δ die Gleichung

$$\frac{4}{\pi}\mathrm{M}(a,b)\,\mathrm{M}(a,c) = \,.\,.\, - 2^{-\mu+n}\,.\,{}^{\mu-n}b\,.\,{}^{\mu-n}b - \,.\,.\, - 2^{n-1}\,.\,b^{n-1}\,.\,b^{n-1}$$
$$+ 2^n\,.\,a^n\,.\,a^n - 2^{n+1}\,.\,c^{n+1}\,.\,c^{n+1} - \,.\,.\, - 2^{n+m}\,.\,c^{n+m}\,.\,c^{n+m} - \,.\,.$$

abgeleitet werden, welche Gauss neben der im vorigen Artikel wiedergegebenen ersten Gleichung für $\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{M}(a,b)}{\mathrm{M}(a,c)}$ aufgezeichnet hat, ohne den Weg, auf welchem sie gefunden waren, anzudeuten.]

14.

[Für die vollständigen Differentiale zweiter Ordnung findet man unmittelbar aus den Ausdrücken für Δ, dass jedes mit gemeinsamen Index behaftete System von Gliedern a, b, c die drei Gleichungen

$$\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\log\frac{c}{b}\,.\,\mathrm{d}\log a = \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\log\frac{c}{b}\right)$$
$$\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\log\frac{c}{a}\,.\,\mathrm{d}\log b = \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\log\frac{c}{a}\right)$$
$$\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\log\frac{a}{b}\,.\,\mathrm{d}\log c = \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\log\frac{a}{b}\right)$$

erfüllt. Multiplicirt man darin die Zähler und Nenner unter den zweimal zu differentiirenden Logarithmen der Reihe nach mit a, b, c und löst alle Logarithmen von Quotienten in Differenzen von Logarithmen auf, so ersieht man leicht, dass der Ausdruck

$$\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\log a^{\mathrm{n}}.\mathrm{d}\log b^{\mathrm{n}} - \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\log a^{\mathrm{n}} b^{\mathrm{n}}\right)$$

der mit D bezeichnet werden soll, seinen Werth nicht ändert, wenn man statt a^{n} und b^{n} setzt: a^{n} und c^{n} oder: b^{n} und c^{n}. Nimmt man das Mittel der beiden letzten so entstandenen Ausdrücke und berücksichtigt, dass

$$\mathrm{d}\log a^{\mathrm{n}} + \mathrm{d}\log b^{\mathrm{n}} = 2\,\mathrm{d}\log b^{\mathrm{n}+1}$$

ist, so folgt, dass man in jenem Ausdruck ohne dessen Werth zu ändern statt der beiden genannten Grössen auch c^{n} und $b^{\mathrm{n}+1}$ setzen kann und ferner, wenn man in diesem wieder $\mathrm{d}\log c^{\mathrm{n}}$ durch $\frac{1}{2}\mathrm{d}\log a^{\mathrm{n}+1} + \frac{1}{2}\mathrm{d}\log c^{\mathrm{n}+1}$ ersetzt, dass man mit demselben Erfolge $a^{\mathrm{n}+1}$ und $b^{\mathrm{n}+1}$ statt a^{n} und b^{n} setzen kann. Es ist also der Werth jenes Differential-Ausdrucks unabhängig von n und demnach gleich

$$\begin{aligned}
D &= \frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\log b^{\mathrm{n}}.\mathrm{d}\log c^{\mathrm{n}} - \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\log b^{\mathrm{n}} c^{\mathrm{n}}\right)\\
&= \frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\log c^{\mathrm{n}}.\mathrm{d}\log a^{\mathrm{n}} - \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\log c^{\mathrm{n}} a^{\mathrm{n}}\right)\\
&= \frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\log a^{\mathrm{n}}.\mathrm{d}\log b^{\mathrm{n}} - \tfrac{1}{2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\log a^{\mathrm{n}} b^{\mathrm{n}}\right)\\
&= \mathrm{M}(a,b)\,\mathrm{d}\left\{\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\frac{1}{\mathrm{M}(a,b)}\right\} = \mathrm{M}(a,c)\,\mathrm{d}\left\{\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\frac{1}{\mathrm{M}(a,c)}\right\}
\end{aligned}$$

Setzt man a als unveränderlich voraus, so wird

$$D = \Delta bbcc = -bb\,\mathrm{d}\log b = cc\,\mathrm{d}\log c$$

und es entsteht die in Artikel 8 aus der Reihenentwickelung abgeleitete für $\frac{a}{\mathrm{M}(a,c)}$ und $\frac{a}{\mathrm{M}(a,b)}$ als Werthe von μ geltende Differentialgleichung

$$\mathrm{dd}\mu - \frac{\mathrm{d}\Delta}{\Delta}.\mathrm{d}\mu - \Delta\Delta bbcc.\mu = 0$$

aus welcher sich nach den Untersuchungen in der Abhandlung '*Determinatio seriei nostrae per aequationem differentialem secundi ordinis*' auch wieder die Darstellung durch die Gaussischen Reihen:

$$\frac{a}{\mathrm{M}(a,b)} = F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,\frac{cc}{aa}\right), \qquad \frac{a}{\mathrm{M}(a,c)} = F\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1,\frac{bb}{aa}\right)$$

und als specielle Fälle der dortigen Gleichungen [90] und [96] der oben Art. 12 gefundene Grenzwerth von $\mathrm{M}(1,\varepsilon)\log\frac{4}{\varepsilon}$ und die im vorigen Artikel aufgestellte Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $\mathrm{M}(a,b)$ und $\mathrm{M}(a,c)$ ergeben.]

15.

[Die Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Glieder der Reihe des arithmetisch geometrischen Mittels nimmt eine Form an, in welcher sie Differentiale nur von Quotienten der Veränderlichen enthält, wenn man mit einer beliebigen Grösse e den Ausdruck $D+\mathrm{d}(\frac{1}{\Delta}\,\mathrm{d}\log e)+\frac{1}{\Delta}(\mathrm{d}\log e)^2$ bildet, dieser wird nemlich

$$-\sqrt{(eea^{\mathrm{n}}b^{\mathrm{n}})}\,.\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\Delta a^{\mathrm{n}}b^{\mathrm{n}}}\,.\,\mathrm{d}\sqrt{\frac{a^{\mathrm{n}}b^{\mathrm{n}}}{ee}}\right)-\frac{1}{4\Delta}\left(\mathrm{d}\log\frac{a^{\mathrm{n}}}{b^{\mathrm{n}}}\right)^2$$

ein Ausdruck, dessen Werth also unabhängig von n ist und sich auch nicht ändert, wenn man b^{n} und c^{n} oder c^{n} und a^{n} statt a^{n} und b^{n} setzt. Derselbe verwandelt sich für beständig wachsende positive und für negative n in

$$-e\mathrm{M}(a,b)\,.\,\mathrm{d}\left\{\frac{1}{\Delta\mathrm{M}(a,b)^2}\,\mathrm{d}\frac{\mathrm{M}(a,b)}{e}\right\}\quad\text{und in}\quad -e\mathrm{M}(a,c)\,.\,\mathrm{d}\left\{\frac{1}{\Delta\mathrm{M}(a,c)^2}\,\mathrm{d}\frac{\mathrm{M}(a,c)}{e}\right\}$$

dagegen für n gleich Null und für a, b, c als besondere Werthe von e beziehungsweise in $+\Delta bbcc$, $\quad -\Delta ccaa$, $\quad -\Delta aabb$.

Setzt man also zur Abkürzung

$$\sqrt{\frac{a}{\mathrm{M}(a,b)}}=p,\quad \sqrt{\frac{b}{\mathrm{M}(a,b)}}=q,\quad \sqrt{\frac{c}{\mathrm{M}(a,b)}}=r,\quad -\pi\frac{\mathrm{M}(a,b)}{\mathrm{M}(a,c)}=\log y$$

so wird mit Rücksicht auf die Gleichung für Δ in Art. 13:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta}{2}\mathrm{M}(a,b)^2 &= \tfrac{1}{4}\,\mathrm{d}\log y=\frac{1}{p^4}\,\mathrm{d}\log\frac{r}{q}=\frac{1}{q^4}\,\mathrm{d}\log\frac{r}{p}=\frac{1}{r^4}\,\mathrm{d}\log\frac{p}{q}\\ &=-\frac{pp}{q^4r^4}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{d}\log y}\,.\,\mathrm{d}\frac{1}{pp}\right)=\frac{qq}{r^4p^4}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{d}\log y}\,.\,\mathrm{d}\frac{1}{qq}\right)=\frac{rr}{p^4q^4}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{d}\log y}\,.\,\mathrm{d}\frac{1}{rr}\right)\end{aligned}$$

und von gleicher Form werden die Ausdrücke des $-\frac{\Delta}{2}\mathrm{M}(a,c)^2$ in

$$\sqrt{\frac{a}{\mathrm{M}(a,c)}},\qquad \sqrt{\frac{c}{\mathrm{M}(a,c)}},\qquad \sqrt{\frac{b}{\mathrm{M}(a,c)}},\qquad -\pi\frac{\mathrm{M}(a,c)}{\mathrm{M}(a,b)}$$

Die Elimination von je zwei der drei Grössen p, q, r ergibt

$$\left\{\frac{1}{p^4}\,\frac{1}{\mathrm{d}\log y}\,\mathrm{d}\log\left[\frac{16}{p^6}\,\frac{1}{\mathrm{d}\log y}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{d}\log y}\,.\,\mathrm{d}\frac{1}{pp}\right)\right]\right\}^2-\frac{16}{p^6}\,\frac{1}{\mathrm{d}\log y}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{d}\log y}\,.\,\mathrm{d}\frac{1}{pp}\right)-1=0$$

als Differentialgleichung sowol für p als auch für q und für r, das ist für $\sqrt{\frac{a}{M(a,b)}}$, $\sqrt{\frac{b}{M(a,b)}}$ und $\sqrt{\frac{c}{M(a,b)}}$ und ebenso auch, wenn man $-\pi\frac{M(a,c)}{M(a,b)} = \log z$ statt $\log y$ darin gesetzt denkt, als Differentialgleichung für $\sqrt{\frac{a}{M(a,c)}}$, $\sqrt{\frac{c}{M(a,c)}}$ und $\sqrt{\frac{b}{M(a,c)}}$.]

16.

[Die Darstellung der Quotienten der Grössen $a, b, c, M(a,b), M(a,c)$ durch Reihen, die nach Potenzen von $y^{\frac{1}{4}}$ oder $z^{\frac{1}{4}}$ fortschreiten, lässt sich mit Hülfe der Fundamentalsätze des hier zu untersuchenden Algorithmus z. B. in folgender Weise ausführen.

Nach der Definition von y und dem in Art. 12 für den rückwärts verlängerten Algorithmus aufgestellten Satze wird:

$$-\pi\frac{M(a,b)}{M(a,c)} = -\pi\frac{M(a^n,b^n)}{2^n M(a^n,c^n)} = \log y$$

also nach den Gleichungen in Art. 12 der Grenzwerth von $\frac{1}{2}y^{-2^{n-2}} \cdot \sqrt{\frac{c^n}{M(a^n,b^n)}}$ für ein immer wachsendes n, oder was dasselbe ist, der Grenzwerth von $\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{4}}r(y)$, wo $r(y)$ statt $\sqrt{\frac{c}{M(a,b)}}$ gesetzt ist, für bis zur Null abnehmendes positives $y^{\frac{1}{4}}$ gleich der Einheit.

Bezeichnen wir noch $\sqrt{\frac{a}{M(a,b)}}$ und $\sqrt{\frac{b}{M(a,b)}}$ durch $p(y)$ und $q(y)$, so folgt aus $aa = bb + cc$ und den beiden Gleichungen für $\sqrt{M(a,b)}$ in Art. 12

$$\begin{aligned} p(y) &= 1 + r(y^4) + r(y^{16}) + r(y^{64}) + \ldots + r(y^{2^{2n}}) + \ldots \\ q(y) &= 1 - r(y^4) + r(y^{16}) + r(y^{64}) + \ldots + r(y^{2^{2n}}) + \ldots \\ r(y)^4 &= p(y)^4 - q(y)^4 \end{aligned}$$

Die Reihen für p, q, r, welche nach ganzen Potenzen von $y^{\frac{1}{4}}$ fortschreiten und diesen Bedingungen genügen, findet man, so weit man die Entwickelung ausführt von der Form:

$$\begin{aligned} p(y) &= 1 + 2y + 2y^4 + 2y^9 + \ldots + 2y^{nn} + \ldots \\ q(y) &= 1 - 2y + 2y^4 - 2y^9 + \ldots \pm 2y^{nn} \mp \ldots \\ r(y) &= 2y^{\frac{1}{4}} + 2y^{\frac{9}{4}} + 2y^{\frac{25}{4}} + 2y^{\frac{49}{4}} + \ldots + 2y^{(n+\frac{1}{2})^2} + \ldots \end{aligned}$$

Dass das hier angedeutete Gesetz für die Bildung der Glieder das allgemein gültige ist, scheint GAUSS unter Anderem auch auf folgende Art bewiesen zu haben. Neben den entsprechenden Gleichungen, welche sich auf Reihen mit zwei Argumenten beziehen und weiter unten in Art. 23 und 25 Platz finden werden, hat GAUSS sich die Aufzeichnung gemacht:]

Zur Theorie der Zerlegung der Zahlen in vier Quadrate.

Das Theorem: das Product zweier Summen von vier Quadraten ist selbst eine Summe von vier Quadraten, wird am einfachsten so dargestellt: es seien $l, m, \lambda, \mu, \lambda', \mu'$ *sechs complexe Zahlen, so dass* λ, λ' *und* μ, μ' *sociirt sind. Durch* N *bezeichne man die Norm. Es ist dann*

$$(\mathrm{N}\,l+\mathrm{N}\,m)(\mathrm{N}\lambda+\mathrm{N}\mu) = \mathrm{N}(l\lambda+m\mu)+\mathrm{N}(l\mu'-m\lambda')$$

[und also auch

$$\begin{aligned}\{\mathrm{N}(n+in_{,})+\mathrm{N}(n_{,,}+in_{,,,})\}\{\mathrm{N}(1-i)+\mathrm{N}(1+i)\} \\ = \mathrm{N}\{(n+n_{,}+n_{,,}-n_{,,,})+i(-n+n_{,}+n_{,,}+n_{,,,})\} \\ +\mathrm{N}\{(n+n_{,}-n_{,,}+n_{,,,})-i(+n-n_{,}+n_{,,}+n_{,,,})\}\end{aligned}$$

Hieraus lassen sich leicht die beiden folgenden Sätze ableiten, in welchen verschiedene Darstellungen einer Zahl durch eine Summe von vier Quadratzahlen sich beziehen auf die verschiedenen Werthensysteme der vier Wurzeln mit Berücksichtigung sowol der Zeichen als auch der Reihenfolge der Wurzeln, worin ferner unter den geraden Zahlen auch die Null mit begriffen wird.

Ist das Vierfache einer Zahl von der Form $4k+1$ durch vier ungerade Quadratzahlen darstellbar, so ist sie selbst halb so oft durch eine ungerade und drei gerade Quadratzahlen darstellbar, und umgekehrt, ist eine Zahl in der letztern Weise darstellbar, so ist ihr Vierfaches doppelt so oft in der ersten Weise darstellbar.

Ist das Vierfache einer Zahl von der Form $4k+3$ durch vier ungerade Quadratzahlen darstellbar, so ist sie selbst halb so oft durch eine gerade und drei ungerade Quadratzahlen darstellbar und umgekehrt, ist eine Zahl in der letztern Weise darstellbar, so ist ihr Vierfaches doppelt so oft in der erstern Weise darstellbar.

Mit Hülfe dieser beiden Sätze lässt sich unmittelbar beweisen, dass die obigen Reihen der Gleichung $r(y)^4 = p(y)^4-q(y)^4$ genügen, und ferner durch die wiederholte Anwendung dieser Relation, dass, wenn man nach dem Schema

$$p+q = 2p'', \qquad p-q = 2r'', \qquad (p'')^4-(r'')^4 = (q'')^4$$

aus den Werthen der Quadrate der beiden ersten Reihen, nemlich pp und qq, als Anfangsglieder die Glieder des Algorithmus eines arithmetisch geometrischen Mittels für positive gerade Indices bildet, auch

$$p^{2n} = p(y^{2^{2n}}), \qquad q^{2n} = q(y^{2^{2n}}), \qquad r^{2n} = r(y^{2^{2n}})$$

wird. Durch Übergang zu dem Grenzwerthe von n entsteht also nach Art. 12:

$$\mathrm{M}(pp,\, qq) = 1, \qquad \frac{\pi}{2}\,\frac{\mathrm{M}(pp,\, qq)}{\mathrm{M}(pp,\, rr)} = -\tfrac{1}{2}\log y\;]$$

17.

[Aus den im vorhergehenden Artikel abgeleiteten Eigenschaften der durch die dort aufgestellten Reihen definirten Functionen p, q, r folgt, dass, wenn a, b, c drei die Gleichung $aa = bb+cc$ erfüllende Grössen sind, sie in die Form gesetzt werden können

$$a = \mathrm{M}(a,b)\,.\,(py)^2, \qquad b = \mathrm{M}(a,b)\,.\,(qy)^2, \qquad c = \mathrm{M}(a,b)\,.\,(ry)^2$$

und dass dann $\frac{\log y}{\pi} = -\frac{\mathrm{M}(a,b)}{\mathrm{M}(a,c)}$ sein muss. Setzt man nun noch

$$a = \mathrm{M}(a,c)\,.\,(pz)^2, \qquad c = \mathrm{M}(a,c)\,.\,(qz)^2, \qquad b = \mathrm{M}(a,b)\,.\,(rz)^2$$

so wird

$$\frac{\log z}{\pi} = -\frac{\mathrm{M}(a,c)}{\mathrm{M}(a,b)} = \frac{\pi}{\log y}.$$

Der durch die Vereinigung dieser beiden Darstellungen sich ergebende Satz ist von Gauss so ausgesprochen, dass die Functionen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{P}t &= 1+2e^{-\pi t}+2e^{-4\pi t}+2e^{-9\pi t}+\ldots+2e^{-nn\pi t}+\ldots\\
\mathfrak{Q}t &= 1-2e^{-\pi t}+2e^{-4\pi t}-2e^{-9\pi t}+\ldots\pm 2e^{-nn\pi t}\mp\ldots\\
\mathfrak{R}t &= 2e^{-\frac{1}{4}\pi t}+2e^{-\frac{9}{4}\pi t}+2e^{-\frac{25}{4}\pi t}+\ldots+2e^{-(n+\frac{1}{2})^2\pi t}+\ldots
\end{aligned}$$

den Gleichungen

$$\mathfrak{P}t = \frac{1}{\sqrt{t}}\mathfrak{P}\frac{1}{t}, \qquad \mathfrak{Q}t = \frac{1}{\sqrt{t}}\mathfrak{R}\frac{1}{t}, \qquad \mathfrak{R}t = \frac{1}{\sqrt{t}}\mathfrak{Q}\frac{1}{t}$$

genügen, worin die Quadratwurzeln mit solchen Zeichen zu nehmen sind, dass der reelle Theil positiv ist.

Aus dieser und der anderen von ihm aufgezeichneten Eigenschaft derselben Functionen, dass nemlich

$$\mathfrak{P}t = \mathfrak{Q}(t+i), \qquad \mathfrak{Q}t = \mathfrak{P}(t+i), \qquad \mathfrak{R}t = \sqrt{i}.\mathfrak{R}(t+i)$$

ist, scheint GAUSS den folgenden Satz abgeleitet zu haben:]

Es seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *ganze reelle Zahlen*, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, $\frac{\alpha t - \beta i}{\delta + \gamma t i} = t'$.

Wir unterscheiden 6 *Fälle, jenachdem nach dem Modulus* 2

α	$\equiv$	1	1	1	0	1	0
β	$\equiv$	0	1	0	1	1	1
γ	$\equiv$	0	0	1	1	1	1
δ	$\equiv$	1	1	1	1	0	0

Es ist dann

$h\mathfrak{P}t'$	$=$	$\mathfrak{P}t$	$\mathfrak{Q}t$	$\mathfrak{R}t$	$\mathfrak{R}t$	$\mathfrak{Q}t$	$\mathfrak{P}t$
$h\mathfrak{Q}t'$	$=$	$\mathfrak{Q}t$	$\mathfrak{P}t$	$\mathfrak{Q}t$	$\mathfrak{P}t$	$\mathfrak{R}t$	$\mathfrak{R}t$
$h\mathfrak{R}t'$	$=$	$\mathfrak{R}t$	$\mathfrak{R}t$	$\mathfrak{P}t$	$\mathfrak{Q}t$	$\mathfrak{P}t$	$\mathfrak{Q}t$

$$h = \sqrt{i^{\lambda}}(\delta + \gamma t i)$$

[worin λ für die Factoren der drei Functionen $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{R}$ im Allgemeinen verschiedene Werthe hat.]

Ist hier $t = \frac{\sqrt{d}+bi}{a}$, $t' = \frac{\sqrt{d}+b'i}{a'}$, $-d = bb - ac = b'b' - a'c'$, *so geht die Form* (a, b, c) *in* (a', b', c') *über durch die Transformation* $\binom{\delta,\ -\beta}{-\gamma,\ \alpha}$.

Zusammenhang zwischen den Formen des negativen Determinanten $-p$ *und den summatorischen Functionen.*

Sind nemlich die Formen (a, b, c) (A, B, C) *aequivalent, so ist die Function* f *in Betracht zu ziehen wo* $ft \equiv fu$ *so wol wenn* $\frac{t-u}{i}$ *ganze Zahl als wenn* $t = \frac{1}{u}$.

Jeder Classe entspricht dann ein bestimmter *Werth von* $f\frac{\sqrt{p}+bi}{a}$.

18.

[Mit dem Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels hat GAUSS einen andern in Verbindung gebracht, welcher ebenfalls wie jener von zwei gegebenen Grössen, die hier α und β bezeichnet werden sollen, ausgeht und auf eine solche Form zurückgeführt werden kann, dass viele Analogien mit jenem sich zeigen, wenn nemlich

$$4a'a' = (a+b)^2, \quad b'b' = ab, \quad \text{u. s. f.}$$
$$4a'\alpha' = (\alpha+\beta)^2, \quad b'\beta' = \alpha\beta, \quad \text{u. s. f.}$$

gesetzt wird. Ebenso wie die bisherigen Untersuchungen durch Einführung der die Gleichung $aa = bb + cc$ erfüllende Grösse c bedeutend übersichtlicher wurden, wird hier eine entsprechende Vereinfachung der Formeln erreicht, wenn man γ durch die Gleichung $a\alpha = b\beta + c\gamma$ und δ durch

$$bc(b\gamma - c\beta) = ca(a\gamma - c\alpha) = ab(b\alpha - a\beta) = abc\delta$$

so wie γ^n, δ^n durch dieselben Gleichungen, nachdem allen Zeichen der Index n gegeben ist, einführt. Unter den zwischen diesen Grössen bestehenden Relationen finden die folgenden bei der Untersuchung dieses Algorithmus vielfache Anwendung:

$$\frac{\alpha+\beta}{a+b} = \frac{\gamma-\delta}{c}, \quad \frac{\alpha-\beta}{a-b} = \frac{\gamma+\delta}{c}, \quad \frac{\alpha+\gamma}{a+c} = \frac{\beta+\delta}{b}, \quad \frac{\alpha-\gamma}{a-c} = \frac{\beta-\delta}{c},$$

$$\alpha' = \frac{1}{a'}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 = \frac{1}{c'}\left(\frac{\gamma-\delta}{2}\right)^2, \qquad \beta' = \frac{1}{b'}\alpha\beta$$

$$\gamma' = \frac{1}{c'}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 = \frac{1}{a'}\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)^2, \qquad \delta' = \frac{1}{b'}\gamma\delta$$

$$\alpha\alpha + \delta\delta = \beta\beta + \gamma\gamma = \frac{a}{b}(\alpha\beta + \gamma\delta) = \frac{a}{c}(\alpha\gamma - \beta\delta) = a(\alpha' + \gamma')$$

$$\alpha\alpha - \gamma\gamma = \beta\beta - \delta\delta = \frac{b}{c}(\beta\gamma - \alpha\delta) = \frac{b}{a}(\alpha\beta - \gamma\delta) = b(\alpha' - \gamma')$$

$$\alpha\alpha - \beta\beta = \gamma\gamma - \delta\delta = \frac{c}{a}(\alpha\gamma + \beta\delta) = \frac{c}{b}(\beta\gamma + \alpha\delta) = 2c\sqrt{\alpha'\gamma'}$$

Die Grenzwerthe der Glieder in den sieben Reihen von Grössen $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ lassen sich auf diese vier zurückführen:

$$k = \mathrm{M}(a,b) = \lim a^{n} = \lim b^{n}$$

$$\sqrt{y} = e^{-\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{M}(a,b)}{\mathrm{M}(a,c)}} = \lim \sqrt[2^n]{\frac{c^n}{4a^n}} = \frac{c}{4a}\cdot\frac{a}{a'}\cdot\sqrt{\frac{a'}{a''}}\cdot\sqrt[2^2]{\frac{a''}{a'''}}\cdot\sqrt[2^3]{\frac{a'''}{a''''}}\ \cdots\ \sqrt[2^{n-1}]{\frac{a^{n-1}}{a^n}}\ \cdots$$

$$\frac{\varkappa}{k} = \lim \sqrt[2^n]{\frac{a^n}{k}} = \lim \sqrt[2^n]{\frac{\beta^n}{k}} = \frac{\beta}{b}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}\frac{\alpha}{\beta}}\cdot\sqrt[2^2]{\frac{b'}{a'}\frac{\alpha'}{\beta'}}\cdot\sqrt[2^3]{\frac{b''}{a''}\frac{\alpha''}{\beta''}}\ \cdots\ \sqrt[2^n]{\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}\frac{\alpha^{n-1}}{\beta^{n-1}}}\ \cdots$$

$$\frac{\varkappa}{k}\sqrt{y}\,.\,\eta^{\pm 1} = \lim \sqrt[2^{n-1}]{\left[\sqrt{\frac{\gamma^n}{4k}} \pm \sqrt{\frac{\delta^n}{4k}}\right]}$$

Wenn α und β und alle Grössen a^n, b^n, positiv sind, so nehmen $\frac{a^n}{b^n}$ und $\frac{a^n\alpha^n}{b^n\beta^n}$ von den Werthen $\frac{a'}{b'}$ und $\frac{a'\alpha'}{b'\beta'}$ beständig bis zur Einheit ab; es ergeben also die vorstehenden Ausdrücke einen bestimmten Werth für $\varkappa$. Das Gleiche folgt für η, wenn γ, δ und alle c^n und b^n positiv sind, aus

$$\frac{\varkappa}{k}y^{\frac{1}{2}}\eta = \lim \sqrt[2^n]{\frac{\gamma^n}{k}} = \lim \sqrt[2^n]{\frac{\delta^n}{k}} = \frac{\delta}{b}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}\frac{\gamma}{\delta}}\cdot\sqrt[2^2]{\frac{b'}{a'}\frac{\gamma'}{\delta'}}\cdot\sqrt[2^3]{\frac{b''}{a''}\frac{\gamma''}{\delta''}}\ \cdots\ \sqrt[2^n]{\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}\frac{\gamma^{n-1}}{\delta^{n-1}}}\ \cdots$$

wenn aber δ negativ ist aus der von GAUSS angewandten Substitution

$$\sqrt{\frac{-\delta}{\gamma}} = \operatorname{tang} U\,.\,\sqrt{\frac{a}{b}} = \operatorname{tang} V\,.\,\sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{(\operatorname{tang} U\,.\,\operatorname{tang} V)} = \operatorname{tang} U'$$
$$U + V = 2V'$$
$$\sqrt{\frac{-\delta'}{\gamma'}} = \operatorname{tang} 2U'.\sqrt{\frac{a'}{b'}} = \operatorname{tang} 2V'.\sqrt{\frac{b'}{a'}} = \sqrt{(\operatorname{tang} 2U'.\operatorname{tang} 2V')} = \operatorname{tang} 2U''$$
$$U' + V' = 2V''$$
$$\sqrt{\frac{-\delta''}{\gamma''}} = \operatorname{tang} 4U''.\sqrt{\frac{a''}{b''}} = \operatorname{tang} 4V''.\sqrt{\frac{b''}{a''}} = \sqrt{(\operatorname{tang} 4U''.\operatorname{tang} 4V'')} = \operatorname{tang} 4U'''$$
$$U'' + V'' = 2V'''$$
$$\sqrt{\frac{-\delta^n}{\gamma^n}} = \operatorname{tang} 2^n U^n.\sqrt{\frac{a^n}{b^n}} = \operatorname{tang} 2^n V^n.\sqrt{\frac{b^n}{a^n}} = \sqrt{(\operatorname{tang} 2^n U^n.\operatorname{tang} 2^n V^n)} = \operatorname{tang} 2^n U^{n+1}$$
$$U^n + V^n = 2V^{n+1}$$

weil dann

$$\sin U^2 = \frac{b}{c}\frac{-\delta}{\alpha},\quad \cos U^2 = \frac{a}{c}\frac{\gamma}{\alpha},\quad aa\sin U^2 + bb\cos U^2 = ab\frac{\beta}{\alpha}$$
$$\sin V^2 = \frac{a}{c}\frac{-\delta}{\beta},\quad \cos V^2 = \frac{b}{c}\frac{\gamma}{\beta},\quad aa\cos V^2 + bb\sin V^2 = ab\frac{\alpha}{\beta}$$

ist, und diese Gleichungen auch gelten, wenn a^n, b^n, c^n, α^n, β^n, γ^n, δ^n, 2^nU^n, 2^nV^n statt a, b, c, α, β, γ, δ, U, V gesetzt werden, so dass also

$$\eta^{\pm 1} = \lim e^{\pm iU^n} = \lim e^{\pm iV^n} = e^{\pm iu}$$

sich ergibt.

Für $\delta = 0$ verschwinden alle δ^n und es wird

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{\mathfrak{b}}{b} = \frac{\gamma}{c} = \ldots = \sqrt[2^n]{\frac{\alpha^n}{a^n}} = \sqrt[2^n]{\frac{\mathfrak{b}^n}{b^n}} = \sqrt[2^n]{\frac{\gamma^n}{c^n}} = \frac{\varkappa}{k}, \quad \sqrt[2^n]{\frac{\gamma^n}{\alpha^n}\frac{a^n}{c^n}} = \eta = 1, \quad u = 0$$

Vergleicht man die Grenzwerthe $k, y, \varkappa, \eta, u$, zu denen man gelangt, wenn man bei der Bildung des combinirten Algorithmus von den Grössen $a, b, \alpha, \mathfrak{b}$ ausgegangen ist, mit den Grenzwerthen $k', y', \varkappa', \eta', u'$, zu denen man gelangt, wenn man bei solchem Algorithmus von den bestimmten zuvor erhaltenen Grössen $a', b', \alpha', \mathfrak{b}'$ als Anfangsglieder ausginge, so ersieht man unmittelbar, dass

$$k' = k, \quad y' = yy, \quad \frac{\varkappa'}{k'} = \frac{\varkappa\varkappa}{kk}, \quad \eta' = \eta\eta, \quad u' = 2u$$

sein muss und dass durch die nach diesem Gesetze gebildeten Gleichungen die den $a^n, b^n, \alpha^n, \mathfrak{b}^n$ entsprechenden Grenzwerthe $k^n, y^n, \varkappa^n, \eta^n, u^n$ sich ergeben

Aus den Gleichungen von der Form:

$$\frac{c'}{a'} = \frac{a-b}{a+b}, \quad \frac{c'}{a'}\frac{\gamma'}{\alpha'} = \left(\frac{\alpha-\mathfrak{b}}{\alpha+\mathfrak{b}}\right)^2, \quad \frac{c'}{a'}\frac{\alpha'}{\gamma'} = \left(\frac{\gamma-\delta}{\gamma+\delta}\right)^2$$

folgt, dass, wenn alle Glieder des Algorithmus positiv werden, y, $y\eta$ und $\frac{1}{\eta}$ kleiner als die Einheit sind.

Die von Gauss angegebene Methode zur Bestimmung des Grenzwerthes für U^n und V^n und ebenso die Bestimmung von $\frac{\varkappa}{k}$ mit Zuhülfenahme jener Winkel führt bei Rechnungen mit Zahlen sehr rasch zum Ziele. Weniger bequem für Zahlenrechnungen sind die obigen Formeln zur Bestimmung eines reellen η und des zugehörigen $\frac{\varkappa}{k}$. Dieser Umstand wird die Veranlassung gewesen sein, wesshalb Gauss den Algorithmus:]

$$A' = \frac{A+B}{2}, \qquad B' = \frac{2ABa'}{b'(A+B)}$$
$$A'' = \frac{A'+B'}{2}, \qquad B'' = \frac{2A'B'a''}{b'(A'+B')}$$

u. s. f. [mit dem Grenzwerthe]

$$\frac{H}{k} = \frac{B}{b}\sqrt{\frac{bA}{aB}}\cdot\sqrt[4]{\frac{b'A'}{a'B'}}\cdot\sqrt[8]{\frac{b''A''}{a''B''}}\cdot\sqrt[16]{\frac{b'''A'''}{a'''B'''}}\;\ldots$$

[aufgestellt hat, welcher sich auf den obigen zurückführen lässt, wenn man $A = \alpha$, $B = \mathfrak{b}$ setzt, weil dann

$$A^n = \frac{b^{n+1}}{b'}\sqrt{\frac{\alpha^n}{\beta^n}}\cdot\sqrt{\alpha\beta}, \qquad B^n = \frac{b^{n+1}}{b'}\sqrt{\frac{\beta_n}{\alpha^n}}\cdot\sqrt{\alpha\beta}, \qquad H = \varkappa$$

wird. Die Bestimmung eines reellen η ist in GAUSS Aufzeichnungen durch eine Lücke unvollendet gelassen, sie ergibt sich aber, wenn man aus $C = \gamma$, und $D = \delta$ denselben Algorithmus wie eben aus A und B bildet, denn dann sind:

$$C^n = \frac{b^{n+1}}{b'}\sqrt{\frac{\gamma^n}{\delta^n}}\sqrt{\gamma\delta}, \qquad D^n = \frac{b^{n+1}}{b'}\sqrt{\frac{\delta^n}{\gamma^n}}\sqrt{\gamma\delta}$$

$$\frac{H}{k}y^{\frac{1}{2}}\eta = \frac{D}{b}\cdot\sqrt{\frac{bC}{aD}}\cdot\sqrt[4]{\frac{b'C'}{a'D'}}\cdot\sqrt[8]{\frac{b''C''}{a''D''}}\cdot\sqrt[16]{\frac{b'''C'''}{a'''D'''}}\cdots$$

und diese Grössen C, D nähern sich rasch dem Werthe $\frac{k}{b'}\sqrt{\gamma\delta}$, während γ^n und δ^n zugleich entweder bedeutend wachsen oder abnehmen, sobald $\frac{\varkappa}{k}y^{\frac{1}{2}}\eta$ sich von der Einheit unterscheidet.]

19.

[Die Beziehungen zwischen den Differentialen der zu untersuchenden Grössen sind besonders einfach, wenn a und b ungeändert bleiben; es ergibt sich dann unmittelbar aus den Bedingungsgleichungen zwischen Gliedern mit gleichem Index, dass der Ausdruck $\frac{1}{2^n}\frac{1}{b^n}\sqrt{\frac{\beta^n\delta_n}{\alpha^n\gamma^n}}\cdot \mathrm{d}\log\frac{\delta^n}{\beta^n}$ seinen Werth nicht ändert, wenn darin der Reihe nach α, β, γ, δ statt β, γ, δ, α gesetzt wird. Die beiden so erhaltenen Ausdrücke können zu einem dem erstern entsprechenden Ausdruck für den Index $n+1$ vereinigt werden, der Werth dieses Ausdrucks ist also auch unabhängig vom Index n. Durch Übergang zur Grenze und durch Vergleichung mit den Differentialen der auf verschiedene Weise gebildeten Quotienten ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}\,\mathrm{d}\log\eta &= \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\alpha\delta}{\beta\gamma}}\cdot\mathrm{d}\log\frac{\delta}{\alpha} = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{\beta\delta}{\alpha\gamma}}\cdot\mathrm{d}\log\frac{\delta}{\beta} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\gamma\delta}{\alpha\beta}}\cdot\mathrm{d}\log\frac{\delta}{\gamma} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\delta'}{\beta'}}\cdot\mathrm{d}\log\frac{\delta\delta}{\delta'}\\ &= \frac{1}{a}\sqrt{\frac{\beta\gamma}{\alpha\delta}}\cdot\mathrm{d}\log\frac{\gamma}{\beta} = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta}}\cdot\mathrm{d}\log\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}}\cdot\mathrm{d}\log\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\beta'}{\delta'}}\cdot\mathrm{d}\log\frac{\beta'}{\beta\beta}\end{aligned}$$

eine Relation, welche also immer gilt, wenn die Indices der a, b, c, α, β, γ, δ, η um gleich viel Einheiten vermehrt werden. Hieraus folgt der von GAUSS aufgezeichnete Satz:]

$$\int\frac{\mathrm{d}U}{\sqrt{(aa\sin U^2+bb\cos U^2)}} = \int\frac{\mathrm{d}V}{\sqrt{(aa\cos V^2+bb\sin V^2)}} = \frac{u}{k}$$

[Mit Hülfe der Gleichung für $d\log\frac{\beta'}{\beta\beta}$ lassen sich durch wiederholte Anwendung derselben unmittelbar die Reihen für die Differentiale der einzelnen Grössen α, β, γ, δ aufstellen, für ein negatives δ entsteht:

$$\frac{k}{2}\frac{d\log\frac{\alpha}{\varkappa}}{du}+2c'\sin 2V'=\frac{k}{2}\frac{d\log\frac{\beta}{\varkappa}}{du}=\frac{k}{2}\frac{d\log\frac{\gamma}{\varkappa}}{du}+a\frac{\sin V}{\cos U}=\frac{k}{2}\frac{d\log\frac{\delta}{\varkappa}}{du}-b\frac{\cos V}{\sin U}$$
$$=c'\sin 2V'+c''\sin 2^2V''+c'''\sin 2^3V'''+\ldots]$$

20.

[Die Differentiale zweiter Ordnung, welche auf die Grösse η als einzige unabhängig Veränderliche sich beziehen, können unmittelbar durch Differentiation der Differentialgleichung erster Ordnung hergeleitet und die Bestimmung ihrer Werthe in der Weise dargestellt werden, dass die Ausdrücke von der Form

$$\frac{d}{d\log\eta}\left[\frac{d\log\frac{\alpha}{\beta}}{d\log\eta}\right]+\frac{1}{2}\frac{d\log\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta}}{d\log\eta}\cdot\frac{d\log\frac{\alpha}{\beta}}{d\log\eta}$$

für die mit irgend welchem gemeinsamen Index behafteten α, β, γ, δ verschwinden, in welcher Reihenfolge die α, β, γ, δ auch darin eingesetzt sein mögen. Multiplicirt man Zähler und Nenner unter dem zweimal zu differentiirenden Logarithmus mit β, ersetzt $\alpha\beta$ durch $b'\beta'$ und die Derivirten erster Ordnung durch ihre Werthe so erhält man für zwei aufeinander folgende Indices:

$$\frac{dd\log\frac{\beta'}{\beta\beta}}{(d\log\eta)^2}+2\frac{a'c'}{kk}\frac{\delta'}{\beta'}-2\frac{ac}{kk}\frac{\delta}{\beta}-\frac{1}{2}\frac{cc}{kk}=0$$

und hieraus durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung und mit Zuhülfe nahme der in Art. 13 für $d\log M(a,b)$ gefundenen Reihe die Gleichung

$$\frac{d\log\frac{b}{k}}{d\log y}=\frac{dd\log\frac{\alpha}{\varkappa}}{(d\log\eta)^2}-\frac{1}{2}\frac{ac}{kk}\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{dd\log\frac{\beta}{\varkappa}}{(d\log\eta)^2}+\frac{1}{2}\frac{ac}{kk}\frac{\delta}{\beta}$$
$$=\frac{dd\log\frac{\gamma}{\varkappa}}{(d\log\eta)^2}-\frac{1}{2}\frac{ac}{kk}\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{dd\log\frac{\delta}{\varkappa}}{(d\log\eta)^2}+\frac{1}{2}\frac{ac}{kk}\frac{\beta}{\delta}$$

welche ihre Gültigkeit behält, wenn a, b, c, α, β, γ, δ, $\varkappa$, y, η mit irgend einem gemeinsamen von Null verschiedenen Index behaftet werden.

Durch die Vereinigung dieses Resultats mit der im vorigen Artikel gefundenen Entwickelung von $d\log\frac{\alpha}{x}$ ergibt sich die von GAUSS gefundene Werthausmittelung des Integrals:]

$$\int\sqrt{(aa\sin U^2+bb\cos U^2)}\,dU=\int\frac{aabb\,dV}{(aa\cos V^2+bb\sin V^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$=\frac{u}{k}\{a'a'-2c''c''-4c'''c'''-8c''''c''''-\,.\,.\}$$
$$+c'\sin 2V'-c''\sin 4V''-c'''\sin 8V'''-c''''\sin 16V''''-\ldots$$

21.

[Bildet man die Gleichungen zwischen den Derivirten der α, β, γ, δ nach der Grösse y als unabhängig Veränderliche, so müssen dieselben Coëfficienten dieser Derivirten entstehen, wie in den Gleichungen für die Differentiale nach η und da die letztern Gleichungen in solche Form gebracht werden können, dass die Verhältnisse zwischen den Derivirten von Quotienten bestimmt werden, so müssen die erwähnten Coëfficienten auch diesen Derivirten umgekehrt proportional sein. Ersetzt man sie durch deren reciproken Werthe, so ersieht man, dass auch die übrigen Glieder jener Gleichungen durch solche Derivirten dargestellt werden können und zwar so, dass der Ausdruck von der Form

$$\frac{\left[\dfrac{d\log\frac{\delta}{\beta}}{d\log y}\right]}{\left[\dfrac{d\log\frac{\delta}{\beta}}{d\log\eta}\right]}-\frac{1}{2}\,\frac{d\log\frac{\alpha\beta}{xx}}{d\log\eta}$$

für einen beliebigen gemeinsamen Index der Zeichen α, β, γ, δ, x, y, η seinen Werth nicht ändert, in welcher Reihenfolge man auch die Grössen α, β, γ, δ mit einander vertauscht. Vergleicht man diesen Ausdruck, welcher sich auf $\frac{\delta}{\beta}$, $\frac{\alpha\gamma}{xx}$, η, y bezieht, mit demjenigen für $\frac{\delta'}{\beta'}=\frac{\gamma\delta}{\alpha\beta}$, $\frac{\alpha'\gamma'}{x'x'}$, $\eta'=\eta\eta$, $y'=yy$ und beachtet, dass nach Art. 19

$$\left[\frac{d\log\frac{\alpha}{\beta}}{d\log\eta}\right]^2=\frac{d\log\frac{\gamma'}{\beta'}}{d\log\eta}\cdot\frac{d\log\frac{\alpha'}{\beta'}}{d\log\eta},\qquad\left[\frac{d\log\frac{\delta}{\gamma}}{d\log\eta}\right]^2=\frac{d\log\frac{\delta'}{\alpha'}}{d\log\eta}\cdot\frac{d\log\frac{\delta'}{\gamma'}}{d\log\eta}$$

ist, so ergibt sich, dass der Werth jenes Ausdrucks auch unabhängig von dem Index der Zeichen α, β, γ, δ, x, y, η und, wie aus den Grenzwerthen folgt, gleich Null sein muss.

Um die Derivirte nach y von jeder einzelnen der vier Grössen $\alpha, \mathfrak{b}, \gamma, \delta$ zu bestimmen, wird zunächst erforderlich sein, jenen Ausdruck so zu verwandeln, dass er nur zwei der Grössen enthält. Dies kann z. B. mit Hülfe der im vorhergehenden Artikel bestimmten nach η genommenen zweiten Derivirten der Quotienten geschehen, so dass also alle Ausdrücke

$$\frac{d\log\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}}{d\log y}-\frac{dd\log\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}}{(d\log\eta)^2}-\frac{1}{2}\frac{d\log\frac{\alpha\mathfrak{b}}{\varkappa\varkappa}}{d\log\eta}\cdot\frac{d\log\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}}{d\log\eta}$$

verschwinden, in welcher Reihenfolge $\alpha, \mathfrak{b}, \gamma, \delta$ mit einander auch vertauscht werden und welcher gemeinsame Index ihnen und den Zeichen $y, \varkappa, \eta$ gegeben werde. Ersetzt man $\frac{\alpha}{\mathfrak{b}}$ durch $\frac{b'\mathfrak{b}'}{\mathfrak{b}\mathfrak{b}}$, $\alpha\mathfrak{b}$ durch $b'\mathfrak{b}'$ und nach dem vorhergehenden Artikel

$$\frac{d\log\frac{b'}{k}}{2\,d\log y}\quad\text{durch}\quad\frac{dd\log\frac{\mathfrak{b}'}{\varkappa}}{(2\,d\log\eta)^2}+\frac{1}{2}\left[\frac{d\log\frac{\mathfrak{b}\mathfrak{b}}{\mathfrak{b}'}}{d\log\eta}\right]^2$$

so ersieht man, dass der Ausdruck

$$\frac{d\log\frac{\mathfrak{b}}{\varkappa}}{d\log y}-\frac{dd\log\frac{\mathfrak{b}}{\varkappa}}{(d\log\eta)^2}-\frac{1}{2}\left[\frac{d\log\frac{\mathfrak{b}}{\varkappa}}{d\log\eta}\right]^2$$

seinem Werthe nach ungeändert bleibt, nicht nur, wie eben gefunden, wenn $\mathfrak{b}$ mit α oder γ oder δ vertauscht wird, sondern auch wenn diesen Grössen zugleich mit $y, \varkappa, \eta$ ein beliebiger gemeinsamer Index gegeben wird. Für einen beständig wachsenden Index verschwindet der Werth des Ausdrucks und durch Multiplication mit $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathfrak{b}}{\varkappa}}$ entsteht demnach

$$\frac{d\sqrt{\frac{\alpha}{\varkappa}}}{d\log y}-\frac{dd\sqrt{\frac{\alpha}{\varkappa}}}{(d\log\eta)^2}=0$$

als partielle Differentialgleichung für jede der Grössen $\alpha, \mathfrak{b}, \gamma, \delta$.]

22.

[Alle Glieder des Algorithmus sind ihrem Werthe nach abhängig von vier Grössen, als solche dürfen $a, b, \alpha, \mathfrak{b}$ angenommen werden, aber auch $k, y, \varkappa, \eta$ weil diese unabhängig von einander sich ändern können. Sämmtliche Gleichungen zwischen den Gliedern der Reihen lassen sich in solche Form bringen, dass sie sowol in Bezug auf $a, b, c, \ldots a^n, b^n, c^n, k$ als auch in Bezug auf

$$\frac{\alpha}{k},\ \frac{\beta}{k},\ \frac{\gamma}{k},\ \frac{\delta}{k}\ \ldots\ \sqrt[2^n]{\frac{\alpha^n}{k}},\ \sqrt[2^n]{\frac{\beta^n}{k}},\ \sqrt[2^n]{\frac{\gamma^n}{k}},\ \sqrt[2^n]{\frac{\delta^n}{k}},\ \frac{\varkappa}{k}$$

homogen sind. Die Verhältnisse zwischen diesen letzteren hangen also nicht von k und $\varkappa$, sondern allein von y und η ab, wir können also

$$\alpha = \varkappa P(y,\eta)^2, \qquad \beta = \varkappa Q(y,\eta)^2, \qquad \gamma = \varkappa R(y,\eta)^2, \qquad \delta = \varkappa S(y,\eta)^2$$

setzen und aus den Betrachtungen in Art. 18 folgt dann, dass diese Functionen P, Q, R, S dieselben bleiben, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varkappa, y, \eta$ mit einem beliebigen Index versehen werden. Aus demselben Artikel folgt auch, mit Benutzung der in Artikel 15 gebrauchten Bezeichnung, für die mit einem gleichen Index behafteten $a, b. c, y$

$$\begin{aligned}
P(y,1) &= py = \sqrt{\frac{a}{k}} = \sqrt{\frac{a}{\mathrm{M}(a,b)}}\\
Q(y,1) &= qy = \sqrt{\frac{b}{k}}\\
R(y,1) &= ry = \sqrt{\frac{c}{k}}\\
S(y,1) &= 0
\end{aligned}$$

ferner als Gleichungen, welche denjenigen entsprechen, durch die die Grössen γ und δ bestimmt wurden:

$$\begin{aligned}
&qqrr(qqRR-rrQQ) = rrpp(ppRR-rrPP)\\
&= ppqq(qqPP-ppQQ) = ppqqrrSS
\end{aligned}$$

$$\frac{PP+QQ}{p(yy)} = \frac{RR-SS}{r(yy)}, \qquad \frac{PP-QQ}{r(yy)} = \frac{RR+SS}{p(yy)}$$

$$\frac{PP+RR}{p(\sqrt{y})} = \frac{QQ+SS}{q(\sqrt{y})}, \qquad \frac{PP-RR}{q(\sqrt{y})} = \frac{QQ-SS}{p(\sqrt{y})}$$

und als Gleichungen, die das Bildungsgesetz des Algorithmus darstellen:

$$\begin{aligned}
2p(yy).P(yy,\eta\eta) &= PP+QQ, & 2p(yy).R(yy,\eta\eta) &= RR+SS\\
2r(yy).R(yy,\eta\eta) &= PP-QQ, & 2r(yy).P(yy,\eta\eta) &= RR-SS\\
q(yy).Q(yy,\eta\eta) &= PQ, & q(yy).S(yy,\eta\eta) &= RS
\end{aligned}$$

worin alle Functionen, neben denen kein Argument geschrieben ist, sich auf die einfachen y und η beziehen.

Zur Berechnung der Werthe der Functionen, welche gegebenen Werthen von $\frac{a}{b} = \frac{pp}{qq}$ und U oder V zugehören, erhält man aus der Gaussischen Formel für H oder $\varkappa$, wenn man zur Abkürzung

$$(a^n \sin 2^n U^n)^2 + (b^n \cos 2^n U^n)^2 = b^n b^n \Delta^n \Delta^n$$

setzt, die Gleichungen:

$$Q = q.\sqrt{\Delta}.\sqrt[4]{\Delta'}.\sqrt[8]{\Delta''}.\sqrt[16]{\Delta'''}\dots$$

$$P = \frac{p}{q} Q^{\frac{1}{\Delta}}$$

$$R = \frac{r}{q} Q^{\frac{\cos U}{\Delta}}$$

$$S = \frac{p}{r} Q^{\frac{\sin U}{\Delta}} i$$

Die Bestimmung der Grössen $k, y, \varkappa, \eta$ als Grenzwerthe lässt erkennen, dass, bei geeigneter hier noch zulässiger Wahl der Vorzeichen der Functionen P, Q, R, S, für bis zur Null abnehmende Werthe von $y, y\eta, \frac{1}{\eta}$ die Ausdrücke

$$P(y,\eta), \quad Q(y,\eta). \quad \frac{R(y,\eta)}{y^{\frac{1}{4}}\eta^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{S(y,\eta)}{y^{\frac{1}{4}}\eta^{\frac{1}{2}}}$$

sich dem Grenzwerthe Eins nähern, dass aber für ein beständig abnehmendes y und ein endliches reelles u die Ausdrücke

$$P(y, e^{2iu}), \quad Q(y, e^{2iu}), \quad \frac{R(y, e^{2iu})}{2y^{\frac{1}{4}}\cos u}, \quad \frac{S(y, e^{2iu})}{i2y^{\frac{1}{4}}\sin u}$$

jenen Grenzwerth haben.

Die Functionen P, Q, R, iS haben reelle Werthe für ein complexes $\eta^{\frac{1}{2}}$ von der Form e^{iu} und bleiben bis auf iS, welches nur sein Zeichen wechselt, ungeändert, wenn man u in $-u$ verwandelt, es ist also

$$\frac{P(y, \frac{1}{\eta})}{P} = \frac{Q(y, \frac{1}{\eta})}{Q} = \frac{R(y, \frac{1}{\eta})}{R} = \frac{-S(y, \frac{1}{\eta})}{S} = 1]$$

23.

[Bildet man denselben Algorithmus wie vorher für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, jetzt für A, B, C, D und macht $A = \gamma$, $B = \delta$, so wird offenbar für jedes n, $A^n = \gamma^n$, $B^n = \delta^n$, $C^n = \alpha^n$, $D^n = \beta^n$ und also für die Grenzwerthe K, H, welche den

x, η entsprechen: $\frac{x}{k} = \frac{K}{k} \cdot y^{\frac{1}{2}} \cdot H$, $\frac{x}{k} y^{\frac{1}{2}} \eta = \frac{K}{k}$, demnach bestehen die Functionalgleichungen

$$\frac{R(y, \frac{1}{y\eta})}{P} = \frac{S(y, \frac{1}{y\eta})}{Q} = \frac{P(y, \frac{1}{y\eta})}{R} = \frac{Q(y, \frac{1}{y\eta})}{S} = y^{-\frac{1}{4}}\eta^{-\frac{1}{2}}$$

Macht man aber $A = \mathfrak{b}$, $B = \alpha$, so wird $C = -\delta$, $D = -\gamma$ und für jedes n, welches gleich oder grösser als Eins ist: $A^n = \alpha^n$, $B^n = \mathfrak{b}^n$, $C^n = \gamma^n$, $D = \delta^n$, man erhält also:

$$\frac{Q(y, -\eta)}{P} = \frac{P(y, -\eta)}{Q} = -\frac{iS(y, -\eta)}{R} = -\frac{iR(y, -\eta)}{S} = 1$$

Setzt man endlich $2\sqrt{A''} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\mathfrak{b}}$, $2\sqrt{C''} = \sqrt{\alpha} - \sqrt{\mathfrak{b}}$, so wird für jedes $n \geqq 1$

$$2A^{n+1} = \sqrt{a^n \alpha^n} + \sqrt{b^n \mathfrak{b}^n}, \qquad 2C^{n+1} = \sqrt{a^n \alpha^n} - \sqrt{b^n \mathfrak{b}^n}$$
$$2B^{n+1} = \sqrt{b^n \alpha^n} + \sqrt{a^n \mathfrak{b}^n}, \qquad 2D^{n+1} = \sqrt{b^n \alpha^n} - \sqrt{a^n \mathfrak{b}^n}$$
$$2\sqrt{A^{n+2}} = \sqrt{\alpha^n} + \sqrt{\mathfrak{b}^n}, \qquad 2\sqrt{C^{n+2}} = \sqrt{\alpha^n} - \sqrt{\mathfrak{b}^n}, \qquad 4A^{n+1}C^{n+1} = c^n \gamma^n$$
$$\left(\frac{K}{k}\right)^4 = \frac{x}{k}, \qquad HH = \eta$$

also:

$$2P(y^4, \eta\eta) = P + Q, \qquad 2R(y^4, \eta\eta) = P - Q$$
$$2P(yy, \eta)^2 = pP + qQ, \qquad 2R(yy, \eta)^2 = pP - qQ$$
$$2Q(yy, \eta)^2 = qP + pQ. \qquad 2S(yy, \eta)^2 = qP - pQ$$

$$p(\sqrt{y}) . P(\sqrt{y}, \eta) = PP + RR, \quad q(\sqrt{y}) . P(\sqrt{y}, \eta) = QQ - SS, \quad r(\sqrt{y}) . R(\sqrt{y}, \eta = 2PR$$
$$q(\sqrt{y}) . Q(\sqrt{y}, \eta) = PP - RR, \quad p(\sqrt{y}) . Q(\sqrt{y}, \eta) = QQ + SS, \quad r(\sqrt{y}) . S(\sqrt{y}, \eta = 2QS$$

wo wieder diejenigen Functionen, denen keine Argumente beigefügt sind, sich auf die einfachen y und η beziehen.

Der so erhaltene neue Algorithmus, bei welchem man von den Functionen P, Q, R, S mit den Argumenten y, η übergeht zu den Functionen mit den Argumenten yy, η, ist offenbar der von Gauss in Art. 16 der *Determinatio attractionis quam in punctum quodvis positionis datae exerceret planeta etc.* angewandte.

Die Relationen zwischen den Functionen, welche sich auf die beiden beliebigen Werthe ξ, η des zweiten Arguments beziehen, und denjenigen Functionen mit den zweiten Argumenten $\xi\eta$ und $\frac{\xi}{\eta}$ lassen sich auf verschiedene Weise mit

Hülfe des für α, β aufgestellten Algorithmus ableiten. Die Methode, für welche die Entwickelungen am wenigsten weitläufig sind, ist wol diejenige, welche sich auf Functionen bezieht, in denen neben den zweiten Argumenten $\xi\eta$ und $\frac{\xi}{\eta}$ als erstes Argument auftritt das Quadrat von dem ersten Argument der Functionen, welche ξ, η als zweites Argument haben.]

24.

[Bei dem Algorithmus des arithmetisch-geometrischen Mittels ergeben die durch Rückwärts-Verlängerung entstehenden Glieder mit Hülfe der Gleichungen

$$\frac{a_n}{{}^n a} = \frac{c_n}{{}^n c} = \frac{b_n}{{}^n b} = \frac{1}{2^n}$$

die Glieder a_n, c_n, b_n die ebenso von a, c abhangen, wie a^n, b^n, c^n von a, b. Vertauscht man dem entsprechend bei dem combinirten Algorithmus gleichzeitig b mit c und β mit γ, lässt α ungeändert, so wechselt δ nur sein Zeichen, wir erhalten also einen Algorithmus, der ebenso von a, c, α, γ abhängt wie der bisher betrachtete von a, b, α, β wenn wir setzen

$$\alpha_0 = \alpha, \qquad \gamma_0 = \beta, \qquad \beta_0 = \gamma, \qquad \delta_0 = -\delta$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{a_1}\left(\frac{\alpha_0+\gamma_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{b_1}\left(\frac{\beta_0-\delta_0}{2}\right)^2, \qquad \gamma_1 = \frac{1}{c_1}\alpha_0\gamma_0$$

$$\beta_1 = \frac{1}{b_1}\left(\frac{\alpha_0-\gamma_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{a_1}\left(\frac{\beta_0+\delta_0}{2}\right)^2, \qquad \delta_1 = \frac{1}{c_1}\beta_0\delta_0$$

und so fort bis zu den Grenzwerthen:

$$\lim a_n = \lim c_n = \mathrm{M}(a,c) = l$$

$$\lim \sqrt[2^n]{\frac{b_n}{4l}} = e^{-\frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{M}(a,c)}{\mathrm{M}(a,b)}} = \sqrt{z}$$

$$\lim \sqrt[2^n]{\frac{\alpha_n}{l}} = \lim \sqrt[2^n]{\frac{\gamma_n}{l}} = \frac{\lambda}{l}$$

$$\sqrt[2^{n-1}]{\left[\sqrt{\frac{\beta_n}{4l}} \pm \sqrt{\frac{\delta_n}{4l}}\right]} = \frac{\lambda}{l} z^{\frac{1}{4}} \zeta^{\pm 1}$$

Es sind also α, γ, β, $-\delta$ ebensolche Functionen von l, z, λ, ζ, wie α, β, γ, δ von k, y, x, η und da $\frac{l}{\lambda}$ allein von y und η abhängt und zwar auf dieselbe Weise wie $\frac{\lambda}{l}$ von η und y, so muss für $\frac{\log y}{\pi} = \frac{\pi}{\log z}$,

$$\frac{P(z,\zeta)}{P(y,\eta)} = \frac{R(z,\zeta)}{Q(y,\eta)} = \frac{Q(z,\zeta)}{R(y,\eta)} = \frac{iS(z,\zeta)}{S(y,\eta)} = T(y,\eta) = \frac{1}{T(z,\zeta)}$$

sein, wobei ausser T auch noch ζ als Function von y, η zu bestimmen ist und zwar ζ so, dass y, η, ζ der Reihe nach mit z, ζ, η vertauscht werden können, also so, dass

$$\frac{\log y}{\pi} = \frac{\pi}{\log z} = \varphi[(\log\eta)^2, (\log\zeta)^2] = \frac{1}{\varphi[(\log\zeta)^2, (\log\eta)^2]}$$

wird.

Für die P, Q, R als Quadratwurzeln aus $\frac{\alpha}{\varkappa}$, $\frac{\beta}{\varkappa}$, $\frac{\gamma}{\varkappa}$ sind hier gleiche Vorzeichen genommen, weil nach Art. 18 η und ζ zugleich den Werth 1 annehmen und also nach Art. 22 und 17

$$\frac{P(z,1)}{P(y,1)} = \frac{R(z,1)}{Q(y,1)} = \frac{Q(z,1)}{R(y,1)} = T(y,1) = \frac{1}{T(z,1)} = \frac{pz}{py} = \frac{rz}{qy} = \frac{qz}{ry} = \sqrt{\frac{-\log y}{\pi}} = \sqrt{\frac{\pi}{-\log z}}$$

wird und hier dasjenige Vorzeichen der Quadratwurzel gilt, für welches der reelle Theil positiv wird.

Lässt man die zweiten Argumente ζ, η sich in ihre reciproken Werthe verwandeln, so bleiben P, Q, R ungeändert und S wechselt nur sein Zeichen, es ist also

$$T(y,\eta) = T\left(y, \frac{1}{\eta}\right)$$

und eine entsprechende Bedingung gilt für y als Function von η, ζ, was durch die oben aufgestellte Form der φ Function angedeutet sein soll.

Transformirt man in der Gleichung, durch welche T eingeführt ist, die P, Q, R, S in der Weise, dass die Argumente z, ζ, y, η einmal in z, $-\zeta$, y, $\frac{1}{y\eta}$ dann in $\sqrt{z}$, ζ, yy, $\eta\eta$ übergehen, und berücksichtigt, dass

$$\frac{p\sqrt{z}}{pyy} = \frac{r\sqrt{z}}{qyy} = \frac{q\sqrt{z}}{ryy} = \sqrt{\frac{-\log yy}{\pi}} = \sqrt{\frac{\pi}{-\log\sqrt{z}}}$$

ist, so erhält man

$$\frac{Q(z,-\zeta)}{R\left(y,\frac{1}{y\eta}\right)} = \frac{iS(z,-\zeta)}{S\left(y,\frac{1}{y\eta}\right)} = \frac{P(z,-\zeta)}{R\left(y,\frac{1}{y\eta}\right)} = \frac{R(z,-\zeta)}{Q\left(y,\frac{1}{y\eta}\right)} = y^{\frac{1}{4}}\eta^{\frac{1}{2}}\,T(y,\eta) = T\left(y,\frac{1}{y\eta}\right)$$

$$\frac{P(\sqrt{z},\zeta)}{P(yy,\eta\eta)} = \frac{R(\sqrt{z},\zeta)}{Q(yy,\eta\eta)} = \frac{Q(\sqrt{z},\zeta)}{R(yy,\eta\eta)} = \frac{iS(\sqrt{z},\zeta)}{S(yy,\eta\eta)} = 2\sqrt{\frac{\pi}{-\log yy}}\cdot T(y,\eta)^2 = T(yy,\eta\eta)$$

$$\frac{\log y}{\pi} = \frac{\pi}{\log z} = \varphi[(\log\eta)^2, (\log\zeta)^2] = \varphi[(\log\eta)^2, (\pi i + \log\zeta)^2]$$

$$\frac{\log yy}{\pi} = \frac{\pi}{\log\sqrt{z}} = 2\varphi[(\log\eta)^2, \log\zeta)^2] = \varphi[(\log\eta\eta)^2, (\log\zeta)^2]$$

und daher

$$T(y,\eta) = \sqrt{\frac{-\log y}{\pi}}\,.\,e^{\frac{(\log\eta)^2}{4\log y}}$$

$$\frac{\log y}{\pi} = \frac{\pi}{\log z} = \pm i.\frac{\log\eta}{\log\zeta}$$

Worin das Vorzeichen der Quadratwurzel so zu nehmen, dass der reelle Theil derselben positiv wird, das Vorzeichen von $\pm i\frac{\log\eta}{\log\zeta}$ aber so, dass der reelle Theil dieses Ausdrucks negativ wird.]

25.

[Aus den Functionalgleichungen für P, Q, R, S, welche bei der Verwandlung des zweiten Arguments η in seinen reciproken Werth, bei der Zeichenänderung desselben und bei der Multiplication desselben mit dem ersten Argument y Statt finden, so wie aus den bekannten Werthen der Functionen für $\eta = 1$ oder auch aus der in Art. 21 für die allgemeinen Functionen aufgestellten partiellen Differentialgleichung folgt, dass wenn P, Q, R, S sich in Reihen nach ganzen wachsenden Potenzen von $y^{\frac{1}{4}}$ und $\eta^{\frac{1}{2}}$ entwickeln lassen, diese

$$P(y,\eta) = 1 + y(\eta + \eta^{-1}) + y^4(\eta^2 + \eta^{-2}) + y^9(\eta^3 + \eta^{-3}) + y^{16}(\eta^4 + \eta^{-4}) + + .$$

$$Q(y,\eta) = 1 - y(\eta + \eta^{-1}) + y^4(\eta^2 + \eta^{-2}) - y^9(\eta^3 + \eta^{-3}) + y^{16}(\eta^4 + \eta^{-4}) - + .$$

$$R(y,\eta) = y^{\frac{1}{4}}(\eta^{\frac{1}{2}} + \eta^{-\frac{1}{2}}) + y^{\frac{9}{4}}(\eta^{\frac{3}{2}} + \eta^{-\frac{3}{2}}) + y^{\frac{25}{4}}(\eta^{\frac{5}{2}} + \eta^{-\frac{5}{2}}) + y^{\frac{49}{4}}(\eta^{\frac{7}{2}} + \eta^{-\frac{7}{2}}) + + .$$

$$S(y,\eta) = y^{\frac{1}{4}}(\eta^{\frac{1}{2}} - \eta^{-\frac{1}{2}}) - y^{\frac{9}{4}}(\eta^{\frac{3}{2}} - \eta^{-\frac{3}{2}}) + y^{\frac{25}{4}}(\eta^{\frac{5}{2}} - \eta^{-\frac{5}{2}}) - y^{\frac{49}{4}}(\eta^{\frac{7}{2}} - \eta^{-\frac{7}{2}}) + - .$$

sein müssen.

Dass durch die Reihen P, Q multiplicirt in den Grenzwerth $\sqrt{H}$ die Grössen $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$ dargestellt werden, auf welche der von Gauss benutzte am Schluss des Art. 18 wiedergegebene Algorithmus sich bezieht, ist im handschriftlichen Nachlasse als besonderer Lehrsatz ausgesprochen und zugleich bemerkt, dass]

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} U = \frac{y^{\frac{1}{8}} \sin \tfrac{1}{2} u - y^{\frac{9}{8}} \sin \tfrac{3}{2} u + y^{\frac{25}{8}} \sin \tfrac{5}{2} u - y^{\frac{49}{8}} \sin \tfrac{7}{2} u + \ldots}{y^{\frac{1}{8}} \cos \tfrac{1}{2} u + y^{\frac{9}{8}} \cos \tfrac{3}{2} u + y^{\frac{25}{8}} \cos \tfrac{5}{2} u + y^{\frac{49}{8}} \cos \tfrac{7}{2} u + \ldots}$$

$$\operatorname{tang} U' = \frac{y^{\frac{1}{4}} \sin u - y^{\frac{9}{4}} \sin 3u + y^{\frac{25}{4}} \sin 5u - y^{\frac{49}{4}} \sin 7u + \ldots}{y^{\frac{1}{4}} \cos u + y^{\frac{9}{4}} \cos 3u + y^{\frac{25}{4}} \cos 5u + y^{\frac{49}{4}} \cos 7u + \ldots}$$

$$\operatorname{tang} 2U'' = \frac{y^{\frac{1}{2}} \sin 2u - y^{\frac{9}{2}} \sin 6u + y^{\frac{25}{2}} \sin 10u - y^{\frac{49}{2}} \sin 14u + \ldots}{y^{\frac{1}{2}} \cos 2u + y^{\frac{9}{2}} \cos 6u + y^{\frac{25}{2}} \cos 10u + y^{\frac{49}{2}} \cos 14u + \ldots}$$

[wird. Für den Satz, dass die Reihen P, Q den Functionalgleichungen genügen, welche den besprochenen Algorithmus bestimmen, und welche oben in Art. 22 zusammengestellt sind, hat Gauss ausser dem Beweise, der sich auf die Verwandlung jener Reihen in unendliche Producte stützt und der in der unten folgenden Abhandlung 'hundert Theoreme über die neue Transscendente' enthalten ist, wahrscheinlich auch noch einen andern Beweis geführt, wie er sich leicht aus den oben in Art. 16 gemachten Andeutungen ergibt.]

26.

[Bezeichnen wir, abweichend von der in den vorhergehenden Artikeln befolgten Weise, die ersten Derivirten der Functionen $P(y, \eta)$, $Q(y, \eta)$, $R(y, \eta)$, $S(y, \eta)$ nach der Grösse $\log \eta$ als unabhängige Veränderliche mit P', Q', R', S' und die zweiten Derivirten nach derselben Grösse mit P'', Q'', R'', S'', ferner die ersten Derivirten der Functionen py, qy, ry nach $\log y$ als unabhängig Veränderliche mit p', q', r', so folgt aus den für a, b, c, α, β, γ, δ gefundenen Differentialgleichungen:

$$\frac{qr'-rq'}{qrp^4} = \frac{pr'-rp'}{rpq^4} = \frac{qp'-pq'}{pqr^4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{PS'-SP'}{ppQR} = \frac{QS'-SQ'}{qqPR} = \frac{RS'-SR'}{rrPQ} = \frac{QR'-RQ'}{ppPS} = \frac{PR'-RP'}{qqQS} = \frac{QP'-PQ'}{rrRS} = 1$$

$$-4\frac{Q'}{Q} = (ry)^2 . \frac{S(yy, \eta\eta)}{Q(yy, \eta\eta)} + (ryy)^2 . \frac{S(y^4, \eta^4)}{Q(y^4, \eta^4)} + (ry^4)^2 . \frac{S(y^8, \eta^8)}{Q(y^8, \eta^8)} + \ldots$$

$$\frac{P'P'-PP''}{PP} + \tfrac{1}{4} pprr \frac{RR}{PP} = \frac{Q'Q'-QQ''}{QQ} - \tfrac{1}{4} pprr \frac{SS}{QQ}$$

$$= \frac{R'R'-RR''}{RR} + \tfrac{1}{4} pprr \frac{PP}{RR} = \frac{S'S'-SS''}{SS} - \tfrac{1}{4} pprr \frac{QQ}{SS}$$

$$= -\frac{q'}{q} = \tfrac{1}{8} \{ (ry)^4 + 2(ryy)^4 + 4(ry^4)^4 + 8(ry^8)^4 + \ldots \}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}P}{(\mathrm{d}\log\eta)^2} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\log y}\,,$$

welch letzterer Gleichung jede der Functionen P, Q, R, S genügt. Die vorhergehende mehrfache Gleichung zwischen den ersten und zweiten Derivirten der Functionen nach der Grösse $\log\eta$ findet sich, soweit sie sich auf P und S bezieht, in GAUSS handschriftlichem Nachlasse an einer von den übrigen Untersuchungen dieser Functionen getrennten Stelle. Es sind dort P, S, p, r in einer für diese specielle Entwickelung etwas bequemeren Form als die hier benutzte durch ihre Reihen definirt, und es heisst dann,] *so wird*

$$P'P'-PP'' = -\frac{\mathrm{d}p(yy)}{\mathrm{d}\log y}\,.\,P(yy,\eta\eta) - \frac{\mathrm{d}r(yy)}{\mathrm{d}\log y}\,.\,R(yy,\eta\eta)$$

$$S'S'-SS'' = +\frac{\mathrm{d}r(yy)}{\mathrm{d}\log y}\,.\,P(yy,\eta\eta) - \frac{\mathrm{d}p(yy)}{\mathrm{d}\log y}\,.\,R(yy,\eta\eta)$$

$$PP = +p(yy)\,.\,P(yy,\eta\eta) + r(yy)\,.\,R(yy,\eta\eta)$$

$$SS = -r(yy)\,.\,P(yy,\eta\eta) + p(yy)\,.\,R(yy,\eta\eta)$$

hier ist noch zu bemerken (wovon jedoch der Beweis tiefer liegt)

$$p(yy)\,.\,\frac{\mathrm{d}r(yy)}{\mathrm{d}\log y} - r(yy)\,.\,\frac{\mathrm{d}p(yy)}{\mathrm{d}\log y} = \tfrac{1}{2}p(yy)\,.\,r(yy)\,.\,\{p(yy)^4 - r(yy)^4\}$$

also

$$\frac{P'P'-PP''}{PP} - \frac{S'S'-SS''}{SS} = -\tfrac{1}{2}\left(\frac{PP}{SS}+\frac{SS}{PP}\right).\,p(yy)\,.\,r(yy)\,.\,\{p(yy)^2 - r(yy)^2\}$$

noch findet man

$$PS'-SP' = \tfrac{1}{2}\,\{y^{\frac{1}{8}} + 3y^{\frac{9}{8}} - 5y^{\frac{25}{8}} - 7y^{\frac{49}{8}} + 9y^{\frac{81}{8}} + .-.-.\}\times$$

$$\times\{y^{\frac{1}{8}}(\eta^{\frac{1}{2}}+\eta^{-\frac{1}{2}}) - y^{\frac{9}{8}}(\eta^{\frac{3}{2}}+\eta^{-\frac{3}{2}}) - y^{\frac{25}{8}}(\eta^{\frac{5}{2}}+\eta^{-\frac{5}{2}}) + .+.-.-\}$$

Das Quadrat des zweiten Factors im andern Theile der vorstehenden Gleichung wird

$$= r\,.\,Q(y,\eta\eta) + q\,.\,R(y,\eta\eta)$$

Der erste Factor wird

$$= \{p(yy)^2 + r(yy)^2\}\sqrt[4]{\tfrac{1}{2}\{p(yy)^2 - r(yy)^2\}p(yy)ryy)}\ ?$$

Zusammen wird, reductis reducendis

$$(PS'-SP')^2 = \tfrac{1}{4}\{p(yy)^2+r(yy)^2\}\{p(yy)P(yy,\eta\eta)-r(yy)R(yy,\eta\eta)\}\times$$
$$\times\{r(yy)P(yy,\eta\eta)+p(yy)R(yy,\eta\eta)\}$$
$$= \tfrac{1}{4}\{[p(yy)^2-r(yy)^2]PP+2p(yy)r(yy)SS\}\times$$
$$\times\{2p(yy)r(yy)PP-[p(yy)^2-r(yy)^2]SS\}$$

Setzt man also

$$\eta = e^{i\varphi}$$

$$\frac{-iS}{P}\sqrt{\frac{p(yy)^2-r(yy)^2}{2p(yy)r(yy)}} = \sin\theta$$

so wird

$$d\varphi = \frac{2\,d\theta}{\sqrt{([p(yy)^2-r(yy)^2]\cos\theta^2+[p(yy)^2+r(yy)^2]\sin\theta^2)}}$$

$$\cos\theta = \frac{R}{P}\sqrt{\frac{p(yy)^2+r(yy)^2}{2p(yy)r(yy)}}$$

Media Arithmetico-Geometrica inter unitatem et sinus singulorum semigrandum.

			45	0.6544727	9.8158914	90	0.8472131	9.9279927	135	0.9615631	9.9829778
1	0.2563402	9.4088168	46	0.6597572	9.8193842	91	0.8505727	9.9297114	136	0.9632479	9.9837381
2	0.2890201	9.4609280	47	0.6649867	9.8228129	92	0.8538947	9.9314043	137	0.9648951	9.9844801
3	0.3122942	9.4945639	48	0.6701622	9.8261799	93	0.8571793	9.9330717	138	0.9665049	9.9852041
4	0.3312018	9.5200926	49	0.6752849	9.8294870	94	0.8604265	9.9347138	139	0.9680772	9.9859100
5	0.3475041	9.5409599	50	0.6803558	9.8327361	95	0.8636364	9.9363309	140	0.9696119	9.9865979
6	0.3620469	9.5587648	51	0.6853757	9.8359287	96	0.8668089	9.9379234	141	0.9711090	9.9872680
7	0.3753082	9.5743881	52	0.6903457	9.8390666	97	0.8699442	9.9394914	142	0.9725685	9.9879202
8	0.3875870	9.5883692	53	0.6952666	9.8421514	98	0.8730422	9.9410352	143	0.9739905	9.9885547
9	0.3990846	9.6010650	54	0.7001389	9.8451842	99	0.8761030	9.9425552	144	0.9753748	9.9891715
10	0.4099431	9.6127236	55	0.7049637	9.8481668	100	0.8791266	9.9440514	145	0.9767214	9.9897707
11	0.4202673	9.6235256	56	0.7097416	9.8511003	101	0.8821131	9.9455243	146	0.9780304	9.9903523
12	0.4301365	9.6336062	57	0.7144731	9.8539859	102	0.8850624	9.9469739	147	0.9793016	9.9909165
13	0.4396124	9.6430699	58	0.7191589	9.8568248	103	0.8879746	9.9484006	148	0.9805352	9 9914632
14	0.4487447	9.6519994	59	0.7237995	9.8596183	104	0.8908497	9.9498045	149	0.9817310	9.9919925
15	0.4575730	9.6604604	60	0.7283955	9.8623672	105	0.8936878	9.9511858	150	0.9828890	9.9925045
16	0.4661299	9.6685069	61	0.7329474	9.8650728	106	0.8964887	9.9525448	151	0.9840094	9.9929992
17	0.4744428	9.6761838	62	0.7374556	9.8677359	107	0.8992526	9.9538817	152	0.9850919	9.9934767
18	0.4825346	9.6835285	63	0.7419207	9.8703575	108	0.9019793	9.9551966	153	0.9861366	9.9939371
19	0.4904248	9.6905724	64	0.7463429	9.8729384	109	0.9046691	9.9564897	154	0.9871434	9.9943803
20	0.4981301	9.6973428	65	0.7507228	9.8754796	110	0.9073217	9.9577613	155	0.9881125	9.9948064
21	0.5056651	9.7038630	66	0.7550605	9.8779818	111	0.9099373	9.9590115	156	0.9890438	9.9952155
22	0.5130424	9.7101532	67	0.7593567	9.8804458	112	0.9125158	9.9602404	157	0.9899369	9.9956075
23	0.5202728	9.7162311	68	0.7636114	9.8828724	113	0.9150572	9.9614483	158	0.9907923	9.9959826
24	0.5273662	9.7221122	69	0.7678251	9.8852623	114	0.9175616	9.9626352	159	0.9916098	9.9963408
25	0.5343311	9.7278105	70	0.7719981	9.8876162	115	0.9200288	9.9638014	160	0.9923894	9.9966821
26	0.5411753	9.7333379	71	0.7761305	9.8899348	116	0.9224590	9.9649471	161	0.9931310	9.9970065
27	0.5479055	9.7387057	72	0.7802227	9.8922186	117	0.9248520	9.9660723	162	0.9938346	9.9973141
28	0.5545280	9.7439235	73	0.7842750	9.8944684	118	0.9272080	9.9671772	163	0.9945004	9.9976049
29	0.5610483	9.7490002	74	0.7882874	9.8966845	119	0.9295268	9.9682619	164	0.9951281	9.9978790
30	0.5674713	9.7539439	75	0.7922602	9.8988678	120	0.9318084	9.9693266	165	0.9957178	9.9981363
31	0.5738016	9.7587617	76	0.7961936	9.9010187	121	0.9340529	9.9703715	166	0.9962696	9.9983769
32	0.5800433	9.7634604	77	0.8000879	9.9031377	122	0.9362602	9.9713965	167	0.9967833	9.9986008
33	0.5862001	9.7680459	78	0.8039432	9.9052254	123	0.9384303	9.9724020	168	0.9972591	9.9988080
34	0.5922755	9.7725238	79	0.8077596	9.9072821	124	0.9405632	9.9733880	169	0.9976968	9.9989986
35	0.5982726	9.7768991	80	0.8115373	9.9093085	125	0.9426588	9.9743545	170	0.9980965	9.9991725
36	0.6041943	9.7811766	81	0.8152764	9.9113049	126	0.9447172	9.9753018	171	0.9984581	9.9993298
37	0.6100433	9.7853606	82	0.8189771	9.9132718	127	0.9467383	9.9762299	172	0.9987817	9.9994706
38	0.6158220	9.7894551	83	0.8226396	9.9152096	128	0.9487221	9.9771390	173	0.9990672	9.9995947
39	0.6215325	9.7934638	84	0.8262639	9.9171188	129	0.9506687	9.9780292	174	0.9993147	9.9997022
40	0.6271770	9.7973902	85	0.8298501	9.9189996	130	0.9525779	9.9789005	175	0.9995241	9.9997932
41	0.6327574	9.8012372	86	0.8333983	9.9208526	131	0.9544497	9.9797530	176	0.9996954	9.9998677
42	0.6382757	9.8050084	87	0.8369086	9.9226780	132	0.9562842	9.9805870	177	0.9998287	9.9999256
43	0.6437334	9.8087060	88	0.8403811	9.9244763	133	0.9580812	9.9814023	178	0.9999239	9.9999669
44	0.6491319	9.8123330	89	0.8438159	9.9262477	134	0.9598409	9.9821992	179	0.9999800	9.9999917
45	0.6544727	9.8158914	90	0.8472131	9.9279927	135	0.9615631	9.9829778	180	1.0000000	10.0000000

ELEGANTIORES INTEGRALIS $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^4)}}$ PROPRIETATES.

[1.]

Valorem huius integralis ab $x=0$ usque ad $x=1$ semper per $\frac{1}{2}\varpi$ designamus. Variabilem x respectu integralis per signum sin lemn denotamus, respectu vero complementi integralis ad $\frac{1}{2}\varpi$ per cos lemn. Ita ut

$$\sin\text{lemn}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^4)}}=x, \qquad \cos\text{lemn}\left(\tfrac{1}{2}\varpi-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^4)}}\right)=x$$

Variabilis x tamquam radius vector curvae, integrale autem tamquam curvae arcus respondens considerari potest, curva vero erit ea quam Lemniscatam dixerunt. Haec sufficiunt ad intelligenda quae sequuntur.

[2.]

$$1=ss+cc+sscc \quad \text{sive} \quad 2=(1+ss)(1+cc)=\left(\tfrac{1}{ss}-1\right)\left(\tfrac{1}{cc}-1\right)$$

$$s=\sqrt{\frac{1-cc}{1+cc}}, \qquad c=\sqrt{\frac{1-ss}{1+ss}}$$

$$\sin\text{lemn}(a\pm b)=\frac{sc'\pm s'c}{1\mp scs'c'}$$

$$\cos\text{lemn}(a\pm b)=\frac{cc'\mp ss'}{1\pm ss'cc'}$$

$$\sin\text{lemn}(-a)=-\sin\text{lemn}\,a, \qquad \cos\text{lemn}(-a)=\cos\text{lemn}\,a$$

$$\sin\text{lemn}\,k\varpi=0 \qquad \sin\text{lemn}(k+\tfrac{1}{2})\varpi=\pm 1$$
$$\cos\text{lemn}\,k\varpi=\pm 1 \qquad \cos\text{lemn}(k+\tfrac{1}{2})\varpi=0$$

k denotante numerum integrum quemcunque positivum seu negativum, signum superius sumendum quoties k est par, inferius quoties est impar.

[3.]

$$\sin\text{lemn}\ \varphi = s$$

$$\sin\text{lemn}\,2\varphi = sc(1+ss)\frac{2}{1+s^4} = sc(1+cc)\frac{2}{1+c^4}$$

$$\sin\text{lemn}\,3\varphi = s\,\frac{3-6s^4-s^8}{1+6s^4-3s^8}$$

$$\sin\text{lemn}\,4\varphi = 4sc(1+ss)\frac{1-5s^4-5s^8+s^{12}}{1+20s^4-26s^8+20s^{12}+s^{16}}$$

$$\sin\text{lemn}\,5\varphi = s.\frac{5-2s^4+s^8}{1-2s^4+5s^8}.\frac{1-12s^4-26s^8+52s^{12}+s^{16}}{1+52s^4-26s^8+12s^{12}+s^{16}}$$

$$\sin\text{lemn}\,n\varphi = s.\frac{n-\dfrac{n.nn-1.nn+6}{60}s^4-\dfrac{n^6-13n^4+36nn+420.n.nn+1}{10080}s^8\ldots}{1+\dfrac{n.n.nn-1}{12}s^4-\dfrac{nn.nn-1.nn-4.nn+75}{10080}s^8\ldots}$$

$$\cos\text{lemn}\ \varphi = c$$

$$\cos\text{lemn}\,2\varphi = -\frac{1-2cc-c^4}{1+2cc-c^4} = \frac{1-2ss-s^4}{1+2ss+s^4}$$

$$\cos\text{lemn}\,3\varphi = c\,\frac{1-4ss-6s^4-4s^6+s^8}{1+4ss-6s^4+4s^6+s^8}$$

$$\cos\text{lemn}\,4\varphi = \frac{1-8ss-12s^4+8s^6-38s^8-8s^{10}-12s^{12}+8s^{14}+s^{16}}{1+8ss-12s^4-8s^6-38s^8+8s^{10}-12s^{12}-8s^{14}+s^{16}}$$

[4.]

$$\text{arc}\sin\text{lemn}\,x = x+\frac{1}{2}.\frac{1}{5}x^5+\frac{1.3}{2.4}\frac{1}{9}x^9+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{13}x^{13}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\frac{1}{17}x^{17}+\ldots$$

$$\sin\text{lemn}\,\varphi = \varphi-\frac{1}{10}\varphi^5+\frac{1}{120}\varphi^9-\frac{11}{15600}\varphi^{13}+\frac{211}{3536000}\varphi^{17}-\frac{1607}{318240000}\varphi^{21}+\ldots$$

$$P\varphi = \varphi-\frac{1}{60}\varphi^5-\frac{1}{10080}\varphi^9+\frac{23}{259459200}\varphi^{13}+\frac{107}{207484333056000}\varphi^{17}+\ldots$$

$$= \varphi-\frac{2}{1.2.3.4.5}\varphi^5-\frac{36}{1\ldots.9}\varphi^9+\frac{552}{1\ldots.13}\varphi^{13}+\frac{5136}{1\ldots.17}\varphi^{17}+\frac{5146848}{1\ldots.21}\varphi^{21}\ldots$$

$$Q\varphi = 1+\frac{1}{12}\varphi^4-\frac{1}{10080}\varphi^8+\frac{17}{19958400}\varphi^{12}+\frac{283}{435891456000}\varphi^{16}\ldots$$

$$= 1+\frac{2}{1.2.3.4}\varphi^4-\frac{4}{1\ldots.8}\varphi^8+\frac{408}{1\ldots.12}\varphi^{12}+\frac{13584}{1\ldots.16}\varphi^{16}\ldots$$

$$\cos\operatorname{lemn}\varphi = 1-\varphi\varphi+\tfrac{1}{2}\varphi^4-\tfrac{3}{10}\varphi^6+\tfrac{7}{40}\varphi^8-\tfrac{61}{600}\varphi^{10}+\tfrac{71}{1200}\varphi^{12}\ldots.$$

$$\left.\begin{matrix}p\varphi\\ q\varphi\end{matrix}\right\} = 1\mp\tfrac{1}{2}\varphi\varphi-\tfrac{1}{24}\varphi^4\mp\tfrac{1}{240}\varphi^6+\tfrac{17}{40320}\varphi^8\mp\tfrac{1}{403200}\varphi^{10}+\tfrac{37}{159667200}\varphi^{12}$$
$$\pm\tfrac{113}{4151347200}\varphi^{14}+\tfrac{4171}{6974263296000}\varphi^{16}\ldots$$

Formulae pro P, Q, p, q in infinitum continuatae quavis convergentia data citius convergunt, formula autem pro $\sin\operatorname{lemn}\varphi$ diverget, si φ ponetur $>\frac{\varpi}{\sqrt{2}}$ sive $\varphi^4>\frac{\varpi^4}{4}$, formula autem pro $\cos\operatorname{lemn}\varphi$ diverget, si $\varphi>\varpi$

Einige neue Formeln die Lemniscatischen Functionen betreffend.

Es sei $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=\varphi$, oder $\varphi = x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}x^5+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{9}x^9+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{1}{13}x^{13}\ldots$

Man hat dann $\varphi\varphi = xx+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}x^6+\frac{3.7}{5.9}\cdot\frac{1}{5}x^{10}+\frac{3.7.11}{5.9.13}\cdot\frac{1}{7}x^{14}$.

Es sei $x=\sin\operatorname{lemn}\varphi$, $y=\sin\operatorname{lemn}\psi$, $z=\sin\operatorname{lemn}(\varphi+\psi)$

so hat man

$$z = \frac{x\sqrt{(1-y^4)}+y\sqrt{(1-x^4)}}{1+xxyy} = \frac{xx-yy}{x\sqrt{(1-y^4)}-y\sqrt{(1-x^4)}}$$

$$\sqrt{\frac{1-zz}{1+zz}} = \frac{-2xy+\sqrt{(1-x^4)}\sqrt{(1-y^4)}}{1+xx+yy-xxyy} = \frac{1-xx-yy-xxyy}{2xy+\sqrt{(1-x^4)}\sqrt{(1-y^4)}}$$

$$\sqrt{\frac{1-z^4}{zz}} = \frac{x(1+y^4)\sqrt{(1-x^4)}-y(1+x^4)\sqrt{(1-y^4)}}{(1+xxyy)(xx-yy)}$$

$$\sqrt{(1-z^4)} = \frac{(1-xxyy)\sqrt{(1-x^4)}\sqrt{(1-y^4)}-2xy(xx+yy)}{(1+xxyy)^2}$$

$$\sqrt{(1-zz)} = \frac{\sqrt{(1-xx)}\sqrt{(1-yy)}-xy\sqrt{(1+xx)}\sqrt{(1+yy)}}{1+xxyy}$$

$$\sqrt{(1+zz)} = \frac{\sqrt{(1+xx)}\sqrt{(1+yy)}+xy\sqrt{(1-xx)}\sqrt{(1-yy)}}{1+xxyy}$$

Die einfachste Manier $\sin \operatorname{lemn} \varphi$ in eine Reihe nach Potenzen von φ zu entwickeln scheint folgende zu sein: man hat

$$\sin \operatorname{lemn}(1+i)\varphi = \frac{(1+i)\sin \operatorname{lemn}\varphi}{\sqrt{(1-\sin \operatorname{lemn}\varphi^4)}}$$

setzt man also

$$(\sin \operatorname{lemn}\varphi)^{-2} = \varphi^{-2}(1+\alpha\varphi^4+\beta\varphi^8+\gamma\varphi^{12}\ldots.)$$

und folglich

$$(\sin \operatorname{lemn}(1+i)\varphi)^{-2} = -\tfrac{1}{2}i\varphi^{-2}(1-4\alpha\varphi^4+16\beta\varphi^8-64\gamma\varphi^{12}\ldots)$$

also

$$\begin{aligned}\sin \operatorname{lemn}\varphi^2 &= -2i(\sin \operatorname{lemn}(1+i)\varphi)^{-2}+(\sin \operatorname{lemn}\varphi)^{-2}\\ &= 5\alpha\varphi\varphi-15\beta\varphi^6+65\gamma\varphi^{10}-255\delta\varphi^{14}\ldots\end{aligned}$$

man hat also

$$(1+\alpha t+\beta t^2+\gamma t^3+\delta t^4+\ldots)(5\alpha-15\beta t+65\gamma t^2-255\delta t^3+1025\varepsilon t^4\ldots) = 1$$

hieraus

$$\begin{array}{llll}
5\alpha = 1 & \alpha = \frac{1}{5} & = \frac{1}{5} & \\
3\beta = \alpha\alpha & \beta = \frac{1}{75} & = \frac{1}{3.25} & = \frac{1}{15}\alpha \\
13\gamma = 2\alpha\beta & \gamma = \frac{2}{4875} & = \frac{2}{3.5^3.13} & = \frac{2}{65}\beta \\
51\delta = 14\alpha\gamma-3\beta\beta & \delta = \frac{1}{82875} & = \frac{1}{3.5^3.13.17} & = \frac{1}{34}\gamma \\
205\varepsilon = 50\alpha\delta-10\beta\gamma & \varepsilon = \frac{2}{6215625} & = \frac{2}{9.5^5.13.17} & = \frac{2}{75}\delta \\
819\zeta = 206\alpha\varepsilon-54\beta\delta+13\gamma\gamma & \zeta = \frac{2}{242409375} & = \frac{2}{3^3.5^5.13^2.17} & = \frac{1}{39}\varepsilon \\
3277\eta = 818\alpha\zeta-202\beta\varepsilon+38\gamma\delta & \eta = \frac{4}{19527421875} & = \frac{4}{3.5^7.13^2.17.29} & = \frac{18}{725}\zeta \\
13107\theta = 3278\alpha\eta-822\beta\zeta+218\gamma\varepsilon-51\delta\delta, & \theta = \frac{223}{44815433203125} & = \frac{223}{3^4.5^8.13^2.17^2.29} & = \frac{223}{9180}\eta
\end{array}$$

Die Grenze des Verhältnisses zweier aufeinander folgender Glieder ist

$$(2{,}6220\;.\;.)^4 : 1 = 47{,}27 : 1$$

Sehr nahe ist

$$\zeta = \frac{92}{(2\varpi)^{24}}, \qquad \eta = \frac{108}{(2\varpi)^{28}}, \qquad \theta = \frac{124}{(2\varpi)^{32}}$$

$$\begin{aligned}\log P &= \log\varphi - \tfrac{1}{12}\alpha\varphi^4 - \tfrac{1}{56}\beta\varphi^8 - \tfrac{1}{132}\gamma\varphi^{12} - \tfrac{1}{240}\delta\varphi^{16} - \tfrac{1}{380}\varepsilon\varphi^{20} - \tfrac{1}{552}\zeta\varphi^{24}\ldots \\ &= \log\varphi - \tfrac{1}{60}\varphi^4 - \tfrac{1}{4200}\varphi^8 - \tfrac{1}{321750}\varphi^{12} - \tfrac{1}{19890000}\varphi^{16} - \tfrac{1}{1180968750}\varphi^{20} \\ &\qquad - \tfrac{22}{1756255921875}\varphi^{24} - \ldots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log\sin\operatorname{lemn}\varphi &= \log\varphi - \tfrac{3}{6}\alpha\varphi^4 + \tfrac{7}{28}\beta\varphi^8 - \tfrac{33}{66}\gamma\varphi^{12} + \tfrac{127}{120}\delta\varphi^{16} - \tfrac{513}{190}\varepsilon\varphi^{20} + \tfrac{2047}{276}\zeta\varphi^{24}\ldots \\ &= \log\varphi - \tfrac{1}{10}\varphi^4 + \tfrac{1}{300}\varphi^8 - \tfrac{1}{4875}\varphi^{12} + \tfrac{127}{9945000}\varphi^{16} - \tfrac{3}{3453125}\varphi^{20} \\ &\qquad + \tfrac{89}{1454456250}\varphi^{24} - \ldots\end{aligned}$$

Die Coëfficienten α, β, γ u. s. f. lassen sich auch vermittelst folgender Gleichung bestimmen

$$1 + \alpha t + \beta tt + \gamma t^3 + \ldots = \left(1 + \tfrac{3}{2.3}\alpha t + \tfrac{7}{8.7}\beta tt + \tfrac{33}{32.11}\gamma t^3 + \tfrac{127}{128.15}\delta t^4 \ldots\right)^2$$

Die bequemste Art $\log\cos\operatorname{lemn}\varphi$ in eine Reihe zu entwickeln ist folgende. Es ist

$$\frac{d\log\cos\operatorname{lemn}\varphi}{d\varphi} = -\frac{2\,d\varphi}{d\log\sin\operatorname{lemn}\varphi} = -(1-i)\sin\operatorname{lemn}(1+i)\varphi$$

hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned}\log\cos\operatorname{lemn}\varphi &= -\varphi\varphi - \tfrac{2}{15}\varphi^6 - \tfrac{2}{75}\varphi^{10} - \tfrac{44}{6825}\varphi^{14} - \tfrac{422}{248625}\varphi^{18} - \tfrac{6428}{13673375}\varphi^{22} \\ &\qquad - \tfrac{6044}{44890625}\varphi^{26} - \tfrac{20824792}{527240390625}\varphi^{30} - \ldots\end{aligned}$$

$$P\frac{d^4P}{d\varphi^4} - 4\frac{dP}{d\varphi}\cdot\frac{d^3P}{d\varphi^3} + 3\left(\frac{ddP}{d\varphi^2}\right)^2 = 2PP$$

$$\begin{aligned}P\varphi &= \varphi - \tfrac{2}{1\ldots5}\varphi^5 - \tfrac{36}{1\ldots9}\varphi^9 + \tfrac{552}{1\ldots13}\varphi^{13} + \tfrac{5136}{1\ldots17}\varphi^{17} + \tfrac{5146848}{1\ldots21}\varphi^{21} - \ldots \\ &= \varphi - \tfrac{1}{4.3.5}\varphi^5 - \tfrac{1}{32.9.5.7}\varphi^9 + \tfrac{23}{128.81.25.7.11.13}\varphi^{13} + \tfrac{107}{2048.243.125.49.11.13.17}\varphi^{17} \\ &\qquad + \tfrac{23.37}{8192.729.625.49.11.13.17.19}\varphi^{21} - \ldots\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P\psi\varpi = &+2.6220575\,\psi \\
&-2.0656648\,\psi^5 \\
&-0.5811918\,\psi^9 \\
&+0.0245475\,\psi^{13} \\
&+0.0001890\,\psi^{17} \\
&+0.0000620\,\psi^{21}
\end{aligned}
$$

$$P\tfrac{1}{2}\varpi = +1.2453446 = \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}\,.\,e^{\frac{1}{8}\pi}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathrm{d}\log Q}{\mathrm{d}\varphi^2} = \frac{PP}{QQ}$$

Die Halbirung geschieht sehr bequem so

$$
\begin{aligned}
\cos\operatorname{lemn}\varphi &= \operatorname{tang} u \\
\sin\operatorname{lemn}\varphi &= \sqrt{\cos 2u} \\
\cos\operatorname{lemn}\varphi &= \sqrt{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(45^0+u)} \\
\sin\operatorname{lemn}\varphi &= \sqrt{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(45^0-u)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin\operatorname{lemn}(\varphi+i\psi) &= r(\cos v+i\sin v) \\
\sin\operatorname{lemn}\varphi^2 &= \operatorname{tang}\Phi \\
\sin\operatorname{lemn}\psi^2 &= \operatorname{tang}\Psi \\
r &= \sqrt{\operatorname{tang}(\Phi+\Psi)} \\
\operatorname{tang} v &= \sqrt{\frac{\operatorname{tang} 2\Psi}{\operatorname{tang} 2\Phi}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin\operatorname{lemn}(\varphi+\psi) &= \frac{\sqrt{(\cos 2\Phi\sin 2\Psi)}+\sqrt{(\sin 2\Phi\cos 2\Psi)}}{\cos(\Phi-\Psi)\,.\,\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sin(\Psi-\Phi)\,.\,\sqrt{2}}{\sqrt{(\cos 2\Phi\sin 2\Psi)}-\sqrt{(\sin 2\Phi\cos 2\Psi)}}
\end{aligned}
$$

Es sei

$$\sin\operatorname{lemn} A = x,\qquad \sin\operatorname{lemn} B = y,\qquad \sin\operatorname{lemn}\frac{A+B}{1+i} = z$$

so ist

$$
\begin{aligned}
(1+i)z &= \frac{\sqrt{(1+xx)(1-yy)}-\sqrt{(1-xx)(1+yy)}}{x-y} \\
\frac{1-i}{z} &= \frac{\sqrt{1+xx)(1-yy)}+\sqrt{(1-xx)(1+yy)}}{x+y}
\end{aligned}
$$

$$\frac{\sin\operatorname{lemn}\dfrac{A-B}{1+i}}{\sin\operatorname{lemn}\dfrac{A+B}{1+i}}=\frac{\sin\operatorname{lemn}A-\sin\operatorname{lemn}B}{\sin\operatorname{lemn}A+\sin\operatorname{lemn}B}$$

$$pp=QQ-PP, \qquad qq=QQ+PP$$

$$P(a-b).Q(a+b)=Pa.Qa.\sqrt{(Qb^4-Pb^4)}-Pb.Qb.\sqrt{(Qa^4-Pa^4)}$$
$$P(a-b).P(a+b)=Pa^2.Qb^2-Qa^2.Pb^2$$
$$Q(a-b).Q(a+b)=Pa^2.Pb^2+Qa^2.Qb^2$$

$$q(a-b).q(a+b)=pa^2.Pb^2+qa^2.Qb^2$$
$$=pb^2.Pa^2+qb^2.Qa^2$$

$$q(a-b).Q(a+b)=qa.qb.Qa.Qb-pa.pb:Pa.Pb$$
$$q(a-b).P(a+b)=qa.pb.Pa.Qb+pa.qb.Qa.Pb$$

$$P\varphi=P$$
$$Q\varphi=Q$$
$$p\varphi=\sqrt{(QQ-PP)}$$
$$q\varphi=\sqrt{(QQ+PP)}$$

$$P2\varphi=2PQ\sqrt{(Q^4-P^4)}$$
$$Q2\varphi=Q^4+P^4$$
$$p2\varphi=Q^4-2QQPP-P^4$$
$$q2\varphi=Q^4+2QQPP+P^4$$

$$P3\varphi=3Q^8P-6Q^4P^5-P^9$$
$$Q3\varphi=Q^9+6Q^5P^4-3QP^8$$
$$p3\varphi=\sqrt{(QQ-PP)}.(Q^8-4Q^6PP-6Q^4P^4-4QQP^6+P^8)$$
$$q3\varphi=\sqrt{(QQ+PP)}.(Q^8+4Q^6PP-6Q^4P^4+4QQP^6+P^8)$$

$$P4\varphi=4PQ\sqrt{(Q^4-P^4)}.(Q^{12}-5Q^8P^4-5Q^4P^8+P^{12})$$
$$Q4\varphi=Q^{16}+20Q^{12}P^4-26Q^8P^8+20Q^4P^{12}+P^{16}$$
$$p4\varphi=Q^{16}-8Q^{14}PP-12Q^{12}P^4-8Q^{10}P^6+38Q^8P^8+8Q^6P^{10}-12Q^4P^{12}+8QQP^4+P^{16}$$
$$q4\varphi=Q^{16}+8Q^{14}PP-12Q^{12}P^4+8Q^{10}P^6+38Q^8P^8-8Q^6P^{10}-12Q^4P^{12}-8QQP^4+P^{16}$$

$$\frac{Qn\varphi}{Q\varphi^{nn}} = 1 + \tfrac{1}{12}(n^4 - nn)\left(\frac{P\varphi}{Q\varphi}\right)^4 - \tfrac{1}{10080}(n^8 + 70n^6 - 371n^4 + 300nn)\left(\frac{P\varphi}{Q\varphi}\right)^8$$
$$+ \tfrac{1}{19958400}(17n^{12} + 165n^{10} + 4191n^8 - 106865n^6 + 426492n^4 - 324000nn).\left(\frac{P\varphi}{Q\varphi}\right)^{12}$$
$$= 1 + \tfrac{1}{12}nn(n-1)\left(\frac{P\varphi}{Q\varphi}\right)^4 - \tfrac{1}{10080}nn(nn-1)(nn-4)(nn+75)\left(\frac{P\varphi}{Q\varphi}\right)^8$$
$$+ \tfrac{1}{19958400}nn(nn-1)(nn-4)(nn-9)(17n^4 + 403nn + 9000).\left(\frac{P\varphi}{Q\varphi}\right)^{12}$$

$$Pi\varphi = iP\varphi$$
$$Qi\varphi = Q\varphi$$
$$pi\varphi = q\varphi$$
$$qi\varphi = p\varphi$$

$$P(1+i)\varphi = (1+i)PQ$$
$$Q(1+i)\varphi = \sqrt{(Q^4 - P^4)} = pq$$
$$p(1+i)\varphi = QQ - iPP$$
$$q(1+i)\varphi = QQ + iPP$$

$$P(2+i)\varphi = (2+i)PQ^4 - iP^5$$
$$Q(2+i)\varphi = Q^5 - (1-2i)QP^4$$
$$p(2+i)\varphi = \sqrt{(QQ+PP)}.\{Q^4 - (2+2i)QQPP + P^4\}$$
$$q(2+i)\varphi = \sqrt{(QQ-PP)}.\{Q^4 + (2+2i)QQPP + P^4\}$$

$$P(3+i)\varphi = (3+i)PQ^3 - (2+6i)P^5Q^5 + (3+i)P^9Q$$
$$Q(3+i)\varphi = \sqrt{(Q^4 - P^4)}.\{Q^8 + (2+8i)P^4Q^4 + P^8\}$$
$$p(3+i)\varphi = Q^{10} - (4-3i)Q^8PP - (2-4i)Q^6P^4 + (4+2i)Q^4P^6 - (3+4i)QQP^8 - iP^{10}$$
$$q(3+i)\varphi = Q^{10} + (4-3i)Q^8PP - (2-4i)Q^6P^4 - (4+2i)Q^4P^6 - (3+4i)QQP^8 + iP^{10}$$

$$P(1+2i)\varphi = (1+2i)PQ^4 - P^5$$
$$Q(1+2i)\varphi = Q^5 - (1+2i)QP^4$$
$$P(1+3i)\varphi = (1+3i)PQ^9 - (6+2i)P^5Q^5 + (1+3i)P^9Q$$
$$Q(1+3i)\varphi = Q^{10}\ \ldots$$
$$P(1+4i)\varphi = (1+4i)PQ^{16} - (20+12i)P^5Q^{12} - (10-28i)P^9Q^8 + (12-20i)P^{13}Q^4 + P^{17}$$

$$Q(1+4i)\varphi =$$

$$P(1+ni)\varphi = (1+in)PQ^{nn} - \left(\frac{nn.nn-1}{12} + \frac{n.nn-1.nn-4}{60}i\right)P^5 Q^{nn-4} +$$
$$= (1+in)PQ^{nn} - \frac{n.nn-1.1+in.n-4i}{60}P^5 Q^{nn-4}$$

Unter den Zahlen $y=x,\ 2x+1,\ 2x+i,\ 2x-1,\ 2x-i$ ist immer wenigstens eine (oder drei oder alle), die die Auflösung der Congruenz $1-y^4 \equiv zz$ nach irgend einem Modulus möglich macht.

$$\sin\operatorname{lemn} X = x, \qquad \sin\operatorname{lemn} Y = y, \qquad \sin\operatorname{lemn} Z = z$$

$$\sin\operatorname{lemn}(X+Y+Z) = \frac{\begin{array}{r} -2xyz(xx+yy+zz-xxyyzz) + x\sqrt{(1-y^4)}.\sqrt{(1-z^4)}.(1-yyzz+xxzz+xxyy) \\ +y\sqrt{(1-x^4)}.\sqrt{(1-z^4)}.(1+yyzz-xxzz+xxyy) \\ +z\sqrt{(1-x^4)}.\sqrt{(1-y^4)}.(1+yyzz+xxzz-xxyy) \end{array}}{1+2yyzz+2xxzz+2xxyy+y^4z^4+x^4z^4+x^4y^4-2x^4yyzz-2xxy^4zz-2xxyyz^4}$$

Ist $\quad \varphi+\varphi'+\varphi''=0, \quad \sin\operatorname{lemn}\varphi = x \quad \cos\operatorname{lemn}\varphi = y$

$\sin\operatorname{lemn}\varphi' = x' \quad \cos\operatorname{lemn}\varphi' = y'$

$\sin\operatorname{lemn}\varphi'' = x'' \quad \cos\operatorname{lemn}\varphi' = y''$

so ist

$$x(y-y'y'') = x'(y'-yy'') = x''(y''-yy'), \qquad y'' = \frac{xy-x'y'}{xy'-x'y}$$

Q		
$-1+2i$	5	$1+(-1+2i)x^4$
-3	9	$1+6x^4-3x^8$
$+3+2i$	13	$1+(-11+10i)x^4+(7-4i)x^8+(3+2i)x^{12}$
$+1+4i$	17	$1+(+12-20i)x^4+(-10+28i)x^8-(20+12i)x^{12}+(1+4i)x^{16}$
5	25	$1+50x^4-125x^8+300x^{12}-105x^{16}$ $-62x^{20}+5x^{24}$

für $\qquad x^4=+1$ und $x^4=-1$

werden diese Functionen respective den Quadraten und Würfeln

von	$1-i$	-2	$-2-2i$	$-4i$	$+8$
gleich für $M=$	5	9	13	17	25

$$Q(a+bi)\varphi = Q^{aa+bb} + \tfrac{1}{12}\{(a+bi)^4-(aa+bb)\}Q^{aa+bb-4}P^4$$
$$-\tfrac{1}{10080}\{(a+bi)^8+70(a+bi)^4(aa+bb)-35(aa+bb)^2-336(a+bi)^4+300(aa+bb)\}.$$
$$.Q^{aa+bb-8}P^8\ldots$$

413

DE CURVA LEMNISCATA.

1.

Posito integrali $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^4)}}$, a $x=0$ usque ad $x=s$, $=\varphi$, dicimus s sinum lemniscaticum ipsius φ, $s = \sin \operatorname{lemn} \varphi$.

2.

Valor integralis ab $x=0$ usque ad $x=1$ est $=1.3110287771\ 4605987$ secundum Stirling, qui valor a nobis usque ad figuram undecimam verus in ventus est, utentibus formula: $\operatorname{arc} \sin \operatorname{lemn} \frac{7}{23} + 2 \operatorname{arc} \sin \operatorname{lemn} \frac{1}{2}$ (Euler habet 1.311031). Potestates huius numeri, cuius duplum semper per ϖ designabimus, has invenimus

1	1.3110287771	4605990680	320.7
2	1.7187964545	0509311.7	
4	2.9542612520	1927863.4	
5	3.8731215170	0712625 4	
6	5.0777737656	5251025.3	
8	8.7276595451	8251569.0	
9	11.4422128208	59	
12	25.7837864151	41749	
13	33.8032859402	5	

$$\log \text{brigg} \tfrac{1}{2}\varpi = 0.1176122226 \quad 9692.2$$
$$\log \text{hyp} \tfrac{1}{2}\varpi = 0.2708121550 \quad 7159155410 \quad 6425$$
$$\log \text{hyp}\ \varpi = 0.9639593356 \quad 3153686352 \quad 36577$$

Sinum lemniscaticum ipsius $(\frac{1}{2}\varpi - a)$ cosinum lemniscaticum ipsius a dicemus.

3.

Aequationis

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} + \frac{dy}{\sqrt{(1-y^4)}} = 0$$

integrale completum invenitur hoc

$$\frac{x\sqrt{\frac{1-yy}{1+yy}} + y\sqrt{\frac{1-xx}{1+xx}}}{1 - xy\sqrt{\frac{1-xx}{1+xx}\,\frac{1-yy}{1+yy}}} = C$$

Sed eiusdem aequat. integrale est

$$\text{arc sin lemn}\, x + \text{arc sin lemn}\, y = c$$

unde sequitur C esse functionem ipsius c. Ut appareat qualis, ponamus $y = 0$, tum fit $C = x$, $c = \text{arc sin lemn}\, x$, quare erit $c = \text{arc sin lemn}\, C$, sive $C = \text{sin lemn}\, c$. Hinc si $\text{sin lemn}\, p = x$, $\text{sin lemn}\, q = y$, erit

$$\text{sin lemn}\,(p+q) = \frac{x\sqrt{\frac{1-yy}{1+yy}} + y\sqrt{\frac{1-xx}{1+xx}}}{1 - xy\sqrt{\frac{1-xx}{1+xx}\,\frac{1-yy}{1+yy}}}$$

Hinc posito $p = \frac{1}{2}\varpi$, $q = -a$, fit propter

$$\text{sin lemn}\,(-a) = -\text{sin lemn}\, a, \qquad \text{sin lemn}\, \tfrac{1}{2}\varpi = 1$$

$$\text{cos lemn}\, a = \sqrt{\frac{1 - \text{sin lemn}\, a^2}{1 + \text{sin lemn}\, a^2}}$$

Forma autem praecedens transit in hanc

$$\sin \operatorname{lemn}(p \pm q) = \frac{\sin \operatorname{lemn} p \cos \operatorname{lemn} q \pm \sin \operatorname{lemn} q \cos \operatorname{lemn} p}{1 \mp \sin \operatorname{lemn} p \sin \operatorname{lemn} q \cos \operatorname{lemn} p \cos \operatorname{lemn} q}$$

$$\cos \operatorname{lemn}(p \pm q) = \frac{\cos \operatorname{lemn} p \cos \operatorname{lemn} q \mp \sin \operatorname{lemn} p \sin \operatorname{lemn} q}{1 \pm \sin \operatorname{lemn} p \sin \operatorname{lemn} q \cos \operatorname{lemn} p \cos \operatorname{lemn} q}$$

[Spätere Bemerkung:]

I. $$\alpha + \beta + \gamma = 180^0 \, [= \varpi]$$

Setzt

$$\begin{aligned} \sin \operatorname{lemn} \alpha &= \operatorname{tang} a, & \cos \operatorname{lemn} \alpha &= \cos A \\ \sin \operatorname{lemn} \beta &= \operatorname{tang} b, & \cos \operatorname{lemn} \beta &= \cos B \\ \sin \operatorname{lemn} \gamma &= \operatorname{tang} c, & \cos \operatorname{lemn} \gamma &= \cos C \end{aligned}$$

so sind a, b, c, A, B, C Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks, wo

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = \sqrt{2}$$

II. $$\alpha + \beta + \gamma = 90^0 \, [= \tfrac{1}{2}\varpi]$$

Setzt

$$\begin{aligned} \sin \operatorname{lemn} \alpha &= \cos a, & \cos \operatorname{lemn} \alpha &= -\operatorname{tang} A \\ \sin \operatorname{lemn} \beta &= \cos b, & \cos \operatorname{lemn} \beta &= -\operatorname{tang} B \\ \sin \operatorname{lemn} \gamma &= \cos c, & \cos \operatorname{lemn} \gamma &= -\operatorname{tang} C \end{aligned}$$

so sind wieder a, b, c, A, B, C Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks, in welchem

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

[4.]

Si valores $s \, [= \sin \frac{\pi}{\varpi} \varphi]$, qui reddunt ipsum $\sin \operatorname{lemn} \varphi = 0$ secundum regulas notas productum infinitum generare concipiuntur, nec non valores ipsius s, qui reddunt ipsum $\sin \operatorname{lemn} \varphi = \infty$, quorum primum sit $P\varphi$, secundum $Q\varphi$, permissum erit (id quod rigorose demonstrare possumus) ponere

$$\sin \operatorname{lemn} \varphi = \frac{P\varphi}{Q\varphi}$$

erit vero

$$P\varphi = \alpha s\left(1+\frac{4ss}{(e^{\pi}-e^{-\pi})^2}\right)\left(1+\frac{4ss}{(e^{2\pi}-e^{-2\pi})^2}\right)\left(1+\frac{4ss}{(e^{3\pi}-e^{-3\pi})^2}\right)\ldots$$

$$Q\varphi = \left(1-\frac{4ss}{(e^{\frac{1}{2}\pi}+e^{-\frac{1}{2}\pi})^2}\right)\left(1-\frac{4ss}{(e^{\frac{3}{2}\pi}+e^{-\frac{3}{2}\pi})^2}\right)\left(1-\frac{4ss}{(e^{\frac{5}{2}\pi}+e^{-\frac{5}{2}\pi})^2}\right)\ldots$$

$$\alpha = \frac{\varpi}{\pi}$$

Simili modo positis

$$p\varphi = c\left(1-\frac{4ss}{(e^{\pi}+e^{-\pi})^2}\right)\left(1-\frac{4ss}{(e^{2\pi}+e^{-2\pi})^2}\right)\left(1-\frac{4ss}{(e^{3\pi}+e^{-3\pi})^2}\right)\ldots$$

$$q\varphi = \left(1+\frac{4ss}{(e^{\frac{1}{2}\pi}-e^{-\frac{1}{2}\pi})^2}\right)\left(1+\frac{4ss}{(e^{\frac{3}{2}\pi}-e^{-\frac{3}{2}\pi})^2}\right)\left(1+\frac{4ss}{(e^{\frac{5}{2}\pi}-e^{-\frac{5}{2}\pi})^2}\right)\ldots$$

erit

$$\cos \operatorname{lemn} \varphi = \frac{p\varphi}{q\varphi}$$

[5.]

$$\sqrt[4]{2}\,.\,P(\varphi+\tfrac{1}{2}\varpi) = p\varphi$$
$$\sqrt[4]{2}\,.\,Q(\varphi+\tfrac{1}{2}\varpi) = q\varphi$$

$$p(\varphi+\tfrac{1}{2}\varpi) = -\sqrt[4]{2}\,.\,P\varphi$$
$$q(\varphi+\tfrac{1}{2}\varpi) = \sqrt[4]{2}\,.\,Q\varphi$$

$$Pi\psi\varpi = ie^{\pi\psi\psi}P\psi\varpi$$
$$Qi\psi\varpi = e^{\pi\psi\psi}Q\psi\varpi$$
$$pi\psi\varpi = e^{\pi\psi\psi}q\psi\varpi$$
$$qi\psi\varpi = e^{\pi\psi\psi}p\psi\varpi$$

[werden die an einem andern Orte untersuchten Reihen Seite 405 d. B.

$$\varphi - \tfrac{1}{60}\varphi^5 - \tfrac{1}{10080}\varphi^9 + \ldots$$
$$1 + \tfrac{1}{12}\varphi^4 - \tfrac{1}{10080}\varphi^8 + \ldots$$
$$1 - \tfrac{1}{2}\varphi\varphi - \tfrac{1}{24}\varphi^4 - \ldots$$
$$1 + \tfrac{1}{2}\varphi\varphi - \tfrac{1}{24}\varphi^4 + \ldots$$

resp. mit $\mathfrak{P}\varphi$, $\mathfrak{Q}\varphi$, $\mathfrak{p}\varphi$, $\mathfrak{q}\varphi$ bezeichnet, so ist:]

$$\mathfrak{P}\psi\varpi = e^{\frac{1}{2}\pi\psi\psi}P\psi\varpi \qquad \mathfrak{p}\psi\varpi = e^{\frac{1}{2}\pi\psi\psi}p\psi\varpi$$
$$\mathfrak{Q}\psi\varpi = e^{\frac{1}{2}\pi\psi\psi}Q\psi\varpi \qquad \mathfrak{q}\psi\varpi = e^{\frac{1}{2}\pi\psi\psi}q\psi\varpi$$

[6.]

Ex expressionibus supra allatis sequitur

$$\sin \operatorname{lemn} \varphi = \frac{\frac{\pi}{\varpi}(e^{\frac{1}{2}\pi} - e^{-\frac{1}{2}\pi})}{e^{\frac{1}{2}\pi} - 2s + e^{-\frac{1}{2}\pi}} - \frac{\frac{\pi}{\varpi}(e^{\frac{1}{2}\pi} - e^{-\frac{1}{2}\pi})}{e^{\frac{1}{2}\pi} + 2s + e^{-\frac{1}{2}\pi}}$$

$$- \frac{\frac{\pi}{\varpi}(e^{\frac{3}{2}\pi} - e^{-\frac{3}{2}\pi})}{e^{\frac{3}{2}\pi} - 2s + e^{-\frac{3}{2}\pi}} + \frac{\frac{\pi}{\varpi}(e^{\frac{3}{2}\pi} - e^{-\frac{3}{2}\pi})}{e^{\frac{3}{2}\pi} + 2s + e^{-\frac{3}{2}\pi}}$$

$$+ \text{ etc.}$$

$$\cos \operatorname{lemn} \varphi =$$

Hinc vero sequitur

$$\sin \operatorname{lemn} \psi \varpi = \frac{\pi}{\varpi} \frac{4}{e^{\frac{1}{2}\pi} + e^{-\frac{1}{2}\pi}} \sin \psi\pi - \frac{\pi}{\varpi} \frac{4}{e^{\frac{3}{2}\pi} + e^{-\frac{3}{2}\pi}} \sin 3\psi\pi + \ldots$$

[7.]

$$\log(1 + \mu\cos\varphi) = 2\left\{\frac{\mu}{1+\sqrt{(1-\mu\mu)}}\cos\varphi - \left(\frac{\mu}{1+\sqrt{(1-\mu\mu)}}\right)^2 \frac{\cos 2\varphi}{2} + \left(\frac{\mu}{1+\sqrt{(1-\mu\mu)}}\right)^3 \frac{\cos 3\varphi}{3}\right.$$

$$\log Q\psi\varpi = -\tfrac{1}{2}\log 2 + \tfrac{1}{12}\pi$$
$$+ \frac{2}{e^{\pi} - e^{-\pi}}\cos 2\psi\pi - \tfrac{1}{2}\frac{2}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}\cos 4\psi\pi + \tfrac{1}{3}\frac{2}{e^{3\pi} - e^{-3\pi}}\cos 6\psi\pi - \ldots$$

$$\log P\psi\varpi = \tfrac{1}{2}\log 2 - \tfrac{1}{6}\pi + \log\sin\psi\pi$$
$$- \frac{2}{e^{2\pi} - 1}\cos 2\psi\pi - \tfrac{1}{2}\frac{2}{e^{4\pi} - 1}\cos 4\psi\pi - \tfrac{1}{3}\frac{2}{e^{6\pi} - 1}\cos 6\psi\pi - \ldots$$

$$\log q\psi\varpi = -\tfrac{1}{4}\log 2 + \tfrac{1}{12}\pi$$
$$- \frac{2}{e^{\pi} - e^{-\pi}}\cos 2\psi\pi - \tfrac{1}{2}\frac{2}{e^{2\pi} - e^{-2\pi}}\cos 4\psi\pi - \tfrac{1}{3}\frac{2}{e^{3\pi} - e^{-3\pi}}\cos 6\psi\pi - \ldots$$

$$\log p\psi\varpi = \tfrac{3}{4}\log 2 - \tfrac{1}{6}\pi + \log\cos\psi\pi$$
$$+ \frac{2}{e^{2\pi} - 1}\cos 2\psi\pi - \tfrac{1}{2}\frac{2}{e^{4\pi} - 1}\cos 4\psi\pi + \tfrac{1}{3}\frac{2}{e^{6\pi} - 1}\cos 6\psi\pi - \ldots$$

$$\log\sin\operatorname{lemn}\psi\varpi = \log 2 - \tfrac{1}{4}\pi + \log\sin\psi\pi$$
$$- \frac{2}{e^{\pi} - 1}\cos 2\psi\pi + \tfrac{1}{2}\frac{2}{e^{2\pi} - 1}\cos 4\psi\pi - \tfrac{1}{3}\frac{2}{e^{3\pi} - 1}\cos 6\psi\pi - \ldots$$

$$\begin{array}{rl}
\log Q\psi\pi = & -0.0847742372\ 7 \\
& +0.0865895371\ 57\ \cos 2\psi\pi \\
& -0.0018674144\ 52\ \cos 4\psi\pi \\
& +0.0000537996\ 86\ \cos 6\psi\pi \\
& -\qquad 17436\ 71\ \cos 8\psi\pi \\
& +\qquad 602\ 81\ \cos 10\psi\pi \\
& -\qquad 21\ 71\ \cos 12\psi\pi \\
& +\qquad 81\ \cos 14\psi\pi \\
& -\qquad 3\ \cos 16\psi\pi
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\log P\psi\varpi = & \log\sin\psi\pi \\
& -0.1770251853\ 2 \\
& -0.0037418731\ 98\ \cos 2\psi\pi \\
& -\qquad 34873\ 54\ \cos 4\psi\pi \\
& -\qquad 43\ 42\ \cos 6\psi\pi \\
& -\qquad 6\ \cos 8\psi\pi
\end{array}$$

[8.]

$$\sin\operatorname{lemn}\psi\varpi = \sqrt{\frac{4}{e^{\frac{1}{2}\pi}}}\cdot\frac{\sin\psi\pi - e^{-2\pi}\sin 3\psi\pi + e^{-6\pi}\sin 5\psi\pi - \ldots}{1+2e^{-\pi}\cos 2\psi\pi + 2e^{-4\pi}\cos 4\psi\pi - \ldots}$$

$$P\psi\varpi = 2^{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}\cdot\{e^{-\frac{1}{4}\pi}\sin\psi\pi - e^{-\frac{9}{4}\pi}\sin 3\psi\pi + e^{-\frac{25}{4}\pi}\sin 5\psi\pi - \ldots\}$$

$$Q\psi\varpi = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}\cdot\{1+2e^{-\pi}\cos 2\psi\pi + 2e^{-4\pi}\cos 4\psi\pi - \ldots\}$$

$$1 - 2e^{-\pi} + 2e^{-4\pi} - 2e^{-9\pi} + \ldots\ldots = \sqrt{\frac{\varpi}{\pi}}$$

$$e^{-\frac{1}{4}\pi} + e^{-\frac{9}{4}\pi} + e^{-\frac{25}{4}\pi} + \ldots\ldots\ldots = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varpi}{\pi}}$$

$$\sqrt{\frac{\varpi}{\pi}} = 0.9135791381\ 5611682140\ 724259$$

$$2e^{-\frac{1}{4}\pi} = 0.9118762555\ 3199247353\ 1842589456\ 058838833$$

$$2e^{-\frac{9}{4}\pi} = 0.0017028766\ 8561031607\ 1704906$$

$$2e^{-\frac{25}{4}\pi} = \ldots\ldots\ldots 59\ 3851399312\ 9644497731\ 18$$

$$2e^{-\frac{49}{4}\pi} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3867\ 40505991$$

$$2e^{-\pi} = 0.0864278365\ 2754449954\ 8835474343\ 4560225514$$
$$2e^{-4\pi} = 0.0000069746\ 8471241799\ 0983550387\ 96535$$
$$2e^{-9\pi} = \ldots\ldots\ldots\ldots .105109703\ 5201288$$
$$2e^{-16\pi} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .295807$$

[9.]

$$\frac{1}{\sin\operatorname{lemn}\psi\varpi} = \frac{\pi}{\varpi}\left(\frac{1}{\sin\psi\pi} - \frac{4}{e^{\pi}+1}\sin\psi\pi - \frac{4}{e^{3\pi}+1}\sin 3\psi\pi - \frac{4}{e^{5\pi}+1}\sin 5\psi\pi - \ldots\right).$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{P\psi\varpi} = \frac{\pi}{\varpi}\Big[\frac{1}{\sin\psi\pi} &- 4(e^{-2\pi} - e^{-6\pi} + e^{-12\pi} - \ldots)\sin\psi\pi\\ &- 4(e^{-4\pi} - e^{-10\pi} + e^{-18\pi} - \ldots)\sin 3\psi\pi\\ &- 4(e^{-6\pi} - e^{-14\pi} + e^{-24\pi} - \ldots)\sin 5\psi\pi\\ &- \ldots\end{aligned}$$

[10].

$$\sin\operatorname{lemn}\psi\varpi = \operatorname{tang} u\pi$$
$$\pi\,\mathrm{d}u = \varpi\cos\operatorname{lemn}\psi\varpi.\mathrm{d}\psi$$
$$\cos\operatorname{lemn}\psi\varpi = \frac{\pi}{\varpi}\left(\frac{4}{e^{\frac{1}{2}\pi}+e^{-\frac{1}{2}\pi}}\cos\psi\pi + \frac{4}{e^{\frac{3}{2}\pi}+e^{-\frac{3}{2}\pi}}\cos 3\psi\pi + \ldots\right)$$
$$u\pi = \frac{4}{e^{\frac{1}{2}\pi}+e^{-\frac{1}{2}\pi}}\sin\psi\pi + \frac{1}{3}\frac{4}{e^{\frac{3}{2}\pi}+e^{-\frac{3}{2}\pi}}\sin 3\psi\pi + \ldots$$

$$1 + 2p\cos\varphi + 2pp\cos 2\varphi + \ldots = \frac{\frac{1}{p} - p}{\frac{1}{p} + p - 2\cos\varphi}$$

$$1 - 2p\cos\varphi + 2pp\cos 2\varphi - \ldots = \frac{\frac{1}{p} - p}{\frac{1}{p} + p + 2\cos\varphi}$$

$$p\cos\varphi + p^3\cos 3\varphi + \ldots = \frac{(\frac{1}{p} - p)\cos\varphi}{(\frac{1}{p} + p)^2 - 4\cos\varphi^2}$$

$$2p\sin\varphi + \tfrac{2}{3}p^3\sin 3\varphi + \ldots = \operatorname{arc\,tang}\frac{2\sin\varphi}{\frac{1}{p} - p}$$

$$\tfrac{1}{2}u\pi = \operatorname{arc\,tang}\frac{2\sin\psi\pi}{e^{\frac{1}{2}\pi} - e^{-\frac{1}{2}\pi}} - \operatorname{arc\,tang}\frac{2\sin\psi\pi}{e^{\frac{3}{2}\pi} - e^{-\frac{3}{2}\pi}} + \ldots$$

[11.]

$$(P\psi\varpi)^2 = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}}{2^{\frac{7}{4}}\cos\frac{1}{8}\pi}\left(1+2e^{-2\pi}\cos 4\psi\pi + 2e^{-8\pi}\cos 8\psi\pi + \ldots\right)$$

$$-\frac{\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}}{2^{\frac{7}{4}}\sin\frac{1}{8}\pi}\left(2e^{-\frac{1}{2}\pi}\cos 2\psi\pi + 2e^{-\frac{9}{2}\pi}\cos 6\psi\pi + 2e^{-\frac{25}{2}\pi}\cos 10\psi\pi + \ldots\right)$$

$$(Q\psi\varpi)^2 = 2^{\frac{3}{4}}\cos\tfrac{1}{8}\pi.\sqrt{\tfrac{\pi}{\varpi}}.(1+2e^{-2\pi}\cos 4\psi\pi + \ldots$$

$$+2^{\frac{3}{4}}\sin\tfrac{1}{8}\pi.\sqrt{\tfrac{\pi}{\varpi}}.(2e^{-\frac{1}{2}\pi}\cos 2\psi\pi + \ldots$$

$$A = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}}{2^{\frac{7}{2}}\cos\frac{1}{8}\pi}, \qquad B = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}}{2^{\frac{7}{4}}\sin\frac{1}{8}\pi}$$

0.3522376226	6118372314	$= A$
0.3535519576	3585935635	$= 2Be^{-\frac{1}{2}\pi}$
0.0013155679	2352259042	$= 2Ae^{-2\pi}$
0.0000012329	5741446398	$= 2Be^{-\frac{9}{2}\pi}$
. . . .	0856752170	$= 2Ae^{-8\pi}$
. . . .	1494	$= 2Be^{-\frac{25}{2}\pi}$

[12.]

Variae Summationes serierum absconditae.

1^0 $$\left[\frac{2}{e^{\pi}+e^{-\pi}}\right]^2+\left[\frac{2}{e^{2\pi}+e^{-2\pi}}\right]^2+\left[\frac{2}{e^{3\pi}+e^{-3\pi}}\right]^2+\ldots = \frac{1}{2}\frac{\varpi\varpi}{\pi\pi}-\frac{1}{2\pi}-\frac{1}{2}$$

2^0 $$\left[\frac{2}{e^{\frac{1}{2}\pi}-e^{-\frac{1}{2}\pi}}\right]^2+\left[\frac{2}{e^{\frac{3}{2}\pi}-e^{-\frac{3}{2}\pi}}\right]^2+\left[\frac{2}{e^{\frac{5}{2}\pi}-e^{-\frac{5}{2}\pi}}\right]^2+\ldots = \frac{1}{2}\frac{\varpi\varpi}{\pi\pi}-\frac{1}{2\pi}$$

3^0 $$\left[\frac{2}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\right]^2+\left[\frac{2}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}\right]^2+\left[\frac{2}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}\right]^2+\ldots = \frac{1}{6}-\frac{1}{2\pi}$$

4^0 $$\left[\frac{2}{e^{\frac{1}{2}\pi}+e^{-\frac{1}{2}\pi}}\right]^2+\left[\frac{2}{e^{\frac{3}{2}\pi}+e^{-\frac{3}{2}\pi}}\right]^2+\left[\frac{2}{e^{\frac{5}{2}\pi}+e^{-\frac{5}{2}\pi}}\right]^2+\ldots = \frac{1}{2\pi}$$

5^0 $$\frac{2}{e^{\frac{1}{2}\pi}+e^{-\frac{1}{2}\pi}}+\frac{2}{e^{\frac{3}{2}\pi}+e^{-\frac{3}{2}\pi}}+\ldots = \frac{1}{2}\frac{\varpi}{\pi}$$

6^0

[13.]

Rechnungen zur Lemniscata gehörig.

$$\{(\sin\operatorname{lemn}\tfrac{2}{5}\varpi)^2+(\sin\operatorname{lemn}\tfrac{1}{5}\varpi)^2\}^2 = 14\sqrt{5}-30$$
$$\{(\sin\operatorname{lemn}\tfrac{2}{5}\varpi)^2-(\sin\operatorname{lemn}\tfrac{1}{5}\varpi)^2\}^2 = 10\sqrt{5}-22$$

$$\tfrac{1}{2}(\sin\operatorname{lemn}\tfrac{2}{5}\varpi)^4+\tfrac{1}{2}(\sin\operatorname{lemn}\tfrac{1}{5}\varpi)^4 = 6\sqrt{5}-13$$
$$= 0.4164078649\quad 9873817845\quad 5042012387\quad 65741$$

$$\{\tfrac{1}{2}(\sin\operatorname{lemn}\tfrac{2}{5}\varpi)^4-\tfrac{1}{2}(\sin\operatorname{lemn}\tfrac{1}{5}\varpi)^4\}^4 = 340-152\sqrt{5}$$
$$= 0.1176674200\quad 3196614580\quad 5602352846\quad 01228$$

daraus Radix

$$0.3430268503\quad 0761971797\quad 7310507555\quad 85731$$

also

$$(\sin\operatorname{lemn}\tfrac{1}{5}\varpi)^4 = 0.0733810146\quad 9111846047\quad 7731504831\quad 80010$$
$$(\sin\operatorname{lemn}\tfrac{2}{5}\varpi)^4 = 0.7594347153\quad 0635789643\quad 2352519943\quad 51472$$

$$(\sin\operatorname{lemn}\tfrac{1}{5}\varpi)^2 = 0.2708893033\quad 8999814497\quad 30710$$
$$(\sin\operatorname{lemn}\tfrac{2}{5}\varpi)^2 = 0.8714555153\quad 9155336074\quad 646029$$

$$Q\tfrac{1}{10}\varpi = \sqrt[5]{(\tfrac{3}{4}\cos\tfrac{1}{10}\pi+\tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{10}\pi)}$$
$$Q\tfrac{2}{10}\varpi = \sqrt[5]{(\tfrac{3}{4}\cos\tfrac{1}{10}\pi-\tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{10}\pi)}$$

[14.]

Lemniscatische Function.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=\varphi,\qquad \int\frac{dX}{\sqrt{(1-X^4)}}=\Phi$$

Es verhalte sich	1	x	$\sqrt{(1-xx)}$	$\sqrt{(1+xx)}$
wie	p	q	r	s
und	1	X	$\sqrt{(1-XX)}$	$\sqrt{(1+XX)}$
wie	P	Q	R	S

so verhalten sich die $\varphi+\Phi$ entsprechenden Grössen

wie	$ppPP+qqQQ$	$pqRS+rsPQ$	$prPR-qsQS$	$psPS+qrQR$
oder	$pqRS-rsPQ$	$qqPP-ppQQ$	$qrPS-psQR$	$qsPR-prQS$
oder	$prPR+qsQS$	$qrPS+psQR$	$ppRR-qqSS$ $=rrPP-ssQQ$	$2pqPQ+rsRS$
oder	$psPS-qrQR$	$qsRR+prQS$	$rsRS-2pqPQ$	$ssPP+rrQQ$ $=ppSS+qqRR$

Es sei

$$\begin{aligned}\sin\operatorname{lemn} X &= x\\ \sin\operatorname{lemn} Y &= y\\ \sin\operatorname{lemn} Z &= z\end{aligned}$$

und X, Y, Z so von einander abhängig, dass

$$X+Y+Z=0$$

Man setze

$$\int xx\,\mathrm{d}X = FX$$

und

$$FX+FY+FZ=u$$

Aus früher vorgekommenen Formeln folgt

$$\begin{aligned}xx-zz &= yz\sqrt{(1-x^4)}-xy\sqrt{(1-z^4)}\\ yy-zz &= xz\sqrt{(1-y^4)}-xy\sqrt{(1-z^4)}\\ xx-yy &= yz\sqrt{(1-x^4)}-xz\sqrt{(1-y^4)}\end{aligned}$$

Aus

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u &= \frac{xx\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^4)}}+\frac{yy\,\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^4)}}+\frac{zz\,\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^4)}}\\ 0 &= \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^4)}}+\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^4)}}+\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^4)}}\end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u &= (yy-xx)\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^4)}}+(zz-xx)\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^4)}}\\ &= xz\,\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}z-yz.\sqrt{(1-x^4)}.\left[\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^4)}}+\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^4)}}\right]\\ &= xz\,\mathrm{d}y+xy\,\mathrm{d}z+yz\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}.xyz\end{aligned}$$

also

$$u = xyz$$

Es ist folglich

$$F(a+b) = Fa + Fb - \sin\operatorname{lemn} a \,.\, \sin\operatorname{lemn} b \,.\, \sin\operatorname{lemn}(a+b)$$

Setzt man

$$Fa - \tfrac{a}{90^0} F 90^0 = Ga$$

so ist

$$G(a+b) = Ga + Gb - \sin\operatorname{lemn} a \,.\, \sin\operatorname{lemn} b \,.\, \sin\operatorname{lemn}(a+b)$$

$$Ga = \frac{\mathrm{d}\,Qa}{Qa \,.\, \mathrm{d}a}$$

[15.]

$$\frac{\varpi}{\pi} = \left\{1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 . \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1.3}{2.4}\right)^2 . \tfrac{1}{4} + \left(\tfrac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \tfrac{1}{8} + \ldots\right\} \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$\frac{\varpi}{\pi} = \left(1 + \tfrac{1.3}{4.4} . \tfrac{1}{9} + \tfrac{1.3.5.7}{4.4.8.8} . \tfrac{1}{81} + \tfrac{1.3.5.7.9.11}{4.4.8.8.12.12} . \tfrac{1}{729} + \ldots\right) \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

$$\frac{\varpi}{\pi} - \frac{2}{\varpi} = \left(\tfrac{1}{4} . \tfrac{1}{3} + \tfrac{1.3.5}{4.4.8} . \tfrac{1}{27} + \tfrac{1.3.5.7.9}{4.4.8.8.12} . \tfrac{1}{243} + \tfrac{1.3.5.7.9.11.13}{4.4.8.8.12.12.16} . \tfrac{1}{2187} + \ldots\right) \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$

[16.]

Ponendo

$$\frac{1}{\mathrm{M}(1, \cos\varphi)} = N + a\cos 2\varphi + b\cos 4\varphi + \ldots$$

erit

$N = 1.393203$	$-\frac{1}{\pi}\log(1-\cos 2\varphi) = +0.220635$
$a = 0.581803$	$+0.636620 \cos 2\varphi$
$b = 0.309601$	$+0.318310 \cos 4\varphi$
$c = 0.209449$	$+0.212207 \cos 6\varphi$
$d = 0.157960$	$+0.159155 \cos 8\varphi$
$e = 0.126704.$	$+0.127324 \cos 10\varphi$

$$N = \left(\frac{3.3.7.7.11.11.15}{2.4.6.8.10.12.14}\ldots\right)^2 = 2\frac{\varpi\varpi}{\pi\pi}$$

$$a = \tfrac{1}{2}\left(\frac{5.5}{4.6}\cdot\frac{9.9}{8.10}\cdot\frac{13.13}{12.14}\ldots\right)^2 = \frac{4}{\varpi\varpi}$$

$$b = \frac{2}{9}N$$

$$\frac{\varpi}{\sqrt{8}} = \frac{4.6.8.10.12.14}{5.5.9.\ 9.13.13}\ldots$$

$$\frac{\varpi}{2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{12}{13}\ldots$$

[17.]

$$1+\left(\tfrac{1}{2}\right)^3x^4+\left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\right)^3x^8+\left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\right)^3x^{12}+\ldots$$
$$= \left\{1+\left(\tfrac{1}{4}\right)^2x^4+\left(\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{5}{8}\right)^2x^8+\left(\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{9}{12}\right)^2x^{12}+\ldots\right\}^2$$

Demonstratio. Ponatur

$$1+\left(\tfrac{1}{4}\right)^2x^4+\left(\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{5}{8}\right)^2x^8+\ldots = t$$

eritque, posito $x(x^4-1)\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x^2}-(3x^4-1)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}+x^3t = R,\quad R = 0$

Hinc etiam

$$0 = x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+R;\quad \text{nec non}\quad 0 = 2xt\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+2\left(t+3x\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)R$$

unde fit, evolutione facta

$$0 = xx(x^4-1)\left(2t\frac{\mathrm{d}^3t}{\mathrm{d}x^3}+6\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x^2}\right)+3x(3x^4-1)\left(2t\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x^2}+2\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)$$
$$+(19x^4-1)\,2t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}+8x^3tt$$

sive ponendo $tt = u$

$$0 = xx(x^4-1)\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}+3x(3x^4-1)\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x^2}+(19x^4-1)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+8x^3u$$

cui aequationi invenitur respondere

$$u = 1+\left(\tfrac{1}{2}\right)^3x^4+\left(\tfrac{1.3}{2.4}\right)^3x^8+\ldots$$

Iam quum

$$t = \frac{\sqrt{8}}{\pi}\int\frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)(1-x^4z^4)}}$$

$z = 0$ usque ad $z = 1$, fit, pro $x = 1$,

$$t = \frac{\sqrt{8}}{\pi}\cdot\frac{\varpi}{2} = \frac{\varpi}{\pi}\sqrt{2}$$

adeoque

$$1+\left(\tfrac{1}{2}\right)^3+\left(\tfrac{1.3}{2.4}\right)^3+\left(\tfrac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3+\ldots = 2\frac{\varpi\varpi}{\pi\pi}$$

Idem alio modo

Valor seriei

$$1+\left(\tfrac{1}{2}\right)^3+\left(\tfrac{1.3}{2.4}\right)^3+\left(\tfrac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3+\ldots$$

fit

$$= \frac{4}{\pi\pi}\iint\frac{d\varphi\, d\psi}{\sqrt{(1-\cos\varphi^2\cos\psi^2)}}$$

a $\varphi = 0$ usque ad $\varphi = 90^0$ et a $\psi = 0$ usque ad $\psi = 90^0$. Faciendo itaque $\cos\varphi\cos\psi = \cos\upsilon$, idem valor fit

$$= \frac{4}{\pi\pi}\iint\frac{d\varphi\, d\upsilon}{\sqrt{(\cos\varphi^2-\cos\upsilon^2)}}$$

et quidem ab $\upsilon = 0$ usque ad $\upsilon = 90^0$ et a $\varphi = 0$ usque ad $\varphi = \upsilon$. Denique statuendo $\varphi+\upsilon = f$, $\upsilon-\varphi = g$, erit expressio nostra

$$= \frac{2}{\pi\pi}\iint\frac{df.dg}{\sqrt{\sin f\sin g}}$$

ab $g = 0$ usque ad $g = 90^0$ et a $f = g$ usque ad $f = 180^0-g$. Sed haud difficulter probatur integrale eundem valorem nancisci, si sumatur ab $f = 0$ usque ad $f = 90^0$ et a $g = 0$ usque ad $g = 90^0$, unde ipsius valor deducitur

$$= 2\frac{\varpi\varpi}{\pi\pi}$$

uti supra.

[17.]

Sammlung von Rechnungen,

vornehmlich solchen, bei denen von meinen Methoden, die Factoren grosser Zahlen zu finden, und von den WOLFRAMschen Logarithmentafeln Gebrauch gemacht ist.

Erste Rechnung für $e^{-\pi} = A$

Durch eine vorläufige Näherung war schon bekannt, dass A bis auf die 14^{te} Figur 0,0432139182 6377 sei, folglich $11.10^{10}A$ sehr genau 4753531008 $= 128.243.152827$. Es fragte sich also, ob die Zahl 152827 sich noch in einfache Factoren zerlegen lasse.

Die Division mit kleinen Primzahlen gelang nicht; man musste also zu künstlichen Methoden seine Zuflucht nehmen. Hier fand sich nun, indem man die Zahl selbst sowohl als verschiedene ihrer Vielfache mit den nächsten Quadraten verglich, unter andern, dass

$$552^2 \equiv 950, \qquad 677^2 \equiv 152 \quad \text{mod. } 152827$$

woraus man sogleich schloss, dass

$$1104^2 \equiv 3800, \qquad 3385^2 \equiv 3800$$

und mithin die Zahl 152827 keine Primzahl sei, weil sonst die Quadrate zweier Zahlen, die beide kleiner als die Hälfte von jener sind, unmöglich congruent sein könnten (*Disqu. Arr. art.* .). Durch die in diesem Werke gelehrte Methode (*art.*) fanden sich nun die Factoren der Zahl 152827, nemlich 67.2281.

Man war also gewiss, dass sich der hyperbolische Logarithme von

$$N = 128.243.67.2281.11^{-1}.10^{-10}$$

aus den vorhandenen Tafeln bestimmen lasse und zugleich dass derselbe von dem gegebenen Logarithmen, $-\pi$, nur in der 10^{ten} Decimalstelle abweichen könne. Die zu dieser Differenz gehörige Absolutzahl brauchte also blos berechnet und mit N multiplicirt zu werden, um A zu erhalten,

$$A = Ne^{\log 11 + 10 \log 10 - \log 2281 - \log 2144 - \log 972 - \pi} = Ne^{\delta}$$

Durch die WOLFRAMsche Tafel war:

[Zur Abkürzung $\delta - \log(1+2135.10^{-13}) = \delta'$, $\delta' - \log(1+1443.10^{-17}) = \delta''$ gesetzt.]

10 log 10						
$=$	23,0258509299	4045684017	9914546843	6420760110	14886288	
log 11 $=$	2,3978952727	9837054406	1943577965	1292998217	06853937	
	25,4237462027	3882738424	1858124808	7713758327	21740225	
l.2281 $=$	7,7323692222	8438803081	0466064812	2168095619	53159812	
l.2144 $=$	7,6704285221	9069260675	6232603654	6055909444	33575023	
l.972 $=$	6,8793558044	6043907581	0690427528	9816593884	53057834	
$\pi =$	3,1415926535	8979323846	2643383279	5028841971	69399375	
	25,4237462025	2531295184	0032479275	3069440920	09192044	
$\delta =$	0,.........2	1351443240	1825645533	4644317407	12548181	
$\delta' =$	0,..........	...1443242	4616770530	2204949495	65316893	
$\delta'' =$	0,..........	242	4616770634	3329449495	6431533124	
$\frac{1}{2}\delta''\delta'' =$	0,..........	....	....	29393	8324222063	
$e^{\delta''} =$	1,..........	242	4616770634	3329478889	4755755187	
$e^{\delta'} =$	1,..........	...1443242	4616770634	3679351089	4781097632	
$e^{\delta} =$	1,.........2	1351443242	4619851957	0236156393	8536512211	
$11A =$	0,4753531009	0149474751	8595108889	0081240330	0920791693	5
$A =$	0,0432139182	6377224977	4417737171	7280112757	2810981063	

Um sich von der Richtigkeit dieses Resultats durch eine zweite Rechnung zu versichern, multiplicirte man die Zahl A durch 599.10^8, wodurch sich ergab 2588513703,999957 . ., so dass man also eine sehr leichte Rechnung übrig hatte, wenn die Zahl 2588513704 sich in Factoren kleiner als 10000 zerlegen liess. Nach angestelltem Versuch fand sich $2588513704 = 8.7.17.2719027$. Es kam also darauf an, ob 2719027 eine Primzahl sei. Man fand, dass -1848 gewiss ein quadratischer Rest von 2719027 sein müsse, wenn diese Zahl eine Primzahl sei, und dass sie in diesem Fall *einmal* unter der Form $3xx + 616yy$ enthalten sein müsse und umgekehrt, dass sie durch diese Form entweder gar nicht oder *mehr als einmal* müsse dargestellt werden können, wenn sie zusammengesetzt sei. Allein die Exclusionsmethode lehrte, dass jene Zahl wirklich nur einmal unter der Form $3xx + 616yy$ enthalten sei, nemlich $2719027 = 3\,197^2 + 616.65^2$, woraus also mit Gewissheit folgte, dass 2719027 eine Primzahl und folglich die versuchte Methode diesmal nicht anwendbar sei.

Nach einigen andern vergeblichen Versuchen kam man endlich auf folgenden, der besser gelang. Die Zahl A multiplicirt mit 10^{14} gab 4321391826377,25 und die Zahl 4321391826375 zerfiel in die Factoren 125.81.13.32831087. Dass die Zahl 32831087 keine Primzahl sei, folgte daraus, dass sie nicht unter der Form $xx+190yy$ enthalten war; man wandte also die erste der in den *Disqui. Arr.* gelehrten Methoden darauf an, wodurch sich entdeckte, dass sie das Product aus 373.8819 sei.

Zweite Rechnung für $e^{-\pi} = A$

$59.10^9 A$ fand sich sehr genau $= 2549621178 = 54.13.3631939$. Die Zahl 3631939 zerfiel in die Factoren 1091.3329 (welche aus

$$3631939 = 40.232^2 + 19.279^2 = 40.300^2 + 19.41^2$$

gefunden waren). Also

$$59A = 702.1091.3329.10^{-9}\, e^{9\log 10 + \log 59 - \log 702 - \log 1091 - \log 3329 - \pi} = Ne^{\delta}$$

Aus WOLFRAMS Tafel fand sich [$\delta - \log(1 - 17157.10^{-14}) = \delta'$, $\frac{1}{2}\delta'\delta' + \frac{1}{6}\delta'^3 = \varepsilon$ gesetzt]

C9l.10 =	21,2767341630	5358884383	8076907840	7221315900	86602341
C.l. 59 =	5,9224625560	9428054938	3949626280	3023759366	53210670
l.702 =	6,5539334040	2581111965	6455273791	0722868232	39752589
l.1091 =	6,9948499858	3307081851	1895817110	3840806982	08318537
l.3329 =	8,1104272375	7502494295	2021653586	1576658324	67001597
π =	3,1415926535	8979323846	2643383279	5028841971	69399375
$-\delta$ =	0,.........1	7156951280	5042661888	1414250778	24285109
δ' =	0,..........	48720	9675470563	5420349120	2333831382
ε =	0,..........	....	....	1186866339	3606594227
$e^{\delta'}$ =	1,..........	48720	9675470563	6607215459	5940425609
$1-e^{\delta}$ =	0,.........1	7156951279	0324613026	9032989386	4786573955
$59A$ =	2,5496211775	6256273669	0646493131	9526652679	5847882752 6
A =	0,0432139182	6377224977	4417737171	7280112757	2810981063 6

Zugleich kann man aus der Übereinstimmung beider Rechnungen schliessen, dass die Logarithmen von 2, 3, 5, 11, 13, 59, 67, 1091, 2281, 3329 in der WOLFRAMschen Tafel bis auf die letzte Figur richtig sind.

Doppelte Berechnung von $e^{-\frac{1}{4}\pi} = A$.

Erste Rechnung.

Da man durch eine schon vorher angestellte Rechnung wusste, dass der Werth von A bis auf die letzte Zifer $= 0{,}4559381277\ 6599$ sei, so war $19.131.A$ oder $2489A = 1134{,}8300000095$ oder $248900A$ sehr genau $= 113483$. Man fand $113483 = 283.401$ aus

$$113483 = 311^2 + 58.17^2 = 79^2 + 58.43^2$$

und hiemit

$$2489A = 113483.10^{-2}.e^{2\log 10 - \log 283 - \log 401 + \log 2489 - \frac{1}{4}\pi} = Ne^{\delta}$$

Aus WOLFRAMS Tafeln erhielt man

[wenn zur Abkürzung

$$\delta - \log(1 + 8428.10^{-15}) = \delta'$$

gesetzt wird]:

$\delta =$	0,..........	.842825208	2107272461	7421888198	29069513	
$\delta' =$	0,..........	25208	2142788053	7419892695	5615344103	
$\frac{1}{2}\delta'\delta' =$				317727033	5630835760	
$\frac{1}{6}\delta'^3 =$					267	
$e^{\delta'} =$	1,..........	25208	2142788053	7737619729	1246180130	
$e^{\delta} =$	1,..........	.842825208	2142790178	3220613906	2965706721	
$2489A$						
$=$	1134,8300000095	6463331037	8102578065	2249279282	5372958193	
$A =$	0,4559381277	6599623676	5921294728	0294194166	04366	

Zweite Rechnung für $e^{-\frac{1}{4}\pi} = A$

$113A$ wurde gefunden $51,52100843755$. Die Zahl 515210084352 zerfiel in die Factoren $27.131072.145583$. Endlich erhielt man aus

$$4.145583 = 437^2 + 163.49^2 = 763^2 + 163$$

$145583 = 197.739$ mithin

$$113A = 96^3.788.739.10^{-10}.e^{10\log 10 + \log 113 - 3\log 96 - \log 788 - \log 739 - \frac{1}{4}\pi} = Ne^{\delta}$$

[und wenn $\delta - \log(1 + 4576.10^{-15}) = \delta'$ gesetzt wird]

$\delta =$	0,..........	4575948387	0747214839	8399455217	14190720	
$-\delta' =$	0,...........	51612	8205796360	1919946163	4337976121	
$+\frac{1}{2}\delta'\delta' =$	0,			1331941624	0928492341	
$1 - e^{\delta'} =$	0,...........	51612	8205796360	0588004539	3409483780	
$e^{\delta} =$	1,..........	4575978387	1794180021	9145023046	2961445343	
$113A =$	51,5210084375	5757475454	9106304267	3243940900	3220627240	5
$A =$	0,4559381277	6599623676	5921294728	0294194166	0436523820	

$$e^{-\frac{1}{4}\pi} = 0,4559382 = 3671.54.23.10^{-7}$$

Dritte Rechnung für $e^{-\frac{1}{4}\pi} = A.$

$455938128 = 144.3166237$ Die Divisoren der Zahl 3166237 fand man, indem man die Periode der reducirten Form $(1, 1779, -1396)$ entwickelte, in welcher die Form $(-1897, 530, 1521)$ die sechste war. Hieraus

$$(11 + 28.1779)^2 \equiv 1521 = 39^2, \text{ und } 3166237 = 107.127.233$$

$$A = 455938128.10^{-9}.e^{9\log 10 - \frac{1}{4}\pi - \log 455938128} = Ne^{\delta}$$

[und $\delta - \log(1 - 513.10^{-12}) = \delta'$ gesetzt]:

$-\delta =$	0,.........5	1323578556	7221212746	8124092623	9185579000
$-\delta' =$	0,...........	..23578543	5636712701	8105102450	7737514264
$+\frac{1}{2}\delta'\delta' =$			27797	3858291971	9406911797
$-\frac{1}{6}\delta'^3 =$				21	8473957577
$1 - e^{\delta'} =$	0,...........	..23578543	5636684904	4246810500	6804560044
$1 - e^{\delta} =$	0,.........5	1323578543	5515726975	9430616940	9818422176

Berechnung von $e^{-\frac{9}{4}\pi} = A$.

Durch Näherung war bereits gefunden $A = 0{,}0008514383\ 42805$. Nun fand sich $8514383436 = 4.9.13.19.307.3119$, mithin sehr genau

$$A = 4.9.13.19.307.3119.10^{-13}$$

aus WOLFRAMS Tafel

$$13 \log 10 - \log 3119 - \log 1842 - \log 1482 - \tfrac{9}{4}\pi = \delta$$

[und

$$\delta - \log(1 - 9335.10^{-13}) = \delta', \quad \delta' - \log(1 - 285.10^{-16}) = \delta''$$

gesetzt]:

$-\delta =$	0,.........9	3352850560	8342583868	5326823995	3184946898	8
$-\delta' =$	0,..........	...2850517	2631458732	9539039720	5781872612	0
$-\delta'' =$	0,	517	2631458326	8289039720	5396053412	0
$\frac{1}{2}\delta''\delta'' =$	0,			133780	5810183616	8
$1 - e^{\delta''} =$	0,	517	2631458326	8288905939	9585869795	2
$1 - e^{\delta'} =$	0,	...2850517	2631458326	6814705974	3354407457	0
$1 - e^{\delta} =$	0,.........9	3352850517	2604848748	0300042494	7639127186	6
$A =$	0,0008514383	4280515803	5852453295	4846487994	1872486024	
						8176915

$$e^{-\frac{9}{4}\pi} \text{ satis exacte } = 4.11.13.29.3593.7^{-1}.10^{-10}$$

Ecce iam computum pro $e^{\frac{1}{2}\pi}$.

Per logarithmos brigg. invenimus praeter propter $e^{\frac{1}{2}\pi} = 4{,}810484$. Est vero $48104847 = 2293.37.7.81$ et

$$-\log 81.259.2293 + 7 \log 10 + \tfrac{1}{2}\pi$$

$=$	$-0,.....15214$	7666454820	0537824776	3190
num log $=$	$1 - 0,.....15214$	7550690316	7468363738	6798
$e^{\frac{1}{2}\pi} =$	4,8104773809	6535165547	3044648993	1536

Computus secundus pro $e^{\frac{1}{2}\pi}$.

Invenimus $48104773808 = 195497 . 13^3 . 7 . 16$ superest itaque ut utrum sit 195497 numerus non primus investigetur. Tentamus itaque aequationem

$$195497 = 16xx + \square$$

$\operatorname{Lim} x = 111$, Excl. valores $x = ---$

$$195497 = 44^2 + 193561 = 76^2 + 189721 = 356^2 + 68761 = 364^2 + 63001$$
$= 364^2 + 251^2$ quare 195497 est prim.

$$\tfrac{26905}{5593} = 3 + \tfrac{4}{7} + \tfrac{16}{17} + \tfrac{14}{47} = 4{,}8104773824\ 4\,..$$

$$\log \frac{7.799}{5.5381} + \tfrac{1}{2}\pi = \ -0{,}.........3\ 0703542806\ 9410475204\ 9155$$
$$\text{num log} = 1 - 0{,}.........3\ 0703542802\ 2275098164\ 7660$$

Computus pro $e^{-\frac{1}{2}\pi}$

$$e^{-\frac{1}{2}\pi} \text{ praeter propter} = 0{,}20787957 = 7151.19.17.9.10^{-8}$$

$$-\log 51.57.7151 + 8 \log 10 - \tfrac{1}{2}\pi$$
$$= \ -0{,}.......305\ 5019697961\ 8740193606\ 8277$$
$$\text{num log} = 1 - 0{,}.......305\ 5019651296\ 1477199011\ 4138$$

Investigatio divisorum numeri $2078795763 = 99 . 20997937{,}005$

— — —

$$20997937 = 1848 . 34^2 + 4343^2 \text{ numerus primus}$$

Computus secundus pro $e^{-\frac{1}{2}\pi}$

$$11 . e^{-\frac{1}{2}\pi} = 2{,}286675339858378$$

$$228667536 = 81 . 16 . 176441$$

$$176441 = 880xx + yy = 73 . 2417$$

$$\log \frac{11}{144.657.2417} + 8 \log 10 - \tfrac{1}{2}\pi$$
$$= -0{,}........88\ 0825474705\ 3269478285\ 7110$$

[I.]

VARIA IMPRIMIS DE INTEGRALI

$$\int \frac{du}{\sqrt{(1+\mu\mu \sin u^2)}}$$

$$\mu = \operatorname{tang} v, \qquad \frac{\pi}{M\sqrt{(1+\mu\mu)}} = \frac{\pi\cos v}{M\cos v} = \varpi, \qquad \frac{\pi}{\mu M\sqrt{(1+\frac{1}{\mu\mu})}} = \frac{\pi\cos v}{M\sin v} = \varpi'$$

$$S\psi\varpi = \frac{\pi}{\mu\varpi}\left[\frac{4\sin\psi\pi}{e^{\frac{1}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}+e^{-\frac{1}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}} - \frac{4\sin 3\psi\pi}{e^{\frac{3}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}+e^{-\frac{3}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}} + \ldots\right] = \frac{T\psi\varpi}{W\psi\varpi}$$

$$W\psi\varpi = \sqrt{M\cos v}.\left[1+e^{-\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}2\cos 2\psi\pi + e^{-4\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}2\cos 4\psi\pi + \ldots\right]$$

$$T\psi\varpi = \sqrt{\operatorname{cotg} v}.\sqrt{M\cos v}.\left[e^{-\frac{1}{4}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}2\sin\psi\pi - e^{-\frac{9}{4}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}2\sin 3\psi\pi + \ldots\right]$$

$$T\tfrac{1}{2}\varpi = \sqrt{\cos v}$$

$$\left[\ \int\frac{du}{\sqrt{(1+\mu\mu\sin u^2)}} = \varphi = \psi\varpi, \qquad S\varphi = \sin u\ \right]$$

$$(S\psi\varpi)^2 = A + 2B\left[\frac{\cos 2\psi\pi}{e^{\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}-e^{-\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}} - \frac{2\cos 4\psi\pi}{e^{2\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}-e^{-2\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}} + \frac{3\cos 6\psi\pi}{e^{3\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}-e^{-3\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}} - \ldots\right]$$

Terminus constans $(S\varphi)^2 = \frac{8\pi\pi}{\mu\mu\varpi\varpi}\cdot\frac{e^{-\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}+4e^{-4\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}+9e^{-4\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}+\ldots}{1+2e^{-\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}+2e^{-4\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}+\ldots}$

Problema. Summare seriem

$$\left[\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\right]^2+\left[\frac{1}{x^3+\frac{1}{x^3}}\right]^2+\left[\frac{1}{x^5+\frac{1}{x^5}}\right]^2+\,.\,.=\frac{\frac{1}{xx}+\frac{4}{x^8}+\frac{9}{x^{18}}+\frac{16}{x^{32}}+\,.\,.}{1+\frac{2}{xx}+\frac{2}{x^8}+\frac{2}{x^{18}}+\,.\,.}$$

$$(T\psi\varpi)^2=\frac{\cos v\sqrt{\mathrm{M}\cos v}}{2\cos\frac{1}{2}v}\left[1+2e^{-2\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 4\psi\pi+2e^{-8\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 8\psi\pi+\,.\,.\right]$$
$$-\frac{\cos v\sqrt{\mathrm{M}\cos v}}{2\sin\frac{1}{2}v}\left[2e^{-\frac{1}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 2\psi\pi+2e^{-\frac{9}{2}\frac{\varpi'\pi}{\varpi}}\cos 6\psi\pi+\,.\,.\right]$$

$$(W\psi\varpi)^2=\cos\tfrac{1}{2}v.\sqrt{\mathrm{M}\cos v}.\left[1+2e^{-2\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 4\psi\pi+2e^{-8\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 8\psi\pi+\,.\,.\right]$$
$$+\sin\tfrac{1}{2}v.\sqrt{\mathrm{M}\cos v}.\left[2e^{-\frac{1}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 2\psi\pi+2e^{-\frac{9}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 6\psi\pi+\,.\,.\right]$$

$$T(\tfrac{1}{2}\varpi-\varphi)^2=\cos v.(W\varphi^2-T\varphi^2)$$
$$W(\tfrac{1}{2}\varpi-\varphi)^2=\frac{1}{\cos v}.(\sin v^2\,T\varphi^2+\cos v^2\,W\varphi^2)$$

$$T\psi\varpi.W(\tfrac{1}{2}-\psi)\varpi=\frac{\sqrt{2\cos v}.\sqrt{\mathrm{M}\cos v}}{\sqrt[4]{\sin v}}\left[e^{-\frac{\varpi'\pi}{8\varpi}}\sin\psi\pi-e^{-\frac{9\varpi'\pi}{8\varpi}}\sin 3\psi\pi+e^{-\frac{25\varpi'\pi}{8\varpi}}\sin 5\psi\pi-\,.\,.\right]$$

Si

$$(1+\alpha x)(1+\alpha x^3)(1+\alpha x^5)\,.\,.\,.\,(1+\tfrac{x}{\alpha})(1+\tfrac{x^3}{\alpha})(1+\tfrac{x^5}{\alpha})\,.\,.\,.=k$$

supponitur producere

$$.\,.+\frac{R}{\alpha\alpha}+\frac{Q}{\alpha}+P+Q\alpha+R\alpha\alpha+\,.\,.$$

producet

$$(1+\alpha x^3)(1+\alpha x^5)\,.\,.\,.\,(1+\tfrac{1}{\alpha x})(1+\tfrac{x}{\alpha})(1+\tfrac{x^3}{\alpha})\,.\,.\,.=k.\frac{1+\frac{1}{\alpha x}}{1+\alpha x}$$
$$.\,.\,.+\frac{R}{x^4}\frac{1}{\alpha\alpha}+\frac{Q}{xx}\frac{1}{\alpha}+P+Qxx\alpha+Rx^4\alpha\alpha+\,.\,.$$
$$=\,.\,.\,.+\frac{Q}{x}\frac{1}{\alpha\alpha}+\frac{P}{x}\frac{1}{\alpha}+\frac{Q}{x}+\frac{R}{x}\alpha+\frac{S}{x}\alpha\alpha+\,.\,.$$

$$(1+\alpha x)(1+\alpha x^3)(1+\alpha x^5)\,.\,.\,.\,(1+\tfrac{x}{\alpha})(1+\tfrac{x^3}{\alpha})(1+\tfrac{x^5}{\alpha})\,.\,.\,.$$
$$=P\{1+x(\alpha+\tfrac{1}{\alpha})+x^4(\alpha\alpha+\tfrac{1}{\alpha\alpha})+x^9(\alpha^3+\tfrac{1}{\alpha^3})+\,.\,.\,.\}$$

Si ex quadrato prodit

$$\ldots+\frac{Q}{\alpha}+P+Q\alpha+\ldots$$

erit

$$\ldots+\frac{R}{x^4}\frac{1}{\alpha\alpha}+\frac{Q}{xx}\frac{1}{\alpha}+P+Qxx\alpha+Rx^4\alpha\alpha+\ldots$$

$$=\ldots+\frac{P}{xx}\frac{1}{\alpha\alpha}+\frac{Q}{xx}\frac{1}{\alpha}+\frac{R}{xx}+\frac{S}{xx}\alpha+\frac{T}{xx}\alpha\alpha+\ldots$$

$$(1+\alpha x)^2(1+\alpha x^3)^2(1+\alpha x^5)^2\ldots(1+\tfrac{x}{\alpha})^2(1+\tfrac{x^3}{\alpha})^2(1+\tfrac{x^5}{\alpha})^2\ldots$$

$$=\quad P\{1+xx(\alpha\alpha+\tfrac{1}{\alpha\alpha})+x^8(\alpha^4+\tfrac{1}{\alpha^4})+x^{18}(\alpha^6+\tfrac{1}{\alpha^6})+\ldots\}$$

$$+Q\{(\alpha+\tfrac{1}{\alpha})+x^4(\alpha^3+\tfrac{1}{\alpha^3})+x^{12}(\alpha^5+\tfrac{1}{\alpha^5})+x^{24}(\alpha^7+\tfrac{1}{\alpha^7})+\ldots\}$$

$$T\varphi=0,\qquad \varphi=k\varpi+l\varpi'\sqrt{-1}$$

$$W\varphi=0,\qquad \varphi=(k+\tfrac{1}{2})\varpi+(l+\tfrac{1}{2})\varpi'\sqrt{-1}$$

$$T\psi\varpi=\frac{\varpi}{\pi}\sin\psi\pi\left[1+\frac{4\sin\psi\pi^2}{\left[e^{\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}-e^{-\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\right]^2}\right]\left[1+\frac{4\sin\psi\pi^2}{\left[e^{2\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}-e^{-2\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\right]^2}\right]\ldots$$

$$x=e^{-\frac{1}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi};\qquad \alpha=\cos\psi\pi+\varepsilon\sin\psi\pi$$

$$T\psi\varpi=\frac{\varpi}{\pi}\sin\psi\pi.\frac{(1-x^4\alpha^2)(1-x^8\alpha^2)(1-x^{12}\alpha^2)\ldots(1-\frac{x^4}{\alpha^2})(1-\frac{x^8}{\alpha^2})(1-\frac{x^{12}}{\alpha^2})\ldots}{(1-x^4)^2(1-x^8)^2(1-x^{12})^2\ldots}$$

$$W\psi\varpi=\frac{(1+xx\alpha\alpha)(1+x^6\alpha\alpha)(1+x^{10}\alpha\alpha)\ldots(1+\frac{x^2}{\alpha\alpha})(1+\frac{x^6}{\alpha\alpha})(1+\frac{x^8}{\alpha\alpha})\ldots}{(1+xx)^2(1+x^6)^2(1+x^{10})^2\ldots}$$

Observatio

$$\frac{\text{Med. inter } 1 \text{ et } \sqrt{2}-1}{\text{Med. inter } 1 \text{ et } \sqrt{(2\sqrt{2}-2)}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$\frac{\text{M}\sin 75^\circ}{\text{M}\sin 15^\circ}=\sqrt{3}$$

[II.]

ZUR THEORIE DER TRANSSCENDENTEN FUNCTIONEN GEHÖRIG.

[1.]

Es sei $\Sigma e^{-\alpha(k+\omega)^2} = T$, indem für k alle ganzen positiven und negativen Zahlen gesetzt werden, und

$$T = A + 2B\cos\omega P + 2C\cos 2\omega P + 2D\cos 3\omega P + \text{ etc.}$$

so ist

$$A = \int T\mathrm{d}\omega, \qquad B = \int T\cos\omega P.\mathrm{d}\omega, \qquad C = \int T\cos 2\omega P.\mathrm{d}\omega,$$
$$D = \int T\cos 3\omega P.\mathrm{d}\omega, \quad \text{u.s.w.}$$

alle Integrale von $\omega = 0$ bis $\omega = 1$ ausgedehnt. Es ist aber klar, dass jene Integrale zwischen diesen Grenzen mit den Integralen

$$\int e^{-\alpha\omega\omega}\mathrm{d}\omega, \quad \int e^{-\alpha\omega\omega}\cos\omega P.\mathrm{d}\omega, \quad \int e^{-\alpha\omega\omega}\cos 2\omega P.\mathrm{d}\omega, \quad \int e^{-\alpha\omega\omega}\cos 3\omega P.\mathrm{d}\omega, \text{ etc.}$$

übereinkommen, wenn diese von $\omega = -\infty$ bis $\omega = +\infty$ ausgedehnt werden. Da nun allgemein

$$e^{-\alpha\omega\omega}\cos n\omega P$$
$$= \tfrac{1}{2}e^{-\alpha\omega\omega + in\omega P} + \tfrac{1}{2}e^{-\alpha\omega\omega - in\omega P} = \tfrac{1}{2}e^{-\frac{nnPP}{4\alpha}}\left\{e^{-\alpha\left(\omega - \frac{inP}{2\alpha}\right)^2} + e^{-\alpha\left(\omega + \frac{inP}{2\alpha}\right)^2}\right\}$$

so folgt leicht, dass

$$\int e^{-\alpha\omega\omega}\cos n\omega P.\,\mathrm{d}\omega = e^{-\frac{nn\pi\pi}{\alpha}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

folglich

$$T = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.\left\{1+2e^{-\frac{\pi\pi}{\alpha}}\cos\omega P + 2e^{-4\frac{\pi\pi}{\alpha}}\cos 2\omega P + 2e^{-9\frac{\pi\pi}{\alpha}}\cos 3\omega P + \text{etc.}\right\}$$

In einer andern Form so:

$$\Sigma e^{-\alpha(k+\omega)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.e^{-\alpha\omega\omega}.\Sigma e^{-\frac{\pi\pi}{\alpha}(k+\frac{\alpha\omega i}{\pi})^2}$$

Allgemeiner:

$$\Sigma e^{-\alpha(k+\omega)^2}\{\cos 2(k+\omega)\alpha\psi - i\sin 2(k+\omega)\alpha\psi\}$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.\Sigma e^{-\frac{\pi\pi}{\alpha}(k-\frac{\alpha\psi}{\pi})^2}\{\cos 2k\omega\pi - i\sin 2k\omega\pi\}$$

Oder, $\alpha\alpha' = \pi\pi$ und $-\alpha\psi = \omega'\pi$ gesetzt,

$$\Sigma e^{-\alpha(k+\omega)^2}\{\cos(2k+2\omega)\omega'\pi - i\sin(2k+2\omega)\omega'\pi\}$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.\Sigma e^{-\alpha'(k+\omega')^2}\{\cos 2k\omega\pi - i\sin 2k\omega\pi\}$$

$$\Sigma e^{-\alpha(k+\omega-\frac{1}{2})^2} - \Sigma e^{-\alpha(k+\omega+\frac{1}{2})^2} = 4\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.\left\{e^{-\frac{\pi\pi}{\alpha}}\sin\omega P - 3e^{-9\frac{\pi\pi}{\alpha}}\sin 3\omega P + \text{etc.}\right\}$$

Man kann den Lehrsatz auch so ausdrücken:

$$\Sigma t e^{-\pi t^4 kk - 2\pi ttk\sqrt{u} - \frac{1}{2}\pi u}$$

ändert den Werth nicht, wenn t in $\frac{1}{t}$ und u in $-u$ verwandelt wird.

[2.]

Man setze

$$P = 1+\frac{x^n.1-x^{2n+1}}{1+x^n.1+x^{n+1}} + \frac{x^{2n}.1-x^{2n+2}.1-x^{n+1}}{1+x^n.1+x^{n+1}.1+x^{n+2}} + \frac{x^{3n}.1-x^{2n+3}.1-x^{n+1}.1-x^{n+2}}{1+x^n.1+x^{n+1}.1+x^{n+2}.1+x^{n+3}} + \text{etc.}$$

$$Q = \frac{x^n}{1+x^n} + \frac{x^{2n}.1-x^{n+1}}{1+x^n.1+x^{n+1}} + \frac{x^{3n}.1-x^{n+1}.1-x^{n+2}}{1+x^n.1+x^{n+1}.1+x^{n+2}} + \text{etc.}$$

$$R = P - Q$$

Man suche zuerst diese Differenz, indem man das erste, zweite, dritte Glied u. s. w. der Reihe Q von dem ersten, zweiten, dritten Gliede der Reihe P abzieht, so kommt

$$R=\frac{1}{1+x^n}+\frac{x^n.1-x^n}{1+x^n.1+x^{n+1}}+\frac{x^{2n}.1-x^n.1-x^{n+1}}{1+x^n.1+x^{n+1}.1+x^{n+2}}+\frac{x^{3n}.1-x^n.1-x^{n+1}.1-x^{n+2}}{1+x^n.1+x^{n+1}.1+x^{n+2}.1+x^{n+3}}+\text{etc.}$$

Wir bezeichnen diese Reihe durch $\varphi(x,n)$.

Man suche ferner jene Differenz R, indem man das erste, zweite, dritte Glied u. s. w. der Reihe Q von dem zweiten, dritten, vierten u. s. w. der Reihe P abzieht, so wird

$$R=1-\frac{x^{2n+1}}{1+x^{n+1}}-\frac{x^{3n+2}.1-x^{n+1}}{1+x^{n+1}.1+x^{n+2}}-\frac{x^{4n+3}.1-x^{n+1}.1-x^{n+2}}{1+x^{n+1}.1+x^{n+2}.1+x^{n+3}}-\text{u. s. w.}$$

oder offenbar

$$R=1-x^{2n+1}.\varphi(x,n+1)$$

folglich

$$\varphi(x,n)=1-x^{2n+1}.\varphi(x,n+1)$$

Dieser Schluss ist allgemein, so lange $n>1$, man hat demnach unter dieser Einschränkung

$$\varphi(x,n)=1-x^{2n+1}+x^{4n+4}-x^{6n+9}+x^{8n+16}-\text{ etc.}$$

hingegen ist für den Fall $n=0$ das letzte Glied von Q nicht als verschwindend zu betrachten. Setzt man es $=T$, so wird der erste Werth von R um T kleiner sein als der zweite, also

$$T=1-x\varphi(x,1)-\varphi(x,0)$$

oder

$$\varphi(x,0)=1-x\varphi(x,1)-T=1-x+x^4-x^9+x^{16}-\,..\,-T$$

also da

$$\varphi(x,0)=\tfrac{1}{2}$$

und

$$2T=\frac{1-x}{1+x}.\frac{1-xx}{1+xx}.\frac{1-x^3}{1+x^3}.\frac{1-x^4}{1+x^4}\text{ etc.}$$

so wird

$$\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-xx}{1+xx}\cdot\frac{1-x^3}{1+x^3}\cdot\frac{1-x^4}{1+x^4}\text{ etc.} = 1-2x+2x^4-2x^9+2x^{16}-\text{ etc.}$$

der erste Theil ist hier

$$= 1-x\,.\,1-x^3\,.\,1-x^5\,.\,1-x^7\text{ etc. }\frac{1-xx}{1+x}\cdot\frac{1-x^4}{1+xx}\cdot\frac{1-x^6}{1+x^3}\text{ etc.}$$
$$= (1-x)^2(1-xx)(1-x^3)^2(1-x^4)(1-x^5)^2(1-x^6)\text{ etc.}$$

Bezeichnen wir noch

$$1-2x+2x^4-2x^9+2x^{16}\text{ etc. mit } Fx$$

so wird offenbar

$$Fx\,.\,F(-x) = (Fxx)^2$$

[3.]

Zieht man auf ähnliche Weise von der Reihe

$$\frac{1-x^{2n+2}}{1-x^{n+1}}+\frac{x^n\,.\,1-x^{2n+4}\,.\,1-x^{n+2}}{1-x^{n+1}\,.\,1-x^{n+3}}+\frac{x^{2n}\,.\,1-x^{2n+6}\,.\,1-x^{n+2}\,.\,1-x^{n+4}}{1-x^{n+1}\,.\,1-x^{n+3}\,.\,1-x^{n+5}}+\text{ etc.}$$

die Reihe

$$\frac{x^n\,.\,1-x^{n+2}}{1-x^{n+1}}+\frac{x^{2n}\,.\,1-x^{n+2}\,.\,1-x^{n+4}}{1-x^{n+1}\,.\,1-x^{n+3}}+\frac{x^{3n}\,.\,1-x^{n+2}\,.\,1-x^{n+4}\,.\,1-x^{n+6}}{1-x^{n+1}\,.\,1-x^{n+3}\,.\,1-x^{n+5}}+\text{ etc.}$$

ab, so erhält man einmal

$$\frac{1-x^n}{1-x^{n+1}}+\frac{x^n\,.\,1-x^n\,.\,1-x^{n+2}}{1-x^{n+1}\,.\,1-x^{n+3}}+\frac{x^{2n}\,.\,1-x^n\,.\,1-x^{n+2}\,.\,1-x^{n+4}}{1-x^{n+1}\,.\,1-x^{n+3}\,.\,1-x^{n+5}}+\text{ etc.} = \psi(x,n)$$

und zweitens

$$1+x^{n+1}+\frac{x^{2n+3}\,.\,1-x^{n+2}}{1-x^{n+3}}+\frac{x^{2n+3}\,.\,x^{n+2}\,.\,1-x^{n+2}\,.\,1-x^{n+4}}{1-x^{n+3}\,.\,1-x^{n+5}}+\text{ etc.}$$
$$= 1+x^{n+1}+x^{2n+3}\psi(x,n+2)$$

Man hat also, den Fall $n=0$ ausgenommen,

$$\psi(x,n) = 1+x^{n+1}+x^{2n+3}\psi(x,n+2)$$

folglich

$$\psi(x,n) = 1+x^{n+1}+x^{2n+3}+x^{3n+6}+x^{4n+10}+\text{ etc.}$$

dagegen hat man für den Fall $n=0$

$$\psi(x,0) = 1+x+x^3\psi(x,2)-\frac{1-x^2\,.\,1-x^4\,.\,1-x^6}{1-x\,.\,1-x^3\,.\,1-x^5}\text{ etc.}$$

folglich

$$\frac{1-x^2 . 1-x^4 . 1-x^6 \ldots}{1-x . 1-x^3 . 1-x^5 \ldots} = 1+x+x^3+x^6+x^{10}+ \text{ etc.}$$

[4.]

Wir bezeichnen

$$1-x . 1-xx . 1-x^3 \text{ etc. } \quad \text{mit} \quad [x]$$

so ist:

$$1+x+x^3+x^6+ \text{etc.} = \frac{1-xx . 1-x^4 . 1-x^6 \ldots}{1-x \; . 1-x^3 . 1-x^5 \ldots} = \frac{[xx]^2}{[x]}$$

$$= 1+x . 1+xx . 1+x^3 . 1+x^4 . 1+x^5 \ldots 1-x^2 . 1-x^4 . 1-x^{16} \ldots$$

$$1-2x+2x^4-2x^9+ \text{etc.} = \frac{1-x . 1-xx . 1-x^3 \ldots}{1+x . 1+xx . 1+x^3 \ldots} = \frac{[x]^2}{[xx]}$$

$$1+2x+2x^4+2x^9+ \text{etc.} = \frac{1+x . 1-xx . 1+x^3 \ldots}{1-x . 1+xx . 1-x^3 \ldots} = \frac{[xx]^5}{[x]^2 [x^4]^2}$$

$$= (1+x)^2 (1-xx)(1+x^3)^2 (1-x^4)(1+x^5)^2 \ldots$$

$$[-x] = \frac{[xx]^3}{[x][x^4]}$$

$$(1+xy)(1+x^3y)(1+x^5y) \ldots (1+\frac{x}{y})(1+\frac{x^3}{y})(1+\frac{x^5}{y}) \ldots$$

$$= \frac{1}{[xx]} \{1+x(y+\frac{1}{y})+x^4(yy+\frac{1}{yy})+x^9(y^3+\frac{1}{y^3})+ .\}$$

$$\text{etc.} + x^{(\omega-1)^2} + x^{\omega\omega} + x^{(\omega+1)^2} + \text{ etc.} = [xx] \frac{\ldots 1+x^{2\omega+3} . 1+x^{2\omega+1} . 1+x^{2\omega-1} . 1+x^{2\omega-3} \ldots}{x^{-\omega\omega} . x^{2\omega-1} . x^{2\omega-3} \ldots}$$

$$[x]^3 = 1-3x+5x^3-7x^6+9x^{10}- \text{ etc.}$$

folgt leicht aus

$$\{(y-\frac{1}{y})x-(y^3-\frac{1}{y^3})x^9+(y^5-\frac{1}{y^5})x^{25}- \ldots\} \{(y+\frac{1}{y})x+(y^3+\frac{1}{y^3})x^9+(y^5+\frac{1}{y^5})x^{25}+ \ldots\}$$

$$= \{1-2x^8+2x^{32}- \ldots\} \{(yy-\frac{1}{yy})xx-(y^6-\frac{1}{y^6})x^{18}+ \text{etc.}\}$$

wenn man $y = 1+\omega$ setzt und daraus die Bedingungsgleichungen bildet.

[5.]

Zu den Hauptsätzen in dieser Theorie gehört folgendes Theorem.

Bezeichnet man

$$\{e^{-\frac{P\alpha}{24}} - e^{-\frac{25P\alpha}{24}} - e^{-\frac{49P\alpha}{24}} + e^{-\frac{121P\alpha}{24}} + e^{-\frac{169P\alpha}{24}} + \ldots\}.\sqrt[4]{\alpha} \text{ durch } \varphi\alpha$$

so ist

$$\varphi\alpha = \varphi\frac{1}{\alpha}$$

Diese Function ist ein Maximum für $\alpha = 1$, wo ihr Werth

$$= 0{,}7682255 = \frac{1}{\sqrt[4]{2.\sqrt{1{,}19814\ldots}}} = \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{\frac{\varpi}{\pi}}$$

ferner ist

$$(\varphi 2\lambda)^{24} = 4(\varphi\lambda)^8(\varphi 4\lambda)^8\{(\varphi\lambda)^8 + (\varphi 4\lambda)^8\}$$

$$\varphi\alpha = e^{-\frac{\alpha}{24}P}\sqrt[4]{\alpha}.(1-e^{-\alpha P})(1-e^{-2\alpha P})(1-e^{-3\alpha P})\ldots$$

oder

$$[x] = \frac{\varphi\frac{-\log x}{P}.\sqrt[24]{\frac{1}{x}}}{\sqrt[4]{\frac{-\log x}{P}}}$$

Es sei

$$(1+xy)(1+x^3y)(1+x^5y)\ldots(1+\frac{x}{y})(1+\frac{x^3}{y})(1+\frac{x^5}{y})\ldots = F(x,y)$$

so ist

$$F\big[e^{-\frac{1}{2}\alpha P},\ e^{P\varpi\sqrt{\alpha}}\big].e^{-\frac{P}{24\alpha}} = F\big[e^{-\frac{1}{2}\frac{P}{\alpha}},\ e^{iP\varpi\sqrt{\frac{1}{\alpha}}}\big].e^{-\frac{P\alpha}{24}}.e^{\frac{1}{2}P\varpi\varpi}$$

[6.]

Die Siebentheilung führt auf folgende Gleichung

$$b = \left[\frac{1-2x+2x^4-\ldots}{1+2x+2x^4+\ldots}\right]^2$$

$$A = \left[\frac{1+2x^7+2x^{28}+\ldots}{1+2x+2x^4+\ldots}\right]^2$$

$$B = \left[\frac{1-2x^7+2x^{28}+\ldots}{1+2x+2x^4+\ldots}\right]^2$$

$$A^8 - \tfrac{4}{7}A^6 + \frac{16-32bb}{49}A^5 - \frac{30}{343}A^4 + \frac{32-64bb}{2401}A^3 - \frac{20+768bb-768b^4}{16807}A^2$$
$$+ \frac{48-2144bb+6144b^4-4096.b^6}{823543}A - \frac{1}{823543} = 0$$

$$B^8 - \tfrac{4}{7}bbB^6 + \frac{16b^3-32b}{49}B^5 - \frac{30b^4}{343}B^4 + \frac{32b^5-64b^3}{2401}B^3 - \frac{20b^6+768b^4-768b^2}{16807}B^2$$
$$+ \frac{48b^7-2144b^5+6144b^3-4096b}{823543}B - \frac{1}{823543} = 0$$

Wenn man in der ersten Gleichung statt bb, $1-bb$ und statt A, $-A$ setzt, so wird sie nicht geändert.

[7.]

Für die Dreitheilung hat man

$$\begin{array}{ccc} a & b & \frac{b}{a} = t \\ A & B & \frac{B}{A} = T \end{array}$$

$$T^4 + (12t - 16t^3)T^3 + 6ttT^3 - (16t - 12t^3)T + t^4 = 0$$

oder

$$(T-t)^4 = 16(t-t^3)(T-T^3)$$

$$\frac{A}{a} = \frac{3t-t^3+T(1-3tt)}{3[T(1-tt)+t(1-TT)]}$$

Setzt man $T = \operatorname{tang} N$, $t = \operatorname{tang} n$, so ist

$$3\sin(2N-2n)^2 = 4\sin(N+3n).\sin(3N+n)$$
$$\sin(N-n)^4 = \sin 4n.\sin 4N$$

$$\frac{A\cos n}{a\cos N} = \frac{B\sin n}{b\sin N} = \frac{2\sin(N+3n)}{3\sin(2N-2n)} = \frac{\sin(2N-2n)}{2\sin(3N+n)}$$

[8.]

Zum Beweise der schönen Lehrsätze der Reciprocität wird folgendes dienen:

I. Das Product aus allen

$$1 - \frac{\eta}{ak+N}$$

ist das Product aus allen

$$\frac{1-\frac{\eta-N}{\alpha k}}{1+\frac{N}{\alpha k}}$$

also

$$=\frac{\sin\frac{N-\eta}{\alpha}\pi}{\sin\frac{N}{\alpha}\pi}=e^{-\frac{\eta\pi i}{\alpha}}\cdot\frac{1-e^{-\frac{2(N-\eta)}{\alpha}\pi i}}{1-e^{-\frac{2N}{\alpha}\pi i}}=e^{\frac{\eta\pi i}{\alpha}}\cdot\frac{1-e^{\frac{2(N-\eta)}{\alpha}\pi i}}{1-e^{\frac{2N}{\alpha}\pi i}}$$

II. Sollen aber blos für k die ungeraden Zahlen gesetzt werden, so ist jenes Product

$$=\frac{\cos\frac{N-\eta}{\alpha}\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{N}{\alpha}\frac{\pi}{2}}=e^{-\frac{\eta\pi i}{2\alpha}}\cdot\frac{1+e^{-\frac{N-\eta}{\alpha}\pi i}}{1+e^{-\frac{N}{\alpha}\pi i}}=e^{\frac{\eta\pi i}{2\alpha}}\cdot\frac{1+e^{\frac{N-\eta}{\alpha}\pi i}}{1+e^{\frac{N}{\alpha}\pi i}}$$

Setzt man also $N=k'\alpha'$, so wird der Werth jenes Products, wenn man

$$e^{-\frac{\alpha'\pi i}{\alpha}}=x \quad \text{und} \quad e^{\frac{\eta\pi i}{\alpha}}=y$$

setzt,

$$=y^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1+x^{k'}y}{1+x^{k'}}=y^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1+x^{-k'}\cdot\frac{1}{y}}{1+x^{-k'}}$$

folglich das Product aus allen Werthen für k' alle ungeraden Zahlen gesetzt

$$=(x,y)\frac{[x]^2[x^4]^2}{[xx]^4}$$

Es seien m, n zwei beliebige, positive reelle Grössen und λ reell oder imaginär, man setze

$$e^{-\frac{m}{n}\pi}=x, \qquad e^{\frac{\lambda}{n}\pi}=y$$

so ist das Product aus allen

$$1-\frac{\lambda}{km+k'ni}$$

für k und k' alle ungeraden ganzen Zahlen gesetzt, obigem zu Folge

$$= (x,y)\frac{[x]^2[x^4]^2}{[xx]^4}$$

Offenbar ist aber obiges Product auch das Product aus allen

$$1-\frac{\lambda i}{kmi+k'n}$$

also, wenn man

$$e^{-\frac{n}{m}\pi} = x', \qquad e^{\frac{\lambda}{m}\pi i} = y'$$

setzt, so ist jenes Product

$$= (x',y')\frac{[x']^2[x'^4]^2}{[x'x']^4}$$

folglich diese beiden Ausdrücke einander gleich, oder

$$\frac{1+xy.1+\frac{x}{y}.1+x^3y.1+\frac{x^3}{y}\ldots}{1+x\;.\;1+x\;.1+x^3\;.\;1+x^3\ldots} = \frac{1+x'y'.1+\frac{x'}{y'}.1+x'^3y'.1+\frac{x'^3}{y'}\ldots}{1+x'\;.\;1+x'\;.1+x'^3\;.\;1+x'^3\ldots}$$

Diese Schlüsse bedürfen einer Verbesserung (alle geradezu noch einen constanten Theil im Nenner).

[9.]

$$\frac{x+4x^4+9x^9+16x^{16}+\ldots}{1+2x+2x^4+2x^9+\ldots} = \frac{x}{1-xx}-\frac{2xx}{1-x^4}+\frac{3x^3}{1-x^6}-\ldots \qquad \text{I}$$

$$= \frac{x}{(1+x)^2}+\frac{x^3}{(1+x^3)^2}+\frac{x^5}{(1+x^5)^2}+\ldots \qquad \text{II}$$

also

$$\tfrac{1}{2}\log(1+2x+2x^4+2x^9+\ldots) = \frac{x}{1+x}+\frac{x^3}{3(1+x^3)}+\frac{x^5}{5(1+x^5)}+\ldots$$

I. aus der Differentiation des Logarithmen des Ausdrucks durchs Product.

Wird I. entwickelt in

$$\begin{array}{l} x+x^3+x^5+x^7+\ldots \\ -2xx-2x^6-2x^{10}-2x^{14}-\ldots \\ +3x^3+3x^9+3x^{15}+3x^{21}+\ldots \\ -4x^4-4x^{12}-4x^{20}-4x^{28}-\ldots \\ \;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \end{array}$$

und die verticalen Reihen einzeln summirt, so entsteht II.

$$(1+2x+2x^4+2x^9+..)^4 = 1+\frac{8x}{1-x}+\frac{16xx}{1+xx}+\frac{24x^3}{1-x^3}+\frac{32x^4}{1+x^4}+\ldots$$
$$(1-2x+2x^4-2x^9+..)^4 = 1-\frac{8x}{1+x}+\frac{16xx}{1+xx}-\frac{24x^3}{1+x^3}+\frac{32x^4}{1+x^4}-\ldots$$
$$(2x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{9}{4}}+2x^{\frac{25}{4}}+..)^4 = \frac{16x}{1-xx}+\frac{48x^3}{1-x^6}+\frac{80x^5}{1-x^{10}}+\ldots$$

$$(1+2x+2x^4+2x^9+..)^4 = 1+\frac{8x}{(1-x)^2}+\frac{8xx}{(1+xx)^2}+\frac{8x^3}{(1-x^3)^2}+\frac{8x^4}{(1+x^4)^2}+\ldots$$
$$(1-2x+2x^4-2x^9+..)^4 = 1-\frac{8x}{(1+x)^2}+\frac{8xx}{(1+xx)^2}-\frac{8x^3}{(1+x^3)^2}+\frac{8x^4}{(1+x^4)^2}-\ldots$$
$$(2x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{9}{4}}+2x^{\frac{25}{4}}+..)^4 = \frac{16(1+xx)x}{(1-xx)^2}+\frac{16(1+x^6)x^3}{(1-x^6)^2}+\frac{16(1+x^{10})x^5}{(1-x^{10})^2}+\ldots$$

Die Reihen

$$p = 1+2x+2x^4+\text{ etc.}, \qquad \frac{1}{pp} = t$$
$$q = 1-2x+2x^4-\text{ etc.}, \qquad \frac{1}{qq} = u$$

werden durch Differentialgleichungen am einfachsten auf folgende Art ausgedrückt

$$\frac{x\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = t', \qquad \frac{x\,\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}x} = t'', \qquad \frac{x\,\mathrm{d}t''}{\mathrm{d}x} = t'''$$
$$\frac{x\,\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u', \qquad \frac{x\,\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}x} = u'', \qquad \frac{x\,\mathrm{d}u''}{\mathrm{d}x} = u'''$$

$$\frac{u}{t}-\frac{t}{u} = 2(tu'-ut') = -4u^3t'' = +4t^3u''$$

$$\frac{t'''}{t''}+3\frac{t'}{t} = \sqrt{\left(\frac{1}{t^4}+16\frac{t''}{t}\right)}$$

446

[III.]

[ZUR THEORIE DER NEUEN TRANSSCENDENTEN.]

Die Theoreme in Beziehung auf diejenigen Reihen und unendlichen Producte, welche zu der Theorie der Arithmetisch Geometrischen Mittel gehören, ordnen wir so:

1. $$1-x\,.\,1-xx\,.\,1-x^3\,.\,1-x^4\ \ldots = [x]$$

2. $$1+x\,.\,1+xx\,.\,1+x^3\,.\,1+x^4\ \ldots = \frac{[xx]}{[x]}$$

3. $$1-x\,.\,1-x^3\,.\,1-x^5\,.\,1-x^7\ \ldots = \frac{[x]}{[xx]}$$

4. $$1+x\,.\,1+x^3\,.\,1+x^5\,.\,1+x^7\ \ldots = \frac{[xx]^2}{[x][x^4]}$$

5. $$[-x] = \frac{[xx]^3}{[x][x^4]}$$

6. $$1+xy\,.\,1+x^3y\,.\,1+x^5y\ \ldots\ 1+xy^{-1}\,.\,1+x^3y^{-1}\,.\,1+x^5y^{-1}\ \ldots$$

evolvitur in seriem

$$Fx\,.\,\{1+(y+y^{-1})x+(y^2+y^{-2})x^4+(y^3+y^{-3})x^9+\ \ldots\}$$

7. also $$Fx = \frac{(1-x)^2(1-x^3)^2(1-x^5)^2\ \ldots}{1-2x+2x^4-2x^9+\ \ldots} = \frac{[x]^2}{[xx]^2}\cdot\frac{1}{1-2x+2x^4-2x^9+\ \ldots}$$

8. $$Fx = \frac{1+xx\,.\,1+x^6\,.\,1+x^{10}\ldots}{1-2x^4+2x^{16}-2x^{36}+\ldots} = \frac{[x^4]^2}{[xx][x^8]}\cdot\frac{1}{1-2x^4+2x^{16}-\ldots}$$

9. $$[xx]Fx = [x^8]Fx^4 = [x^{32}]Fx^{16} = [x^{128}]Fx^{64} = \text{etc.} = 1$$

10. $$1-2x+2x^4-\ldots = \frac{[x]^2}{[xx]} = \frac{1-x\,.\,1-xx\,.\,1-x^3\ldots}{1+x\,.\,1+xx\,.\,1+x^3\ldots}$$

11. $$1+2x+2x^4+\ldots = \frac{[xx]^5}{[x]^2[x^4]^2} = \frac{1+x\,.\,1-xx\,.\,1+x^3\,.\,1-x^4\ldots}{1-x\,.\,1+xx\,.\,1-x^3\,.\,1+x^4\ldots}$$

Andere Beweise dieser Sätze.

Wenn man in 6 statt y, xy schreibt, so wird

$$1+\frac{1}{yy}\,.\,1+xxyy\,.\,1+x^4yy\,.\,1+x^6yy\ldots 1+xxy^{-2}\,.\,1+x^4y^{-2}\,.\,1+x^6y^{-2}\ldots$$
$$= \frac{1}{[xx]}\{(1+y^{-2})+(y^2+y^{-4})xx+(y^4+y^{-6})x^6+\ldots\}$$

oder

12. $$y+\frac{1}{y}\,.\,1+xxyy\,.\,1+x^4yy\,.\,1+x^6yy\ldots 1+xxy^{-2}\,.\,1+x^4y^{-2}\,.\,1+x^6y^{-2}\ldots$$
$$= \frac{1}{[xx]x^{\frac{1}{4}}}\{(y+y^{-1})x^{\frac{1}{4}}+(y^3+y^{-3})x^{\frac{9}{4}}+\ldots\}$$

Anderer Beweis

13. $$x^{\frac{1}{4}}\frac{[x^4]^2}{[xx]} = x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{9}{4}}+\ldots$$

oder

14. $$\frac{[xx]^2}{[x]} = 1+x+x^3+x^6+x^{10}+\ldots = \frac{1-xx\,.\,1-x^4\ldots}{1-x\,.\,1-x^3\ldots}$$

Anderer Beweis.

15. $$(1-2x+2x^4-\ldots)\;(1+2x+2x^4+\ldots) = (1-2xx+2x^8-\ldots)^2$$

16. $$(1-2x+2x^4-\ldots)^2+(1+2x+2x^4+\ldots) = 2(1+2xx+2x^8+\ldots)^2$$

17. $$(1+2x+2x^4+\ldots)^2\;(x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{9}{4}}+\ldots) = (x^{\frac{1}{8}}+x^{\frac{9}{8}}+\ldots)^2$$

18. $$(1+2x+2x^4+\ldots)^2+(2x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{9}{4}}+\ldots)^2 = (1+2x^{\frac{1}{2}}+2x^2+\ldots)^2$$

19. $$(1+2x+2x^4+\ldots)^4 = (1-2x+2x^4-\ldots)^4+(2x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{9}{4}}+\ldots)^4$$

Anwendung auf arithm. geom. Mittel.

20. $$\begin{array}{ll} a = h(1+2x+2x^4+\ldots)^2 & b = h(1-2x+2x^4-\ldots)^2 \\ a' = h(1+2xx+2x^8+\ldots)^2 & b' = h(1-2xx+2x^8-\ldots)^2 \\ a'' = h(1+2x^4+2x^{16}+\ldots)^2 & b'' = h(1-2x^4+2x^{16}-\ldots)^2 \\ a''' = h(1+2x^8+2x^{32}+\ldots)^2 & b''' = h(1-2x^8+2x^{32}-\ldots)^2 \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

$$c = \sqrt{(aa-bb)}$$

$$c' = \sqrt{(a'a'-b'b')} = \tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{cc}{4a'} = \frac{cc}{4a'}, \qquad \sqrt{\frac{c'}{4h}} = \frac{c}{4}\frac{1}{\sqrt{a'h}}$$

$$c'' = \sqrt{(a''a''-b''b'')} = \tfrac{1}{2}(a'-b') = \frac{c'c'}{4a''} = \frac{c^4}{64a'a'a''}, \qquad \sqrt[4]{\frac{c''}{4h}} = \frac{c}{4a'^{\frac{1}{2}}a''^{\frac{1}{4}}h^{\frac{1}{4}}}$$

$$c''' = \sqrt{(a'''a'''-b'''b''')} = \tfrac{1}{2}(a''-b'') = \frac{c''c''}{4a'''} = \frac{c^8}{2^{14}a'^4a''^2a'''}, \qquad \sqrt[8]{\frac{c'''}{4h}} = \frac{c}{4a'^{\frac{1}{2}}a''^{\frac{1}{4}}a'''^{\frac{1}{8}}h^{\frac{1}{8}}}$$

etc. etc.

21. $$x^{\frac{1}{2}} = \frac{c}{4a'^{\frac{1}{2}}a''^{\frac{1}{4}}a'''^{\frac{1}{8}}\ldots} = \frac{c}{4a'}\left[\frac{a'}{a''}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{a''}{a'''}\right]^{\frac{1}{4}}\left[\frac{a'''}{a''''}\right]^{\frac{1}{8}} \text{ etc.}$$

22. $$x = \frac{a-b}{8a''}\left[\frac{a''}{a'''}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{a'''}{a''''}\right]^{\frac{1}{4}} \text{ etc.}$$

Setzt man in 6 statt x, x^3 und statt y, $-x$, so wird

$$1-x^4 \,.\, 1-x^{10} \,.\, 1-x^{16} \ldots 1-x^2 \,.\, 1-x^8 \,.\, 1-x^{14} \ldots$$
$$= \frac{1}{[x^6]}\{1-xx-x^4+x^{10}+x^{14}-x^{24}-x^{30}+\ldots\}$$

oder

23. $$[x] = 1-x-xx+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+ \text{ etc.}$$

Anderer Beweis.

Man setze in 6 statt x, x^3 und statt y, $+x$, so wird

24. $1+x+xx+x^5+x^7+x^{12}+x^{15}+\text{etc.} = [x^3].1+x.1+xx.1+x^4.1+x^5\,..$
$$= \frac{[xx][x^3]^2}{[x][x^6]}$$

Man setze in 6 statt x, x^3 und statt y, xxy, so wird

$$1+\frac{x}{y}+x^5y+\frac{x^8}{yy}+x^{16}yy+\text{etc.}$$
$$= 1+\frac{x}{y}.1+\frac{x^7}{y}.1+\frac{x^{13}}{y}\ldots 1+x^5y.1+x^{11}y.1+x^{17}y\ldots[x^6]$$

oder statt x, x^3 gesetzt

$$x+\frac{x^4}{y}+x^{16}y+\frac{x^{25}}{yy}+x^{49}yy+\text{etc.}$$
$$= x.1+\frac{x^3}{y}.1+\frac{x^{21}}{y}.1+\frac{x^{39}}{y}\ldots 1+x^{15}y.1+x^{33}y.1+x^{51}y\ldots[x^{18}]$$

also

25. $x+x^4+x^{16}+x^{25}+x^{49}+\,..$
$$= x.1+x^3.1+x^{15}.1+x^{21}.1+x^{33}.1+x^{39}\ldots[x^{18}] = x\frac{[x^6]^3[x^9][x^{36}]}{[x^3][x^{12}][x^{18}]}$$

26. $x-x^4-x^{16}+x^{25}+x^{49}-\text{etc.} = x.1-x^3.1-x^{15}.1-x^{21}.1-x^{33}\,..\,[x^{18}]$
$$= x\frac{[x^3][x^{18}]^2}{[x^6][x^9]}$$

Da nun

$$\frac{x.1-x^3.1-x^{15}.1-x^{21}.1-x^{33}\ldots[x^{18}]}{x.1-x^3.1-x^9.1-x^{15}.1-x^{21}\ldots} = \frac{[x^{18}]^2}{[x^9]} = 1+x^9+x^{27}+x^{54}+\,..$$

so ist

27. $x-x^4-x^{16}+x^{25}+x^{29}-\,..$
$$= 1-x^3.1-x^9.1-x^{15}\ldots\frac{1}{x^{\frac{1}{8}}}\{x^{\frac{9}{8}}+x^{\frac{81}{8}}+x^{\frac{225}{8}}+x^{\frac{441}{8}}+\text{etc.}\}$$

ferner folgt aus 24, wenn man statt x, x^3 setzt, weil

$$\frac{1-2x^9+2x^{36}-2x^{81}+\ldots}{1-x^3.1-x^9.1-x^{15}\ldots} = \frac{[x^6][x^9]^2}{[x^3][x^{18}]} = 1+x^3+x^6+x^{15}+x^{21}+\,..$$

28. $1-2x^9+2x^{36}-2x^{81}+\,.. = 1-x^3.1-x^9.1-x^{15}\ldots\frac{1}{x^{\frac{1}{8}}}\{x^{\frac{1}{8}}+x^{\frac{25}{8}}+x^{\frac{49}{8}}+\text{etc.}\}$

also aus der Verbindung von 27 und 28

29. $1-2x+2x^4-2x^9+2x^{16}-\,..$
$$=1-x^3.1-x^9.1-x^{15}\ldots\frac{1}{x^{\frac{1}{8}}}\{x^{\frac{1}{8}}-2x^{\frac{9}{8}}+x^{\frac{25}{8}}+x^{\frac{49}{8}}-2x^{\frac{81}{8}}-\text{etc.}\}$$
ferner folgt aus 23
$$x^{\frac{1}{8}}-x^{\frac{25}{8}}-x^{\frac{49}{8}}+x^{\frac{121}{8}}+\,..=x^{\frac{1}{8}}[x^3]$$
also

30. $1-2x^3+2x^{12}-2x^{27}+2x^{48}-\,..$
$$=1-x^3.1-x^9.1-x^{15}\ldots\frac{1}{x^{\frac{1}{8}}}\{x^{\frac{1}{8}}-x^{\frac{25}{8}}-x^{\frac{49}{8}}+x^{\frac{121}{8}}+x^{\frac{169}{8}}-\,..\}$$

Aus der Summation von 29 und 30

31. $\{1-2x+2x^4-2x^9+\,..\}+\{1-2x^3+2x^{12}-2x^{27}+\,..\}$
$$=1-x^3.1-x^9.1-x^{15}\ldots\frac{2}{x^{\frac{1}{8}}}\{x^{\frac{1}{8}}-x^{\frac{9}{8}}-x^{\frac{81}{8}}+x^{\frac{121}{8}}+x^{\frac{169}{8}}-\,..\}$$

Aus der Summation von 28 und 30

32. $\{1-2x^3+2x^{12}-2x^{27}+\,..\}+\{1-2x^9+2x^{36}-2x^{81}+\,..\}$
$$=1-x^3.1-x^9.1-x^{15}\ldots\frac{2}{x^{\frac{1}{8}}}\{x^{\frac{1}{8}}+x^{\frac{121}{8}}+x^{\frac{169}{8}}+x^{\frac{529}{8}}+\,..\}$$

Setzt man in 6 statt x, x^6 und statt y, xy, so wird
$$1+x^7y.1+x^{19}y.1+x^{31}y\ldots1+\frac{x^5}{y}.1+\frac{x^{17}}{y}\ldots[x^{12}]$$
$$=1+\frac{x^5}{y}+x^7y+\frac{x^{22}}{yy}+x^{26}yy+\,..$$
Man hat demnach die Zerlegungen in Factoren

33. $(1-2x^3+2x^{12}-2x^{27}+\,..)+(1-2x^9+2x^{36}-2x^{81}+\,..)$
$$=2[x^{36}].1-x^3.1-x^9.1-x^{15}\ldots1+x^{15}.1+x^{21}.1+x^{51}.1+x^{57}\ldots$$

34. $(1-2x+2x^4-2x^9+\,..)+(1-2x^3+2x^{12}-2x^{27}+\,..)$
$$=2[x^{12}].1-x.1-x^3.1-x^5.1-x^7\ldots1+x^5.1+x^7.1+x^{17}.1+x^{19}\ldots$$

35. $(1+2x^3+2x^{12}+2x^{27}+\,..)+(1+2x^9+2x^{36}+2x^{81}+\,..)$
$$=2[x^{36}].1+x^3.1+x^9.1+x^{15}\ldots1-x^{15}.1-x^{21}.1-x^{51}\ldots$$

36. $(1+2x+2x^4+2x^9+\,..)+(1+2x^3+2x^{12}+2x^{27}+\,..)$
$$=2[x^{12}].1+x.1+x^3.1+x^5.1+x^7\ldots1-x^5.1-x^7.1-x^{17}.1-x^{19}\ldots$$

Hieraus ergeben sich zugleich die Factoren des letzten Theils in 31.

Aus der Subtraction von 28 und 30

37. $$(1-2x^9+2x^{36}-2x^{81}+\,.\,.)-(1-2x^3+2x^{12}-\,.\,.)$$
$$=2.1-x^3.1-x^9.1-x^{15}\,.\,.\,\frac{1}{x^{\frac{1}{8}}}(x^{\frac{25}{8}}+x^{\frac{49}{8}}+x^{\frac{289}{8}}+x^{\frac{361}{8}}+\,.\,.)$$

Setzt man in 6 statt x, x^6 und statt y, x^5y, so wird

$$1+x^{11}y.1+x^{23}y.1+x^{35}y\ldots 1+\frac{x}{y}.1+\frac{x^{13}}{y}.1+\frac{x^{25}}{y}\ldots.[x^{12}]$$
$$=1+\frac{x}{y}+x^{11}y+\frac{x^{14}}{yy}+x^{34}yy+\ldots$$

Also die Zerlegung in Factoren

38. $$(1-2x^5+2x^{36}-2x^{81}+\,.\,.)-(1-2x^3+2x^{12}-\,.\,.)$$
$$=2x^3[x^{36}].1+x^3.1+x^{33}.1+x^{39}.1+x^{69}\ldots 1-x^3.1-x^9.1-x^{15}\ldots$$

39. $$(1-2x^3+2x^{12}-2x^{27}+\,.\,.)-(1-2x+2x^4-\,.\,.)$$
$$=2x[x^{12}].1+x.1+x^{11}.1+x^{13}.1+x^{23}\ldots 1-x.1-x^3.1-x^5\ldots$$

40. $$(1+2x^3+2x^{12}+2x^{27}+\,.\,.)-(1+2x^9+2x^{36}+\,.\,.)$$
$$=2x^3[x^{36}].1-x^3.1-x^{33}.1-x^{39}.1-x^{69}\ldots 1+x^3.1+x^9.1+x^{15}\ldots$$

41. $$(1+2x+2x^4+2x^9+\,.\,.)-(1+2x^3+2x^{12}+\,.\,.)$$
$$=2x[x^{12}].1-x.1-x^{11}.1-x^{13}.1-x^{23}\ldots 1+x.1+x^3.1+x^5\ldots$$

Aus der Subtraction von 29 und 30 folgt

42. $$(1-2x^3+2x^{12}-2x^{27}+\,.\,.)-(1-2x+2x^4-\,.\,.)$$
$$=2.1-x^3.1-x^9.1-x^{15}\ldots\frac{1}{x^{\frac{1}{8}}}(x^{\frac{9}{8}}-x^{\frac{25}{8}}-x^{\frac{49}{8}}+x^{\frac{81}{8}}+x^{\frac{225}{8}}-\,.\,.)$$

Woraus die Zerlegung des letzten Gliedes dieser Gleichung in Factoren folgt.

Aus der Multiplication von 34 und 39 folgt

43. $$(1-2x^3+2x^{12}-2x^{27}+\,.\,.)^2-(1-2x+2x^4-\,.\,.)^2$$
$$=4x[x^{12}]^2.(1-x)^2(1-x^3)^2(1-x^5)^2\ldots 1+x.1+x^5.1+x^7.1+x^{11}\ldots$$
$$=4x\frac{[x^{12}]^2[x]^2}{[xx]^2}\cdot\frac{[xx]^2[x^3][x^{12}]}{[x][x^4][x^6]^2}=4x\frac{[x][x^3][x^{12}]^3}{[x^4][x^6]^2}$$

Ebenso aus der Multiplication von 36 und 41

44. $$(1+2x+2x^4+\ldots)^2-(1+2x^3+2x^{12}+2x^{27}+\ldots)^2$$
$$= 4x[x^{12}]^2.(1+x)^2(1+x^3)^2(1+x^5)^2\ldots 1-x.1-x^5.1-x^7.1-x^{11}\ldots$$
$$= 4x\frac{[x^{12}]^2[xx]^4}{[x]^2[x^4]^2}\cdot\frac{[x][x^6]}{[xx][x^3]} = 4x\frac{[xx]^3[x^6][x^{12}]^2}{[x][x^3][x^4]^2}$$

Also der Quotient

45. $$\frac{(1-2x^3+2x^{12}-2x^{27}+\ldots)^2-(1-2x+2x^4-\ldots)^2}{(1+2x^3+2x^{12}+2x^{27}+\ldots)^2-(1+2x+2x^4+\ldots)^2}$$
$$= -\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3\left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)\left(\frac{1-x^5}{1+x^5}\right)^3\left(\frac{1-x^7}{1+x^7}\right)^3\left(\frac{1-x^9}{1+x^9}\right)\ldots$$
$$= \frac{[x]^2[x^3]^2[x^4][x^{12}]}{[xx]^3[x^6]^3}$$

und das Product

45^b. $$\{(1-2x^3+2x^{12}-\ldots)^2-(1-2x+2x^4-\ldots)^2\}$$
$$\times\{(1+2x^3+2x^{12}+\ldots)^2-(1+2x+2x^4+\ldots)^2\}$$
$$= -16xx\frac{[xx]^3[x^{12}]^5}{[x^4]^3[x^6]}$$

Aus $28+i30$ folgt

46. $$(1-2x^9+2x^{36}-\ldots)-i(1-2x^3+2x^{12}-\ldots)$$
$$= 1-x^3.1-x^9.1-x^{15}\ldots\frac{1-i}{x^{\frac{1}{8}}}(x^{\frac{1}{8}}+ix^{\frac{25}{8}}+ix^{\frac{49}{8}}+x^{\frac{121}{8}}+\ldots)$$

Nun findet man aus 6 nach dem, was zwischen 22 und 23 gezeigt ist

$$1+x^4y.1+x^{10}y.1+x^{16}y\ldots 1+\frac{xx}{y}.1+\frac{x^8}{y}.1+\frac{x^{14}}{y}\ldots 1-x^6.1-x^{12}\ldots$$
$$= 1+\frac{xx}{y}+x^4y+\frac{x^{10}}{yy}+x^{14}yy+\ldots$$

Also

$$1+x^4i.1-x^{10}i.1+x^{16}i\ldots 1-\frac{xx}{i}.1+\frac{x^8}{i}.1-\frac{x^{14}}{i}\ldots 1+x^6.1-x^{12}.1+x^{18}\ldots$$
$$= 1+ixx+ix^4+x^{10}+x^{14}+\ldots$$

Daher die Zerlegung in Factoren

47. $$(1-2x^3+2x^{12}-\ldots)-i(1-2x+2x^4-\ldots)$$
$$= 1-x.1-x^3.1-x^5\ldots 1-i.1+x^3.1-x^6.1+x^9\ldots$$
$$\times 1+ix.1+ixx.1-ix^4.1-ix^5.1+ix^7.1+ix^8\ldots$$

und ferner

48. $(1-2x^3+2x^{12}-\,.\,.)+i(1-2x+2x^4-\,.\,.)$

$$= 1-x\,.\,1-x^3\,.\,1-x^5\ldots\ 1+i\,.\,1+x^3\,.\,1-x^6\,.\,1+x^9\ldots$$
$$\times 1-ix\,.\,1-ixx\,.\,1+ix^4\,.\,1+ix^5\,.\,1-ix^7\,.\,1-ix^8\ldots$$

49. $(1+2x^3+2x^{12}+\,.\,.)-i(1+2x+2x^4+\,.\,.)$

$$= 1+x\,.\,1+x^3\,.\,1+x^5\ldots\ 1-i\,.\,1-x^3\,.\,1-x^6\,.\,1-x^9\ldots$$
$$\times 1-ix\,.\,1+ixx\,.\,1-ix^4\,.\,1+ix^5\ldots$$

50. $(1+2x^3+2x^{12}+\,.\,.)+i(1+2x+2x^4+\,.\,.)$

$$= 1+x\,.\,1+x^3\,.\,1+x^5\ldots\ 1+i\,.\,1-x^3\,.\,1-x^6\,.\,1-x^9\ldots$$
$$\times 1+ix\,.\,1-ixx\,.\,1+ix^4\,.\,1-ix^5\ldots$$

Also aus der Multiplication von 47 und 48

51. $(1-2x^3+2x^{12}-\ldots)^2+(1-2x+2x^4-\ldots)^2$

$$= 2(1-x)^2(1-x^3)^2(1-x^5)^2\ldots(1+x^3)^2(1-x^6)^2(1+x^9)^2\ldots$$
$$\times 1+xx\,.\,1+x^4\,.\,1+x^8\,.\,1+x^{10}\ldots$$
$$= 2(1-x)^2(1-x^3)^2(1-x^5)^2\ldots(1+x^3)^2\,1+x^9)^2\ldots$$
$$\times(1-x^6)^3(1-x^{12})^2\ldots\ 1+xx\,.\,1+x^4\,.\,1+x^6\,.\,1+x^8\ldots$$
$$= 2\,\frac{[x]^2[x^6]^4}{[xx]^2[x^8]^2[x^{12}]^2}\cdot\frac{[x^6]^3}{[x^{12}]}\cdot\frac{[x^4]}{[xx]} = \frac{2[x]^2[x^4][x^6]^7}{[x^2]^3[x^8]^2[x^{12}]^3}$$

und aus der Multiplication von 49 und 50

52. $(1+2x^3+2x^{12}+\,.\,.)^2+(1+2x+2x^4+\ldots)^2$

$$= 2(1+x)^2(1+x^3)^2(1+x^5)^2\ldots(1-x^3)^2(1-x^6)^2(1-x^9)^2\ldots$$
$$\times 1+xx\,.\,1+x^4\,.\,1+x^8\,.\,1+x^{10}\ldots$$
$$= 2\,\frac{[xx]^4}{[x]^2[x^4]^2}\,[x^3]^2\,\frac{[x^4][x^6]}{[xx][x^{12}]} = \frac{2[xx]^3[x^3]^2[x^6]}{[x]^2[x^4][x^{12}]}$$

und der Quotient

53. $$\frac{(1-2x^3+2x^{12}-\,.\,.)^2+(1-2x+2x^4-\,.\,.)^2}{(1+2x^3+2x^{12}+\,.\,.)^2+(1+2x+2x^4+\,.\,.)^2}$$

$$= \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)^2\left(\frac{1-x^5}{1+x^5}\right)^2\ldots\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^2\left(\frac{1+x^9}{1-x^9}\right)^2\ldots$$
$$= \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\left(\frac{1-x^5}{1+x^5}\right)^2\left(\frac{1-x^7}{1+x^7}\right)^2\ldots = \frac{[x]^4[x^4]^2[x^6]^6}{[x^2]^6[x^8]^4[x^{12}]^2}$$

und das Product

54. $$\{(1-2x^3+\,.\,.)^2+(1-2x+\,.\,.)^2\}\,\{(1+2x^3+\,.\,.)^2-(1+2x+\,.\,.)^2\}$$
$$=4\,\frac{[x^6]^8}{[x^{12}]^4}=4\,(1-2x^6+2x^{24}-\,.\,.)^2$$

Aus Formel 23 folgt

55. $$x+x^9+x^{25}+\,.\,.=x\,.\,1+x^8\,.\,1+x^{16}\,.\,1+x^{24}\,.\,.\,.\,(1-x^{16}-x^{32}+x^{80}+x^{112}-\,.\,.)$$

$$\tfrac{3}{2}\text{ Exponent }=\square-1$$

Aus Formel 26 folgt

56. $$x^3+x^{27}+x^{75}+\,.\,.=x\,.\,1+x^8\,.\,1+x^{16}\,.\,1+x^{24}\,.\,.\,.\,(x^2-x^{10}-x^{42}+x^{66}+x^{130}-\,.\,.)$$

oder $x^{\frac{1}{3}}\,.\,1+x^8\,.\,1+x^{16}\,.\,1+x^{24}\,.\,.\,.=A,\quad x^2=t^3$ gesetzt

55. $$x+x^9+x^{25}+\,.\,.=A\,(t-t^{25}-t^{49}+t^{121}+t^{169}-\,.\,.\,.)$$

56. $$x^3+x^{27}+x^{75}+\,.\,.=A\,(t^4-t^{16}-t^{64}+t^{100}+t^{196}-\,.\,.\,.)$$

Nun folgt aus der Factorenzerlegung in 24 sehr leicht, wenn man statt x, it statt y, i setzt

$$it-it^4+it^{16}-it^{25}-it^{49}+\,.\,.$$
$$=it\,.\,1-t^3\,.\,1+t^{15}\,.\,1+t^{21}\,.\,1-t^{33}\,.\,.\,.\,1+t^{18}\,.\,1-t^{36}\,.\,1+t^{54}\,.\,.\,.$$

Also aus 55 — 56

57. $$(x+x^9+x^{25}+\,.\,.)-(x^3+x^{27}+x^{75}+\,.\,.)$$
$$=x\,.\,1-xx\,.\,1+x^{10}\,.\,1+x^{14}\,.\,1-x^{22}\,.\,1-x^{26}\,.\,.\,.$$
$$\times 1+x^{12}\,.\,1-x^{24}\,.\,1+x^{36}\,.\,.\,.\,1+x^8\,.\,1+x^{16}\,.\,1+x^{24}\,.\,.\,.$$

Und so sehr leicht

58. $$(x+x^9+x^{25}+\,.\,.)+(x^3+x^{27}+x^{75}+\,.\,.)$$
$$=x\,.\,1+xx\,.\,1-x^{10}\,.\,1-x^{14}\,.\,1+x^{22}\,.\,1+x^{26}\,.\,.\,.$$
$$\times 1+x^{12}\,.\,1-x^{24}\,.\,1+x^{36}\,.\,.\,.\,1+x^8\,.\,1+x^{16}\,.\,1+x^{24}\,.\,.\,.$$

Also durch Multiplication

59. $$\begin{aligned}&(x+x^9+x^{25}+\,.\,.)^2-(x^3+x^{27}+x^{75}+\,.\,.)^2\\ &= xx.1-x^4.1-x^{20}.1-x^{28}.1-x^{44}.1-x^{52}\ldots\\ &\qquad\times(1+x^{12})^2(1-x^{24})^2(1+x^{36})^2\ldots(1+x^8)^2(1+x^{16})^2\ldots\\ &= xx\frac{[x^4][x^{16}]^2[x^{24}]^7}{[x^8]^3[x^{12}]^3[x^{48}]^2}\end{aligned}$$

Eben so folgt aus der Factorenzerlegung in 24, wenn man statt x, t und statt y, $-i$ setzt

$$t+it^4-it^{16}-t^{25}-t^{49}\ldots = t.1+it^3.1-it^{15}.1+it^{21}.1-it^{33}\ldots[t^{18}]$$

also

60. $$\begin{aligned}&(x+x^9+x^{25}+\ldots)+i(x^3+x^{27}+x^{75}+\ldots)\\ &= x.1+ixx.1-ix^{10}.1+ix^{14}.1-ix^{22}\ldots 1+x^8.1+x^{16}\ldots 1-x^{12}.1-x^{24}\ldots\end{aligned}$$

und eben so

61. $$\begin{aligned}&(x+x^9+x^{25}+\ldots)-i(x^3+x^{27}+x^{75}+\ldots)\\ &= x.1-ixx.1+ix^{10}.1-ix^{14}.1+ix^{22}\ldots 1+x^8.1+x^{16}\ldots 1-x^{12}.1-x^{24}\ldots\end{aligned}$$

Also durch Multiplication

62. $$\begin{aligned}&(x+x^9+x^{25}+\ldots)^2+(x^3+x^{27}+\,.\,.)^2\\ &= xx\frac{[x^8]^2}{[x^4][x^{16}]}\cdot\frac{[x^{12}][x^{48}]}{[x^{24}]^2}\cdot\frac{[x^{16}]^2}{[x^8]^2}\cdot[x^{12}]^2 = xx\frac{[x^{12}]^3[x^{16}][x^{48}]}{[x^4][x^{24}]^2}\end{aligned}$$

Also Product von 59 und 62

63. $$(x+x^9+x^{25}+\ldots)^4-(x^3+x^{27}+x^{75}+\,.\,.)^4 = x^4\frac{[x^{16}]^3[x^{24}]^5}{[x^8]^3[x^{48}]}$$

Durch Multiplication von 62 und 44 folgt

64. $$\begin{aligned}&\left\{(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{9}{2}}+x^{\frac{25}{2}}+\,.\,.)^2+(x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{27}{2}}+\,.\,.)^2\right\}\\ &\times\left\{(1+2x^2+2x^8+\,.\,.)^2-(1+2x^6+2x^{24}+\,.\,.)^2\right\}\\ &= 4xx\frac{[x^4]^3[x^{12}][x^{24}]^2}{[x^2][x^6][x^8]^2}\cdot x\frac{[x^6]^3[x^8][x^{24}]}{[x^2][x^{12}]^2} = 4x^3\frac{[x^4]^3[x^6]^2[x^{24}]^3}{[x^2]^2[x^{12}][x^8]}\end{aligned}$$

Durch Multiplication von 59 und 44

65.
$$\left\{(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{9}{2}}+x^{\frac{25}{2}}+\,.\,.)^2-(x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{27}{2}}+\,.\,.)^2\right\}$$
$$\times\left\{(1+2x^2+2x^8+\,.\,.)^2-(1+2x^6+2x^{24}+\,.\,.)^2\right\}$$
$$=4x^3\frac{[xx][x^8]^2[x^{12}]^7}{[x^4]^3[x^6]^3[x^{24}]^2}\cdot\frac{[x^4]^3[x^{12}][x^{24}]^2}{[x^2][x^6][x^8]^2}$$
$$=4x^3\frac{[x^{12}]^8}{[x^6]^4}=4(x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{27}{4}}+x^{\frac{75}{4}}+\,.\,.)^4$$

Man hat ferner

66. $$[x]=\frac{a^{\frac{1}{12}}b^{\frac{1}{3}}(aa-bb)^{\frac{1}{24}}}{2^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{24}}\sqrt{h}}\qquad\qquad \frac{a}{h}=\frac{[x^2]^{10}}{[x]^4[x^4]^4}$$

67. $$[xx]=\frac{a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}(aa-bb)^{\frac{1}{12}}}{2^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{12}}\sqrt{h}}\qquad\qquad \frac{b}{h}=\frac{[x]^4}{[xx]^2}$$

68. $$[x^4]=\frac{a^{\frac{1}{12}}b^{\frac{1}{12}}(aa-bb)^{\frac{1}{6}}}{2^{\frac{4}{3}}x^{\frac{1}{6}}\sqrt{h}}\qquad\qquad \frac{aa-bb}{hh}=16x\frac{[x^4]^8}{[xx]^4}$$

Für die Fünf-Theilung $\left\{\begin{matrix}a & b\\ A & B\end{matrix}\right\}$

$$\left(\frac{a-A}{5A-a}\right)^4=\frac{AA-BB}{aa-bb}\cdot\frac{BB}{bb}$$
$$\left(\frac{B-b}{5B-b}\right)^4=\frac{AA-BB}{aa-bb}\cdot\frac{AA}{aa}$$
$$\frac{a-A}{B-b}=\frac{5B-b}{5A-a}=\sqrt[4]{\frac{aB}{bA}}$$

$$(a-A)(5A-a)^5=256\,Aabb(aa-bb)$$
$$(B-b)(5B-b)^5=256\,Baab(aa-bb)$$

$$(a-A)^5(5A-a)=256\,AaBB(AA-BB)$$
$$(B-b)^5(5B-b)=256\,AAbB(AA-BB)$$

$$a-A=\frac{4x[xx]^2[x^5][x^{20}]}{[x][x^4]}=2^{\frac{4}{3}}\frac{a^{\frac{1}{6}}A^{\frac{1}{6}}B^{\frac{5}{12}}(AA-BB)^{\frac{5}{24}}}{b^{\frac{1}{12}}(aa-bb)^{\frac{1}{24}}}$$

$$5A-a=4\frac{[x][x^4][x^{10}]^2}{[x^5][x^{20}]}=2^{\frac{4}{3}}\frac{a^{\frac{1}{6}}A^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{12}}(aa-bb)^{\frac{5}{24}}}{B^{\frac{1}{12}}(AA-BB)^{\frac{1}{24}}}$$

Zu der Theorie der Fünftheilung gehören folgende Theoreme. Wir bezeichnen $1+xy.1+x^3y.1+x^5y\ldots 1+\frac{x}{y}.1+\frac{x^3}{y}.1+\frac{x^5}{y}\ldots$ durch (x,y), so ist

$$[69] \qquad (x,\alpha y).(x,\tfrac{y}{\alpha}) = P\{1+xx(yy+\tfrac{1}{yy})+x^8(y^4+\tfrac{1}{y^4})+\ldots\} \\ +Q\{y+\tfrac{1}{y}+x^4(y^3+\tfrac{1}{y^3})+x^{12}(y^5+\tfrac{1}{y^5})+\ldots\}$$

wo P, Q von y unabhängig.

Also

$$(x,\alpha i)(x,\tfrac{\alpha}{i}) = (xx,\alpha\alpha) = P(1-2xx+2x^8-\ldots) = \frac{[xx]^2}{[x^4]}P$$

oder

$$P = (xx,\alpha\alpha)\frac{[x^4]}{[xx]^2}$$

Ferner für $y=-\alpha x$

$$(x,-\alpha\alpha x).(x,-x) = 0 \\ = P(1+\tfrac{1}{\alpha\alpha}+\alpha\alpha x^4+\tfrac{x^4}{\alpha^4}+\ldots)-Q(\alpha x+\tfrac{1}{\alpha x}+\tfrac{x}{\alpha^3}+\alpha^3x^7+\tfrac{x^7}{\alpha^5}+\ldots)$$

d. i.

$$P\{\alpha+\tfrac{1}{\alpha}+x^4(\alpha^3+\tfrac{1}{\alpha^3})+x^{12}(\alpha^5+\tfrac{1}{\alpha^5})+\ldots\} \\ = \frac{Q}{x}\{1+xx(\alpha\alpha+\tfrac{1}{\alpha\alpha})+x^8(\alpha^4+\tfrac{1}{\alpha^4})+\ldots\}$$

Nun ist

$$P = \frac{1}{[xx]^2}\{1+xx(\alpha\alpha+\tfrac{1}{\alpha\alpha})+\ldots\}$$

Also

$$Q = \frac{x}{[xx]}\{(\alpha+\tfrac{1}{\alpha})+x^4(\alpha^3+\tfrac{1}{\alpha^3})+\ldots\}$$

und unser Theorem

$$70. \quad (x,\alpha y).(x,\tfrac{y}{\alpha}) = \frac{1}{[xx]^2}\left\{\begin{array}{l} \{1+xx(\alpha\alpha+\tfrac{1}{\alpha\alpha})+x^8(\alpha^4+\tfrac{1}{\alpha^4})+\ldots\} \\ \times\{1+xx(yy+\tfrac{1}{yy})+x^8(y^4+\tfrac{1}{y^4})+\ldots\} \\ +x\{\alpha+\tfrac{1}{\alpha}+x^4(\alpha^3+\tfrac{1}{\alpha^3})+x^{12}(\alpha^5+\tfrac{1}{\alpha^5})+\ldots\} \\ \times\{y+\tfrac{1}{y}+x^4(y^3+\tfrac{1}{y^3})+x^{12}(y^5+\tfrac{1}{y^5})+\ldots\} \end{array}\right\}$$

oder

$$(x, \alpha y).(x, \tfrac{y}{\alpha}) = \frac{[x^4]^2}{[xx]^2}\{(xx, \alpha\alpha).(xx, yy) + x\alpha y\,(xx, \alpha\alpha xx).(xx, xxyy)\}$$

(Man kann auch leicht die Reihe, wodurch P multiplicirt ist, $= 0$ machen, durch $y = ix$)

71. $$(x, y) + (x, \tfrac{x}{y})\sqrt[4]{\frac{x}{yy}} = (x^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{2}})\frac{[x^{\frac{1}{2}}]}{[xx]}$$

$$(x, \alpha x) = \frac{1}{\alpha}(x, \tfrac{x}{\alpha}), \qquad (x, \alpha xx) = \frac{1}{\alpha x}(x, \alpha)$$

Den Satz 70 kann man auch so enonciren

72. $$(x, \alpha).(x, \beta) = \frac{[x^4]^2}{[xx]^2}\{(xx, \alpha\beta).(xx, \tfrac{\alpha}{\beta}) + x\alpha(xx, \alpha\beta xx).(xx, \tfrac{\alpha xx}{\beta})\}$$

Hieraus folgt

$$(x, \tfrac{x}{\alpha}).(x, \tfrac{x}{\beta}) = \frac{[x^4]^2}{[xx]^2}\{(xx, \tfrac{xx}{\alpha\beta}).(xx, \tfrac{\alpha}{\beta}) + \alpha(xx, \alpha\beta).(xx, \tfrac{\alpha xx}{\beta})\}$$

hieraus ferner

73. $$(x, \alpha).(x, \beta) + (x, \tfrac{x}{\alpha}).(x, \tfrac{x}{\beta})\sqrt{\frac{x}{\alpha\beta}} = \frac{[x]^2}{[xx]^2}.(x^{\frac{1}{2}}, \sqrt{\alpha\beta}).(x^{\frac{1}{2}}, \sqrt{\tfrac{\beta}{\alpha}})$$

Nun ist

$$\frac{1 + 2x + 2x^4 + \ldots}{1 + 2x^5 + 2x^{20} + \ldots} = \frac{(ix^{\frac{5}{2}}, ix^{\frac{3}{2}}).(ix^{\frac{5}{2}}, -ix^{\frac{1}{2}})}{(ix^{\frac{5}{2}}, -ix^{\frac{3}{2}}).(ix^{\frac{5}{2}}, ix^{\frac{1}{2}})}$$

$$= \frac{(-x^5, xx)(-x^5, -x) + x(-x^5, -x^3)(-x^5, x^4)}{(-x^5, xx)(-x^5, -x) - x(-x^5, -x^3)(-x^5, x^4)}$$

Woraus der erste zu beweisende Satz von selbst folgt. Ebenso ist

$$\frac{1 + 2x + 2x^4 + \ldots}{1 + 2x^5 + 2x^{20} + \ldots} = \frac{1 - \varepsilon x.1 - \varepsilon\varepsilon x.1 - \varepsilon^3 x.1 - \varepsilon^4 x.1 + \varepsilon xx.1 + \varepsilon\varepsilon xx.1 + \varepsilon^3 xx.1 + \varepsilon^4 xx\ldots}{1 + \varepsilon x.1 + \varepsilon\varepsilon x.1 + \varepsilon^3 x.1 + \varepsilon^4 x.1 - \varepsilon xx.1 - \varepsilon\varepsilon xx.1 - \varepsilon^3 xx.1 - \varepsilon^4 xx\ldots}$$

$$= \frac{1 - \varepsilon^4.1 - \varepsilon^3}{1 + \varepsilon^4.1 + \varepsilon}.\frac{(ix^{\frac{1}{2}}, i\varepsilon x^{\frac{1}{2}}).(ix^{\frac{1}{2}}, i\varepsilon\varepsilon x^{\frac{1}{2}})}{(ix^{\frac{1}{2}}, -i\varepsilon x^{\frac{1}{2}}).(ix^{\frac{1}{2}}, i\varepsilon\varepsilon x^{\frac{1}{2}})}$$

$$= \frac{\varepsilon\varepsilon - \varepsilon^3.\varepsilon - \varepsilon^4}{\varepsilon\varepsilon + \varepsilon^3.\varepsilon + \varepsilon^4}.\frac{(-x, -\varepsilon^3 x).(-x, \varepsilon) - \varepsilon x(-x, \varepsilon^3 xx)(-x, -\varepsilon x)}{(-x, -\varepsilon^3 x).(-x, \varepsilon) + \varepsilon x(-x, \varepsilon^3 xx)(-x, -\varepsilon x)}$$

$$= \frac{-\varepsilon + \varepsilon\varepsilon + \varepsilon^3 - \varepsilon^4}{+\varepsilon + \varepsilon\varepsilon + \varepsilon^3 + \varepsilon^4}.\frac{(x, \varepsilon^3 x).(x, -\varepsilon) + \varepsilon^3(x, -\varepsilon^3)(x, \varepsilon x)}{(x, \varepsilon^3 x).(x, -\varepsilon) - \varepsilon^3(x, -\varepsilon^3)(x, \varepsilon x)}$$

Woraus der zweite zu beweisende Satz von selbst folgt.

$$(x,x) = 2(1+xx)^2(1+x^4)^2\ldots = 2\frac{[x^4]^2}{[xx]^2}$$

$$(x,1) = (1+x)^2\ (1+x^3)^2\ldots = \frac{[xx]^4}{[x]^2[x^4]^2}$$

Man hat also

$$(x,\alpha)^2 = \frac{[x^4]^2}{[xx]^2}\left\{(xx,\alpha\alpha)\frac{[x^4]^4}{[xx]^2[x^8]^2} + 2x\alpha(xx,\alpha\alpha xx)\frac{[x^8]^2}{[x^4]^2}\right\}$$

Durch die Entwickelung von $(x,y)^3$ erhält man

$$P\{1+x^3(y^3+\tfrac{1}{y^3})+\ldots\}+Q\{x^{\frac{1}{3}}(y+\tfrac{1}{y})+x^{\frac{4}{3}}(yy+\tfrac{1}{yy})+x^{\frac{16}{3}}(y^4+\tfrac{1}{y^4})+\ldots\}$$

also für $y = -\varepsilon x$

$$(1-\varepsilon\varepsilon)^3\frac{[x^6]^3}{[x^2]^3} = Qx^{-\frac{2}{3}}\{\varepsilon-\varepsilon\varepsilon-(\varepsilon-\varepsilon\varepsilon)xx-\ldots\}$$

oder

$$3x^{\frac{2}{3}}.\frac{[x^6]^3}{[x^3]^3} = Q(1-xx-x^4+x^{10}+x^{14}-\ldots) = [xx]\,Q$$

also

$$Q = 3x^{\frac{2}{3}}.\frac{[x^6]^3}{[xx]^4}$$

Durch Entwickelung von $(x,y).(x,-y)^2$ erhält man

$$P'\{1+x^3(y^3+\tfrac{1}{y^3})+\ldots\}+Q'\{x^{\frac{1}{3}}(y+\tfrac{1}{y})+x^{\frac{4}{3}}(yy+\tfrac{1}{yy})+\ldots\}$$

$$(1-\varepsilon\varepsilon)(1+\varepsilon\varepsilon)^2\frac{[x^6][x^8][x^{12}]^3}{[xx][x^4]^3[x^{24}]} = Q'x^{-\frac{2}{3}}(\varepsilon-\varepsilon\varepsilon)[xx]$$

$$Q' = -x^{\frac{2}{3}}\frac{[x^6][x^8][x^{12}]^3}{[xx]^2[x^4]^3[x^{24}]}$$

Man folgert hieraus leicht, dass man setzen darf

$$T(x,y)^3 + U(x,y)(x,-y)^2 = (x^3,y^3)$$

so dass T und U Functionen von x. Um sie zu bestimmen setzen wir

1) $y = x$ so wird $T(x,x)^3 = (x^3, x^3)$ oder $T = \frac{1}{4}\frac{[x^{12}]^2[xx]^6}{[x^6]^2[x^4]^6}$

2) $y = -\varepsilon x$ so wird $T(x, -\varepsilon x)^2 = U(x, +\varepsilon x)^2$

oder

$$T\frac{(1-\varepsilon\varepsilon)^2[x^6]^2}{[xx]^2} = \frac{[x^{12}]^2[xx]^2}{[x^6]^2[x^4]^2}U(1+\varepsilon\varepsilon)^2$$

oder

$$T = -\tfrac{1}{3}U\frac{[xx]^4[x^{12}]^2}{[x^6]^4[x^4]^2}$$

oder

$$U = -\tfrac{3}{4}\frac{[x^6]^2[xx]^2}{[x^4]^4}$$

folglich

$$\frac{T\left[\frac{(x,-y)}{(x,y)}\right]^3 + U\frac{(x,-y)}{(x,y)}}{T + U\left[\frac{(x,-y)}{(x,y)}\right]^2} = \frac{(x^3,-y^3)}{(x^3,y^3)}$$

also

$$\frac{\frac{[xx]^4}{[x^4]^2}\left[\frac{(x,-y)}{(x,y)}\right]^3 - 3\frac{[x^6]^4}{[x^{12}]^2}\frac{(x,-y)}{(x,y)}}{\frac{[xx]^4}{[x^4]^2} - 3\frac{[x^6]^4}{[x^{12}]^2}\left[\frac{(x,-y)}{(x,y)}\right]^2} = \frac{(x^3,-y^3)}{(x^3,y^3)}$$

[IV.]

HUNDERT THEOREME ÜBER DIE NEUEN TRANSSCENDENTEN.

1.

Es sei

$$T = 1 + \frac{a^n-1}{a-1}\,.\,t + \frac{a^n-1\,.\,a^n-a}{a-1\,.\,aa-1}\,.\,tt + \frac{a^n-1\,.\,a^n-a\,.\,a^n-aa}{a-1\,.\,aa-1\,.\,a^3-1}\,.\,t^3$$
$$+ \frac{a^n-1\,.\,a^n-a\,.\,a^n-aa\,.\,a^n-a^3}{a-1\,.\,aa-1\,.\,a^3-1\,.\,a^4-1}\,.\,t^4 + \text{ u.s.w.}$$

indem wir n, a, t ganz unbestimmt lassen. So oft n eine ganze nicht negative Zahl ist, bricht die Reihe offenbar ab und besteht aus $n+1$ Gliedern, auch sind dann, wie wir in der Abhandlung *Summatio quarundam serierum singularium* gezeigt haben, alle Coëfficienten ungebrochne Functionen von a. Ist aber n gebrochen oder negativ, so findet beides nicht Statt.

Indem man T mit $1+a^n t$ multiplicirt erhält man

$$T.(1+a^n t) = 1 + \frac{a^{n+1}-1}{a-1}\,.\,t + \frac{a^{n+1}-1\,.\,a^{n+1}-a}{a-1\,.\,aa-1}\,.\,tt + \frac{a^{n+1}-1\,.\,a^{n+1}-a\,.\,a^{n+1}-aa}{a-1\,.\,aa-1\,.\,a^3-1}\,.\,t^3 + \text{etc.}$$

Indem man also in T das Element n als veränderlich ansieht, und sich des Functionalzeichens θ bedient, dass

$$T = \theta n$$

wird man haben

$$\theta(n+1) = (1+a^n t)\,\theta n$$

Hieraus folgt das 1. Theorem.

Wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet, ist

$$1+\frac{a^n-1}{a-1}t+\frac{a^n-1.a^n-a}{a-1.aa-1}tt+\frac{a^n-1.a^n-a.a^n-aa}{a-1.aa-1.a^3-1}t^3+\text{ etc.}\ldots$$
$$=(1+t)(1+at)(1+aat)(1+a^3t)\ldots(1+a^{n-1}t)$$

2.

Wenn wir T auf folgende Art schreiben

$$1+\frac{1-a^n}{1-a}t+\frac{1-a^n}{1-a}.\frac{1-a^{n-1}}{1-aa}.att+\frac{1-a^n}{1-a}.\frac{1-a^{n-1}}{1-aa}.\frac{1-a^{n-2}}{1-a^3}a^3t^3$$
$$+\frac{1-a^n}{1-a}.\frac{1-a^{n-1}}{1-aa}.\frac{1-a^{n-2}}{1-a^3}.\frac{1-a^{n-3}}{1-a^4}.a^6.t^4+\text{ etc.}$$

wo die Exponenten von a die Trigonalzahlen sein werden, so erhellet, dass das letzte Glied sein wird

$$a^{\frac{1}{2}(nn-n)}t^n=y^n$$

wenn wir $a^{\frac{1}{2}(n-1)}t=y$ setzen. Die ganze Reihe wird dann, indem wir das letzte Glied mit dem ersten, das vorletzte mit dem zweiten etc. zusammenfassen, für ein gerades n

$$(1+y^n)+\frac{1-a^n}{1-a}t(1+y^{n-2})+\frac{1-a^n}{1-a}.\frac{1-a^{n-1}}{1-aa}at(1+y^{n-4})+\ldots$$
$$+\frac{1-a^n}{1-a}.\frac{1-a^{n-1}}{1-aa}\ldots\frac{1-a^{\frac{1}{2}n+3}}{1-a^{\frac{1}{2}n-1}}a^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}n-1)(\frac{1}{2}n-2)}t^{\frac{1}{2}n-1}(1+yy)$$
$$+\frac{1-a^n}{1-a}.\frac{1-a^{n-1}}{1-aa}\ldots\frac{1-a^{\frac{1}{2}n+1}}{1-a^{\frac{1}{2}n}}a^{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}n.\frac{1}{2}n-1}t^{\frac{1}{2}n}$$

indem das mittelste Glied isolirt stehen bleibt. Bezeichnen wir dasselbe durch A und setzen $a=xx$, so wird die Reihe

$$A\{1+\frac{1-x^n}{1-x^{n+2}}x(y+y^{-1})+\frac{1-x^n}{1-x^{n+2}}.\frac{1-x^{n-2}}{1-x^{n+4}}x^4(yy+y^{-2})$$
$$+\frac{1-x^n}{1-x^{n+2}}.\frac{1-x^{n-2}}{1-x^{n+4}}.\frac{1-x^{n-4}}{1-x^{n+6}}x^9(y^3+y^{-3})+\ldots\}$$

u. s. w. welche Reihe aus $\frac{1}{2}(n+2)$ Gliedern besteht und dann abbricht.

Unser Product $(1+t)(1+at)(1+aat)\ldots(1+a^{n-1}t)$ hingegen verwandelt sich

$$(1+\frac{y}{x^{n-1}})(1+\frac{y}{x^{n-3}})(1+\frac{y}{x^{n-5}})\ldots(1+x^{n-1}y)$$

Das Product der ersten Hälfte der Factoren

$$=\frac{y^{\frac{1}{2}n}}{x^{\frac{1}{4}nn}}.(1+\frac{x^{n-1}}{y})(1+\frac{x^{n-3}}{y})(1+\frac{x^{n-5}}{y})\ldots(1+\frac{x^3}{y})(1+\frac{x}{y}$$

wozu noch die übrigen kommen

$$(1+xy)(1+x^3y(1+x^5y)\ldots(1+x^{n-1}y)$$

Da nun

$$A=\frac{1-x^{n+2}}{1-xx}.\frac{1-x^{n+4}}{1-x^4}.\frac{1-x^{n+6}}{1-x^6}\ldots\frac{1-x^{2n}}{1-x^n}.\frac{y^{\frac{1}{2}n}}{x^{\frac{1}{4}nn}}$$

wird, so verwandelt sich das erste Theorem in folgendes zweite: *für ein gerades n wird*:

$$1+\frac{1-x^n}{1-x^{n+2}}.x(y+\frac{1}{y})+\frac{1-x^n}{1-x^{n+2}}.\frac{1-x^{n-2}}{1-x^{n+4}}.x^4(yy+\frac{1}{yy})$$
$$+\frac{1-x^n}{1-x^{n+2}}.\frac{1-x^{n-2}}{1-x^{n+4}}.\frac{1-x^{n-4}}{1-x^{n+6}}.x^9(y^3+y^{-3})+\text{ etc.}$$
$$=(1+xy)(1+x^3y)(1+x^5y)\ldots(1+x^{n-1}y)(1+\frac{x}{y})(1+\frac{x^3}{y})(1+\frac{x^5}{y})\ldots(1+\frac{x^{n-1}}{y})$$
$$\times\frac{1-xx}{1-x^{n+2}}.\frac{1-x^4}{1-x^{n+4}}.\frac{1-x^6}{1-x^{n+6}}\ldots\frac{1-x^n}{1-x^{2n}}$$

3.

Ist n ungerade, so stellt sich die Reihe so dar:

$$(1+y^n)+\frac{1-a^n}{1-a}t(1+y^{n-2})+\frac{1-a^n}{1-a}.\frac{1-a^{n-1}}{1-aa}att(1+y^{n-4})+\ldots$$
$$+\frac{1-a^n}{1-a}.\frac{1-a^{n-1}}{1-aa}\ldots\frac{1-a^{\frac{1}{2}(n+3)}}{1-a^{\frac{1}{2}(n-3)}}a^{\frac{1}{8}(n-3)(n-5)}t^{\frac{1}{2}(n-3)}(1+y^3)$$
$$+\frac{1-a^n}{1-a}.\frac{1-a^{n-1}}{1-aa}\ldots\frac{1-a^{\frac{1}{2}(n+3)}}{1-a^{\frac{1}{2}(n-1)}}a^{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}(n-1)\frac{1}{2}(n-3)}t^{\frac{1}{2}(n-1)}(1+y)$$

Machen wir wie vorher $a=xx$ und setzen das Glied, welches hier das letzte ist, $=Bx^{\frac{1}{4}}.(y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})$, so wird die Reihe

$$=B\{x^{\frac{1}{4}}(y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})+\frac{1-x^{n-1}}{1-x^{n+1}}x^{\frac{9}{4}}(y^{\frac{3}{2}}+y^{-\frac{3}{2}})+\frac{1-x^{n-1}}{1-x^{n+3}}.\frac{1-x^{n-3}}{1-x^{n+5}}x^{\frac{25}{4}}(y^{\frac{5}{2}}+y^{-\frac{5}{2}})+\text{etc.}\}$$

welche Reihe aus $\frac{1}{2}(n+1)$ Gliedern besteht und dann abbricht. Von unserm Product stellen wir die ersten $\frac{1}{2}(n-1)$ Factoren so dar

$$\frac{y^{\frac{1}{2}(n-1)}}{x^{\frac{1}{4}(nn-1)}}\cdot\left(1+\frac{x^{n-1}}{y}\right)\left(1+\frac{x^{n-3}}{y}\right)\left(1+\frac{x^{n-5}}{y}\right)\ldots\left(1+\frac{xx}{y}\right)$$

wozu noch kommt

$$(1+y)(1+xxy)(1+x^4y)\ldots(1+x^{n-1}y)$$

Da nun

$$\begin{aligned}B &= \frac{1-x^{n+3}}{1-xx}\cdot\frac{1-x^{n+5}}{1-x^4}\cdot\frac{1-x^{n+7}}{1-x^6}\cdot\cdot\frac{1-x^{2n}}{1-x^{n-1}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{4}nn-n+\frac{3}{4}}\cdot y^{\frac{1}{2}(n-1)}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}nn-n+\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{4}}}\\ &= \frac{1-x^{n+3}}{1-xx}\cdots\frac{1-x^{2n}}{1-x^{n-1}}\cdot\frac{y^{\frac{1}{2}n}}{x^{\frac{1}{4}nn}}\end{aligned}$$

so ergibt das erste Theorem folgendes dritte: *für ein ungerades n ist*

$$\begin{aligned}&x^{\frac{1}{4}}(y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})+\frac{1-x^{n-1}}{1-x^{n+3}}\cdot x^{\frac{9}{4}}(y^{\frac{3}{2}}+y^{-\frac{3}{2}})+\frac{1-x^{n-1}}{1-x^{n+3}}\cdot x^{\frac{25}{4}}(y^{\frac{5}{2}}+y^{-\frac{5}{2}})+\text{ etc.}\\ &= x^{\frac{1}{4}}(y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})(1+xxy)(1+x^4y)(1+x^6y)\ldots(1+x^{n-1}y)\\ &\qquad\times\left(1+\frac{xx}{y}\right)\ \left(1+\frac{x^4}{y}\right)\ \left(1+\frac{x^6}{y}\right)\ldots\ldots\left(1+\frac{x^{n-1}}{y}\right)\\ &\qquad\times\frac{1-xx}{1-x^{n+3}}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^{n+5}}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^{n+1}}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\frac{1-x^{n-1}}{1-x^{2n}}\end{aligned}$$

4.

Wenn man n ins unendliche wachsen lässt, so verwandeln sich die Reihen und Producte des zweiten und dritten Theorems in unendliche Reihen und Producte. In dieser Gestalt ist das vierte Theorem

$$\begin{aligned}&1+x\left(y+\frac{1}{y}\right)+x^4\left(yy+\frac{1}{yy}\right)+x^9\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)+\text{ etc. in inf.}\\ &= (1+xy)\left(1+\frac{x}{y}\right)(1+x^3y)\left(1+\frac{x^3}{y}\right)(1+x^5y)\left(1+\frac{x^5}{y}\right)\ldots\\ &\qquad\times(1-xx)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)\ldots\end{aligned}$$

und das fünfte

$$\begin{aligned}&x^{\frac{1}{4}}(y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})+x^{\frac{9}{4}}(y^{\frac{3}{2}}+y^{-\frac{3}{2}})+x^{\frac{25}{4}}(y^{\frac{5}{2}}+y^{-\frac{5}{2}})+\text{ etc. in inf.}\\ &= x^{\frac{1}{4}}(y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})\cdot(1+xxy)(1+x^4y)(1+x^6y)\ldots\\ &\qquad\times\left(1+\frac{xx}{y}\right)\ \left(1+\frac{x^4}{y}\right)\ \left(1+\frac{x^6}{y}\right)\ldots\\ &\qquad\times(1-xx)\ (1-x^4)\ (1-x^6)\ldots\end{aligned}$$

5.

Die Functionen, welche durch das vierte und fünfte Theorem in unendliche Producte entwickelt werden, sind von grosser Wichtigkeit, und es wird gut sein sie hier durch besondere Functionalzeichen zu bezeichnen. Wir schreiben daher

$$P(x,y) = 1+x(y+y^{-1})+x^4(yy+y^{-2})+x^9(y^3+y^{-3})+ \text{etc.}$$
$$R(x,y) = x^{\frac{1}{4}}(y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})+x^{\frac{9}{4}}(y^{\frac{3}{2}}+y^{-\frac{3}{2}})+x^{\frac{25}{4}}(y^{\frac{5}{2}}+y^{-\frac{5}{2}})+ \text{etc.}$$

zugleich auch

$$Q(x,y) = 1-x(y+y^{-1})+x^4(yy+y^{-2})-x^9(y^3+y^{-3})+ \text{etc.}$$

wo also $Q(x,y) = P(-x,y) = P(x,-y)$ wird. Der einfachste Werth, welcher y beigelegt werden kann, ist 1 und da die demselben entsprechenden Werthe unserer Function von besonders grosser Wichtigkeit sind und häufig vorkommen werden, so schreiben wir der Kürze wegen statt $P(x,1)$, $Q(x,1)$, $R(x,1)$ schlechtweg Px, Qx, Rx. Wir bemerken noch, dass wo ein Exponent sich blos auf das Argument einer Function bezieht, dieses durch Klammern bezeichnet wird wie $P(x^3)$, ohne Klammern ist immer vorauszusetzen, dass es sich auf die Function bezieht, also Px^3 so viel bedeutet wie $(Px)^3$. Also

$$Px = 1+2x+2x^4+ .$$
$$Qx = 1-2x+2x^4- .$$
$$Rx = 2x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{9}{4}}+2x^{\frac{25}{4}}+ .$$

Endlich wollen wir durch das Functionalzeichen F in dieser Abhandlung das unendliche Product ausdrücken

$$Fx = (1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)\ldots$$

In diesen Zeichen erscheinen die beiden letzten Theoreme so

4. $$P(x,y) = (1+xy)(1+\frac{x}{y})(1+x^3y)(1+\frac{x^3}{y})(1+x^5y)(1+\frac{x^5}{y})\ldots Fxx$$

5. $$R(x,y) = x^{\frac{1}{4}}(y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})(1+xxy)(1+\frac{xx}{y})(1+x^4y)(1+\frac{x^4}{y})\ldots Fxx$$

Und so ist offenbar

6. $$Q(x,y) = (1-xy)(1-\frac{x}{y})(1-x^3y)(1-\frac{x^3}{y})(1-x^5y)(1-\frac{x^5}{y})\ldots Fxx$$

ferner indem man $y = 1$ setzt

7. $$Px = (1+x)^2(1-xx)(1+x^3)^2(1-x^4)(1+x^5)^2(1-x^6)\ldots$$
8. $$Qx = (1-x)^2(1-xx)(1-x^3)^2(1-x^4)(1-x^5)^2(1-x^6)\ldots$$
9. $$Rx = 2x^{\frac{1}{4}}(1+xx)^2(1-xx)(1+x^4)^2(1-x^4)(1+x^6)^2(1-x^6)\ldots$$

Substituirt man hier $1+x = \frac{1-xx}{1-x}$, $1+x^3 = \frac{1-x^6}{1-x^3}$ u. s. w. so verwandeln diese Ausdrücke sich in folgende

10. $$Px = \frac{(Fxx)^5}{(Fx)^2(Fx^4)^2}$$
11. $$Qx = \frac{(Fx)^2}{Fxx}$$
12. $$Rx = 2x^{\frac{1}{4}}\frac{(Fx^4)^2}{Fxx}$$

hieraus ergibt sich ferner

13. $Px.Qx = (Qxx)^2$
14. $Px.Rx = \frac{1}{2}(R\sqrt{x})^2$ oder was dasselbe ist

$$Pxx.Rxx = \tfrac{1}{2}(Rx)^2, \qquad Rxx = \frac{(Rx)^2}{2Pxx}$$

$$Qxx(Rx)^2 = 4x^{\frac{1}{2}}.(Fx^4)^3 \quad \text{also}$$

15. $$Fx = \sqrt[3]{\frac{Q(x^{\frac{1}{2}})(Rx^{\frac{1}{4}})^2}{4x^{\frac{1}{8}}}} = \sqrt[3]{\frac{P(x^{\frac{1}{2}})Q(x^{\frac{1}{2}})R(x^{\frac{1}{2}})}{2x^{\frac{1}{8}}}} = \sqrt[3]{\frac{(Qx)^2R(x^{\frac{1}{2}})}{2x^{\frac{1}{8}}}}$$

ferner

16. $$Px + Qx = 2P(x^4)$$
17. $$Px - Qx = 2R(x^4)$$

Also durch Multiplication nach 14

18. $$(Px)^2 - (Qx)^2 = 2(Rxx)^2$$

Bedeutet ferner i die imaginaire Grösse $\sqrt{-1}$, so wird

19. $$Px + iQx = (1+i)Q(ix)$$
20. $$Px - iQx = (1-i)P(ix)$$

Also durch Multiplication

21. $$(Px)^2+(Qx)^2 = 2(Pxx)^2$$

und aus der Multiplication von 18 und 21 mit Zuziehung von 14

22. $$(Px)^4-(Qx)^4 = (Rx)^4$$

Man sieht also, dass $(Pxx)^2$ das arithmetische Mittel zwischen $(Px)^2$ und $(Qx)^2$ ist, und da nach 13. die Grösse $(Qxx)^2$ das geometrische Mittel zwischen denselben Grössen vorstellt und da (*Theor. attract. el. p.*) wenn zwei Grössenreihen

$$\begin{array}{l} m,\ m',\ m'',\ m''' \ldots \\ n,\ n',\ n'',\ n''' \ldots \end{array}$$

so verbunden sind, dass $m^{(\lambda)}$ immer das arithmetische $n^{(\lambda)}$ das geometrische Mittel zwischen $m^{(\lambda-1)}$ und $n^{(\lambda-1)}$ ist, man die gemeinschaftliche Grenze das arithmetisch geometrische Mittel von m, n oder von irgend ein Paar zusammengehörigen Grössen der beiden Reihen nennt, so ergibt sich das höchst wichtige Theorem (23):

Das Arithmetisch Geometrische Mittel zwischen $(Px)^2$ *und* $(Qx)^2$ *ist allemal* $=1$.

Nach dem, was wir am angezeigten Orte bewiesen haben, ist also auch

24. *das Integral* $$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{((Px)^4 \cos\varphi^2+(Qx)^4 \sin\varphi^2)}}$$

von $\varphi=0$ *bis* $\varphi=2\pi$ *ausgedehnt* $=2\pi$ *oder auch von* $\varphi=0$ *bis* $\varphi=\frac{1}{2}k\pi$, *wenn* k *irgend eine ganze Zahl bedeutet*, $=\frac{1}{2}k\pi$.

6.

Um den Zusammenhang des Algorithmus des arithmetisch geometrischen Mittels mit unsern Functionen noch weiter zu entwickeln, bemerken wir zuvörderst, dass wenn

$$\frac{n}{m}=\frac{(Qx)^2}{(Px)^2} \text{ und } m=\mu Px^2, \qquad n=\mu Qx^2, \qquad mm-nn=\mu\mu(R)^4$$

gesetzt wird, man hat

$$\begin{array}{lll} m' = \mu(Pxx)^2, & n' = \mu(Qxx)^2, & m'm' - n'n' = \mu\mu(Rxx)^4 \\ m'' = \mu(Px^4)^2, & n'' = \mu(Qx^4)^2, & m''m'' - n''n'' = \mu\mu(Rx^4)^4 \\ m''' = \mu(Px^8)^2, & n''' = \mu(Qx^8)^2, & m'''m''' - n'''n''' = \mu\mu(Rx^8)^4 \\ m'''' = \mu(Px^{16})^2, & n'''' = \mu(Qx^{16})^2, & m''''m'''' - n''''n'''' = \mu\mu(Rx^{16})^4 \end{array}$$

u. s. w. oder allgemein

$$m^{(\lambda)} = \mu(Px^{2^\lambda})^2, \quad n^{(\lambda)} = \mu(Qx^{2^\lambda})^2, \quad m^\lambda m^\lambda - n^\lambda n^\lambda = \mu\mu(Rx^{2^\lambda})^4$$

und dass offenbar μ das arithmetisch geometrische Mittel zwischen m und n selbst ist. So bald wir also den Werth von x, welcher vorgegebenen Werthen von m und n entspricht, zu bestimmen im Stande sind, werden wir jedes Glied der Reihen

$$\begin{array}{lll} m, & m', & m'' \ldots \\ n, & n', & n'' \ldots \end{array}$$

unmittelbar darstellen, auch die Reihen interpoliren und rückwärts fortsetzen können. Das nächstliegende Mittel x zu bestimmen ist folgendes.

Man sieht leicht, dass die Glieder der Reihe

$$h = \left(\frac{Rx}{2}\right)^4, \quad h' = \left(\frac{Rxx}{2}\right)^2, \quad h'' = \frac{Rx^4}{2}, \quad h''' = \left(\frac{Rx^8}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$h'''' = \left(\frac{Rx^{16}}{2}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad h^{\mathrm{V}} = \left(\frac{Rx^{32}}{2}\right)^{\frac{1}{8}} \ldots$$

sich dem x immer mehr nähern, so dass x die Grenze derselben ist. Man hat also

$$x = h \cdot \frac{h'}{h} \cdot \frac{h''}{h'} \cdot \frac{h'''}{h''} \cdot \frac{h''''}{h'''} \ldots$$

Nun ist aber nach 14

$$\frac{h}{h'} = (Pxx)^2 \text{ und so } \frac{h'}{h''} = Px^4, \quad \frac{h''}{h'''} = (Px^8)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{h'''}{h''''} = (Px^{16})^{\frac{1}{4}}$$

Also

$$x = \frac{h}{(Pxx)^2 \cdot Px^4 \cdot (Px^8)^{\frac{1}{2}} \cdot (Px^{16})^{\frac{1}{4}} \ldots}$$
$$= \frac{h}{\frac{m'}{\mu} \cdot \left(\frac{m''}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{m'''}{\mu}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{m''''}{\mu}\right)^{\frac{1}{8}} \ldots}$$

wir haben folglich

25. $$x = \frac{mm - nn}{16\, m'\mu \left(\frac{m''}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{m'''}{\mu}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{m''''}{\mu}\right)^{\frac{1}{8}} \cdots}$$

wofür man auch schreiben kann

$$x = \frac{mm - nn}{16\, m' m''} \cdot \left(\frac{m''}{m'''}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{m'''}{m''''}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{m''''}{m^{\mathrm{v}}}\right)^{\frac{1}{8}} \cdots$$

Da die Glieder m', m'', m''' sich äusserst schnell der Gleichheit nähern so erhält man x mit grösster Bequemlichkeit.

[V.]

[1.]

Allgemeines Theorem (1827 Aug. 6)

$$P(x, ty).P\left(x, \frac{y}{t}\right) = P(xx, tt).P(xx, yy) + R(xx, tt).R(xx, yy)$$

[2.]

Durch Zerlegung in Factoren bestätigt sich leicht,

$$(1+x)(1+x^3)(1+x^5)(1+x^7)\dots = M$$

gesetzt:

$$P(ix^{\frac{3}{2}}, \quad ix^{\frac{1}{2}}) = \frac{P(x, 1)}{M}$$
$$P(ix^{\frac{3}{2}}, -ix^{\frac{1}{2}}) = \frac{P(x^3, 1)}{M}$$

also durch Addition

$$P(x, 1) + P(x^3, 1) = 2M\,.\,P(x^6, -x)$$
$$P(x, 1) - P(x^3, 1) = 2Mx.P(x^6, -x^5)$$

also

$$P(x, 1)^2 - P(x^3, 1)^2 = 4MMx.F(x^{12}).(1-x)(1-x^5)(1-x^7)(1-x^{11})(1-x^{13})\dots$$
$$= 4MMx.\frac{Fx.F(x^6).F(x^{12})}{Fxx.F(x^3)} = 2\sqrt{\frac{pP}{r}}\;R^{\frac{3}{2}}$$

$$P(x,xt) = \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}\sqrt{t}} R(x,t)$$
$$R(x,xt) = \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}\sqrt{t}} P(x,t)$$

$$P(x.1)^2 . P(x,y)^2 = Q(x,1)^2 . Q(x,y)^2 + R(x,1)^2 . R(x,y)^2$$

$$\begin{aligned} P(x,y) . Q(x,y) &= Q(xx,1) . Q(xx,yy) \\ P(x,y)^2 + Q(x,y)^2 &= 2P(xx,1) . P(xx,yy) \\ P(x,y)^2 - Q(x,y)^2 &= 2R(xx,1) . R(xx,yy) \end{aligned}$$

$$P(x,y) . P(xx,yy) = P(x^6,1) . P(x^3,y^3) + \tfrac{1}{2}\{P(x^{\frac{3}{2}},1) - P(x^6,1)\}.\{P(x^{\frac{1}{4}},y) - P(x^3,y^3)\}$$

[3.]

$$\begin{aligned} &P(x^3,1) = P, \qquad Q(x^3,1) = Q, \qquad R(x^3,1) = R \\ &P(x,1) = p, \qquad Q(x,1) = q, \qquad R(x,1) = r \end{aligned}$$

$$pqr^3 . P(x^3,y^3) = pqR . P(x,y)^3 + 3PQR . P(x,y) . Q(x,y)^2$$
$$pq^3r . P(x^3,y^3) = prQ . P(x,y)^3 - 3PQR . P(x,y) . R(x,y)^2$$

$$\begin{aligned} 3pPQR &= r^3Q - q^3R \\ 3qPQR &= r^3P - p^3R \\ 3rPQR &= p^3Q - q^3P \end{aligned}$$

$$3PPQQ = PPqq + ppQQ + ppqq$$

$$\begin{aligned} 3pP &= \frac{r^3}{R} - \frac{q^3}{Q} = \frac{3Q^3}{q} - \frac{3R^3}{r} \\ 3qQ &= \frac{r^3}{R} - \frac{p^3}{P} = \frac{3P^3}{p} - \frac{3R^3}{r} \\ 3rR &= \frac{p^3}{P} - \frac{q^3}{Q} = \frac{3Q^3}{q} - \frac{3P^3}{p} \end{aligned}$$

$$\frac{r^4 + 3R^4}{rR} = \frac{q^4 + 3Q^4}{qQ} = \frac{p^4 + 3P^4}{pP}$$
$$= 4 + 24xx + 24x^6 + 24x^8 + 48x^{14} + 24x^{18} + 24x^{24} + 48x^{26}$$
$= 8P(xx,1)\,P(x^6,1) - 4\,Q(xx,1)\,Q(x^6,1)$? würde dann sein
$$= 4\sqrt{(pp+qq)(PP+QQ)} - 4\sqrt{pqPQ}$$
$$= 2\sqrt{(pp+qq)(PP+QQ)} + 2\sqrt{(pp-qq)(PP-QQ)}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}-\frac{\mathrm{d}P}{P}=+\tfrac{1}{2}qrQR.\frac{\mathrm{d}x}{x}$$
$$\frac{\mathrm{d}q}{q}-\frac{\mathrm{d}Q}{Q}=-\tfrac{1}{2}prPR.\frac{\mathrm{d}x}{x}$$
$$\frac{\mathrm{d}r}{r}-\frac{\mathrm{d}R}{R}=+\tfrac{1}{2}pqPQ.\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

[4.]

So wie

$$x^{\frac{1}{4}}(y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})+x^{\frac{9}{4}}(y^{\frac{3}{2}}+y^{-\frac{3}{2}})+.+\ldots$$

durch $R(x,y)$ bezeichnet ist, so wollen wir noch

$$x^{\frac{1}{4}}(y^{\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{2}})-x^{\frac{9}{4}}(y^{\frac{3}{2}}-y^{-\frac{3}{2}})+.-\ldots$$

durch $S(x,y)$ bezeichnen. Man hat dann

$$iS(x,y)=R(x,-y)$$
$$S(x,y)=\frac{\sqrt{[Q(x,1)^2.P(x,y)^2-P(x,1)^2.Q(x,y)^2]}}{R(x,1)}$$
$$=\frac{\sqrt{[P(x,1)^2.R(x,y)^2-R(x,1)^2.P(x,y)^2]}}{Q(x,1)}$$

$$R(x,y).S(x,y)=Q(xx,1).S(xx,yy)$$
$$R(x,y)^2+S(x,y)^2=2P(xx,1).R(xx,yy)$$
$$R(x,y)^2-S(x,y)^2=2R(xx,1).P(xx,yy)$$

$$R(x,y).R(x,z)+S(x,y).S(x,z)=2R(xx,yz).P(xx,\tfrac{y}{z})$$
$$R(x,y).R(x,z)-S(x,y).S(x,z)=2R(xx,\tfrac{y}{z}).P(xx,yz)$$
$$R(x,y).S(x,z)+S(x,y).R(x,z)=2S(xx,yz).Q(xx,\tfrac{y}{z})$$
$$R(x,y).S(x,z)-S(x,y).R(x,z)=2S(xx,\tfrac{z}{y}).Q(xx,yz)$$

Setzt man

$$\Sigma e^{-\theta(k+\alpha)^2}=(\theta,\alpha)$$

wo k alle ganzen Zahlen bedeutet, so sind die Theoreme enthalten in

$$(\theta,2\alpha).(\theta,2\beta)=(2\theta,\alpha+\beta).(2\theta,\alpha-\beta)+(2\theta,\alpha+\beta+\tfrac{1}{2}).(2\theta,\alpha-\beta+\tfrac{1}{2})$$

auch ist

$$(\theta, \alpha) = (\theta, -\alpha)$$

[5.]

Man setze

$$\cos\theta = \frac{R(x,y)}{P(x,y)} \cdot \frac{p}{r}, \qquad i\sin\theta = \frac{S(x,y)}{P(x,y)} \cdot \frac{q}{r}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\theta = \frac{R(x^{\frac{1}{2}}, y^{\frac{1}{2}})}{\sqrt{2rP(x,y)}}, \qquad i\sin\tfrac{1}{2}\theta = \frac{S(x^{\frac{1}{2}}, y^{\frac{1}{2}})}{\sqrt{2rP(x,y)}}$$

$$y = \cos u + i\sin u$$

dann ist

$$P(x,y)\,\mathrm{d}\theta = pq\,Q(x,y)\,\mathrm{d}u$$

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(p^4 - r^4\cos\theta^2)}} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(p^4\sin\theta^2 + q^4\cos\theta^2)}}$$

$$R(x,y) = x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}P(x,xy), \qquad S(x,y) = x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}Q(x,xy)$$

Setzt man

$$\sin\psi = \frac{rr}{pp}\cos\theta$$

so wird

$$\cos\psi = \frac{q}{p} \cdot \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}, \qquad \sin\psi = \frac{r}{p} \cdot \frac{R(x,y)}{P(x,y)}$$

$$\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{(r^4 - p^4\sin\psi^2)}}$$

[6.]

$$P(x,y) \,.\, P(x,z) = P(xx,yz) \,.\, P(xx,\tfrac{y}{z}) + R(xx,yz) \,.\, R(xx,\tfrac{y}{z})$$

$$Q(x,y) \,.\, Q(x,z) = P(xx,yz) \,.\, P(xx,\tfrac{y}{z}) - R(xx,yz) \,.\, R(xx,\tfrac{y}{z})$$

$$P(x,y) \,.\, Q(x,z) = Q(xx,yz) \,.\, Q(xx,\tfrac{y}{z}) + S(xx,yz) \,.\, S(xx,\tfrac{y}{z})$$

$$R(x,y) \,.\, R(x,z) = R(xx,yz) \,.\, P(xx,\tfrac{y}{z}) + P(xx,yz) \,.\, R(xx,\tfrac{y}{z})$$

$$P(x,y)^2 \,.\, P(x,z)^2 + S(x,y)^2 \,.\, S(x,z)^2 = Q(x,y)^2 \,.\, Q(x,z)^2 + R(x,y)^2 \,.\, R(x,z)^2$$

[7.]

$$R(x,1)^7.P(x^7,y^7) = \text{Product aus } \frac{Fx^{14}}{(Fx^2)^7}$$
$$.\ R(x,1).P(x,y)$$
$$.\ \{R(x,\varepsilon).P(x,y)-S(x,\varepsilon).Q(x,y)\}$$
$$.\ \{R(x,\varepsilon\varepsilon).P(x,y)-S(x,\varepsilon\varepsilon).Q(x,y)\}$$
$$.\ \{R(x,\varepsilon^3).P(x,y)-S(x,\varepsilon^3).Q(x,y)\}$$
$$.\ \{R(x,\varepsilon^4).P(x,y)-S(x,\varepsilon^4).Q(x,y)\}$$
$$.\ \{R(x,\varepsilon^5).P(x,y)-S(x,\varepsilon^5).Q(x,y)\}$$
$$.\ \{R(x,\varepsilon^6).P(x,y)-S(x,\varepsilon^6).Q(x,y)\}$$

$$= R(x^7,1).P(x,y)^7 - \ \ldots\ldots\ldots + 7\frac{PQR}{pq}.P(x,y).Q(x,y)^6$$

worin $\varepsilon^7 = 1$. Zum Beweise dient, was sich leicht nachweisen lässt:

$$P(x,\varepsilon y).P(x,\tfrac{y}{\varepsilon}) = P(xx,yy).P(xx,\varepsilon\varepsilon) + R(xx,yy).R(xx,\varepsilon\varepsilon)$$
$$= \frac{P(x,y)^2+Q(x,y)^2}{2P(xx,1)}.P(xx,\varepsilon\varepsilon) + \frac{P(x,y)^2-Q(x,y)^2}{2R(xx,1)}.R(xx,\varepsilon\varepsilon)$$
$$= P(x,y)^2.\frac{R(x,\varepsilon)^2}{R(x,1)^2} - Q(x,y)^2.\frac{S(x,\varepsilon)^2}{R(x,1)^2}$$

[8.]

$$P(x,1) = p, \qquad \frac{x\,dp}{p\,dx} = p'$$
$$Q(x,1) = q, \qquad \frac{x\,dq}{q\,dx} = q'$$
$$R(x,1) = r, \qquad \frac{x\,dr}{r\,dx} = r'$$

$$\tfrac{1}{2}p' = x - 2xx + 4x^3 - 4x^4 + 6x^5 - 8x^6 + 8x^7 - 8x^8 + 13x^9 - 12x^{10}\ldots$$
$$\tfrac{1}{2}q' = -x - 2xx - 4x^3 - 4x^4 - 6x^5 - 8x^6 - 8x^7 - 8x^8 - 13x^9 - 12x^{10}\ldots$$
$$4r' = 1 + 8xx - 8x^4 + 32x^6 - 40x^8 + 48x^{10} - 32x^{12} + 64x^{14} - 104x^{16} + 104x^{18}\ldots$$

Coëfficient von $x^{2^\mu a^\alpha b^\beta c^\gamma}\ldots$ wenn $a, b, c\ldots$ Primzahlen, wird

$$A\,\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}\cdot\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}\cdot\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}\ldots$$

[worin für jene drei Reihen folgeweise] $A = 2^\mu(-1)^{\mu+1}$, $A = 2^\mu$, $A = 8(3-2^\mu)$

$$4p'-4q'=r^4$$
$$4r'-4p'=q^4$$
$$4r'-4q'=p^4$$

$$\frac{\mathrm{d}px}{px}-\frac{\mathrm{d}px^2}{px^2}=\frac{\mathrm{d}x}{x}\cdot\tfrac{1}{2}(qx)^2.(rx^2)^2$$
$$\frac{\mathrm{d}px}{px}-\frac{\mathrm{d}px^3}{px^3}=\frac{\mathrm{d}x}{x}\cdot\tfrac{1}{2}(qx).(rx).(qx^3).(rx^3)$$
$$\frac{\mathrm{d}px}{px}-\frac{\mathrm{d}px^4}{px^4}=\frac{\mathrm{d}x}{x}\cdot(qx).(px^2)^2.(rx^4)$$
$$\frac{\mathrm{d}px}{px}-\frac{\mathrm{d}px^5}{px^5}=\frac{\mathrm{d}x}{4x}\cdot\frac{r^4qq(pp-3PP)+R^4QQ(25PP-15pp)}{ppqq-5PPQQ}$$

[9.]

Bei der $5^{\text{plic.}}$ ist (Aug. 29)

$$pp-PP=\quad A.\sqrt{\tfrac{p}{P}}\,,\qquad 5PP-pp=B\sqrt{\tfrac{P}{p}}$$
$$qq-QQ=-A.\sqrt{\tfrac{q}{Q}}\,,\qquad 5QQ-qq=B\sqrt{\tfrac{Q}{q}}$$
$$♂\qquad rr-RR=\quad A.\sqrt{\tfrac{r}{R}}\,,\qquad 5RR-rr=-B\sqrt{\tfrac{R}{r}}$$

$$AB=-2ppPP+2qqQQ+2rrRR=[16pqrPQR]^{\frac{2}{3}},\qquad \frac{A}{B}=\frac{PQR}{pqr}$$

$$A=2^{\frac{4}{3}}.\frac{(PQR)^{\frac{5}{6}}}{(pqr)^{\frac{1}{6}}}\,,\qquad B=2^{\frac{4}{3}}.\frac{(pqr)^{\frac{5}{6}}}{(PQR)^{\frac{1}{6}}}$$

also

$$pp=(QR+qr).\sqrt[6]{\frac{ppPP}{16qrQR}}\ \text{etc.}$$

$$5=-\frac{qr}{QR}+\frac{pr}{PR}+\frac{pq}{PQ}$$

Siehe weiter unten [Art. 11.]

Für die Ableitung dient u. a.

$$P(x^5,x^4).P(x^5,-xx)=P(x^{10},-xx).P(x^{10},-x^6)+xP(x^{10},-x^4).P(x^{10},-x^8)$$
$$P(x^5,-x^4).P(x^5,xx)=P(x^{10},-xx).P(x^{10},-x^6)-xP(x^{10},-x^4).P(x^{10},-x^8)$$

also durch Multiplication

$$\begin{aligned}
&Q(x^{10},1)^2.P(x^{10},-x^8).P(x^{10},-x^4)\\
&\quad= P(x^{10},-xx)^2.P(x^{10},-x^6)^2-xx\,P(x^{10},-x^4)^2.P(x^{10},-x^8)^2
\end{aligned}$$

$$\frac{(Fx^{10})^4}{(Fx^{20})^2}=\frac{(Fx^4)^3(Fx^{10})^2}{Fx^2.Fx^{20}}-xx\frac{Fx^2.(Fx^{20})^3}{Fx^4.Fx^{10}}$$

was mit ♂ identisch ist, nemlich

$$p^{\frac{1}{6}}q^{\frac{1}{6}}(\tfrac{1}{2}r)^{\frac{2}{3}}P^{\frac{4}{3}}Q^{\frac{4}{3}}(\tfrac{1}{2}R)^{\frac{2}{3}}=$$

Auch beweist man leicht

$$\begin{aligned}
pp &= PP+4\{x^{\frac{1}{5}}+x^{\frac{16}{5}}+x^{\frac{36}{5}}+x^{\frac{81}{5}}+\ldots\}\{x^{\frac{4}{5}}+x^{\frac{9}{5}}+x^{\frac{49}{5}}+x^{\frac{64}{5}}+\ldots\}\\
&= PP+4xP(x^5,x^4).P(x^5,xx)\\
&= PP+4x\sqrt{\left\{\frac{p}{P}.\frac{(Fx^{10})^5}{Fxx}\right\}}\\
&= PP+4\sqrt{\frac{p}{P}}.\frac{\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{5}{6}}}{\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{6}}}
\end{aligned}$$

[10.]

Bei der Trisection ist noch, p, P etc. in voriger Bedeutung genommen und $P(x^{\frac{1}{3}},1)=P^0$ gesetzt

$$\left(\frac{3PP-P^0P^0}{2}\right)^2=p^4-4\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$$

$$\left(\frac{3QQ-Q^0Q^0}{2}\right)^2=q^4+4\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$$

Allgemein wenn $P(x,1)$, $Q(x,1)$ gegeben sind und $P(x^n,1)$, $Q(x^n,1)$ gesucht werden, wo n ungerade, sind dem $P(x^n,1)$ coordinirt $\pm\sqrt{\frac{1}{n}}.P(x^{\frac{1}{n}},1)$ oder $\pm i\sqrt{\frac{1}{n}}.P(x^{\frac{1}{n}},1)$, je nachdem n von der Form $4k+1$ oder $4k-1$ ist. Die Gleichung findet sich leicht aus Entwickelung der Summe der geraden Potenzen der $n+1$ Wurzeln.

[11.]

Setzt man

$$P(x^5,y^5)=\frac{R}{r^5}.P(x,y)^5+A.P(x,y)^3Q(x,y)^2+\frac{5PQR}{pqr^5}.P(x,y)Q(x,y)^4$$

so ist auch

$$Q(x^5,y^5) = \frac{5PQR}{pqr^5}.P(x,y)^4.Q(x,y)+A.P(x,y)^2.Q(x,y)^3+\frac{R}{r^5}Q(x,y)^5$$

Setzt man hier $y=1$, so erhält man

$$\begin{aligned} Ap^3q^3 &= Pq-\frac{R}{r^5}.p^5q-\frac{5PQR}{r^5}.q^4 \\ &= Qp-\frac{R}{r^5}.q^5p-\frac{5PQR}{r^5}.p^4 \end{aligned}$$

woraus die Gleichung weiter zurück [Art. 9] folgt

$$0 = pQr-Pqr+pqR-5PQR$$

daraus

$$A = \frac{r(p^3P-q^3Q)-(p^4+q^4)R}{ppqqr^5}$$

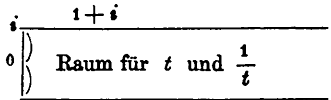
[12.]

THEOREM. Wenn der imaginäre Theil von t und $\frac{1}{t}$ zwischen $-i$ und $+i$ liegt, so ist der reelle Theil von

$$\left(\frac{Qt}{Pt}\right)^2$$

positiv.

Geometrisch zu beweisen



Unter dieser Bedingung ist also das arithmetisch geometrische Mittel zwischen

$$\mu P(\tfrac{1}{2}t)^2 \qquad \mu Q(\tfrac{1}{2}t)^2$$

indem man immer das geometrische Mittel zwischen m, n so nimmt, dass $\frac{\sqrt{mn}}{m}$ einen positiven reellen Theil hat,

$$=\mu$$

Ein solches Mittel nennen wir das einfachste Mittel.

Ist das einfachste AG. Mittel zwischen $m, n, =\mu$, das zwischen $m, \sqrt{(mm-nn)}, =\frac{\mu}{t}$, so ist t der Canon des Verhältnisses $\frac{n}{m}$, nemlich

$$\frac{m}{n} = \left(\frac{Qt}{Pt}\right)^2$$

dann ist das einfachste AG. Mittel zwischen m und $-n$

$$= \frac{\mu}{1+2it}$$

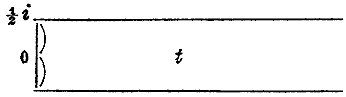
und der dazu gehörige Canon

$$= \frac{t}{1+2it} = \frac{1}{\frac{1}{t}+2i}$$

Die Gleichung

$$\left(\frac{Qt}{Pt}\right)^2 = A$$

hat immer Eine und nur Eine Auflösung in dem Raume



Es sei $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, $\alpha \equiv \delta \equiv 1 \pmod{4}$, β, γ gerade

$$t' = i\frac{\alpha t + \beta i}{\gamma t + \delta i}$$

dann ist

$$\left(\frac{Qt'}{Pt'}\right)^2 = i^\gamma \left(\frac{Qt}{Pt}\right)^2$$

[13.]

Fünftheilung

$$\begin{array}{ll} a & A \\ b & B \\ c = \sqrt{(aa - bb)} & C = \sqrt{(AA - BB)} \end{array}$$

$$2v = -aA + bB + cC$$

$$4v = aa - 6aA + 5AA = -(bb - 6bB + 5BB) = -(cc - 6cC + 5CC)$$

$$v = -A\sqrt{(AA+v)} + B\sqrt{(BB-v)} + C\sqrt{(CC-v)}$$

Die Elimination auf eine Gleichung

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=0$$

angewandt, gibt

$$0=\Sigma(a^4-4a^3b-2aabb+4aabc-24abcd)$$

[14.]

Die $7^{\text{plication}}$ beruht auf

$$\begin{aligned}&[a\sin(\varphi+A)+b\sin(3\varphi+B)]^2\sin(\varphi+k)\\ &=\alpha\sin(\varphi+l)+\beta\sin(3\varphi+l)+\gamma\sin(5\varphi+l)+\delta\sin(7\varphi+l)\end{aligned}$$

[15.]

Bei der Trisection hat man

$$\sqrt{\frac{q}{p}}=n, \qquad \sqrt{\frac{Q}{P}}=N$$

gesetzt,

$$\frac{N^4-n^4}{1-nnNN}=2nN, \qquad \frac{ppQQ-qqPP}{pP-qQ}=2\sqrt{pPqQ}$$

proportional

$$\begin{array}{l|c||l|c||l|c} p^4 & 3\cos\varphi\sin\varphi^3 & q^4 & 3\cos(60^0-\varphi)\sin(60^0-\varphi)^3 & r^4 & 3\cos(120^0-\varphi)\sin(120^0-\varphi)^3 \\ P^4 & \cos\varphi^3\sin\varphi & Q^4 & \cos(60^0-\varphi)^3\sin(60^0-\varphi) & R^4 & \cos(120^0-\varphi)^3\sin(120^0-\varphi) \end{array}$$

[16.]

Wenn innerhalb einer begrenzten Figur überall

$$\frac{ddV}{dx^2}+\frac{ddV}{dy^2}=0$$

an der Grenze hingegen V constant $=A$ ist, so ist nothwendig auch im ganzen Raume $V=A$

Beweis. Es sei dM ein Element der Fläche und

$$\iint\left\{\left(\frac{dV}{dx}\right)^2+\left(\frac{dV}{dy}\right)^2+\left(\frac{ddV}{dx^2}+\frac{ddV}{dy^2}\right)(V-A)\right\}dM=\Omega$$

Wäre V nicht constant, so wäre offenbar das Integral *positiv*. Allein das Integral ist auch

$$\int (V-A)\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}y - \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}x\right)$$

durch den Umfang der Figur ausgedehnt, also $= 0$. Da dies mit dem Vorigen im Widerspruch steht, so ist die Voraussetzung unzulässig.

Ähnliches findet mit drei Unbestimmten Statt.

Es lassen sich hieraus manche schöne Folgerungen ziehen.

Ein Punkt kann innerhalb eines hohlen Raumes nicht im stabilen Gleichgewicht sein, wenn nicht innerhalb des ganzen Raums gar keine Wirkung Statt findet, weder im Fall der Abstossung, noch der Anziehung.

[17.]

Dass in der Peripherie einer Gleichgewichtsfigur keine *negative* Theile sein können, beweist sich so. Gesetzt AB wäre negativ, so wäre $V-A$ (A Werth von V in der Peripherie) auswendig neben AB positiv, neben den andern Theilen negativ. Es wird daher einen endlichen Raum geben, wo dies positive gilt; er sei innerhalb $ABCDE$; dann wäre er aber, da er an der Grenze 0 ist, in diesem Raume constant, welches ein Widerspruch.

Dieselbe Schlussart lässt sich auf drei Dimensionen anwenden.

Bei drei Dimensionen findet, für die Fläche s, wo $V=$ Const., noch das schöne Theorem statt, dass $\int \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\rho}\mathrm{d}s$, wenn ρ normal gegen s, $=4\pi M$, wo M ganze Masse (vermuthlich allemal die in einer solchen Fläche eingeschlossene Masse, also ungerechnet die draussen liegende).

Vermuthlich ist der Satz für *jede* einhüllende Fläche gültig, ohne dass V constant zu sein braucht.

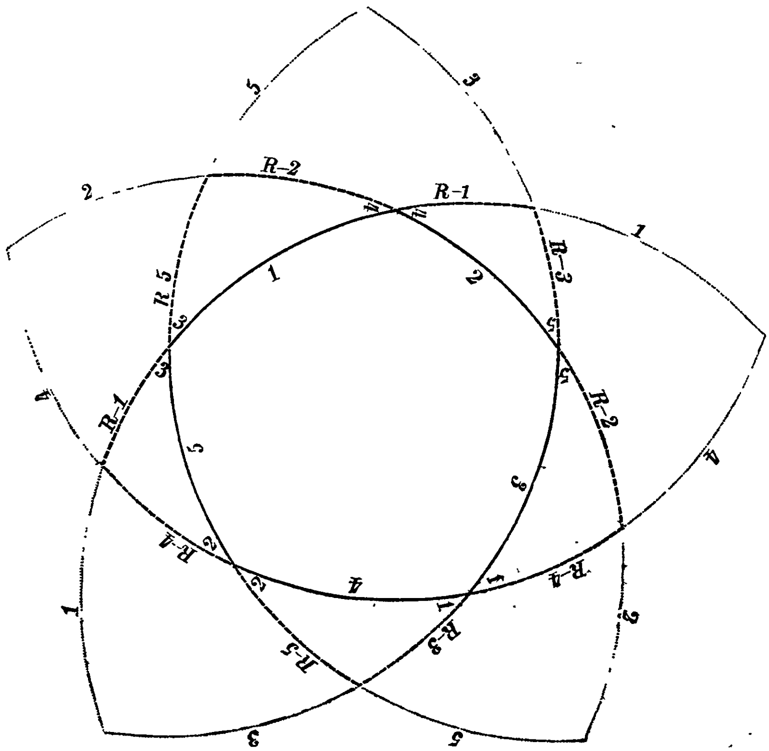
Es seien zwei einander einschliessende Flächen, in denen V constant ist, nemlich resp. $V=A$, $V=B$, $\mathrm{d}W$ ein Element des Raumes zwischen beiden, p die Anziehungskraft in jedem Punkte, dann ist

$$\int pp\,\mathrm{d}W = (B-A).4\pi M$$

wenn M die Masse im innern Raume, wobei angenommen ist, dass im Raume W keine anziehende Masse ist.

481

PENTAGRAMMA MIRIFICUM.



[1.]

$$\cos 1 = \sin 2 . \sin 5$$
$$\cos 2 = \sin 3 . \sin 1$$
$$\cos 3 = \sin 4 . \sin 2$$
$$\cos 4 = \sin 5 . \sin 3$$
$$\cos 5 = \sin 1 . \sin 4$$

$$\begin{aligned} 1 &= \cos 1 . \operatorname{tang} 3 . \operatorname{tang} 4 \\ &= \cos 2 . \operatorname{tang} 4 . \operatorname{tang} 5 \\ &= \cos 3 . \operatorname{tang} 5 . \operatorname{tang} 1 \\ &= \cos 4 . \operatorname{tang} 1 . \operatorname{tang} 2 \\ &= \cos 5 . \operatorname{tang} 2 . \operatorname{tang} 3 \end{aligned}$$

8. $$-d1 = d2 . \cos 4 + d5 . \cos 3$$
9. $$-d2 = d3 . \cos 5 + d1 . \cos 4$$
10. $$-d3 = d4 . \cos 1 + d2 . \cos 5$$
11. $$-d4 = d5 . \cos 2 + d3 . \cos 1$$
12. $$-d5 = d1 . \cos 3 + d4 . \cos 2$$

Die Elimination von d5 aus 8 und 12 gibt

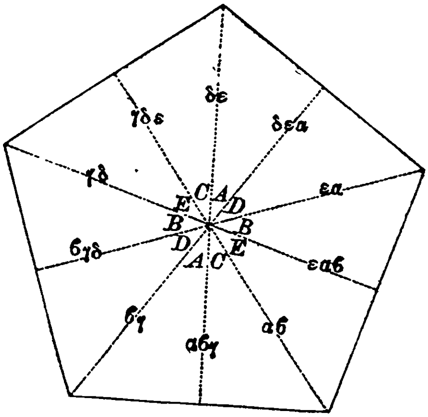
$$d1 . \sin 3^2 = -d2 . \cos 4 + d4 . \cos 2 . \cos 3$$

Die Elimination von d3 aus 9 und 10 hingegen

$$d2 . \sin 5^2 = -d1 . \cos 4 + d4 . \cos 1 . \cos 5$$

[2.]

Das ebne Fünfeck, welches die Centralprojection jenes sphaerischen auf eine beliebige Ebne bildet, hat die Eigenschaft, dass die von den einzelnen Winkelpunkten zur gegenüberstehenden Seite gezogenen Normalen sich in Einem Punkte schneiden (im Augenpunkte). Zugleich sind die Producte der beiden Stücke, in welche jener gemeinschaftliche Durchschnittspunkt jede Normale theilt, für alle gleich.



$$\cos A = \alpha, \quad \cos B = \beta, \quad \cos C = \gamma, \quad \cos D = \delta, \quad \cos E = \varepsilon$$

Um die Eckpunkte in ganzen complexen Zahlen ausgedrückt zu erhalten, seien p, p', p'', p''', p'''' fünf complexe ganze Zahlen, und zwar

$$p = a + bi, \quad p' = a' + b'i, \quad \text{etc.}$$

Man setze

$$a'a''' + b'b''' = (1,3), \quad a''a'''' + b''b'''' = (2,4) \text{ u. s. w.}$$

und nehme für die Eckpunkte

$$\begin{array}{cccccc} & (1,3)(2,4)p, & (2,4)(3,0)p', & (3,0)(4,1)p'', & (4,1)(0,2)p''', & (0,2)(1,3)p'''' \\ = & q, & q', & q'', & q''', & q'''' \end{array}$$

also

$$q = (a'a''' + b'b''')(a''a'''' + b''b'''')a + (a'a''' + b'b''')(a''a'''' + b''b'''')bi$$
u. s. f.

Es ist dann

$$q' - q = (ba' - ab')(2,4)(b''' - a'''i) = -(ba' - ab')(2,4)p'''i$$
u. s. f.

Der Schnitt von qq' mit oq''' hat die complexe Zahl $=$

$$Q''' = \frac{(1,3)(2,4)(3,0)}{a'''a'''+b'''b'''}\,p''' \text{ u. s. w.}$$

Das oben erwähnte Product wird

$$= -(0,2)(1,3)(2,4)(3,0)(4,1)$$

$$Q'''-q = \frac{(1,3)(2,4)(ba'''-ab''')}{a'''a'''+b'''b'''}(b'''-a'''i)$$

$$q'-Q''' = \frac{(2,4)(3,0)(a'b'''-b'a''')}{a'''a'''+b'''b'''}(b'''-a'''i)$$

[3.]

Die Relationen zwischen den Seiten des sphärischen Fünfecks so

	Quadrate der		Gleichungen
Tangenten	Secanten	Cosecanten	
α	$\gamma\delta$	$\frac{\gamma\delta}{\alpha}$	$1+\alpha = \gamma\delta$
β	$\delta\varepsilon$	$\frac{\delta\varepsilon}{\beta}$	$1+\beta = \delta\varepsilon$
γ	$\varepsilon\alpha$	$\frac{\varepsilon\alpha}{\gamma}$	$1+\gamma = \varepsilon\alpha$
δ	$\alpha\beta$	$\frac{\alpha\beta}{\delta}$	$1+\delta = \alpha\beta$
ε	$\beta\gamma$	$\frac{\beta\gamma}{\varepsilon}$	$1+\varepsilon = \beta\gamma$

Diese Gleichungen sind nicht unabhängig, es ist nemlich identisch:

$$\begin{aligned}(1+\gamma)(1+\beta-\delta\varepsilon)-(1+\beta)(1+\gamma-\varepsilon\alpha) &= \varepsilon\{(1+\beta)\alpha-(1+\gamma)\delta\}\\ &= \varepsilon\{(\alpha\beta-\delta-1)-(\gamma\delta-\alpha-1)\}\end{aligned}$$

und auf ähnliche Weise wird die fünfte aus dreien der übrigen abgeleitet.

Aus zweien der Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ folgen die übrigen

$$\beta = \frac{1+\alpha+\gamma}{\alpha\gamma}, \quad \beta = \frac{1+\delta}{\alpha}, \quad \gamma = \frac{1+\alpha}{\alpha\beta-1}, \quad \beta = \frac{1+\varepsilon}{\alpha\varepsilon-1}$$

$$\delta = \frac{1+\alpha}{\gamma}, \quad \gamma = \frac{1+\alpha}{\delta}, \quad \delta = \alpha\beta-1, \quad \gamma = \alpha\varepsilon-1$$

$$\varepsilon = \frac{1+\gamma}{\alpha}, \quad \varepsilon = \frac{1+\alpha+\delta}{\alpha\delta}, \quad \varepsilon = \frac{1+\beta}{\alpha\beta-1}, \quad \delta = \frac{1+\alpha}{\alpha\varepsilon-1}$$

Beispiel

	cos²	sin²			
$\alpha = 9$	$\frac{1}{10}$	$\frac{9}{10}$	71^0	$33'$	$56''$
$\beta = \frac{3}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	39	13	54
$\gamma = 2$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	54	44	7
$\delta = 5$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$	65	54	19
$\varepsilon = \frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	30	0	0

Schöne Gleichung

$$3+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon = \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = \sqrt{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)(1+\varepsilon)}$$

Der Inhalt des sphärischen Pentagons ist 360^0 weniger Summe der Seiten. Setzt man die Summe $= S$ und

$$(1+i\sqrt{\alpha})(1+i\sqrt{\beta})(1+i\sqrt{\gamma})(1+i\sqrt{\delta})(1+i\sqrt{\varepsilon}) = A+Bi$$

so wird:

$$A = \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon.\cos S$$
$$B = \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon.\sin S$$

[4.]

$$G(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2+G'(\alpha' x+\beta' y+\gamma' z)^2+G''(\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z)^2$$
$$= Axx+Byy+Czz+2ayz+2bxz+2cxy$$

$$\begin{aligned} (A-G)\alpha + c\beta + b\gamma &= 0 \\ c\alpha + (B-G)\beta + a\gamma &= 0 \\ b\alpha + a\beta + (C-G)\gamma &= 0 \end{aligned}$$

$$\{a(A-G)-bc\}\alpha = \{b(B-G)-ac\}\beta = \{c(C-G)-ab\}\gamma$$

$$\frac{bc}{a(A-G)-bc}+\frac{ac}{b(B-G)-ac}+\frac{ab}{c(C-G)-ab}+1 = 0$$

$$(A-G)(B-G)(C-G)+2abc = aa(A-G)+bb(B-G)+cc(C-G)$$

$$\alpha\alpha = \frac{1}{1+\left(\frac{a(A-G)-bc}{b(B-G)-ac}\right)^2+\left(\frac{a(A-G)-bc}{c(C-G)-ab}\right)^2}$$

Setzt man

$$\frac{bc}{a(A-x)-bc}+\frac{ac}{b(B-x)-ac}+\frac{ab}{c(C-x)-ab}+1=\Omega$$

so wird indefinite

$$\begin{aligned}&\{a(A-x)-bc\}\{b(B-x)-ac\}\{c(C-x)-ab\}\Omega\\&=-abc(x-G)(x-G')(x-G'')\end{aligned}$$

Differentiirt man und setzt nach der Differentiation $x=G$, so wird

$$\begin{aligned}&\{a(A-G)-bc\}\{b(B-G)-ac\}\{c(C-G)-ab\}\\&\times abc\left\{\frac{1}{(a(A-G)-bc)^2}+\frac{1}{(b(B-G)-ac)^2}+\frac{1}{(c(C-G)-ab)^2}\right\}\\&=abc(G-G')(G-G'')\end{aligned}$$

woraus

$$\alpha=\sqrt{\frac{[b(B-G)-ac][c(C-G)-ab]}{[a(A-G)-bc](G-G')(G-G'')}}$$

Die Schlüsse bedürfen einer Abänderung, wenn eine der Grössen a, b, c verschwindet. Die obige erste Gleichung für G wäre dann eine identische.

[5.]

Gleichung der Punkte der Kegelfläche, in welcher die Punkte (1) (2) (3) (4) (5) liegen, Spitze des Kegels im Mittelpunkt der Kugel zugleich Anfangspunkt der Coordinaten. Achse der x geht durch den Punkt (3), also Ebene der yz geht durch (1) und (5), Achse der y geht durch (1)

	x	y	z
(3)	1	0	0
(4)	cos 1	0	sin 1
(5)	0	cos 3	sin 3
(1)	0	1	0
(2)	cos 5	cos 4	—cos 3 . sin 5

Gleichung

$$(z.\cos 1-x.\sin 1)(z.\cos 3-y.\sin 3)\cos 2=xy$$

oder

$$zz = xz\sqrt{\alpha} + yz\sqrt{\gamma} + \tfrac{1+\alpha+\gamma}{\sqrt{\alpha\gamma}}xy$$

Durch Veränderung der Coordinatenflächen lässt sich dieselbe in die Form bringen

$$z'z' = Lx'x' + My'y'$$

Löst man die Gleichung auf

$$t(2t-1)^2 = \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon(t-1)$$

welche eine negative (G) und zwei positive Wurzeln (G', G'') hat, so wird

$$Gz'z' + G'x'x' + G''y'y' = 0$$

$$GG'G'' = -\tfrac{1}{4}\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$$

$$(G-1)(G'-1)(G''-1) = -\tfrac{1}{4}$$

$$(2G-1)(2G'-1)(2G''-1) = -\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$$

Für obiges Beispiel

$$t(2t-1)^2 = 20(t-1)$$

Wurzeln $\quad -2{,}1973145, \quad +1{,}06931815, \quad +2{,}1279965$

Setzt man

$$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon = \omega \quad \text{und} \quad \sqrt{\tfrac{(18\omega+1)^2}{(3\omega+1)^3}} = \cos 3\psi$$

so wird

$$t = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\cos\psi . \sqrt{(3\omega+1)}$$

Das Verhalten der cubischen Gleichung

$$\frac{t(2t-1)^2}{t-1} = \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$$

(welche man am bequemsten mit WEIDENBACH's Tafel auflöst, wo für $\frac{1-x}{1+x} = y$ gesucht werden muss $\frac{1}{yxx} = \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, wonach dann $2t-1 = \frac{1}{x}$ wird) übersieht man durch folgende Tafel

t	$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$	t	$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$	t	$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$
∞	∞	$+1.9$	$+16.6$	$+1.0$	∞
$+10$	$+400.9$	$+1.8$	$+15.2$	. . . . .	negativ
$+9$	$+325.1$	$+1.7$	$+14.0$	-1.0	∞
$+8$	$+257.1$	$+1.6$	$+12.9$	-1.618034	$+11.0901699$
$+7$	$+197.2$	$+1.5$	$+12.0$	-2	$+16.7$
$+6$	$+145.2$	$+1.4$	$+11.34$	-3	$+36.7$
$+5$	$+101.2$	$+1.309017$	$+11.0901699$	-4	$+64.8$
$+4$	$+65.3$	$+1.3$	$+11.09$	-5	$+100.8$
$+3$	$+37.5$	$+1.2$	$+11.76$	$-\infty$	∞
$+2$	$+18$	$+1.1$	$+15.84$		

Damit also drei reelle Wurzeln Statt finden, muss $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon \geqq 11.0901699$ oder $\frac{11}{2}+\frac{\sqrt{125}}{2}$ sein, die Grenzwerthe für t sind also: $+1.309017 = \frac{3+\sqrt{5}}{4}$ und $-1.618034 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

[6].

A, B, C, D, E die Winkelpunkte des Polygons

a, b, c, d, e Pole der Diagonalen

$0, 1, 2$ die drei Hauptachsen entsprechend den Wurzeln G, G', G'' der Gleichung

$$\frac{t(2t-1)^2}{t-1} = (\operatorname{tang} AB \,.\, \operatorname{tang} BC \,.\, \operatorname{tang} CD \,.\, \operatorname{tang} DE \,.\, \operatorname{tang} EA)^2$$

wo für G die negative Wurzel genommen werden mag; so dass

$$Guu + + G'u'u' + G''u''u'' = 0$$

wenn u die Coordinaten irgend eines der Punkte A, B, C, D, E bedeuten, also zugleich $uu+u'u'+u''u''=1$.

Die Quelle der Hauptsätze ist in den zwei Gleichungen enthalten

I. $$\cos 0A \,.\, \cos 0b = -\frac{\operatorname{tang} EA \,.\, (2G-1-\operatorname{tang} AB^2)}{4(G-G')(G-G'')}$$

II. $$\cos 0A \,.\, \cos 0C = -\frac{2G-1-\frac{1}{\sin DE^2}}{4\cos BC \,.\, \cos AB(G-G')(G-G'')}$$

Die Gleichung I. repräsentirt 30 Gleichungen, die II. hingegen 15 da alle Permutationen der Achsen und der Winkelpunkte erlaubt sind. Noch zierlicher (in den anfänglichen Bezeichnungen, wo $\alpha = \tan CD^2$ u. s. w.)

$$\text{I.}\quad \begin{cases} \cos 0C.\cos 0d = \frac{1+\alpha-2G}{4(G'-G)(G''-G)}.\sqrt{\varepsilon} = \mathfrak{A}.\sqrt{\mathfrak{e}} \\ \cos 0D.\cos 0c = \frac{1+\alpha-2G}{4(G'-G)(G''-G)}.\sqrt{\delta} = \mathfrak{A}.\sqrt{\delta} \end{cases}$$

$$\text{II.}\quad \cos 0B.\cos 0E = \frac{2\alpha+1-2\alpha G}{4(G'-G)(G''-G)}.\sqrt{\delta\varepsilon} = \mathfrak{a}.\sqrt{\delta\varepsilon}$$

Die zehn Gleichungen I. können nur für neun gelten, weil die Multiplication von fünfen dasselbe Resultat gibt wie die Multiplication der fünf übrigen. Es muss also zwischen den 10 Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{b}$ etc. vier Bedingungsgleichungen geben, welche am zierlichsten so dargestellt werden

$$\delta\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{C} = \varepsilon\mathfrak{e}\mathfrak{d}\mathfrak{D}, \qquad \gamma\mathfrak{c}\mathfrak{d}\mathfrak{D} = \alpha\mathfrak{a}\mathfrak{e}\mathfrak{E} \text{ u. s. w. oder auch}$$
$$\delta\mathfrak{a}\mathfrak{A}\mathfrak{C} = \gamma\mathfrak{d}\mathfrak{B}\mathfrak{D}, \qquad \gamma\mathfrak{b}\mathfrak{B}\mathfrak{D} = \delta\mathfrak{e}\mathfrak{C}\mathfrak{E} \text{ u. s. w.}$$

Es ist aber

$$\cos 0A^2 = \frac{\mathfrak{e}\mathfrak{a}\mathfrak{b}}{\mathfrak{c}\mathfrak{d}}.\alpha = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{b}\gamma}{\mathfrak{E}} = \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{e}\delta}{\mathfrak{B}} \text{ u. s. w.,} \qquad \cos 0a^2 = \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{D}}{\mathfrak{a}} \text{ u. s. w.}$$

[7.]

1843. April 20. Die excentrischen Anomalien $\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi''', \varphi''''$ der Punkte A, B, C, D, E sind durch die Gleichungen verbunden (G als negativ betrachtet)

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi'''+\varphi'')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi'''-\varphi'')} = \frac{G}{G''}.\sin\varphi, \qquad \frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi'''+\varphi'')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi'''-\varphi'')} = \frac{G}{G''}.\cos\varphi$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi'+\varphi'''')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi'''')} = \sqrt{\frac{G(G-1)}{G''(G''-1)}}.\sin\varphi = \frac{G(2G-1}{G''(2G''-1)}\sin\varphi$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi'+\varphi'''')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi'''')} = \sqrt{\frac{G(G-1)}{G'(G'-1)}}.\cos\varphi = \frac{G(2G-1)}{G'(2G'-1)}\cos\varphi$$

Die Relationen zwischen den Winkeln $\varphi^0, \varphi', \varphi''$ sind am einfachsten auf folgende Art darzustellen, $\sqrt{\frac{G'}{G'-1}} = \xi$, $\sqrt{\frac{G''}{G''-1}} = \eta$ gesetzt, wird $\xi\eta =$

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi'''')}{\tan\frac{1}{2}(\varphi'''-\varphi'')} = \frac{\tan\frac{1}{2}(\varphi''-\varphi^0)}{\tan\frac{1}{2}(\varphi''''-\varphi''')} = \frac{\tan\frac{1}{2}(\varphi'''-\varphi')}{\tan\frac{1}{2}(\varphi^0-\varphi'''')} = \frac{\tan\frac{1}{2}(\varphi''''-\varphi'')}{\tan\frac{1}{2}(\varphi'-\varphi^0)} = \frac{\tan\frac{1}{2}(\varphi^0-\varphi''')}{\tan\frac{1}{2}(\varphi''-\varphi')}$$

für $\frac{\xi\eta+1}{\xi\eta-1}$ gibt es einen ähnlichen Ausdruck, der sich hieraus leicht ableiten lässt.

In Zahlen

				log tang	log tang	log Δ
$\varphi^0 =$	$50^0\ 29'\ 20''$	$80^0\ 54'\ 55''$	$49^0\ 13'\ 4''$	0.79616	0.06418	9.81007
$\varphi' =$	92 56 38	55 49 27	15 16 12.5	0.16814	9.43617	9.182
$\varphi'' =$	162 8 14	83 48 52	59 41 16.5	0.96505	0.23313	9.97901
$\varphi''' =$	260 34 22	64 29 16.5	21 13 39	0.32127	9.58931	9.33515
$\varphi'''' =$	291 6 47	74 57 29	34 35 48	0.57068	9.83871	9.

$0.73196 = \log \xi\eta$

[8.]

Die $\varphi, \varphi', \varphi'', \varphi''', \varphi''''$ sind nichts anders als die Amplituden zu fünf transscendenten Argumenten, welche um $\frac{4}{5}K$ zunehmen (in der Bedeutung von Jacobi p. 31) und wo der Modulus k

$$= \sqrt{\frac{\frac{1}{G'G'} - \frac{1}{G''G''}}{\frac{1}{G'G'} - \frac{1}{GG}}} = \sin\mu, \quad \cos\mu = \sqrt{\frac{\frac{1}{G''G''} - \frac{1}{GG}}{\frac{1}{G'G'} - \frac{1}{GG}}}$$

Das transcendente Argument selbst, unbestimmt genommen, ist

$$= \int \frac{x\,dy - y\,dx}{\sqrt{(xx+yy)}} . \sqrt{\frac{\frac{1}{G'G'} - \frac{1}{GG}}{\left(\frac{1}{G'G'} - \frac{1}{GG}\right)xx + \left(\frac{1}{G''G''} - \frac{1}{GG}\right)yy}}$$

Δ in der Bezeichnung von Jacobi gebraucht so dass $\Delta\varphi = \sqrt{(1 - hk\sin\varphi^2)}$, es sind

die drei Grössen	ebenso		propositional den Zahlen	oder
$\tang\frac{1}{2}(\varphi' - \varphi'''')$	$\tang\frac{1}{2}(\varphi'' - \varphi^0)$	u. s. w.	$G(2G-1)\sqrt{\left(\frac{1}{G'G'} - \frac{1}{GG}\right)}$	$\tang \operatorname{am} \frac{4}{5}K$
$\tang\frac{1}{2}(\varphi''' - \varphi'')$	$\tang\frac{1}{2}(\varphi'''' - \varphi''')$		$-G\sqrt{\left(\frac{1}{G'G'} - \frac{1}{GG}\right)}$	$\tang \operatorname{am} \frac{2}{5}K$
$\Delta\varphi^0$	$\Delta\varphi'$		1	1

BEMERKUNGEN.

In diesem dritten Bande von GAUSS Werken habe ich alle Abhandlungen und Aufsätze aus dem Gebiete der allgemeinen Analysis und zwar speciell aus der Theorie der algebraischen Functionen, der GAUSSsischen Reihen und der Elliptischen Functionen, so wie einige Mittheilungen das PFAFFsche Theorem und die Construction von Logarithmentafeln betreffend vereinigt. Sie bestehen aus einer Doctordissertation (früher in Quart gedruckt); aus früher veröffentlichten Abhandlungen: fünf in den '*Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis*' (Quart), einer in den '*Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*' (Quart) und einer im CRELLEschen '*Journal für reine und angewandte Mathematik*' (Quart); ferner aus sechs Anzeigen eigner Abhandlungen in den '*Göttingischen Gelehrten Anzeigen und Nachrichten*' (Octav); aus zwölf Mittheilungen über nicht eigne Schriften in den '*Göttingischen gelehrten Anzeigen*' (Octay) (von GAUSS nicht unterzeichnet aber in Betreff seiner Autorschaft durch die Acten der Göttinger Universitäts-Bibliothek verificirt), in der '*Monatlichen Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde herausgegeben vom Freiherrn* VON ZACH' (Octav), in den '*Astronomischen Nachrichten herausgegeben von* SCHUMACHER' (Quart); und auch aus zwei Erläuterungen in der '*Monatlichen Correspondenz*' und in VEGA's '*Sammlung von Hülfstafeln*' (Quart) zu den GAUSSsischen Additions- und Subtractions-Logarithmentafeln. Diese Tafeln selbst habe ich hier nicht abdrucken lassen, weil sie sehr verbreitet sind und das Format dieser Werke zum Gebrauche solcher Tafeln unbequem sein würde.

Bei der Redaction habe ich dieselben Grundsätze befolgt wie in den frühern Bänden. Zur bessern Übersicht der Gegenstände in einem so umfangreichen Bande sind die Hauptlehrsätze auf gleiche Weise durch den Druck ausgezeichnet. Zum leichtern Gebrauch sowohl der ältern Ausgaben als der vorliegenden habe ich bei den Verweisungen auf Schriften, die nicht in diesem Bande selbt sich finden, statt des Ortes der Veröffentlichungen die eignen Titel so wie statt der Nummer der Seite die der Artikel angegeben. Auf Seite 20 in Zeile 15 und 16 ist gemäss einer handschriftlichen Bemerkung '*objectionem secundam et quar-*

tam' statt *'objectionem tertiam et quartam'* und in Zeile 19 ebenso *'objectionem tertiam'* statt *'objectionem primam'* gesetzt. Ausserdem unterscheidet sich die vorliegende Ausgabe von den frühern derselben Schriften nur durch die Berichtigung einiger Druckfehler, wobei ich zum Theil die Gaussischen Original-Manuscripte benutzen konnte.

Aus dem Handschriftlichen Nachlasse habe ich aufgenommen: die den Seiten 30 und 112 beigefügten Noten, den zweiten Theil der Abhandlung *'Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc.'*, eine ausführliche Abhandlung über Interpolation mit einigen in meinen Bemerkungen Seite 328 u. f. erläuterten Zusätzen, und eine Reihe von Abhandlungen, die sich auf die Elliptischen Functionen beziehen.

Die Handschriftlichen Aufzeichnungen habe ich hier wie auch früher bis auf Berichtigung von unerheblichen Schreibfehlern unverändert abdrucken lassen und meine Einschaltungen, die mit Ausnahme der *'Fortsetzung der Untersuchungen über das arithmetisch-geometrische Mittel'* nur in kurzen Sätzen bestehen, durch [Einklammerung] abgesondert. Die geschichtlichen Angaben und erforderlichen Zusätze fur den Nachlass über hypergeometrische Reihen und Interpolation habe ich in den jenen Abhandlungen unmittelbar folgenden Bemerkungen zusammengestellt.

Die Redaction der Gaussischen Arbeiten über Elliptische Functionen wurde Seitens der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen von Riemann gewünscht und ihm zu dem Zwecke die Handschriften übergeben. Leider hat er weder eine schriftliche noch mündliche Mittheilung aus diesen seinen Studien hinterlassen. Erst nach dem bedauernswerthen allzufrühen Tode Riemanns und nachdem der vorliegende dritte Band bis auf jenen Theil gedruckt war, konnte ich die Gaussischen Handschriften zu meiner Bearbeitung übernehmen.

Gauss hat von seinen Untersuchungen der Functionen, die wir jetzt die Elliptischen nennen, nur einen Theil veröffentlicht: eine Anwendung dieser Theorie auf die höhere Arithmetik in der *Summatio quarundam serierum singularium* 1808 *September* und eine Anwendung auf die Bestimmung der Säcularstörungen der Planeten in der *Determinatio attractionis, quam in punctum quodvis positionis datae exerceret planeta, si ejus massa per totam orbitam ratione temporis, quo singulae partes describuntur, uniformiter esset dipertita,* 1818 *Januar*. Den grössern Theil hat er niedergelegt in einigen unvollständigen Entwürfen zu Anfängen verschiedener Abhandlungen und in zahlreichen zwischen andern Arbeiten sehr zerstreuten Aufzeichnungen einzelner Formeln. Diese im handschriftlichen Nachlasse befindlichen Untersuchungen habe ich hier in einzelnen Gruppen zusammengestellt jenachdem sie vom Algorithmus des Arithmetisch-Geometrischen Mittels oder einem anderen diesem analogen und mit diesem in Verbindung gesetzten Algorithmus ausgehen oder aber sich auf die speciellen Lemniscatischen Functionen beziehen oder endlich die Darstellungen der allgemeinen Functionen durch Producte als wesentliches Hülfsmittel gebrauchen. Die Untersuchung des *Pentagramma mirificum* bildet eine Anwendung der Fünftheilung der ganzen Elliptischen Integrale.

Die Abhandlung mit den beiden Abschnitten *de origine proprietatibusque generalibus numerorum mediorum arithmetico-geometricorum* und *de functionibus transscendentibus quae ex differentiatione mediorum* *arithmetico-geometricorum oriuntur* bildet die erste und zwar eine sehr sorgfältig geschriebene Aufzeichnung in einem Handbuche, welches, wie der Titel besagt, von dem Jahre 1800 an benutzt ist. Die Beschäftigung mit diesem Gegenstande wird aber schon in einer viel frühern Zeit begonnen haben; nach Mittheilungen über eine mündliche Äusserung von Gauss, scheint er im Jahre 1794 die Beziehungen zwischen den arithmetisch-geometrischen Mitteln und den Potenzreihen, in denen die Exponenten mit den Quadrat-Zahlen fortschreiten, gekannt zu haben.

Die Formeln für den in Art. 18. Seite 389. aufgenommenen Algorithmus, der die von Gauss eingeführten neuen Transscendenten mit den Quadrat-Werthen der beiden Argumente zurückführt auf die Transscendenten mit den einfachen Argument-Werthen, folgen in einem Handbuche unmittelbar auf eine astronomische Rechnung an deren Schlusse steht '*geendigt d.* 2. *May* 1809'. Die Aufzeichnungen der anderen Untersuchungen über das Arithmetisch-Geometrische Mittel befinden sich theils auf einzelnen nicht datirten Blättern, theils erscheinen sie in den Handbüchern wegen ihrer Kürze an einigen, früher zu grösserer Übersichtlichkeit zwischen verschiedenartigen Arbeiten leer gelassenen, Stellen niedergeschrieben und erlauben keine sichere Zeitangabe.

Wie schon in Art. 12 bemerkt, habe ich geglaubt zur Annehmlichkeit für den Leser diese sehr zerstuckelten Untersuchungen durch eine zusammenhängende Darstellung vereinigen zu mussen selbst auf die Gefahr hin, hier einige Entwickelungen hinzustellen, die von Gauss nicht ausgeführt worden sind, wie z. B. die Ableitung der Differentialgleichung fur das Arithmetisch-Geometrische Mittel ohne die Reihen-Entwickelung und die Darstellung durch bestimmte Integrale vorauszusetzen, eine Ableitung, die sich an die in Art. 10. ausgeführte Untersuchung anschliesst und sich von der von Herrn Borchardt gegebenen ersten derartigen Ableitung unterscheidet. Die in Art. 17. angeregte Frage über den Zusammenhang zwischen den binaren quadratischen Formen mit negativen Determinanten und den von Gauss gefundenen neuen Transscendenten findet ihre vollständigste Erledigung durch die Untersuchungen des Herrn Kronecker über diesen Gegenstand.

Für die *Lemniscatischen Functionen* besitzen wir die von Gauss in einem Handbuche verzeichnete Zeitbestimmung '*Functiones Lemniscaticas considerare coeperamus* 1797. *Januar.* 8.' Von den im Nachlasse vorhandenen Aufzeichnungen scheint nach Papier und Form der Handschrift zu urtheilen, die auf einem besonderen Blatte stehenden und hier von mir mit 1, 2, 3, 4 bezeichneten Artikel der *ersten Gruppe* der Untersuchungen über die Lemniscatischen Functionen die früheste zu sein. Die folgenden hier auf Seite 406—412 unter der gemeinsamen von Gauss an mehreren Stellen gebrauchten Überschrift: '*Einige neue Formeln die Lemniscatischen Functionen betreffend*' zusammengestellten Aufzeichnungen derselben ersten Gruppe gehören einer ungleich spätern Zeit an, die darin enthaltenen Resultate sind auch wohl viel früher gefunden und theils zur Gedächtnissprobe, theils in dem Streben recht elegante Formeln zu erhalten von Neuem niedergeschrieben und zwar in zwei Handbüchern, von denen das eine im '*November* 1801' das andere '*im Mai* 1809 *angefangen*' ist. Die Functionen sin. lemn. so wie cos. lemn. bezeichnet Gauss überall durch die aus der Zusammenziehung von *s* und *l* so wie von *c* und *l* gebildeten Schriftzüge. Da diese bis jetzt nicht in Druckzeichen vorhanden sind, so habe ich sie hier durch die Worte selbst ersetzt.

Von den Untersuchungen, welche sich vorzugsweise auf die Darstellung der Lemniscatischen Functionen durch unendliche Producte und durch trigonometrische Reihen beziehen und welche ich als eine *zweite Gruppe* zusammengestellt habe, bilden die ersten vier Artikel die *Scheda prima* eines nach der Angabe des Titelblattes im Juli 1798 begonnenen Notizbuches. Die Artikel 1, 2, 3 sind von Gauss selbst nummerirt, dann folgt im selben Hefte unmittelbar der Inhalt von Art. [4.] [5.] Seite 415, und hienach mit vielfachen Unterbrechungen durch Astronomische Untersuchungen der Theil der in Art. [17.] Seite 431 aufgenommenen Rechnungen, der mit lateinischem Text erläutert ist, und die einzelnen Theile des Inhalts von Art. [6.] [7.] Seite 417, 418. Der Inhalt von Art. [8.] [9.] [10.] Seite 418, 419, Art. [15.] [16.] Seite 423—425 findet sich zerstreut in einem 1799 November angefangenen Notizbuche. Die Aufzeichnungen der übrigen Untersuchungen gehören, vielleicht mit Ausschluss der Fünftheilung des ganzen lemniscatischen Bogens Art. [13.], wohl einer spätern Zeit an und befinden sich, ausser den in Art. [14.] wiedergegebenen und in ein Handbuch nach dem 20. Febr. 1817 eingetragenen Summationsformeln für das Lemniscatische Integral der zweiten Art, alle auf einzelnen Blättern.

Die der Zeit nach erste unter den im Handschriftlichen Nachlasse erhaltenen die allgemeinen Elliptischen Functionen betreffenden Aufzeichnungen ist wohl die im November 1799 begonnene auf Seite 433—435 abgedruckte Abhandlung *Zur Theorie der neuen Transscendenten* I. die sich in einem Notizbuche dessen Titelblatt die Aufschrift '*Varia, imprimis de Integrali* $\int \frac{du}{\sqrt{(1+\mu\mu\sin u^2)}}$, *Novembr.* 1799' trägt, zwischen Untersuchungen über ganz verschiedenartige Gegenstände zerstreut befindet.

Die Abhandlung II. mit der Überschrift '*Zur Theorie der transscendenten Functionen gehörig*' folgt in einem Handbuche unmittelbar nach den in der *Theoria motus corporum coelestium* wiedergegebenen Hülfstafeln. Diese Untersuchungen, insbesondere die auf die Siebentheilung bezüglichen, werden wohl dem Jahre 1808 angehören und die Veranlassung zu einer Mittheilung an Schumacher gewesen sein.

Die Abhandlung III. mit den Eingangs-Worten 'Die Theoreme in Bezug auf diejenigen Reihen und unendlichen Producte, welche zu der Theorie der Arithmetisch-Geometrischen Mittel gehören, ordnen wir so:' Seite 446—460 folgt in einem Handbuche unmittelbar nach einer astronomischen Rechnung, der die Bemerkung beigefügt ist 'geendigt den 28. April 1809'.

Die Abhandlung IV. 'Hundert Theoreme über die neue Transcendente' Seite 461—469 steht auf einzelnen Blättern ohne irgend eine Zeitangabe.

Die Abhandlung V. Seite 470—480 mit den Eingangsworten 'Allgemeines Theorem' enthält die beiden Zeitangaben 1827 Aug. 6. und Aug. 29. Der letzte Theil dieses Aufsatzes bildet wohl eine der frühesten Vorarbeiten von Gauss für seine 'Allgemeinen Lehrsatze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte' und lassen vermuthen, dass er den Zusammenhang dieses Gebietes mit einem anderen Gebiete der Analysis, nemlich der

Theorie der Functionen mit complexen Argumenten erkannt habe, ein Zusammenhang welcher RIEMANN auf ein so fruchtbares Gebiet der Forschung geführt hat.

Die Untersuchung des *Pentagramma mirificum*, eines sphärischen Fünfecks, dessen fünf Diagonalen Quadranten sind, befindet sich an zwei getrennten Stellen in einem Handbuche, auf einem besonderen Blatte der Art. [4.]. Das, was ich hier als Art. [1.] und [2.] bezeichnet habe, ist vor dem 23. Januar 1836 geschrieben, das andere enthält in Art. [7.] die Zeitangabe 1843 April 20.

Zwischen den unter Nr. I. zusammengestellten Untersuchungen über die neuen Transscendenten befindet sich auch der Anfang einer Abhandlung mit der Überschrift '*Motus solidi a nullis viribus sollicitati*'. Das Problem ist dort bis zu dem bei der bekannten Auflösung auftretenden elliptischen Integral geführt, so dass zu vermuthen steht, GAUSS habe erkannt, dass die Gleichungen zur Bestimmung dieser Bewegung mit Hülfe der neuen Transscendenten in endlicher Form erscheinen.

Die Aufzeichnung der hier unter V. zusammengestellten Untersuchungen über die neuen Transscendenten, mit den Zeitangaben 1827 August 6 und August 29 ist wohl durch die JACOBIschen Briefe an SCHUMACHER datirt aus Königsberg von 1827 Juni 13 und Aug. 2 deren ersterer die algebraischen Gleichungen fur die Dreitheilung und Fünftheilung elliptischer Integrale der andere die Gleichung zwischen den trigonometrischen Tangenten der Argumente fur die Transformation beliebigen Grades gibt, veranlasst worden. Diese beiden Briefe sind in der im Monat September 1827 ausgegebenen Nr. 123 der 'Astronomischen Nachrichten' veröffentlicht, aber im Original zuvor an GAUSS mitgetheilt worden, wie aus den GAUSSschen Briefen an SCHUMACHER vom 4. und 19. Aug. 1827 hervorgeht. Die Beweise jener JACOBIschen Lehrsätze hat dieser selbst durch einen aus Königsberg vom 18. November 1827 datirten in der im Monat December 1827 ausgegebenen Nr. 127 der 'Astronomischen Nachrichten' abgedruckten Briefe an SCHUMACHER veröffentlicht.

Zu dieser Zeit war noch nicht, aber doch im selben Jahre, durch das zweite Heft des zweiten Bandes des CRELLEschen Journals für reine und angewandte Mathematik die Abhandlung von ABEL '*Recherches sur les fonctions elliptiques* §. I. — §. VII.' erschienen, und dieses war wohl diejenige Arbeit ABELS, von der GAUSS am 30. Mai 1828 an SCHUMACHER schreibt, 'die, Ihnen gesagt, mir von meinen eignen Untersuchungen wol $\frac{1}{3}$ vorweggenommen hat, und mit diesen zum Theil selbst bis auf die gewählten bezeichnenden Buchstaben übereinstimmt'.

Auf dieselbe Arbeit bezieht sich wohl die folgende Stelle eines Briefs von CRELLE an ABEL vom 18. Mai 1828: — — Voici ce que m'écrit Mr. GAUSS de Goettingue que j'avais également prié de m'envoyer quelque chose sur les fonctions elliptiques dont il s'occupe, comme j'ai appris, plus de 30 ans. 'D'autres occupations m'empêchent pour le moment de rédiger ces recherches. Mr. ABEL m'a prévenu au moins d'un tiers. Il vient d'enfiler précisément la même route dont je suis sorti en 1798. Ainsi je ne m'étonne nullement de ce que, pour la majeure partie, il en soit venu aux mêmes résultats. Comme d'ailleurs dans sa déduction il a mis tant de sagacité de pénétratien et d'élégance, je me crois par cela même dispensé de la rédaction de mes propres recherches.' — —

Auch über LEGENDRE besitzen wir einen Ausspruch von GAUSS. In einem Briefe ohne Datum schreibt er an OLBERS 'Sie verlangten in Ihrem letzten Briefe [wahrscheinlich derjenige 'Bremen d. 16. Aug. 1817, *Empfangen den* 25. *Aug.*' bezeichnete; die Briefe aus jenen Monaten sind: O. an G. Juli 17. — G. an O. Aug. 2. — G. an O. der hier im Auszuge mitgetheilte ohne Datum — O. an G. Nov. 2. — G. an O. Dec. 2.], allertheuerster Freund, mein Urtheil uber MOSSOTTIS in den Mailänder Ephemeriden gegebene Methode die Bahnen von H. K. zu berechnen. Als ich Ihnen neulich schrieb, war mir der Gegenstand nicht gegenwärtig genug, ob ich gleich jenen Aufsatz fruher so weit gelesen hatte, dass ich ein Urtheil darüber vorläufig gefasst hatte. In jenem Augenblicke erlaubte mir meine Zeit nicht, mich gleich wieder gehörig in die Sache hineinzustudiren, und ich überging daher Ihre Anfrage. Seitdem habe ich nun wieder Anlass genommen, jenen Aufsatz noch einmal zu lesen, und in den eigentlichen Geist weiter einzudringen, und ich will heute eine Stunde dazu anwenden mich mit Ihnen über diesen Gegenstand zu unterhalten.'

'Geneigt, wie ich von jeher gewesen bin, jeden neuen originellen oder genialen Gedanken mit Liebe aufzunehmen*), wurde ich von der wirklich neuen Idee in MOSSOTTIS Aufsatz bei meiner ersten Lecture frappirt.' — —

*) 'Ich brauche Ihnen wohl nicht zu sagen, dass die neuliche wunderliche Recension von LEGENDRE's *Exercices de calcul Intégral* in unsern G. A. [Göttingische gelehrte Anzeigen 1817 August 14.] nicht von mir ist, da dieses Werk so manches der oben erwähnten Art enthält.'

Es verdient noch besonders ausgesprochen zu werden, dass in Bezug auf die Theorie der Theilung des Lemniscaten-Bogens der Handschriftliche Nachlass nichts enthält, als was der vorliegende Abdruck an Hülfssätzen dazu darbietet, während in dem Werke '*Disquisitiones arithmeticae*', welches Juli 1801 ausgegeben worden, Art. 335 der Sectio septima, de aequationibus circuli sectiones definientibus, gesagt wird — 'Ceterum principia theoriae, quam exponere aggredimur, multo latius patent, quam hic extenduntur. Namque non solum ad functiones circulares, sed pari successu ad multas alias functiones transscendentes applicari possunt, e. g. ad eas quae ab integrali $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$ pendent, praetereaque etiam ad varia congruentiarum genera: sed quoniam de illis functionibus transscendentibus amplum opus peculiare paramus, de congruentiis autem in continuatione disquisitionum arithmeticarum copiose tractabitur, hoc loco solas functiones circulares considerare visum est.' —

ABEL und JACOBI haben GAUSS' Untersuchungen uber die Elliptischen Functionen nicht vorgefunden, sie mussten dieses Gebiet der Wissenschaft von Neuem entdecken.

Die speciellen Beziehungen zwischen den Arbeiten von GAUSS in diesem Gebiete der reinen Analysis und den Arbeiten von Anderen werde ich in einer besondern Schrift im Zusammenhange mit einer Geschichte der gesammten wissenschaftlichen Thätigkeit von GAUSS darzustellen versuchen, wahrend ich in diesen seinen eignen Werken angeschlossenen Bemerkungen nur die betreffenden actenmässigen Thatsachen aufgenommen habe.

Gottingen im Juni 1868.

SCHERING.