DE CURVA LEMNISCATA.

1.

Posito integrali $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^4)}}$, a $x = 0$ usque ad $x = s$, $= \varphi$, dicimus s sinum lemniscaticum ipsius φ, $s = \sin \operatorname{lemn} \varphi$.

2.

Valor integralis ab $x = 0$ usque ad $x = 1$ est $= 1.3110287771\ 4605987$ secundum STIRLING, qui valor a nobis usque ad figuram undecimam verus in ventus est, utentibus formula: $\operatorname{arc} \sin \operatorname{lemn} \frac{7}{23} + 2 \operatorname{arc} \sin \operatorname{lemn} \frac{1}{2}$ (EULER habet 1.311031). Potestates huius numeri, cuius duplum semper per ϖ designabimus, has invenimus

1	1.3110287771	4605990680	320.7
2	1.7187964545	0509311.7	
4	2.9542612520	1927863.4	
5	3.8731215170	0712625 4	
6	5.0777737656	5251025.3	
8	8.7276595451	8251569.0	
9	11.4422128208	59	
12	25.7837864151	41749	
13	33.8032859402	5	

$$\log \text{brigg}\, \tfrac{1}{2}\varpi = 0.1176122226 \quad 9692.2$$
$$\log \text{hyp}\, \tfrac{1}{2}\varpi = 0.2708121550 \quad 7159155410 \quad 6425$$
$$\log \text{hyp}\, \varpi = 0.9639593356 \quad 3153686352 \quad 36577$$

Sinum lemniscaticum ipsius $(\frac{1}{2}\varpi - a)$ cosinum lemniscaticum ipsius a dicemus.

3.

Aequationis

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^4)}} + \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^4)}} = 0$$

integrale completum invenitur hoc

$$\frac{x\sqrt{\frac{1-yy}{1+yy}} + y\sqrt{\frac{1-xx}{1+xx}}}{1-xy\sqrt{\frac{1-xx}{1+xx}\,\frac{1-yy}{1+yy}}} = C$$

Sed eiusdem aequat. integrale est

$$\text{arc sin lemn}\, x + \text{arc sin lemn}\, y = c$$

unde sequitur C esse functionem ipsius c. Ut appareat qualis, ponamus $y = 0$, tum fit $C = x$, $c = \text{arc sin lemn}\, x$, quare erit $c = \text{arc sin lemn}\, C$, sive $C = \text{sin lemn}\, c$. Hinc si $\text{sin lemn}\, p = x$, $\text{sin lemn}\, q = y$, erit

$$\text{sin lemn}\,(p+q) = \frac{x\sqrt{\frac{1-yy}{1+yy}} + y\sqrt{\frac{1-xx}{1+xx}}}{1-xy\sqrt{\frac{1-xx}{1+xx}\,\frac{1-yy}{1+yy}}}$$

Hinc posito $p = \frac{1}{2}\varpi$, $q = -a$, fit propter

$$\text{sin lemn}\,(-a) = -\text{sin lemn}\, a, \qquad \text{sin lemn}\, \tfrac{1}{2}\varpi = 1$$

$$\text{cos lemn}\, a = \sqrt{\frac{1-\text{sin lemn}\, a^2}{1+\text{sin lemn}\, a^2}}$$

Forma autem praecedens transit in hanc

$$\sin \operatorname{lemn}(p \pm q) = \frac{\sin \operatorname{lemn} p \cos \operatorname{lemn} q \pm \sin \operatorname{lemn} q \cos \operatorname{lemn} p}{1 \mp \sin \operatorname{lemn} p \sin \operatorname{lemn} q \cos \operatorname{lemn} p \cos \operatorname{lemn} q}$$

$$\cos \operatorname{lemn}(p \pm q) = \frac{\cos \operatorname{lemn} p \cos \operatorname{lemn} q \mp \sin \operatorname{lemn} p \sin \operatorname{lemn} q}{1 \pm \sin \operatorname{lemn} p \sin \operatorname{lemn} q \cos \operatorname{lemn} p \cos \operatorname{lemn} q}$$

[Spätere Bemerkung:]

I. $$\alpha + \beta + \gamma = 180^0 \; [= \varpi]$$

Setzt

$$\begin{aligned} \sin \operatorname{lemn} \alpha &= \operatorname{tang} a, & \cos \operatorname{lemn} \alpha &= \cos A \\ \sin \operatorname{lemn} \beta &= \operatorname{tang} b, & \cos \operatorname{lemn} \beta &= \cos B \\ \sin \operatorname{lemn} \gamma &= \operatorname{tang} c, & \cos \operatorname{lemn} \gamma &= \cos C \end{aligned}$$

so sind a, b, c, A, B, C Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks, wo

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = \sqrt{2}$$

II. $$\alpha + \beta + \gamma = 90^0 \; [= \tfrac{1}{2}\varpi]$$

Setzt

$$\begin{aligned} \sin \operatorname{lemn} \alpha &= \cos a, & \cos \operatorname{lemn} \alpha &= -\operatorname{tang} A \\ \sin \operatorname{lemn} \beta &= \cos b, & \cos \operatorname{lemn} \beta &= -\operatorname{tang} B \\ \sin \operatorname{lemn} \gamma &= \cos c, & \cos \operatorname{lemn} \gamma &= -\operatorname{tang} C \end{aligned}$$

so sind wieder a, b, c, A, B, C Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks, in welchem

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

[4.]

Si valores s $[= \sin \frac{\pi}{\varpi} \varphi]$, qui reddunt ipsum $\sin \operatorname{lemn} \varphi = 0$ secundum regulas notas productum infinitum generare concipiuntur, nec non valores ipsius s, qui reddunt ipsum $\sin \operatorname{lemn} \varphi = \infty$, quorum primum sit $P\varphi$, secundum $Q\varphi$, permissum erit (id quod rigorose demonstrare possumus) ponere

$$\sin \operatorname{lemn} \varphi = \frac{P\varphi}{Q\varphi}$$

erit vero

$$P\varphi = \alpha s\left(1+\frac{4ss}{(e^{\pi}-e^{-\pi})^2}\right)\left(1+\frac{4ss}{(e^{2\pi}-e^{-2\pi})^2}\right)\left(1+\frac{4ss}{(e^{3\pi}-e^{-3\pi})^2}\right)\ldots$$

$$Q\varphi = \left(1-\frac{4ss}{(e^{\frac{1}{2}\pi}+e^{-\frac{1}{2}\pi})^2}\right)\left(1-\frac{4ss}{(e^{\frac{3}{2}\pi}+e^{-\frac{3}{2}\pi})^2}\right)\left(1-\frac{4ss}{(e^{\frac{5}{2}\pi}+e^{-\frac{5}{2}\pi})^2}\right)\ldots$$

$$\alpha = \frac{\varpi}{\pi}$$

Simili modo positis

$$p\varphi = c\left(1-\frac{4ss}{(e^{\pi}+e^{-\pi})^2}\right)\left(1-\frac{4ss}{(e^{2\pi}+e^{-2\pi})^2}\right)\left(1-\frac{4ss}{(e^{3\pi}+e^{-3\pi})^2}\right)\ldots$$

$$q\varphi = \left(1+\frac{4ss}{(e^{\frac{1}{2}\pi}-e^{-\frac{1}{2}\pi})^2}\right)\left(1+\frac{4ss}{(e^{\frac{3}{2}\pi}-e^{-\frac{3}{2}\pi})^2}\right)\left(1+\frac{4ss}{(e^{\frac{5}{2}\pi}-e^{-\frac{5}{2}\pi})^2}\right)\ldots$$

erit

$$\cos \operatorname{lemn} \varphi = \frac{p\varphi}{q\varphi}$$

[5.]

$$\sqrt[4]{2}\,.\,P(\varphi+\tfrac{1}{2}\varpi) = p\varphi$$
$$\sqrt[4]{2}\,.\,Q(\varphi+\tfrac{1}{2}\varpi) = q\varphi$$

$$p(\varphi+\tfrac{1}{2}\varpi) = -\sqrt[4]{2}\,.\,P\varphi$$
$$q(\varphi+\tfrac{1}{2}\varpi) = \sqrt[4]{2}\,.\,Q\varphi$$

$$Pi\psi\varpi = ie^{\pi\psi\psi}P\psi\varpi$$
$$Qi\psi\varpi = e^{\pi\psi\psi}Q\psi\varpi$$
$$pi\psi\varpi = e^{\pi\psi\psi}q\psi\varpi$$
$$qi\psi\varpi = e^{\pi\psi\psi}p\psi\varpi$$

[werden die an einem andern Orte untersuchten Reihen Seite 405 d. B.

$$\varphi - \tfrac{1}{60}\varphi^5 - \tfrac{1}{10080}\varphi^9 + \ldots$$
$$1 + \tfrac{1}{12}\varphi^4 - \tfrac{1}{10080}\varphi^8 + \ldots$$
$$1 - \tfrac{1}{2}\varphi\varphi - \tfrac{1}{24}\varphi^4 - \ldots$$
$$1 + \tfrac{1}{2}\varphi\varphi - \tfrac{1}{24}\varphi^4 + \ldots$$

resp. mit $\mathfrak{P}\varphi$, $\mathfrak{Q}\varphi$, $\mathfrak{p}\varphi$, $\mathfrak{q}\varphi$ bezeichnet, so ist:]

$$\mathfrak{P}\psi\varpi = e^{\frac{1}{2}\pi\psi\psi}P\psi\varpi \qquad \mathfrak{p}\psi\varpi = e^{\frac{1}{2}\pi\psi\psi}p\psi\varpi$$
$$\mathfrak{Q}\psi\varpi = e^{\frac{1}{2}\pi\psi\psi}Q\psi\varpi \qquad \mathfrak{q}\psi\varpi = e^{\frac{1}{2}\pi\psi\psi}q\psi\varpi$$

[6.]

Ex expressionibus supra allatis sequitur

$$\sin\operatorname{lemn}\varphi = \frac{\frac{\pi}{\varpi}(e^{\frac{1}{2}\pi}-e^{-\frac{1}{2}\pi})}{e^{\frac{1}{2}\pi}-2s+e^{-\frac{1}{2}\pi}} - \frac{\frac{\pi}{\varpi}(e^{\frac{1}{2}\pi}-e^{-\frac{1}{2}\pi})}{e^{\frac{1}{2}\pi}+2s+e^{-\frac{1}{2}\pi}}$$

$$-\frac{\frac{\pi}{\varpi}(e^{\frac{3}{2}\pi}-e^{-\frac{3}{2}\pi})}{e^{\frac{3}{2}\pi}-2s+e^{-\frac{3}{2}\pi}} + \frac{\frac{\pi}{\varpi}(e^{\frac{3}{2}\pi}-e^{-\frac{3}{2}\pi})}{e^{\frac{3}{2}\pi}+2s+e^{-\frac{3}{2}\pi}}$$

$$+ \text{ etc.}$$

$$\cos\operatorname{lemn}\varphi =$$

Hinc vero sequitur

$$\sin\operatorname{lemn}\psi\varpi = \frac{\pi}{\varpi}\,\frac{4}{e^{\frac{1}{2}\pi}+e^{-\frac{1}{2}\pi}}\sin\psi\pi - \frac{\pi}{\varpi}\,\frac{4}{e^{\frac{3}{2}\pi}+e^{-\frac{3}{2}\pi}}\sin 3\psi\pi + \ldots$$

[7.]

$$\log(1+\mu\cos\varphi) = 2\left\{\frac{\mu}{1+\sqrt{(1-\mu\mu)}}\cos\varphi - \left(\frac{\mu}{1+\sqrt{(1-\mu\mu)}}\right)^2\frac{\cos 2\varphi}{2} + \left(\frac{\mu}{1+\sqrt{(1-\mu\mu)}}\right)^3\frac{\cos 3\varphi}{3}\right.$$

$$\log Q\psi\varpi = -\tfrac{1}{2}\log 2 + \tfrac{1}{12}\pi$$
$$+\frac{2}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\cos 2\psi\pi - \tfrac{1}{2}\,\frac{2}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}\cos 4\psi\pi + \tfrac{1}{3}\,\frac{2}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}\cos 6\psi\pi - \ldots$$

$$\log P\psi\varpi = \tfrac{1}{2}\log 2 - \tfrac{1}{6}\pi + \log\sin\psi\pi$$
$$-\frac{2}{e^{2\pi}-1}\cos 2\psi\pi - \tfrac{1}{2}\,\frac{2}{e^{4\pi}-1}\cos 4\psi\pi - \tfrac{1}{3}\,\frac{2}{e^{6\pi}-1}\cos 6\psi\pi - \ldots$$

$$\log q\psi\varpi = -\tfrac{1}{4}\log 2 + \tfrac{1}{12}\pi$$
$$-\frac{2}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\cos 2\psi\pi - \tfrac{1}{2}\,\frac{2}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}\cos 4\psi\pi - \tfrac{1}{3}\,\frac{2}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}\cos 6\psi\pi - \ldots$$

$$\log p\psi\varpi = \tfrac{3}{4}\log 2 - \tfrac{1}{6}\pi + \log\cos\psi\pi$$
$$+\frac{2}{e^{2\pi}-1}\cos 2\psi\pi - \tfrac{1}{2}\,\frac{2}{e^{4\pi}-1}\cos 4\psi\pi + \tfrac{1}{3}\,\frac{2}{e^{6\pi}-1}\cos 6\psi\pi - \ldots$$

$$\log\sin\operatorname{lemn}\psi\varpi = \log 2 - \tfrac{1}{4}\pi + \log\sin\psi\pi$$
$$-\frac{2}{e^{\pi}-1}\cos 2\psi\pi + \tfrac{1}{2}\,\frac{2}{e^{2\pi}-1}\cos 4\psi\pi - \tfrac{1}{3}\,\frac{2}{e^{3\pi}-1}\cos 6\psi\pi - \ldots$$

$$
\begin{array}{rlrl}
\log Q\psi\pi = & -0.0847742372 & 7 & \\
& +0.0865895371 & 57 & \cos 2\psi\pi \\
& -0.0018674144 & 52 & \cos 4\psi\pi \\
& +0.0000537996 & 86 & \cos 6\psi\pi \\
& - \qquad\qquad 17436 & 71 & \cos 8\psi\pi \\
& + \qquad\qquad\quad 602 & 81 & \cos 10\psi\pi \\
& - \qquad\qquad\quad\; 21 & 71 & \cos 12\psi\pi \\
& + & 81 & \cos 14\psi\pi \\
& - & 3 & \cos 16\psi\pi
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rlrl}
\log P\psi\varpi = & \log\sin\psi\pi & & \\
& -0.1770251853 & 2 & \\
& -0.0037418731 & 98 & \cos 2\psi\pi \\
& - \qquad\qquad 34873 & 54 & \cos 4\psi\pi \\
& - \qquad\qquad\quad\; 43 & 42 & \cos 6\psi\pi \\
& - & 6 & \cos 8\psi\pi
\end{array}
$$

[8.]

$$\sin \operatorname{lemn}\psi\varpi = \sqrt{\frac{4}{e^{\frac{1}{2}\pi}}}\cdot\frac{\sin\psi\pi - e^{-2\pi}\sin 3\psi\pi + e^{-6\pi}\sin 5\psi\pi - \ldots}{1 + 2e^{-\pi}\cos 2\psi\pi + 2e^{-4\pi}\cos 4\psi\pi - \ldots}$$

$$P\psi\varpi = 2^{\frac{3}{4}}\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}\cdot\left\{e^{-\frac{1}{4}\pi}\sin\psi\pi - e^{-\frac{9}{4}\pi}\sin 3\psi\pi + e^{-\frac{25}{4}\pi}\sin 5\psi\pi - \ldots\right\}$$

$$Q\psi\varpi = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}\cdot\left\{1 + 2e^{-\pi}\cos 2\psi\pi + 2e^{-4\pi}\cos 4\psi\pi - \ldots\right\}$$

$$1 - 2e^{-\pi} + 2e^{-4\pi} - 2e^{-9\pi} + \quad \ldots\ldots \quad = \sqrt{\frac{\varpi}{\pi}}$$

$$e^{-\frac{1}{4}\pi} + e^{-\frac{9}{4}\pi} + e^{-\frac{25}{4}\pi} + \quad \ldots\ldots\ldots \quad = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varpi}{\pi}}$$

$$\sqrt{\frac{\varpi}{\pi}} = 0.9135791381 \;\; 5611682140 \;\; 724259$$

$$2e^{-\frac{1}{4}\pi} = 0.9118762555 \;\; 3199247353 \;\; 1842589456 \;\; 058838833$$

$$2e^{-\frac{9}{4}\pi} = 0.0017028766 \;\; 8561031607 \;\; 1704906$$

$$2e^{-\frac{25}{4}\pi} = \ldots\ldots\ldots 59 \;\; 3851399312 \;\; 9644497731 \;\; 18$$

$$2e^{-\frac{49}{4}\pi} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3867 \;\; 40505991$$

$$2e^{-\pi} = 0.0864278365\ 2754449954\ 8835474343\ 4560225514$$
$$2e^{-4\pi} = 0.0000069746\ 8471241799\ 0983550387\ 96535$$
$$2e^{-9\pi} = \ldots\ldots\ldots\ldots .105109703\ 5201288$$
$$2e^{-16\pi} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .295807$$

[9.]

$$\frac{1}{\sin\operatorname{lemn}\psi\varpi} = \frac{\pi}{\varpi}\left(\frac{1}{\sin\psi\pi} - \frac{4}{e^{\pi}+1}\sin\psi\pi - \frac{4}{e^{3\pi}+1}\sin3\psi\pi - \frac{4}{e^{5\pi}+1}\sin5\psi\pi - \ldots\right).$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{P\psi\varpi} = \frac{\pi}{\varpi}\Big[\frac{1}{\sin\psi\pi} &- 4\left(e^{-2\pi} - e^{-6\pi} + e^{-12\pi} - \ldots\right)\sin\psi\pi\\ &- 4\left(e^{-4\pi} - e^{-10\pi} + e^{-18\pi} - \ldots\right)\sin3\psi\pi\\ &- 4\left(e^{-6\pi} - e^{-14\pi} + e^{-24\pi} - \ldots\right)\sin5\psi\pi\\ &- \ldots\end{aligned}$$

[10].

$$\sin\operatorname{lemn}\psi\varpi = \operatorname{tang} u\pi$$
$$\pi\,\mathrm{d}u = \varpi\cos\operatorname{lemn}\psi\varpi.\mathrm{d}\psi$$
$$\cos\operatorname{lemn}\psi\varpi = \frac{\pi}{\varpi}\left(\frac{4}{e^{\frac{1}{2}\pi}+e^{-\frac{1}{2}\pi}}\cos\psi\pi + \frac{4}{e^{\frac{3}{2}\pi}+e^{-\frac{3}{2}\pi}}\cos3\psi\pi + \ldots\right)$$
$$u\pi = \frac{4}{e^{\frac{1}{2}\pi}+e^{-\frac{1}{2}\pi}}\sin\psi\pi + \frac{1}{3}\frac{4}{e^{\frac{3}{2}\pi}+e^{-\frac{3}{2}\pi}}\sin3\psi\pi + \ldots$$

$$1 + 2p\cos\varphi + 2pp\cos2\varphi + \ldots = \frac{\frac{1}{p}-p}{\frac{1}{p}+p-2\cos\varphi}$$

$$1 - 2p\cos\varphi + 2pp\cos2\varphi - \ldots = \frac{\frac{1}{p}-p}{\frac{1}{p}+p+2\cos\varphi}$$

$$p\cos\varphi + p^3\cos3\varphi + \ldots = \frac{\left(\frac{1}{p}-p\right)\cos\varphi}{\left(\frac{1}{p}+p\right)^2 - 4\cos\varphi^2}$$

$$2p\sin\varphi + \tfrac{2}{3}p^3\sin3\varphi + \ldots = \operatorname{arc\,tang}\frac{2\sin\varphi}{\frac{1}{p}-p}$$

$$\tfrac{1}{2}u\pi = \operatorname{arc\,tang}\frac{2\sin\psi\pi}{e^{\frac{1}{2}\pi}-e^{-\frac{1}{2}\pi}} - \operatorname{arc\,tang}\frac{2\sin\psi\pi}{e^{\frac{3}{2}\pi}-e^{-\frac{3}{2}\pi}} + \ldots$$

[11.]

$$(P\psi\varpi)^2 = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}}{2^{\frac{7}{4}}\cos\frac{1}{8}\pi}\left(1 + 2e^{-2\pi}\cos 4\psi\pi + 2e^{-8\pi}\cos 8\psi\pi + \ldots\right)$$

$$- \frac{\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}}{2^{\frac{7}{4}}\sin\frac{1}{8}\pi}\left(2e^{-\frac{1}{2}\pi}\cos 2\psi\pi + 2e^{-\frac{9}{2}\pi}\cos 6\psi\pi + 2e^{-\frac{25}{2}\pi}\cos 10\psi\pi + \ldots\right)$$

$$(Q\psi\varpi)^2 = 2^{\frac{3}{4}}\cos\tfrac{1}{8}\pi.\sqrt{\tfrac{\pi}{\varpi}}.(1 + 2e^{-2\pi}\cos 4\psi\pi + \ldots$$

$$+ 2^{\frac{3}{4}}\sin\tfrac{1}{8}\pi.\sqrt{\tfrac{\pi}{\varpi}}.(2e^{-\frac{1}{2}\pi}\cos 2\psi\pi + \ldots$$

$$A = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}}{2^{\frac{7}{2}}\cos\frac{1}{8}\pi}, \qquad B = \frac{\sqrt{\frac{\pi}{\varpi}}}{2^{\frac{7}{4}}\sin\frac{1}{8}\pi}$$

0.3522376226	6118372314	$= A$
0.3535519576	3585935635	$= 2Be^{-\frac{1}{2}\pi}$
0.0013155679	2352259042	$= 2Ae^{-2\pi}$
0.0000012329	5741446398	$= 2Be^{-\frac{9}{2}\pi}$
. . . .	0856752170	$= 2Ae^{-8\pi}$
. . . .	1494	$= 2Be^{-\frac{25}{2}\pi}$

[12.]

Variae Summationes serierum absconditae.

1^0 $$\left[\frac{2}{e^{\pi}+e^{-\pi}}\right]^2 + \left[\frac{2}{e^{2\pi}+e^{-2\pi}}\right]^2 + \left[\frac{2}{e^{3\pi}+e^{-3\pi}}\right]^2 + \ldots = \frac{1}{2}\frac{\varpi\varpi}{\pi\pi} - \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2}$$

2^0 $$\left[\frac{2}{e^{\frac{1}{2}\pi}-e^{-\frac{1}{2}\pi}}\right]^2 + \left[\frac{2}{e^{\frac{3}{2}\pi}-e^{-\frac{3}{2}\pi}}\right]^2 + \left[\frac{2}{e^{\frac{5}{2}\pi}-e^{-\frac{5}{2}\pi}}\right]^2 + \ldots = \frac{1}{2}\frac{\varpi\varpi}{\pi\pi} - \frac{1}{2\pi}$$

3^0 $$\left[\frac{2}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\right]^2 + \left[\frac{2}{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}\right]^2 + \left[\frac{2}{e^{3\pi}-e^{-3\pi}}\right]^2 + \ldots = \frac{1}{6} - \frac{1}{2\pi}$$

4^0 $$\left[\frac{2}{e^{\frac{1}{2}\pi}+e^{-\frac{1}{2}\pi}}\right]^2 + \left[\frac{2}{e^{\frac{3}{2}\pi}+e^{-\frac{3}{2}\pi}}\right]^2 + \left[\frac{2}{e^{\frac{5}{2}\pi}+e^{-\frac{5}{2}\pi}}\right]^2 + \ldots = \frac{1}{2\pi}$$

5^0 $$\frac{2}{e^{\frac{1}{2}\pi}+e^{-\frac{1}{2}\pi}} + \frac{2}{e^{\frac{3}{2}\pi}+e^{-\frac{3}{2}\pi}} + \ldots = \frac{1}{2}\frac{\varpi}{\pi}$$

6^0

[13.]

Rechnungen zur Lemniscata gehörig.

$$\{(\sin\operatorname{lemn}\tfrac{2}{5}\varpi)^2+(\sin\operatorname{lemn}\tfrac{4}{5}\varpi)^2\}^2 = 14\sqrt{5}-30$$
$$\{(\sin\operatorname{lemn}\tfrac{2}{5}\varpi)^2-(\sin\operatorname{lemn}\tfrac{4}{5}\varpi)^2\}^2 = 10\sqrt{5}-22$$

$$\tfrac{1}{2}(\sin\operatorname{lemn}\tfrac{2}{5}\varpi)^4+\tfrac{1}{2}(\sin\operatorname{lemn}\tfrac{4}{5}\varpi)^4 = 6\sqrt{5}-13$$
$$= 0.4164078649\quad 9873817845\quad 5042012387\quad 65741$$

$$\{\tfrac{1}{2}(\sin\operatorname{lemn}\tfrac{2}{5}\varpi)^4-\tfrac{1}{2}(\sin\operatorname{lemn}\tfrac{4}{5}\varpi)^4\}^4 = 340-152\sqrt{5}$$
$$= 0.1176674200\quad 3196614580\quad 5602352846\quad 01228$$

daraus Radix

$$0.3430268503\quad 0761971797\quad 7310507555\quad 85731$$

also

$$(\sin\operatorname{lemn}\tfrac{4}{5}\varpi)^4 = 0.0733810146\quad 9111846047\quad 7731504831\quad 80010$$
$$(\sin\operatorname{lemn}\tfrac{2}{5}\varpi)^4 = 0.7594347153\quad 0635789643\quad 2352519943\quad 51472$$

$$(\sin\operatorname{lemn}\tfrac{4}{5}\varpi)^2 = 0.2708893033\quad 8999814497\quad 30710$$
$$(\sin\operatorname{lemn}\tfrac{2}{5}\varpi)^2 = 0.8714555153\quad 9155336074\quad 646029$$

$$Q\tfrac{1}{10}\varpi = \sqrt[5]{(\tfrac{3}{4}\cos\tfrac{1}{10}\pi+\tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{10}\pi)}$$
$$Q\tfrac{2}{10}\varpi = \sqrt[5]{(\tfrac{3}{4}\cos\tfrac{1}{10}\pi-\tfrac{1}{4}\sin\tfrac{1}{10}\pi)}$$

[14.]

Lemniscatische Function.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \varphi,\qquad \int\frac{dX}{\sqrt{(1-X^4)}} = \Phi$$

Es verhalte sich	1	x	$\sqrt{(1-xx)}$	$\sqrt{(1+xx)}$
wie	p	q	r	s
und	1	X	$\sqrt{(1-XX)}$	$\sqrt{(1+XX)}$
wie	P	Q	R	S

so verhalten sich die $\varphi+\Phi$ entsprechenden Grössen

wie	$ppPP+qqQQ$	$pqRS+rsPQ$	$prPR-qsQS$	$psPS+qrQR$
oder	$pqRS-rsPQ$	$qqPP-ppQQ$	$qrPS-psQR$	$qsPR-prQS$
oder	$prPR+qsQS$	$qrPS+psQR$	$ppRR-qqSS$ $=rrPP-ssQQ$	$2pqPQ+rsRS$
oder	$psPS-qrQR$	$qsRR+prQS$	$rsRS-2pqPQ$	$ssPP+rrQQ$ $=ppSS+qqRR$

Es sei

$$\sin\operatorname{lemn} X = x$$
$$\sin\operatorname{lemn} Y = y$$
$$\sin\operatorname{lemn} Z = z$$

und X, Y, Z so von einander abhängig, dass

$$X+Y+Z=0$$

Man setze

$$\int xx\,\mathrm{d}X = FX$$

und

$$FX+FY+FZ=u$$

Aus früher vorgekommenen Formeln folgt

$$xx-zz = yz\sqrt{(1-x^4)} - xy\sqrt{(1-z^4)}$$
$$yy-zz = xz\sqrt{(1-y^4)} - xy\sqrt{(1-z^4)}$$
$$xx-yy = yz\sqrt{(1-x^4)} - xz\sqrt{(1-y^4)}$$

Aus

$$\mathrm{d}u = \frac{xx\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^4)}} + \frac{yy\,\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^4)}} + \frac{zz\,\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^4)}}$$
$$0 = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^4)}} + \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^4)}} + \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^4)}}$$

folgt

$$\mathrm{d}u = (yy-xx)\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^4)}} + (zz-xx)\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^4)}}$$
$$= xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z - yz.\sqrt{(1-x^4)}.\left[\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^4)}} + \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{(1-z^4)}}\right]$$
$$= xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z + yz\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}.xyz$$

also

$$u = xyz$$

Es ist folglich

$$F(a+b) = Fa + Fb - \sin\operatorname{lemn} a \,.\, \sin\operatorname{lemn} b \,.\, \sin\operatorname{lemn}(a+b)$$

Setzt man

$$Fa - \frac{a}{90^0} F 90^0 = Ga$$

so ist

$$G(a+b) = Ga + Gb - \sin\operatorname{lemn} a \,.\, \sin\operatorname{lemn} b \,.\, \sin\operatorname{lemn}(a+b)$$

$$Ga = \frac{\mathrm{d}\,Qa}{Qa \,.\, \mathrm{d}a}$$

[15.]

$$\frac{\varpi}{\pi} = \left\{1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\right)^2 \cdot \tfrac{1}{4} + \left(\tfrac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\right)^2 \tfrac{1}{8} + \cdot\cdot\right\} \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$\frac{\varpi}{\pi} = \left(1 + \frac{1\,.\,3}{4\,.\,4} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{4\,.\,4\,.\,8\,.\,8} \cdot \frac{1}{81} + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\,.\,11}{4\,.\,4\,.\,8\,.\,8\,.\,12\,.\,12} \cdot \frac{1}{729} + \cdot\cdot\right) \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\varpi}{\pi} - \frac{2}{\varpi} = \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{4\,.\,4\,.\,8} \cdot \frac{1}{27} + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,9}{4\,.\,4\,.\,8\,.\,8\,.\,12} \cdot \frac{1}{243} + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7\,.\,9\,.\,11\,.\,13}{4\,.\,4\,.\,8\,.\,8\,.\,12\,.\,12\,.\,16} \cdot \frac{1}{2187} + \cdot\cdot\right) \sqrt{\frac{2}{3}}$$

[16.]

Ponendo

$$\frac{1}{\mathrm{M}(1, \cos\varphi)} = N + a\cos 2\varphi + b\cos 4\varphi + \ldots$$

erit

$$\begin{array}{rlrl}
N = & 1.393203 & -\frac{1}{\pi}\log(1-\cos 2\varphi) = & +0.220635 \\
a = & 0.581803 & & +0.636620\cos 2\varphi \\
b = & 0.309601 & & +0.318310\cos 4\varphi \\
c = & 0.209449 & & +0.212207\cos 6\varphi \\
d = & 0.157960 & & +0.159155\cos 8\varphi \\
e = & 0.126704. & & +0.127324\cos 10\varphi
\end{array}$$

$$N = \left(\frac{3.3.7.7.11.11.15}{2.4.6.8.10.12.14}\ldots\right)^2 = 2\frac{\varpi\varpi}{\pi\pi}$$

$$a = \tfrac{1}{2}\left(\frac{5.5}{4.6}\cdot\frac{9.9}{8.10}\cdot\frac{13.13}{12.14}\ldots\right)^2 = \frac{4}{\varpi\varpi}$$

$$b = \frac{2}{9}N$$

$$\frac{\varpi}{\sqrt{8}} = \frac{4.6.8.10.12.14}{5.5.9.\ 9.13.13}\ldots$$

$$\frac{\varpi}{2} = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{12}{13}\ldots$$

[17.]

$$1+\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 x^4+\left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\right)^3 x^8+\left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\right)^3 x^{12}+\ldots$$
$$=\left\{1+\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 x^4+\left(\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{5}{8}\right)^2 x^8+\left(\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\tfrac{9}{12}\right)^2 x^{12}+\ldots\right\}^2$$

Demonstratio. Ponatur

$$1+\left(\tfrac{1}{4}\right)^2 x^4+\left(\tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{5}{8}\right)^2 x^8+\ldots = t$$

eritque, posito $\quad x(x^4-1)\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x^2}-(3x^4-1)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}+x^3 t = R,\quad R = 0$

Hinc etiam

$$0 = x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+R;\quad \text{nec non}\quad 0 = 2xt\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+2\left(t+3x\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)R$$

unde fit, evolutione facta

$$0 = xx(x^4-1)\left(2t\frac{\mathrm{d}^3t}{\mathrm{d}x^3}+6\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x^2}\right)+3x(3x^4-1)\left(2t\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x^2}+2\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)$$
$$+(19x^4-1)\,2t\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}+8x^3tt$$

sive ponendo $tt = u$

$$0 = xx(x^4-1)\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}x^3}+3x(3x^4-1)\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x^2}+(19x^4-1)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+8x^3u$$

cui aequationi invenitur respondere

$$u = 1+\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 x^4+\left(\tfrac{1.3}{2.4}\right)^3 x^8+\ldots$$

Iam quum

$$t = \frac{\sqrt{8}}{\pi}\int\frac{dz}{\sqrt[4]{(1-z^4)(1-x^4z^4)}}$$

$z = 0$ usque ad $z = 1$, fit, pro $x = 1$,

$$t = \frac{\sqrt{8}}{\pi}\cdot\frac{\varpi}{2} = \frac{\varpi}{\pi}\sqrt{2}$$

adeoque

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3+\ldots = 2\frac{\varpi\varpi}{\pi\pi}$$

Idem alio modo

Valor seriei

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^3+\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^3+\ldots$$

fit

$$= \frac{4}{\pi\pi}\iint\frac{d\varphi\, d\psi}{\sqrt{(1-\cos\varphi^2\cos\psi^2)}}$$

a $\varphi = 0$ usque ad $\varphi = 90^0$ et a $\psi = 0$ usque ad $\psi = 90^0$. Faciendo itaque $\cos\varphi\cos\psi = \cos\upsilon$, idem valor fit

$$= \frac{4}{\pi\pi}\iint\frac{d\varphi\, d\upsilon}{\sqrt{(\cos\varphi^2-\cos\upsilon^2)}}$$

et quidem ab $\upsilon = 0$ usque ad $\upsilon = 90^0$ et a $\varphi = 0$ usque ad $\varphi = \upsilon$. Denique statuendo $\varphi+\upsilon = f$, $\upsilon-\varphi = g$, erit expressio nostra

$$= \frac{2}{\pi\pi}\iint\frac{df.dg}{\sqrt{\sin f\sin g}}$$

ab $g = 0$ usque ad $g = 90^0$ et a $f = g$ usque ad $f = 180^0-g$. Sed haud difficulter probatur integrale eundem valorem nancisci, si sumatur ab $f = 0$ usque ad $f = 90^0$ et a $g = 0$ usque ad $g = 90^0$, unde ipsius valor deducitur

$$= 2\frac{\varpi\varpi}{\pi\pi}$$

uti supra.

[17.]

Sammlung von Rechnungen,

vornehmlich solchen, bei denen von meinen Methoden, die Factoren grosser Zahlen zu finden, und von den WOLFRAMschen Logarithmentafeln Gebrauch gemacht ist.

Erste Rechnung für $e^{-\pi} = A$

Durch eine vorläufige Näherung war schon bekannt, dass A bis auf die 14te Figur 0,0432139182 6377 sei, folglich $11.10^{10}A$ sehr genau 4753531008 $= 128.243.152827$. Es fragte sich also, ob die Zahl 152827 sich noch in einfache Factoren zerlegen lasse.

Die Division mit kleinen Primzahlen gelang nicht; man musste also zu künstlichen Methoden seine Zuflucht nehmen. Hier fand sich nun, indem man die Zahl selbst sowohl als verschiedene ihrer Vielfache mit den nächsten Quadraten verglich, unter andern, dass

$$552^2 \equiv 950, \qquad 677^2 \equiv 152 \quad \text{mod. } 152827$$

woraus man sogleich schloss, dass

$$1104^2 \equiv 3800, \qquad 3385^2 \equiv 3800$$

und mithin die Zahl 152827 keine Primzahl sei, weil sonst die Quadrate zweier Zahlen, die beide kleiner als die Hälfte von jener sind, unmöglich congruent sein könnten (*Disqu. Arr. art.* .). Durch die in diesem Werke gelehrte Methode (*art.*) fanden sich nun die Factoren der Zahl 152827, nemlich 67.2281.

Man war also gewiss, dass sich der hyperbolische Logarithme von

$$N = 128.243.67.2281.11^{-1}.10^{-10}$$

aus den vorhandenen Tafeln bestimmen lasse und zugleich dass derselbe von dem gegebenen Logarithmen, $-\pi$, nur in der 10ten Decimalstelle abweichen könne. Die zu dieser Differenz gehörige Absolutzahl brauchte also blos berechnet und mit N multiplicirt zu werden, um A zu erhalten,

$$A = Ne^{\log 11 + 10 \log 10 - \log 2281 - \log 2144 - \log 972 - \pi} = Ne^{\delta}$$

Durch die WOLFRAMsche Tafel war:

[Zur Abkürzung $\delta - \log(1+2135.10^{-13}) = \delta'$, $\delta' - \log(1+1443.10^{-17}) = \delta''$ gesetzt.]

10 log 10					
=	23,0258509299	4045684017	9914546843	6420760110	14886288
log 11 =	2,3978952727	9837054406	1943577965	1292998217	06853937
	25,4237462027	3882738424	1858124808	7713758327	21740225
l. 2281 =	7,7323692222	8438803081	0466064812	2168095619	53159812
l. 2144 =	7,6704285221	9069260675	6232603654	6055909444	33575023
l. 972 =	6,8793558044	6043907581	0690427528	9816593884	53057834
π =	3,1415926535	8979323846	2643383279	5028841971	69399375
	25,4237462025	2531295184	0032479275	3069440920	09192044
δ =	0,.........2	1351443240	1825645533	4644317407	12548181
δ' =	0,..........	...1443242	4616770530	2204949495	65316893
δ'' =	0,..........	242	4616770634	3329449495	6431533124
$\frac{1}{2}\delta''\delta''$ =	0,..........	....	....	29393	8324222063
$e^{\delta''}$ =	1,..........	242	4616770634	3329478889	4755755187
$e^{\delta'}$ =	1,..........	...1443242	4616770634	3679351089	4781097632
e^{δ} =	1,.........2	1351443242	4619851957	0236156393	8536512211
$11A$ =	0,4753531009	0149474751	8595108889	0081240330	0920791693 5
A =	0,0432139182	6377224977	4417737171	7280112757	2810981063

Um sich von der Richtigkeit dieses Resultats durch eine zweite Rechnung zu versichern, multiplicirte man die Zahl A durch 599.10^8, wodurch sich ergab 2588513703,999957 . ., so dass man also eine sehr leichte Rechnung übrig hatte, wenn die Zahl 2588513704 sich in Factoren kleiner als 10000 zerlegen liess. Nach angestelltem Versuch fand sich 2588513704 = 8.7.17.2719027. Es kam also darauf an, ob 2719027 eine Primzahl sei. Man fand, dass —1848 gewiss ein quadratischer Rest von 2719027 sein müsse, wenn diese Zahl eine Primzahl sei, und dass sie in diesem Fall *einmal* unter der Form $3xx + 616yy$ enthalten sein müsse und umgekehrt, dass sie durch diese Form entweder gar nicht oder *mehr als einmal* müsse dargestellt werden können, wenn sie zusammengesetzt sei. Allein die Exclusionsmethode lehrte, dass jene Zahl wirklich nur einmal unter der Form $3xx + 616yy$ enthalten sei, nemlich $2719027 = 3\,197^2 + 616.65^2$, woraus also mit Gewissheit folgte, dass 2719027 eine Primzahl und folglich die versuchte Methode diesmal nicht anwendbar sei.

Nach einigen andern vergeblichen Versuchen kam man endlich auf folgenden, der besser gelang. Die Zahl A multiplicirt mit 10^{14} gab 4321391826377,25 und die Zahl 4321391826375 zerfiel in die Factoren 125.81.13.32831087. Dass die Zahl 32831087 keine Primzahl sei, folgte daraus, dass sie nicht unter der Form $xx + 190yy$ enthalten war; man wandte also die erste der in den *Disqui. Arr.* gelehrten Methoden darauf an, wodurch sich entdeckte, dass sie das Product aus 373.8819 sei.

Zweite Rechnung für $e^{-\pi} = A$

$59.10^9 A$ fand sich sehr genau $= 2549621178 = 54.13.3631939$. Die Zahl 3631939 zerfiel in die Factoren 1091.3329 (welche aus

$$3631939 = 40.232^2 + 19.279^2 = 40.300^2 + 19.41^2$$

gefunden waren). Also

$$59A = 702.1091.3329.10^{-9}\, e^{9\log 10 + \log 59 - \log 702 - \log 1091 - \log 3329 - \pi} = Ne^{\delta}$$

Aus Wolframs Tafel fand sich [$\delta - \log(1 - 17157.10^{-14}) = \delta'$, $\frac{1}{2}\delta'\delta' + \frac{1}{6}\delta'^3 = \varepsilon$ gesetzt]

C9l.10 =	21,2767341630	5358884383	8076907840	7221315900	86602341
C.l. 59 =	5,9224625560	9428054938	3949626280	3023759366	53210670
l.702 =	6,5539334040	2581111965	6455273791	0722868232	39752589
l.1091 =	6,9948499858	3307081851	1895817110	3840806982	08318537
l.3329 =	8,1104272375	7502494295	2021653586	1576658324	67001597
π =	3,1415926535	8979323846	2643383279	5028841971	69399375
$-\delta$ =	0,.........1	7156951280	5042661888	1414250778	24285109
δ' =	0,..........	48720	9675470563	5420349120	2333831382
ε =	0,..........	....	....	1186866339	3606594227
$e^{\delta'}$ =	1,..........	48720	9675470563	6607215459	5940425609
$1-e^{\delta}$ =	0,.........1	7156951279	0324613026	9032989386	4786573955
$59A$ =	2,5496211775	6256273669	0646493131	9526652679	5847882752 6
A =	0,0432139182	6377224977	4417737171	7280112757	2810981063 6

Zugleich kann man aus der Übereinstimmung beider Rechnungen schliessen, dass die Logarithmen von 2, 3, 5, 11, 13, 59, 67, 1091, 2281, 3329 in der WOLFRAMschen Tafel bis auf die letzte Figur richtig sind.

Doppelte Berechnung von $e^{-\frac{1}{4}\pi} = A$.

Erste Rechnung.

Da man durch eine schon vorher angestellte Rechnung wusste, dass der Werth von A bis auf die letzte Zifer $= 0{,}4559381277\ 6599$ sei, so war $19.131.A$ oder $2489A = 1134{,}8300000095$ oder $248900A$ sehr genau $= 113483$. Man fand $113483 = 283.401$ aus

$$113483 = 311^2 + 58.17^2 = 79^2 + 58.43^2$$

und hiemit

$$2489A = 113483.10^{-2}.e^{2\log 10 - \log 283 - \log 401 + \log 2489 - \frac{1}{4}\pi} = Ne^{\delta}$$

Aus WOLFRAMS Tafeln erhielt man

[wenn zur Abkürzung

$$\delta - \log(1 + 8428.10^{-15}) = \delta'$$

gesetzt wird]:

$\delta =$	0,..........	.842825208	2107272461	7421888198	29069513
$\delta' =$	0,..........	25208	2142788053	7419892695	5615344103
$\frac{1}{2}\delta'\delta' =$				317727033	5630835760
$\frac{1}{2}\delta'^3 =$					267
$e^{\delta'} =$	1,..........	25208	2142788053	7737619729	1246180130
$e^{\delta} =$	1,..........	.842825208	2142790178	3220613906	2965706721
$2489A$					
$=$ 1134,8300000095	6463331037	8102578065	2249279282	5372958193	
$A =$	0,4559381277	6599623676	5921294728	0294194166	04366

Zweite Rechnung für $e^{-\frac{1}{4}\pi} = A$

$113A$ wurde gefunden $51{,}52100843755$. Die Zahl 515210084352 zerfiel in die Factoren $27.131072.145583$. Endlich erhielt man aus

$$4.145583 = 437^2 + 163.49^2 = 763^2 + 163$$

$145583 = 197.739$ mithin

$$113A = 96^3.788.739.10^{-10}.e^{10\log 10 + \log 113 - 3\log 96 - \log 788 - \log 739 - \frac{1}{4}\pi} = Ne^{\delta}$$

[und wenn $\delta - \log(1 + 4576.10^{-15}) = \delta'$ gesetzt wird]

$\delta =$	0,..........	4575948387	0747214839	8399455217	14190720	
$-\delta' =$	0,...........	51612	8205796360	1919946163	4337976121	
$+\frac{1}{2}\delta'\delta' =$	0,			1331941624	0928492341	
$1 - e^{\delta'} =$	0,...........	51612	8205796360	0588004539	3409483780	
$e^{\delta} =$	1,..........	4575978387	1794180021	9145023046	2961445343	
$113A =$	51,5210084375	5757475454	9106304267	3243940900	3220627240	5
$A =$	0,4559381277	6599623676	5921294728	0294194166	0436523820	

$$e^{-\frac{1}{4}\pi} = 0{,}4559382 = 3671.54.23.10^{-7}$$

Dritte Rechnung für $e^{-\frac{1}{4}\pi} = A$.

$455938128 = 144.3166237$ Die Divisoren der Zahl 3166237 fand man, indem man die Periode der reducirten Form $(1,\ 1779,\ -1396)$ entwickelte, in welcher die Form $(-1897,\ 530,\ 1521)$ die sechste war. Hieraus

$$(11 + 28.1779)^2 \equiv 1521 = 39^2, \text{ und } 3166237 = 107.127.233$$

$$A = 455938128.10^{-9}.e^{9\log 10 - \frac{1}{4}\pi - \log 455938128} = Ne^{\delta}$$

[und $\delta - \log(1 - 513.10^{-12}) = \delta'$ gesetzt]:

$-\delta =$	0,.........5	1323578556	7221212746	8124092623	9185579000
$-\delta' =$	0,...........	..23578543	5636712701	8105102450	7737514264
$+\frac{1}{2}\delta'\delta' =$			27797	3858291971	9406911797
$-\frac{1}{6}\delta'^3 =$				21	8473957577
$1 - e^{\delta'} =$	0,...........	..23578543	5636684904	4246810500	6804560044
$1 - e^{\delta} =$	0,.........5	1323578543	5515726975	9430616940	9818422176

Berechnung von $e^{-\frac{3}{4}\pi} = A$.

Durch Näherung war bereits gefunden $A = 0{,}0008514383\ 42805.$ Nun fand sich $8514383436 = 4.9.13.19.307.3119$, mithin sehr genau

$$A = 4.9.13.19.307.3119.10^{-13}$$

aus WOLFRAMS Tafel

$$13 \log 10 - \log 3119 - \log 1842 - \log 1482 - \tfrac{3}{4}\pi = \delta$$

[und

$$\delta - \log(1 - 9335.10^{-13}) = \delta', \quad \delta' - \log(1 - 285.10^{-16}) = \delta''$$

gesetzt]:

$-\delta =$	0,.........9	3352850560	8342583868	5326823995	3184946898	8
$-\delta' =$	0,...........	...2850517	2631458732	9539039720	5781872612	0
$-\delta'' =$	0,	517	2631458326	8289039720	5396053412	0
$\frac{1}{2}\delta''\delta'' =$	0,			133780	5810183616	8
$1-e^{\delta''} =$	0,	517	2631458326	8288905939	9585869795	2
$1-e^{\delta'} =$	0,	...2850517	2631458326	6814705974	3354407457	0
$1-e^{\delta} =$	0,.........9	3352850517	2604848748	0300042494	7639127186	6
$A =$	0,0008514383	4280515803	5852453295	4846487994	1872486024	
						8176915

$$e^{-\frac{3}{4}\pi} \text{ satis exacte } = 4.11.13.29.3593.7^{-1}.10^{-10}$$

Ecce iam computum pro $e^{\frac{1}{2}\pi}$.

Per logarithmos brigg. invenimus praeter propter $e^{\frac{1}{2}\pi} = 4{,}810484$.
Est vero $48104847 = 2293.37.7.81$ et

$$-\log 81.259.2293 + 7 \log 10 + \tfrac{1}{2}\pi$$

$=$	$-0,.....15214$	7666454820	0537824776	3190
num log $=$	$1-0,.....15214$	7550690316	7468363738	6798
$e^{\frac{1}{2}\pi} =$	4,8104773809	6535165547	3044648993	1536

Computus secundus pro $e^{\frac{1}{2}\pi}$.

Invenimus $48104773808 = 195497 \,.\, 13^3 \,.\, 7 \,.\, 16$ superest itaque ut utrum sit 195497 numerus non primus investigetur. Tentamus itaque aequationem

$$195497 = 16xx + \Box$$

$\mathrm{Lim}\, x = 111$, Excl. valores $x = ---$

$$195497 = 44^2 + 193561 = 76^2 + 189721 = 356^2 + 68761 = 364^2 + 63001$$
$$= 364^2 + 251^2 \quad \text{quare} \quad 195497 \quad \text{est prim.}$$

$$\tfrac{26905}{5593} = 3 + \tfrac{4}{7} + \tfrac{16}{17} + \tfrac{14}{47} = 4{,}8104773824\ 4\,..$$
$$\log \tfrac{7.799}{5.5381} + \tfrac{1}{2}\pi = \quad -0{,}.........3\ 0703542806\ 9410475204\ 9155$$
$$\text{num}\log = 1 - 0{,}.........3\ 0703542802\ 2275098164\ 7660$$

Computus pro $e^{-\frac{1}{2}\pi}$

$$e^{-\frac{1}{2}\pi} \text{ praeter propter} = 0{,}20787957 = 7151.19.17.9.10^{-8}$$

$$-\log 51.57.7151 + 8 \log 10 - \tfrac{1}{2}\pi$$
$$= \quad -0{,}.......305\ 5019697961\ 8740193606\ 8277$$
$$\text{num}\log = 1 - 0{,}.......305\ 5019651296\ 1477199011\ 4138$$

Investigatio divisorum numeri $2078795763 = 99 \,.\, 20997937{,}005$

$$---$$

$$20997937 = 1848 \,.\, 34^2 + 4343^2 \text{ numerus primus}$$

Computus secundus pro $e^{-\frac{1}{2}\pi}$

$$11 \,.\, e^{-\frac{1}{2}\pi} = 2{,}286675339858378$$

$$228667536 = 81 \,.\, 16 \,.\, 176441$$

$$176441 = 880xx + yy = 73 \,.\, 2417$$

$$\log \tfrac{11}{144.657.2417} + 8 \log 10 - \tfrac{1}{2}\pi$$
$$= -0{,}........88\ 0825474705\ 3269478285\ 7110$$