# ANZEIGE.

Göttingische gelehrte Anzeigen. 1818 Februar 9.

Am 17ten Januar übergab Hr. Hofr. GAUSS der Königl. Societät eine Vorlesung:

*Determinatio attractionis, quam in punctum quodlibet positionis datae exerceret planeta, cuius massa per totam eius orbitam, ratione temporis, quo singulae partes describuntur, uniformiter esset dispertita.*

Vermöge eines, vielleicht bis jetzt noch von niemand ausdrücklich ausgesprochenen, aber aus den Gründen der physischen Astronomie leicht zu beweisenden Lehrsatzes, sind die Säcularveränderungen einer Planetenbahn durch die Störung eines andern Planeten dieselben, der störende Planet mag seine elliptische Bahn nach Keplers Gesetzen wirklich beschreiben, oder seine Masse mag auf den Umfang der Ellipse in dem Masse vertheilt angenommen werden, dass auf Stücke der Ellipse, die sonst in gleich grossen Zeiten beschrieben werden, gleich grosse Antheile an der ganzen Masse kommen: vorausgesetzt, dass die Umlaufszeiten des gestörten und des störenden Planeten nicht in rationalem Verhältnisse zu einander stehen. Die Aufgabe, welche den Gegenstand dieser Abhandlung ausmacht, nemlich die nicht genäherte, sondern genaue, nicht von mässiger Excentricität der Ellipse abhängige, sondern allgemeine, Bestimmung der Anziehung, welche ein elliptischer Ring von unendlich kleiner und nach obigem

Gesetze unveränderlicher Dicke gegen einen jeden Punkt im Raume ausübt, ist daher für die physische Astronomie von hohem Interesse. Inzwischen ist sie nicht weniger auch in rein mathematischer Hinsicht merkwürdig, wegen der mancherlei Kunstgriffe, welche ihre vollständige Auflösung erfordert.

Von der Auflösung selbst ist es nicht wohl thunlich, hier einen Auszug zu geben. Der Verf. hat eine rein analytische Behandlung gewählt; Kenner, welche ihr mit Aufmerksamkeit folgen, werden leicht die geometrischen Correlate der einzelnen in der Untersuchung vorkommenden Grössen, und die Umschmelzbarkeit in eine geometrische Form wahrnehmen. Hier mag es genügen, nur das Endresultat anzuführen. Drei unbekannte Grössen $G$, $G'$, $G''$ werden durch die Wurzeln einer cubischen Gleichung bestimmt, aus deren Beschaffenheit sich beweisen lässt, dass sie alle Mal drei reelle Wurzeln habe. Die nach einer beliebigen Richtung zerlegte Anziehung des elliptischen Ringes wird sodann durch einen Ausdruck von der Form $pP+qQ$ dargestellt, wo $p$ und $q$ algebraisch von $G$, $G'$, $G''$ abhängen, $P$ und $Q$ hingegen die bestimmten Werthe der Integrale

$$\int \frac{\cos T^2 . \mathrm{d}T}{2\pi(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\int \frac{\sin T^2 . \mathrm{d}T}{2\pi(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)^{\frac{3}{2}}}$$

bedeuten, wenn die Integrationen von $T=0$ bis $T=360^0=2\pi$ ausgedehnt werden, und wo

$$m = \sqrt{(G+G')}, \quad n = \sqrt{(G+G'')}$$

Da diese Integrale ($m=n$ ausgenommen) transscendenter Natur sind. und bekannter Massen mit andern in der Perturbationsrechnung vorkommenden vielbehandelten Transscendenten zusammenhängen, so konnte die Auflösung, nachdem sie bis auf diesen Punkt geführt war, als vollendet angesehen werden. Der Verfasser hat indessen diese erste sich ihm darbietende Gelegenheit benutzt, um die ersten Linien eines *neuen Algorithmus* zu geben, dessen er sich schon seit einer langen Reihe von Jahren zur Bestimmung dieser Transscendenten bedient hat, und worüber er in Zukunft eine ausgedehnte zu vielen merkwürdigen Resultaten führende Untersuchung bekannt machen wird. Hier können nur die Hauptsätze, mit Uebergehung der Beweise angeführt werden. Wenn man aus zwei gegebenen positiven Grössen $m$ und $n$, andere $m'$, $m''$, $m'''$ u. s. w., $n'$, $n''$, $n'''$ u. s. w. nach folgenden Gesetzen ableitet:

$$\begin{aligned} m' &= \tfrac{1}{2}(m+n), & n' &= \sqrt{mn} \\ m'' &= \tfrac{1}{2}(m'+n'), & n'' &= \sqrt{m'n'} \\ m''' &= \tfrac{1}{2}(m''+n''), & n''' &= \sqrt{m''n''} \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

d. i. wenn $m'$, $n'$ resp. das arithmetische und geometrische Mittel zwischen $m$ und $n$ ist; eben so $m''$, $n''$ das arithmetische und geometrische Mittel zwischen $m'$ und $n'$ u. s. f.: so nähern sich die Glieder sowohl der Reihe $m$, $m'$, $m''$, $m'''$ u. s. w., als die der Reihe $n$, $n'$, $n''$, $n'''$ u. s. w. äusserst schnell einer gemeinschaftlichen Grenze $= \mu$, welche der Verfasser das arithmetisch-geometrische Mittel von $m$ und $n$ nennt. Offenbar ist $\mu$ zugleich das arithmetisch-geometrische Mittel von $m'$ und $n'$, oder überhaupt von je zweien zusammengehörigen Gliedern der beiden Reihen. Der Verfasser beweist nun, dass $\frac{1}{\mu}$ der Werth des Integrals

$$\int \frac{dT}{2\pi\sqrt{(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)}}$$

ist, wenn die Integration von $T = 0$ bis $T = 360^0$ ausgedehnt wird. Man wird leicht sehen, dass diess auch auf folgende Art hätte ausgesprochen werden können: Wenn die Entwicklung der Function

$$\frac{1}{\sqrt{(\alpha + 6\cos\psi)}}$$

die Reihe

$$A + B\cos\psi + C\cos 2\psi + D\cos 3\psi + \text{ etc.}$$

gibt, so ist allezeit $\frac{1}{A}$ das arithmetisch-geometrische Mittel der beiden Grössen $\sqrt{(\alpha + 6)}$ und $\sqrt{(\alpha - 6)}$.

Ein zweites eben so wichtiges Theorem ist, dass wenn man die Summe der unendlichen jederzeit sehr schnell convergirenden Reihe

$$2(m'm' - n'n') + 4(m''m'' - n''n'') + 8(m'''m''' - n'''n''') + \text{ u. s. w.}$$

wo die Zahlencoëfficienten eine geometrische Progression bilden, $= (mm - nn)\nu$ setzt, der Werth des Integrals

$$\int \frac{\cos 2T \,.\, dT}{2\pi\sqrt{(mm\cos T^2 + nn\sin T^2)}}$$

von $T = 0$ bis $T = 360^0$ erstreckt, $= -\frac{\nu}{\mu}$ wird. Offenbar ist denn hierdurch auch der zweite Coëfficient obiger Reihe bekannt, nemlich $B = -\frac{\nu}{2\mu}$ wenn man $m = \sqrt{(\alpha + \beta)}$, $n = \sqrt{(\alpha - \beta)}$ gesetzt hat. Alle folgenden Coëfficienten $C$, $D$, u. s. w. aber werden bekanntlich durch die beiden ersten $A$ und $B$ algebraisch und einfach bestimmt. Für die numerische Berechnung der Grössen $m'm' - n'n'$, $m''m'' - n''n''$ u. s. w. wird in der Abhandlung selbst noch ein besonderes sehr bequemes Verfahren gelehrt.

Die Anwendung auf die Transscendenten der gegenwärtigen Untersuchung gibt endlich noch die einfachen Ausdrücke

$$P = \frac{1+\nu}{2mm\mu}, \quad Q = \frac{1-\nu}{2nn\mu}$$

Aufmerksamen Lesern wird es nicht entgehen, wie viele interessante Aufgaben, die mit den hier betrachteten Transscendenten zusammenhangen, durch den erklärten Algorithmus mit grösster Leichtigkeit aufgelöst werden. Als ein Beispiel führen wir hier die Rectification der Ellipse an. Setzt man ihre halbe grosse Axe $= m$, die halbe kleine Axe $= n$, so wird die Peripherie

$$= \frac{2\pi}{\mu}\{m'm' - 2(m''m'' - n''n'') - 4(m'''m''' - n'''n''') - 8(m''''m'''' - n''''n'''') - \text{u. s. w.}\}$$

Ein anderes Beispiel gibt die Dauer der Pendelschwingungen bei endlichen Bogen, welche sich zu der Dauer der unendlich kleinen Schwingungen verhält, wie die Einheit zu dem arithmetisch-geometrischen Mittel zwischen 1 und dem Cosinus von einem Viertel des ganzen Schwingungsbogens.

Schliesslich mus noch bemerkt werden, dass der Verf. diese Resultate, so wie er sie schon vor vielen Jahren unabhängig von ähnlichen Untersuchungen LAGRANGE's und LEGENDRE's gefunden hat, in ihrer ursprünglichen Form darstellen zu müssen geglaubt hat, obgleich sie zum Theil aus den Entdeckungen dieser Geometer leicht hätten abgeleitet werden können, theils weil jene Form ihm wesentliche Vorzüge zu haben schien, theils weil sie gerade so den Anfang einer viel ausgedehntern Theorie ausmachen, wo seine Arbeit eine ganz verschiedene Richtung von der der genannten Geometer genommen hat.