[I.]

VARIA IMPRIMIS DE INTEGRALI

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(1+\mu\mu\sin u^2)}}$$

$$\mu = \operatorname{tang} v, \qquad \frac{\pi}{\mathrm{M}\sqrt{(1+\mu\mu)}} = \frac{\pi\cos v}{\mathrm{M}\cos v} = \varpi, \qquad \frac{\pi}{\mu\mathrm{M}\sqrt{(1+\frac{1}{\mu\mu})}} = \frac{\pi\cos v}{\mathrm{M}\sin v} = \varpi'$$

$$S\psi\varpi = \frac{\pi}{\mu\varpi}\left[\frac{4\sin\psi\pi}{e^{\frac{1}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}+e^{-\frac{1}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}} - \frac{4\sin 3\psi\pi}{e^{\frac{3}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}+e^{-\frac{3}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}} + \ldots\right] = \frac{T\psi\varpi}{W\psi\varpi}$$

$$W\psi\varpi = \sqrt{\mathrm{M}\cos v}\,.\left[1+e^{-\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\,2\cos 2\psi\pi + e^{-4\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\,2\cos 4\psi\pi + \ldots\right]$$

$$T\psi\varpi = \sqrt{\operatorname{cotg} v}\,.\sqrt{\mathrm{M}\cos v}\,.\left[e^{-\frac{1}{4}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\,2\sin\psi\pi - e^{-\frac{9}{4}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\,2\sin 3\psi\pi + \ldots\right]$$

$$T\tfrac{1}{2}\varpi = \sqrt{\cos v}$$

$$\left[\ \int\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(1+\mu\mu\sin u^2)}} = \varphi = \psi\varpi, \qquad S\varphi = \sin u\ \right]$$

$$(S\psi\varpi)^2 = A + 2B\left[\frac{\cos 2\psi\pi}{e^{\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}-e^{-\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}} - \frac{2\cos 4\psi\pi}{e^{2\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}-e^{-2\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}} + \frac{3\cos 6\psi\pi}{e^{3\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}-e^{-3\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}} - \ldots\right]$$

Terminus constans $\quad (S\varphi)^2 = \dfrac{8\pi\pi}{\mu\mu\varpi\varpi}\,.\,\dfrac{e^{-\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}+4e^{-4\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}+9e^{-4\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}+\ldots}{1+2e^{-\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}+2e^{-4\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}+\ldots}$

Problema. Summare seriem

$$\left[\frac{1}{x+\frac{1}{x}}\right]^2+\left[\frac{1}{x^3+\frac{1}{x^3}}\right]^2+\left[\frac{1}{x^5+\frac{1}{x^5}}\right]^2+\,.\,.=\frac{\frac{1}{xx}+\frac{4}{x^8}+\frac{9}{x^{18}}+\frac{16}{x^{32}}+\,.\,.}{1+\frac{2}{xx}+\frac{2}{x^8}+\frac{2}{x^{18}}+\,.\,.}$$

$$(T\psi\varpi)^2=\frac{\cos v\sqrt{\mathrm{M}\cos v}}{2\cos\frac{1}{2}v}\left[1+2e^{-2\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 4\psi\pi+2e^{-8\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 8\psi\pi+\,.\,.\right]$$
$$-\frac{\cos v\sqrt{\mathrm{M}\cos v}}{2\sin\frac{1}{2}v}\left[2e^{-\frac{1}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 2\psi\pi+2e^{-\frac{9}{2}\frac{\varpi'\pi}{\varpi}}\cos 6\psi\pi+\,.\,.\right]$$

$$(W\psi\varpi)^2=\cos\tfrac{1}{2}v.\sqrt{\mathrm{M}\cos v}.\left[1+2e^{-2\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 4\psi\pi+2e^{-8\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 8\psi\pi+\,.\,.\right]$$
$$+\sin\tfrac{1}{2}v.\sqrt{\mathrm{M}\cos v}.\left[2e^{-\frac{1}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 2\psi\pi+2e^{-\frac{9}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\cos 6\psi\pi+\,.\,.\right]$$

$$T(\tfrac{1}{2}\varpi-\varphi)^2=\cos v.(W\varphi^2-T\varphi^2)$$
$$W(\tfrac{1}{2}\varpi-\varphi)^2=\frac{1}{\cos v}.(\sin v^2\,T\varphi^2+\cos v^2\,W\varphi^2)$$

$$T\psi\varpi.W(\tfrac{1}{2}-\psi)\varpi=\frac{\sqrt{2\cos v}.\sqrt{\mathrm{M}\cos v}}{\sqrt[4]{\sin v}}\left[e^{-\frac{\varpi'\pi}{8\varpi}}\sin\psi\pi-e^{-\frac{9\varpi'\pi}{8\varpi}}\sin 3\psi\pi+e^{-\frac{25\varpi'\pi}{8\varpi}}\sin 5\psi\pi-\,.\,.\right]$$

Si

$$(1+\alpha x)(1+\alpha x^3)(1+\alpha x^5)\,.\,.\,.\,(1+\tfrac{x}{\alpha})(1+\tfrac{x^3}{\alpha})(1+\tfrac{x^5}{\alpha})\,.\,.\,.=k$$

supponitur producere

$$.\,.+\frac{R}{\alpha\alpha}+\frac{Q}{\alpha}+P+Q\alpha+R\alpha\alpha+\,.\,.$$

producet

$$(1+\alpha x^3)(1+\alpha x^5)\,.\,.\,.\,(1+\tfrac{1}{\alpha x})(1+\tfrac{x}{\alpha})(1+\tfrac{x^3}{\alpha})\,.\,.\,.=k.\frac{1+\frac{1}{\alpha x}}{1+\alpha x}$$
$$.\,.\,.+\frac{R}{x^4}\frac{1}{\alpha\alpha}+\frac{Q}{xx}\frac{1}{\alpha}+P+Qxx\alpha+Rx^4\alpha\alpha+\,.\,.$$
$$=\,.\,.\,.+\frac{Q}{x}\frac{1}{\alpha\alpha}+\frac{P}{x}\frac{1}{\alpha}+\frac{Q}{x}+\frac{R}{x}\alpha+\frac{S}{x}\alpha\alpha+\,.\,.$$

$$(1+\alpha x)(1+\alpha x^3)(1+\alpha x^5)\,.\,.\,.\,(1+\tfrac{x}{\alpha})(1+\tfrac{x^3}{\alpha})(1+\tfrac{x^5}{\alpha})\,.\,.\,.$$
$$=P\{1+x(\alpha+\tfrac{1}{\alpha})+x^4(\alpha\alpha+\tfrac{1}{\alpha\alpha})+x^9(\alpha^3+\tfrac{1}{\alpha^3})+\,.\,.\,.\}$$

Si ex quadrato prodit

$$\cdot\cdot + \frac{Q}{\alpha} + P + Q\alpha + \cdots$$

erit

$$\cdots + \frac{R}{x^4}\frac{1}{\alpha\alpha} + \frac{Q}{xx}\frac{1}{\alpha} + P + Qxx\alpha + Rx^4\alpha\alpha + \cdots$$

$$= \cdots + \frac{P}{xx}\frac{1}{\alpha\alpha} + \frac{Q}{xx}\frac{1}{\alpha} + \frac{R}{xx} + \frac{S}{xx}\alpha + \frac{T}{xx}\alpha\alpha + \cdots$$

$$(1+\alpha x)^2(1+\alpha x^3)^2(1+\alpha x^5)^2 \cdots (1+\tfrac{x}{\alpha})^2(1+\tfrac{x^3}{\alpha})^2(1+\tfrac{x^5}{\alpha})^2 \cdots$$

$$= \quad P\{1 + xx(\alpha\alpha + \tfrac{1}{\alpha\alpha}) + x^8(\alpha^4 + \tfrac{1}{\alpha^4}) + x^{18}(\alpha^6 + \tfrac{1}{\alpha^6}) + \cdot\cdot\}$$

$$+ Q\{(\alpha + \tfrac{1}{\alpha}) + x^4(\alpha^3 + \tfrac{1}{\alpha^3}) + x^{12}(\alpha^5 + \tfrac{1}{\alpha^5}) + x^{24}(\alpha^7 + \tfrac{1}{\alpha^7}) + \cdot\cdot\}$$

$$T\varphi = 0, \qquad \varphi = k\varpi + l\varpi'\sqrt{-1}$$
$$W\varphi = 0, \qquad \varphi = (k+\tfrac{1}{2})\varpi + (l+\tfrac{1}{2})\varpi'\sqrt{-1}$$

$$T\psi\varpi = \frac{\varpi}{\pi}\sin\psi\pi\left[1 + \frac{4\sin\psi\pi^2}{\left[e^{\frac{\varpi'}{\varpi}\pi} - e^{-\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\right]^2}\right]\left[1 + \frac{4\sin\psi\pi^2}{\left[e^{2\frac{\varpi'}{\varpi}\pi} - e^{-2\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}\right]^2}\right]\cdots$$

$$x = e^{-\frac{1}{2}\frac{\varpi'}{\varpi}\pi}; \qquad \alpha = \cos\psi\pi + \varepsilon\sin\psi\pi$$

$$T\psi\varpi = \frac{\varpi}{\pi}\sin\psi\pi.\frac{(1-x^4\alpha^2)(1-x^8\alpha^2)(1-x^{12}\alpha^2)\cdots(1-\frac{x^4}{\alpha^2})(1-\frac{x^8}{\alpha^2})(1-\frac{x^{12}}{\alpha^2})\cdots}{(1-x^4)^2(1-x^8)^2(1-x^{12})^2\cdots}$$

$$W\psi\varpi = \frac{(1+xx\alpha\alpha)(1+x^6\alpha\alpha)(1+x^{10}\alpha\alpha)\cdots(1+\frac{x^2}{\alpha\alpha})(1+\frac{x^6}{\alpha\alpha})(1+\frac{x^8}{\alpha\alpha})\cdots}{(1+xx)^2(1+x^6)^2(1+x^{10})^2\cdots}$$

Observatio

$$\frac{\text{Med. inter } 1 \text{ et } \sqrt{2}-1}{\text{Med. inter } 1 \text{ et } \sqrt{(2\sqrt{2}-2)}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}$$

$$\frac{\text{M}\sin 75^\circ}{\text{M}\sin 15^\circ} = \sqrt{3}$$

[II.]

ZUR THEORIE DER TRANSSCENDENTEN FUNCTIONEN GEHÖRIG.

[1.]

Es sei $\Sigma e^{-\alpha(k+\omega)^2} = T$, indem für k alle ganzen positiven und negativen Zahlen gesetzt werden, und

$$T = A + 2B\cos\omega P + 2C\cos 2\omega P + 2D\cos 3\omega P + \text{ etc.}$$

so ist

$$A = \int T\mathrm{d}\omega, \quad B = \int T\cos\omega P.\mathrm{d}\omega, \quad C = \int T\cos 2\omega P.\mathrm{d}\omega,$$
$$D = \int T\cos 3\omega P.\mathrm{d}\omega, \quad \text{u.s.w.}$$

alle Integrale von $\omega = 0$ bis $\omega = 1$ ausgedehnt. Es ist aber klar, dass jene Integrale zwischen diesen Grenzen mit den Integralen

$$\int e^{-\alpha\omega\omega}\mathrm{d}\omega, \quad \int e^{-\alpha\omega\omega}\cos\omega P.\mathrm{d}\omega, \quad \int e^{-\alpha\omega\omega}\cos 2\omega P.\mathrm{d}\omega, \quad \int e^{-\alpha\omega\omega}\cos 3\omega P.\mathrm{d}\omega, \text{ etc.}$$

übereinkommen, wenn diese von $\omega = -\infty$ bis $\omega = +\infty$ ausgedehnt werden. Da nun allgemein

$$e^{-\alpha\omega\omega}\cos n\omega P$$
$$= \tfrac{1}{2}e^{-\alpha\omega\omega + in\omega P} + \tfrac{1}{2}e^{-\alpha\omega\omega - in\omega P} = \tfrac{1}{2}e^{-\frac{nnPP}{4\alpha}}\left\{e^{-\alpha\left(\omega - \frac{inP}{2\alpha}\right)^2} + e^{-\alpha\left(\omega + \frac{inP}{2\alpha}\right)^2}\right\}$$

so folgt leicht, dass

$$\int e^{-\alpha\omega\omega}\cos n\omega P.\,\mathrm{d}\omega = e^{-\frac{nn\pi\pi}{\alpha}}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

folglich

$$T = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.\left\{1+2e^{-\frac{\pi\pi}{\alpha}}\cos\omega P + 2e^{-4\frac{\pi\pi}{\alpha}}\cos 2\omega P + 2e^{-9\frac{\pi\pi}{\alpha}}\cos 3\omega P + \text{etc.}\right\}$$

In einer andern Form so:

$$\Sigma e^{-\alpha(k+\omega)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.e^{-\alpha\omega\omega}.\Sigma e^{-\frac{\pi\pi}{\alpha}\left(k+\frac{\alpha\omega i}{\pi}\right)^2}$$

Allgemeiner:

$$\Sigma e^{-\alpha(k+\omega)^2}\{\cos 2(k+\omega)\alpha\psi - i\sin 2(k+\omega)\alpha\psi\}$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.\Sigma e^{-\frac{\pi\pi}{\alpha}\left(k-\frac{\alpha\psi}{\pi}\right)^2}\{\cos 2k\omega\pi - i\sin 2k\omega\pi\}$$

Oder, $\alpha\alpha' = \pi\pi$ und $-\alpha\psi = \omega'\pi$ gesetzt,

$$\Sigma e^{-\alpha(k+\omega)^2}\{\cos(2k+2\omega)\omega'\pi - i\sin(2k+2\omega)\omega'\pi\}$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.\Sigma e^{-\alpha'(k+\omega')^2}\{\cos 2k\omega\pi - i\sin 2k\omega\pi\}$$

$$\Sigma e^{-\alpha(k+\omega-\frac{1}{4})^2} - \Sigma e^{-\alpha(k+\omega+\frac{1}{4})^2} = 4\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.\left\{e^{-\frac{\pi\pi}{\alpha}}\sin\omega P - 3e^{-9\frac{\pi\pi}{\alpha}}\sin 3\omega P + \text{etc.}\right\}$$

Man kann den Lehrsatz auch so ausdrücken:

$$\Sigma t e^{-\pi t^4 kk - 2\pi ttk\sqrt{u} - \frac{1}{2}\pi u}$$

ändert den Werth nicht, wenn t in $\frac{1}{t}$ und u in $-u$ verwandelt wird.

[2.]

Man setze

$$P = 1 + \frac{x^n.1-x^{2n+1}}{1+x^n.1+x^{n+1}} + \frac{x^{2n}.1-x^{2n+2}.1-x^{n+1}}{1+x^n.1+x^{n+1}.1+x^{n+2}} + \frac{x^{3n}.1-x^{2n+3}.1-x^{n+1}.1-x^{n+2}}{1+x^n.1+x^{n+1}.1+x^{n+2}.1+x^{n+3}} + \text{etc.}$$

$$Q = \frac{x^n}{1+x^n} + \frac{x^{2n}.1-x^{n+1}}{1+x^n.1+x^{n+1}} + \frac{x^{3n}.1-x^{n+1}.1-x^{n+2}}{1+x^n.1+x^{n+1}.1+x^{n+2}} + \text{etc.}$$

$$R = P - Q$$

Man suche zuerst diese Differenz, indem man das erste, zweite, dritte Glied u. s. w. der Reihe Q von dem ersten, zweiten, dritten Gliede der Reihe P abzieht, so kommt

$$R = \frac{1}{1+x^n} + \frac{x^n.1-x^n}{1+x^n.1+x^{n+1}} + \frac{x^{2n}.1-x^n.1-x^{n+1}}{1+x^n.1+x^{n+1}.1+x^{n+2}} + \frac{x^{3n}.1-x^n.1-x^{n+1}.1-x^{n+2}}{1+x^n.1+x^{n+1}.1+x^{n+2}.1+x^{n+3}} + \text{etc.}$$

Wir bezeichnen diese Reihe durch $\varphi(x,n)$.

Man suche ferner jene Differenz R, indem man das erste, zweite, dritte Glied u. s. w. der Reihe Q von dem zweiten, dritten, vierten u. s. w. der Reihe P abzieht, so wird

$$R = 1 - \frac{x^{2n+1}}{1+x^{n+1}} - \frac{x^{3n+2}.1-x^{n+1}}{1+x^{n+1}.1+x^{n+2}} - \frac{x^{4n+3}.1-x^{n+1}.1-x^{n+2}}{1+x^{n+1}.1+x^{n+2}.1+x^{n+3}} - \text{u. s. w.}$$

oder offenbar

$$R = 1 - x^{2n+1}.\varphi(x, n+1)$$

folglich

$$\varphi(x,n) = 1 - x^{2n+1}.\varphi(x, n+1)$$

Dieser Schluss ist allgemein, so lange $n > 1$, man hat demnach unter dieser Einschränkung

$$\varphi(x,n) = 1 - x^{2n+1} + x^{4n+4} - x^{6n+9} + x^{8n+16} - \text{etc.}$$

hingegen ist für den Fall $n = 0$ das letzte Glied von Q nicht als verschwindend zu betrachten. Setzt man es $= T$, so wird der erste Werth von R um T kleiner sein als der zweite, also

$$T = 1 - x\varphi(x,1) - \varphi(x,0)$$

oder

$$\varphi(x,0) = 1 - x\varphi(x,1) - T = 1 - x + x^4 - x^9 + x^{16} - \ldots - T$$

also da

$$\varphi(x,0) = \tfrac{1}{2}$$

und

$$2T = \frac{1-x}{1+x}.\frac{1-xx}{1+xx}.\frac{1-x^3}{1+x^3}.\frac{1-x^4}{1+x^4} \text{ etc.}$$

so wird

$$\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{1-xx}{1+xx}\cdot\frac{1-x^3}{1+x^3}\cdot\frac{1-x^4}{1+x^4}\text{ etc.} = 1-2x+2x^4-2x^9+2x^{16}-\text{ etc.}$$

der erste Theil ist hier

$$= 1-x\,.\,1-x^3\,.\,1-x^5\,.\,1-x^7\text{ etc. }\frac{1-xx}{1+x}\cdot\frac{1-x^4}{1+xx}\cdot\frac{1-x^6}{1+x^3}\text{ etc.}$$
$$= (1-x)^2(1-xx)(1-x^3)^2(1-x^4)(1-x^5)^2(1-x^6)\text{ etc.}$$

Bezeichnen wir noch

$$1-2x+2x^4-2x^9+2x^{16}\text{ etc. mit } Fx$$

so wird offenbar

$$Fx\,.\,F(-x) = (Fxx)^2$$

[3.]

Zieht man auf ähnliche Weise von der Reihe

$$\frac{1-x^{2n+2}}{1-x^{n+1}}+\frac{x^n\,.\,1-x^{2n+4}\,.\,1-x^{n+2}}{1-x^{n+1}\,.\,1-x^{n+3}}+\frac{x^{2n}\,.\,1-x^{2n+6}\,.\,1-x^{n+2}\,.\,1-x^{n+4}}{1-x^{n+1}\,.\,1-x^{n+3}\,.\,1-x^{n+5}}+\text{ etc.}$$

die Reihe

$$\frac{x^n\,.\,1-x^{n+2}}{1-x^{n+1}}+\frac{x^{2n}\,.\,1-x^{n+2}\,.\,1-x^{n+4}}{1-x^{n+1}\,.\,1-x^{n+3}}+\frac{x^{3n}\,.\,1-x^{n+2}\,.\,1-x^{n+4}\,.\,1-x^{n+6}}{1-x^{n+1}\,.\,1-x^{n+3}\,.\,1-x^{n+5}}+\text{ etc.}$$

ab, so erhält man einmal

$$\frac{1-x^n}{1-x^{n+1}}+\frac{x^n\,.\,1-x^n\,.\,1-x^{n+2}}{1-x^{n+1}\,.\,1-x^{n+3}}+\frac{x^{2n}\,.\,1-x^n\,.\,1-x^{n+2}\,.\,1-x^{n+4}}{1-x^{n+1}\,.\,1-x^{n+3}\,.\,1-x^{n+5}}+\text{ etc.} = \psi(x,n)$$

und zweitens

$$1+x^{n+1}+\frac{x^{2n+3}\,.\,1-x^{n+2}}{1-x^{n+3}}+\frac{x^{2n+3}\,.\,x^{n+2}\,.\,1-x^{n+2}\,.\,1-x^{n+4}}{1-x^{n+3}\,.\,1-x^{n+5}}+\text{ etc.}$$
$$= 1+x^{n+1}+x^{2n+3}\psi(x,n+2)$$

Man hat also, den Fall $n=0$ ausgenommen,

$$\psi(x,n) = 1+x^{n+1}+x^{2n+3}\psi(x,n+2)$$

folglich

$$\psi(x,n) = 1+x^{n+1}+x^{2n+3}+x^{3n+6}+x^{4n+10}+\text{ etc.}$$

dagegen hat man für den Fall $n=0$

$$\psi(x,0) = 1+x+x^3\psi(x,2)-\frac{1-x^2\,.\,1-x^4\,.\,1-x^6}{1-x\,.\,1-x^3\,.\,1-x^5}\text{ etc.}$$

folglich

$$\frac{1-x^2\,.\,1-x^4\,.\,1-x^6\ldots}{1-x\,.\,1-x^3\,.\,1-x^5\ldots} = 1+x+x^3+x^6+x^{10}+\text{ etc.}$$

[4.]

Wir bezeichnen

$$1-x\,.\,1-xx\,.\,1-x^3 \text{ etc.} \quad \text{mit} \quad [x]$$

so ist:

$$1+x+x^3+x^6+\text{ etc.} = \frac{1-xx\,.\,1-x^4\,.\,1-x^6\ldots}{1-x\,.\,1-x^3\,.\,1-x^5\ldots} = \frac{[xx]^2}{[x]}$$

$$= 1+x\,.\,1+xx\,.\,1+x^3\,.\,1+x^4\,.\,1+x^5\ldots 1-x^2\,.\,1-x^4\,.\,1-x^{16}\ldots$$

$$1-2x+2x^4-2x^9+\text{ etc.} = \frac{1-x\,.\,1-xx\,.\,1-x^3\ldots}{1+x\,.\,1+xx\,.\,1+x^3\ldots} = \frac{[x]^2}{[xx]}$$

$$1+2x+2x^4+2x^9+\text{ etc.} = \frac{1+x\,.\,1-xx\,.\,1+x^3\ldots}{1-x\,.\,1+xx\,.\,1-x^3\ldots} = \frac{[xx]^5}{[x]^2[x^4]^2}$$

$$= (1+x)^2(1-xx)(1+x^3)^2(1-x^4)(1+x^5)^2\ldots$$

$$[-x] = \frac{[xx]^3}{[x][x^4]}$$

$$(1+xy)(1+x^3y)(1+x^5y)\ldots(1+\tfrac{x}{y})(1+\tfrac{x^3}{y})(1+\tfrac{x^5}{y})\ldots$$

$$= \frac{1}{[xx]}\{1+x(y+\tfrac{1}{y})+x^4(yy+\tfrac{1}{yy})+x^9(y^3+\tfrac{1}{y^3})+\,.\}$$

$$\text{etc.}+x^{(\omega-1)^2}+x^{\omega\omega}+x^{(\omega+1)^2}+\text{ etc.} = [xx]\frac{\ldots 1+x^{2\omega+3}\,.\,1+x^{2\omega+1}\,.\,1+x^{2\omega-1}\,.\,1+x^{2\omega-3}\ldots}{x^{-\omega\omega}\,.\,x^{2\omega-1}\,.\,x^{2\omega-3}\ldots}$$

$$[x]^3 = 1-3x+5x^3-7x^6+9x^{10}-\text{ etc.}$$

folgt leicht aus

$$\{(y-\tfrac{1}{y})x-(y^3-\tfrac{1}{y^3})x^9+(y^5-\tfrac{1}{y^5})x^{25}-\ldots\}\{(y+\tfrac{1}{y})x+(y^3+\tfrac{1}{y^3})x^9+(y^5+\tfrac{1}{y^5})x^{25}+\ldots\}$$

$$= \{1-2x^8+2x^{32}-\ldots\}\{(yy-\tfrac{1}{yy})xx-(y^6-\tfrac{1}{y^6})x^{18}+\text{ etc.}\}$$

wenn man $y = 1+\omega$ setzt und daraus die Bedingungsgleichungen bildet.

[5.]

Zu den Hauptsätzen in dieser Theorie gehört folgendes Theorem. Bezeichnet man

$$\left\{e^{-\frac{P\alpha}{24}} - e^{-\frac{25P\alpha}{24}} - e^{-\frac{49P\alpha}{24}} + e^{-\frac{121P\alpha}{24}} + e^{-\frac{169P\alpha}{24}} + \ldots\right\}.\sqrt[4]{\alpha} \text{ durch } \varphi\alpha$$

so ist

$$\varphi\alpha = \varphi\frac{1}{\alpha}$$

Diese Function ist ein Maximum für $\alpha = 1$, wo ihr Werth

$$= 0{,}7682255 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}.\sqrt{1{,}19814\ldots}} = \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}}.\sqrt{\frac{\varpi}{\pi}}$$

ferner ist

$$(\varphi 2\lambda)^{24} = 4(\varphi\lambda)^8(\varphi 4\lambda)^8\{(\varphi\lambda)^8 + (\varphi 4\lambda)^8\}$$

$$\varphi\alpha = e^{-\frac{\alpha}{24}P}\sqrt[4]{\alpha}.(1-e^{-\alpha P})(1-e^{-2\alpha P})(1-e^{-3\alpha P})\ldots$$

oder

$$[x] = \frac{\varphi\frac{-\log x}{P}.\sqrt[24]{\frac{1}{x}}}{\sqrt[4]{\frac{-\log x}{P}}}$$

Es sei

$$(1+xy)(1+x^3y)(1+x^5y)\ldots(1+\frac{x}{y})(1+\frac{x^3}{y})(1+\frac{x^5}{y})\ldots = F(x,y)$$

so ist

$$F\left[e^{-\frac{1}{2}\alpha P},\quad e^{P\varpi\sqrt{\alpha}}\right].e^{-\frac{P}{24\alpha}} = F\left[e^{-\frac{1}{2}\frac{P}{\alpha}},\quad e^{iP\varpi\sqrt{\frac{1}{\alpha}}}\right].e^{-\frac{P\alpha}{24}}.e^{\frac{1}{2}P\varpi\varpi}$$

[6.]

Die Siebentheilung führt auf folgende Gleichung

$$b = \left[\frac{1-2x+2x^4-\ldots}{1+2x+2x^4+\ldots}\right]^2$$

$$A = \left[\frac{1+2x^7+2x^{28}+\ldots}{1+2x+2x^4+\ldots}\right]^2$$

$$B = \left[\frac{1-2x^7+2x^{28}+\ldots}{1+2x+2x^4+\ldots}\right]^2$$

$$A^8-\tfrac{4}{7}A^6+\frac{16-32bb}{49}A^5-\frac{30}{343}A^4+\frac{32-64bb}{2401}A^3-\frac{20+768bb-768b^4}{16807}A^2$$
$$+\frac{48-2144bb+6144b^4-4096.b^6}{823543}A-\frac{1}{823543}=0$$

$$B^8-\tfrac{4}{7}bbB^6+\frac{16b^3-32b}{49}B^5-\frac{30b^4}{343}B^4+\frac{32b^5-64b^3}{2401}B^3-\frac{20b^6+768b^4-768b^2}{16807}B^2$$
$$+\frac{48b^7-2144b^5+6144b^3-4096b}{823543}B-\frac{1}{823543}=0$$

Wenn man in der ersten Gleichung statt bb, $1-bb$ und statt A, $-A$ setzt, so wird sie nicht geändert.

[7.]

Für die Dreitheilung hat man

$$\begin{array}{ccc} a & b & \frac{b}{a}=t \\ A & B & \frac{B}{A}=T \end{array}$$

$$T^4+(12t-16t^3)T^3+6ttT^3-(16t-12t^3)T+t^4=0$$

oder

$$(T-t)^4=16(t-t^3)(T-T^3)$$

$$\frac{A}{a}=\frac{3t-t^3+T(1-3tt)}{3[T(1-tt)+t(1-TT)]}$$

Setzt man $T=\operatorname{tang}N$, $t=\operatorname{tang}n$, so ist

$$3\sin(2N-2n)^2=4\sin(N+3n).\sin(3N+n)$$
$$\sin(N-n)^4=\sin 4n.\sin 4N$$

$$\frac{A\cos n}{a\cos N}=\frac{B\sin n}{b\sin N}=\frac{2\sin(N+3n)}{3\sin(2N-2n)}=\frac{\sin(2N-2n)}{2\sin(3N+n)}$$

[8.]

Zum Beweise der schönen Lehrsätze der Reciprocität wird folgendes dienen:

I. Das Product aus allen

$$1-\frac{\eta}{ak+N}$$

ist das Product aus allen

$$\frac{1-\frac{\eta-N}{ak}}{1+\frac{N}{ak}}$$

also

$$=\frac{\sin\frac{N-\eta}{a}\pi}{\sin\frac{N}{a}\pi}=e^{-\frac{\eta\pi i}{a}}\cdot\frac{1-e^{-\frac{2(N-\eta)}{a}\pi i}}{1-e^{-\frac{2N}{a}\pi i}}=e^{\frac{\eta\pi i}{a}}\cdot\frac{1-e^{\frac{2(N-\eta)}{a}\pi i}}{1-e^{\frac{2N}{a}\pi i}}$$

II. Sollen aber blos für k die ungeraden Zahlen gesetzt werden, so ist jenes Product

$$=\frac{\cos\frac{N-\eta}{a}\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{N}{a}\frac{\pi}{2}}=e^{-\frac{\eta\pi i}{2a}}\cdot\frac{1+e^{-\frac{N-\eta}{a}\pi i}}{1+e^{-\frac{N}{a}\pi i}}=e^{\frac{\eta\pi i}{2a}}\cdot\frac{1+e^{\frac{N-\eta}{a}\pi i}}{1+e^{\frac{N}{a}\pi i}}$$

Setzt man also $N=k'a'$, so wird der Werth jenes Products, wenn man

$$e^{-\frac{a'\pi i}{a}}=x \quad \text{und} \quad e^{\frac{\eta\pi i}{a}}=y$$

setzt,

$$=y^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1+x^{k'}y}{1+x^{k'}}=y^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1+x^{-k'}\cdot\frac{1}{y}}{1+x^{-k'}}$$

folglich das Product aus allen Werthen für k' alle ungeraden Zahlen gesetzt

$$=(x,y)\frac{[x]^2[x^4]^2}{[xx]^4}$$

Es seien m, n zwei beliebige, positive reelle Grössen und λ reell oder imaginär, man setze

$$e^{-\frac{m}{n}\pi}=x, \qquad e^{\frac{\lambda}{n}\pi}=y$$

so ist das Product aus allen

$$1-\frac{\lambda}{km+k'ni}$$

für k und k' alle ungeraden ganzen Zahlen gesetzt, obigem zu Folge

$$= (x,y)\,\frac{[x]^2\,[x^4]^2}{[xx]^4}$$

Offenbar ist aber obiges Product auch das Product aus allen

$$1 - \frac{\lambda i}{kmi + k'n}$$

also, wenn man

$$e^{-\frac{n}{m}\pi} = x', \qquad e^{\frac{\lambda}{m}\pi i} = y'$$

setzt, so ist jenes Product

$$= (x',y')\,\frac{[x']^2\,[x'^4]^2}{[x'x']^4}$$

folglich diese beiden Ausdrücke einander gleich, oder

$$\frac{1+xy\,.\,1+\frac{x}{y}\,.\,1+x^3y\,.\,1+\frac{x^3}{y}\,\ldots}{1+x\;.\;1+x\;.\,1+x^3\;.\;1+x^3\ldots} = \frac{1+x'y'\,.\,1+\frac{x'}{y'}\,.\,1+x'^3y'\,.\,1+\frac{x'^3}{y'}\,\ldots}{1+x'\;.\;1+x'\,.\,1+x'^3\;.\;1+x'^3\ldots}$$

Diese Schlüsse bedürfen einer Verbesserung (alle geradezu noch einen constanten Theil im Nenner).

[9.]

$$\frac{x+4x^4+9x^9+16x^{16}+\ldots}{1+2x+2x^4+2x^9+\ldots} = \frac{x}{1-xx} - \frac{2xx}{1-x^4} + \frac{3x^3}{1-x^6} - \ldots \qquad \mathrm{I}$$

$$= \frac{x}{(1+x)^2} + \frac{x^3}{(1+x^3)^2} + \frac{x^5}{(1+x^5)^2} + \ldots \qquad \mathrm{II}$$

also

$$\tfrac{1}{2}\log(1+2x+2x^4+2x^9+\ldots) = \frac{x}{1+x} + \frac{x^3}{3(1+x^3)} + \frac{x^5}{5(1+x^5)} + \ldots$$

I. aus der Differentiation des Logarithmen des Ausdrucks durchs Product.

Wird I. entwickelt in

$$\begin{array}{l} x + x^3 + x^5 + x^7 + \ldots \\ -2xx - 2x^6 - 2x^{10} - 2x^{14} - \ldots \\ +3x^3 + 3x^9 + 3x^{15} + 3x^{21} + \ldots \\ -4x^4 - 4x^{12} - 4x^{20} - 4x^{28} - \ldots \\ \;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot\;\;\cdot \end{array}$$

und die verticalen Reihen einzeln summirt, so entsteht II.

$$(1+2x+2x^4+2x^9+\ldots)^4 = 1+\frac{8x}{1-x}+\frac{16xx}{1+xx}+\frac{24x^3}{1-x^3}+\frac{32x^4}{1+x^4}+\ldots$$
$$(1-2x+2x^4-2x^9+\ldots)^4 = 1-\frac{8x}{1+x}+\frac{16xx}{1+xx}-\frac{24x^3}{1+x^3}+\frac{32x^4}{1+x^4}-\ldots$$
$$(2x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{9}{4}}+2x^{\frac{25}{4}}+\ldots)^4 = \frac{16x}{1-xx}+\frac{48x^3}{1-x^6}+\frac{80x^5}{1-x^{10}}+\ldots$$

$$(1+2x+2x^4+2x^9+\ldots)^4 = 1+\frac{8x}{(1-x)^2}+\frac{8xx}{(1+xx)^2}+\frac{8x^3}{(1-x^3)^2}+\frac{8x^4}{(1+x^4)^2}+\ldots$$
$$(1-2x+2x^4-2x^9+\ldots)^4 = 1-\frac{8x}{(1+x)^2}+\frac{8xx}{(1+xx)^2}-\frac{8x^3}{(1+x^3)^2}+\frac{8x^4}{(1+x^4)^2}-\ldots$$
$$(2x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{9}{4}}+2x^{\frac{25}{4}}+\ldots)^4 = \frac{16(1+xx)x}{(1-xx)^2}+\frac{16(1+x^6)x^3}{(1-x^6)^2}+\frac{16(1+x^{10})x^5}{(1-x^{10})^2}+\ldots$$

Die Reihen

$$p = 1+2x+2x^4+\text{etc.}, \qquad \frac{1}{pp} = t$$
$$q = 1-2x+2x^4-\text{etc.}, \qquad \frac{1}{qq} = u$$

werden durch Differentialgleichungen am einfachsten auf folgende Art ausgedrückt

$$\frac{x\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = t', \qquad \frac{x\,\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}x} = t'', \qquad \frac{x\,\mathrm{d}t''}{\mathrm{d}x} = t'''$$
$$\frac{x\,\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u', \qquad \frac{x\,\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}x} = u'', \qquad \frac{x\,\mathrm{d}u''}{\mathrm{d}x} = u'''$$

$$\frac{u}{t}-\frac{t}{u} = 2(tu'-ut') = -4u^3t'' = +4t^3u''$$

$$\frac{t'''}{t''}+3\frac{t'}{t} = \sqrt{\left(\frac{1}{t^4}+16\frac{t''}{t}\right)}$$

[III.]

[ZUR THEORIE DER NEUEN TRANSSCENDENTEN.]

Die Theoreme in Beziehung auf diejenigen Reihen und unendlichen Producte, welche zu der Theorie der Arithmetisch Geometrischen Mittel gehören, ordnen wir so:

1. $$1-x\,.\,1-xx\,.\,1-x^3\,.\,1-x^4\ \ldots = [x]$$

2. $$1+x\,.\,1+xx\,.\,1+x^3\,.\,1+x^4\ \ldots = \frac{[xx]}{[x]}$$

3. $$1-x\,.\,1-x^3\,.\,1-x^5\,.\,1-x^7\ \ldots = \frac{[x]}{[xx]}$$

4. $$1+x\,.\,1+x^3\,.\,1+x^5\,.\,1+x^7\ \ldots = \frac{[xx]^2}{[x][x^4]}$$

5. $$[-x] = \frac{[xx]^3}{[x][x^4]}$$

6. $$1+xy\,.\,1+x^3y\,.\,1+x^5y\ \ldots\ 1+xy^{-1}\,.\,1+x^3y^{-1}\,.\,1+x^5y^{-1}\ \ldots$$

evolvitur in seriem

$$Fx\,.\,\{1+(y+y^{-1})x+(y^2+y^{-2})x^4+(y^3+y^{-3})x^9+\ \ldots\}$$

7. also $$Fx = \frac{(1-x)^2(1-x^3)^2(1-x^5)^2\ \ldots}{1-2x+2x^4-2x^9+\ \ldots} = \frac{[x]^2}{[xx]^2}\cdot\frac{1}{1-2x+2x^4-2x^9+\ \ldots}$$

8. $$Fx = \frac{1+xx\,.\,1+x^6\,.\,1+x^{10}\ldots}{1-2x^4+2x^{16}-2x^{36}+\ldots} = \frac{[x^4]^2}{[xx][x^8]}\cdot\frac{1}{1-2x^4+2x^{16}-\ldots}$$

9. $$[xx]Fx = [x^8]Fx^4 = [x^{32}]Fx^{16} = [x^{128}]Fx^{64} = \text{etc.} = 1$$

10. $$1-2x+2x^4-\ldots = \frac{[x]^2}{[xx]} = \frac{1-x\,.\,1-xx\,.\,1-x^3\ldots}{1+x\,.\,1+xx\,.\,1+x^3\ldots}$$

11. $$1+2x+2x^4+\ldots = \frac{[xx]^5}{[x]^2[x^4]^2} = \frac{1+x\,.\,1-xx\,.\,1+x^3\,.\,1-x^4\ldots}{1-x\,.\,1+xx\,.\,1-x^3\,.\,1+x^4\ldots}$$

Andere Beweise dieser Sätze.

Wenn man in 6 statt y, xy schreibt, so wird

$$1+\frac{1}{yy}\,.\,1+xxyy\,.\,1+x^4yy\,.\,1+x^6yy\ldots 1+xxy^{-2}\,.\,1+x^4y^{-2}\,.\,1+x^6y^{-2}\ldots$$
$$= \frac{1}{[xx]}\{(1+y^{-2})+(y^2+y^{-4})xx+(y^4+y^{-6})x^6+\ldots\}$$

oder

12. $$y+\frac{1}{y}\,.\,1+xxyy\,.\,1+x^4yy\,.\,1+x^6yy\ldots 1+xxy^{-2}\,.\,1+x^4y^{-2}\,.\,1+x^6y^{-2}\ldots$$
$$= \frac{1}{[xx]x^{\frac{1}{4}}}\{(y+y^{-1})x^{\frac{1}{4}}+(y^3+y^{-3})x^{\frac{9}{4}}+\ldots\}$$

Anderer Beweis

13. $$x^{\frac{1}{4}}\frac{[x^4]^2}{[xx]} = x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{9}{4}}+\ldots$$

oder

14. $$\frac{[xx]^2}{[x]} = 1+x+x^3+x^6+x^{10}+\ldots = \frac{1-xx\,.\,1-x^4\ldots}{1-x\,.\,1-x^3\ldots}$$

Anderer Beweis.

15. $$(1-2x+2x^4-\ldots)\;(1+2x+2x^4+\ldots) = (1-2xx+2x^8-\ldots)^2$$

16. $$(1-2x+2x^4-\ldots)^2+(1+2x+2x^4+\ldots) = 2(1+2xx+2x^8+\ldots)^2$$

17. $$(1+2x+2x^4+\ldots)^2\;(x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{9}{4}}+\ldots) = (x^{\frac{1}{8}}+x^{\frac{9}{8}}+\ldots)^2$$

18. $$(1+2x+2x^4+\ldots)^2+(2x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{9}{4}}+\ldots)^2 = (1+2x^{\frac{1}{2}}+2x^2+\ldots)^2$$

19. $$(1+2x+2x^4+\ldots)^4 = (1-2x+2x^4-\ldots)^4+(2x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{9}{4}}+\ldots)^4$$

Anwendung auf arithm. geom. Mittel.

20. $$\begin{aligned} a &= h(1+2x+2x^4+\ldots)^2 & b &= h(1-2x+2x^4-\ldots)^2 \\ a' &= h(1+2xx+2x^8+\ldots)^2 & b' &= h(1-2xx+2x^8-\ldots)^2 \\ a'' &= h(1+2x^4+2x^{16}+\ldots)^2 & b'' &= h(1-2x^4+2x^{16}-\ldots)^2 \\ a''' &= h(1+2x^8+2x^{32}+\ldots)^2 & b''' &= h(1-2x^8+2x^{32}-\ldots)^2 \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{(aa-bb)} \\ c' &= \sqrt{(a'a'-b'b')} = \tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{cc}{4a'} = \frac{cc}{4a'}, & \sqrt{\frac{c'}{4h}} &= \frac{c}{4}\frac{1}{\sqrt{a'h}} \\ c'' &= \sqrt{(a''a''-b''b'')} = \tfrac{1}{2}(a'-b') = \frac{c'c'}{4a''} = \frac{c^4}{64a'a'a''}, & \sqrt[4]{\frac{c''}{4h}} &= \frac{c}{4a'^{\frac{1}{2}}a''^{\frac{1}{4}}h^{\frac{1}{4}}} \\ c''' &= \sqrt{(a'''a'''-b'''b''')} = \tfrac{1}{2}(a''-b'') = \frac{c''c''}{4a'''} = \frac{c^8}{2^{14}a'^4a''^2a'''}, & \sqrt[8]{\frac{c'''}{4h}} &= \frac{c}{4a'^{\frac{1}{2}}a''^{\frac{1}{4}}a'''^{\frac{1}{8}}h^{\frac{1}{8}}} \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned}$$

21. $$x^{\frac{1}{2}} = \frac{c}{4a'^{\frac{1}{2}}a''^{\frac{1}{4}}a'''^{\frac{1}{8}}\ldots} = \frac{c}{4a'}\left[\frac{a'}{a''}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{a''}{a'''}\right]^{\frac{1}{4}}\left[\frac{a'''}{a''''}\right]^{\frac{1}{8}} \text{ etc.}$$

22. $$x = \frac{a-b}{8a''}\left[\frac{a''}{a'''}\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{a'''}{a''''}\right]^{\frac{1}{4}} \text{ etc.}$$

Setzt man in 6 statt x, x^3 und statt y, $-x$, so wird

$$1-x^4 . 1-x^{10} . 1-x^{16} \ldots 1-x^2 . 1-x^8 . 1-x^{14} \ldots$$
$$= \frac{1}{[x^6]}\{1-xx-x^4+x^{10}+x^{14}-x^{24}-x^{30}+\ldots\}$$

oder

23. $$[x] = 1-x-xx+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+ \text{ etc.}$$

Anderer Beweis.

Man setze in 6 statt x, x^3 und statt y, $+x$, so wird

24. $1+x+xx+x^5+x^7+x^{12}+x^{15}+\text{etc.} = [x^3].1+x.1+xx.1+x^4.1+x^5\,..$
$$= \frac{[xx][x^3]^2}{[x][x^6]}$$

Man setze in 6 statt x, x^3 und statt y, xxy, so wird

$$1+\frac{x}{y}+x^5y+\frac{x^8}{yy}+x^{16}yy+\text{etc.}$$
$$= 1+\frac{x}{y}.1+\frac{x^7}{y}.1+\frac{x^{13}}{y}\ldots 1+x^5y.1+x^{11}y.1+x^{17}y\ldots[x^6]$$

oder statt x, x^3 gesetzt

$$x+\frac{x^4}{y}+x^{16}y+\frac{x^{25}}{yy}+x^{49}yy+\text{etc.}$$
$$= x.1+\frac{x^3}{y}.1+\frac{x^{21}}{y}.1+\frac{x^{39}}{y}\ldots 1+x^{15}y.1+x^{33}y.1+x^{51}y\ldots[x^{18}]$$

also

25. $x+x^4+x^{16}+x^{25}+x^{49}+\,..$
$$= x.1+x^3.1+x^{15}.1+x^{21}.1+x^{33}.1+x^{39}\ldots[x^{18}] = x\frac{[x^6]^2[x^9][x^{36}]}{[x^3][x^{12}][x^{18}]}$$

26. $x-x^4-x^{16}+x^{25}+x^{49}-\text{etc.} = x.1-x^3.1-x^{15}.1-x^{21}.1-x^{33}\,..\,[x^{18}]$
$$= x\frac{[x^3][x^{18}]^2}{[x^6][x^9]}$$

Da nun

$$\frac{x.1-x^3.1-x^{15}.1-x^{21}.1-x^{33}\ldots[x^{18}]}{x.1-x^3.1-x^9.1-x^{15}.1-x^{21}\ldots} = \frac{[x^{18}]^2}{[x^9]} = 1+x^9+x^{27}+x^{54}+\,..$$

so ist

27. $x-x^4-x^{16}+x^{25}+x^{29}-\,..$
$$= 1-x^3.1-x^9.1-x^{15}\ldots\frac{1}{x^{\frac{1}{8}}}\{x^{\frac{9}{8}}+x^{\frac{81}{8}}+x^{\frac{225}{8}}+x^{\frac{441}{8}}+\text{etc.}\}$$

ferner folgt aus 24, wenn man statt x, x^3 setzt, weil

$$\frac{1-2x^9+2x^{36}-2x^{81}+\ldots}{1-x^3.1-x^9.1-x^{15}\ldots} = \frac{[x^6][x^9]^2}{[x^3][x^{18}]} = 1+x^3+x^6+x^{15}+x^{21}+\,..$$

28. $1-2x^9+2x^{36}-2x^{81}+\,.. = 1-x^3.1-x^9.1-x^{15}\ldots\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}\{x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{25}{4}}+x^{\frac{49}{4}}+\text{etc.}\}$

also aus der Verbindung von 27 und 28

29. $1-2x+2x^4-2x^9+2x^{16}-\,..$

$$=1-x^3.1-x^9.1-x^{15}\dots\frac{1}{x^{\frac{1}{8}}}\{x^{\frac{1}{8}}-2x^{\frac{9}{8}}+x^{\frac{25}{8}}+x^{\frac{49}{8}}-2x^{\frac{81}{8}}-\text{etc.}\}$$

ferner folgt aus 23

$$x^{\frac{1}{8}}-x^{\frac{25}{8}}-x^{\frac{49}{8}}+x^{\frac{121}{8}}+\,..=x^{\frac{1}{8}}[x^3]$$

also

30. $1-2x^3+2x^{12}-2x^{27}+2x^{48}-\,..$

$$=1-x^3.1-x^9.1-x^{15}\dots\frac{1}{x^{\frac{1}{8}}}\{x^{\frac{1}{8}}-x^{\frac{25}{8}}-x^{\frac{49}{8}}+x^{\frac{121}{8}}+x^{\frac{169}{8}}-\,..\}$$

Aus der Summation von 29 und 30

31. $\{1-2x+2x^4-2x^9+\,..\}+\{1-2x^3+2x^{12}-2x^{27}+\,..\}$

$$=1-x^3.1-x^9.1-x^{15}\dots\frac{2}{x^{\frac{1}{8}}}\{x^{\frac{1}{8}}-x^{\frac{9}{8}}-x^{\frac{81}{8}}+x^{\frac{121}{8}}+x^{\frac{169}{8}}-\,..\}$$

Aus der Summation von 28 und 30

32. $\{1-2x^3+2x^{12}-2x^{27}+\,..\}+\{1-2x^9+2x^{36}-2x^{81}+\,..\}$

$$=1-x^3.1-x^9.1-x^{15}\dots\frac{2}{x^{\frac{1}{8}}}\{x^{\frac{1}{8}}+x^{\frac{121}{8}}+x^{\frac{169}{8}}+x^{\frac{529}{8}}+\,..\}$$

Setzt man in 6 statt x, x^6 und statt y, xy, so wird

$$1+x^7y.1+x^{19}y.1+x^{31}y\dots 1+\frac{x^5}{y}.1+\frac{x^{17}}{y}\dots[x^{12}]$$
$$=1+\frac{x^5}{y}+x^7y+\frac{x^{22}}{yy}+x^{26}yy+\,..$$

Man hat demnach die Zerlegungen in Factoren

33. $(1-2x^3+2x^{12}-2x^{27}+\,..)+(1-2x^9+2x^{36}-2x^{81}+\,..)$

$$=2[x^{36}].1-x^3.1-x^9.1-x^{15}\dots 1+x^{15}.1+x^{21}.1+x^{51}.1+x^{57}\dots$$

34. $(1-2x+2x^4-2x^9+\,..)+(1-2x^3+2x^{12}-2x^{27}+\,..)$

$$=2[x^{12}].1-x.1-x^3.1-x^5.1-x^7\dots 1+x^5.1+x^7.1+x^{17}.1+x^{19}\dots$$

35. $(1+2x^3+2x^{12}+2x^{27}+\,..)+(1+2x^9+2x^{36}+2x^{81}+\,..)$

$$=2[x^{36}].1+x^3.1+x^9.1+x^{15}\dots 1-x^{15}.1-x^{21}.1-x^{51}\dots$$

36. $(1+2x+2x^4+2x^9+\,..)+(1+2x^3+2x^{12}+2x^{27}+\,..)$

$$=2[x^{12}].1+x.1+x^3.1+x^5.1+x^7\dots 1-x^5.1-x^7.1-x^{17}.1-x^{19}\dots$$

Hieraus ergeben sich zugleich die Factoren des letzten Theils in 31.

Aus der Subtraction von 28 und 30

$$37.\quad (1-2x^9+2x^{36}-2x^{81}+..)-(1-2x^3+2x^{12}-..)$$
$$= 2.1-x^3.1-x^9.1-x^{15}..\frac{1}{x^{\frac{1}{8}}}(x^{\frac{25}{8}}+x^{\frac{49}{8}}+x^{\frac{289}{8}}+x^{\frac{361}{8}}+..)$$

Setzt man in 6 statt x, x^6 und statt y, x^5y, so wird

$$1+x^{11}y.1+x^{23}y.1+x^{35}y\ldots 1+\frac{x}{y}.1+\frac{x^{13}}{y}.1+\frac{x^{25}}{y}\ldots.[x^{12}]$$
$$= 1+\frac{x}{y}+x^{11}y+\frac{x^{14}}{yy}+x^{34}yy+\ldots$$

Also die Zerlegung in Factoren

$$38.\quad (1-2x^5+2x^{36}-2x^{81}+..)-(1-2x^3+2x^{12}-..)$$
$$= 2x^3[x^{36}].1+x^3.1+x^{33}.1+x^{39}.1+x^{69}\ldots 1-x^3.1-x^9.1-x^{15}\ldots$$

$$39.\quad (1-2x^3+2x^{12}-2x^{27}+..)-(1-2x+2x^4-..)$$
$$= 2x[x^{12}].1+x.1+x^{11}.1+x^{13}.1+x^{23}\ldots 1-x.1-x^3.1-x^5\ldots$$

$$40.\quad (1+2x^3+2x^{12}+2x^{27}+..)-(1+2x^9+2x^{36}+..)$$
$$= 2x^3[x^{36}].1-x^3.1-x^{33}.1-x^{39}.1-x^{69}\ldots 1+x^3.1+x^9.1+x^{15}\ldots$$

$$41.\quad (1+2x+2x^4+2x^9+..)-(1+2x^3+2x^{12}+..)$$
$$= 2x[x^{12}].1-x.1-x^{11}.1-x^{13}.1-x^{23}\ldots 1+x.1+x^3.1+x^5\ldots$$

Aus der Subtraction von 29 und 30 folgt

$$42.\quad (1-2x^3+2x^{12}-2x^{27}+..)-(1-2x+2x^4-..)$$
$$= 2.1-x^3.1-x^9.1-x^{15}\ldots\frac{1}{x^{\frac{1}{8}}}(x^{\frac{9}{8}}-x^{\frac{25}{8}}-x^{\frac{49}{8}}+x^{\frac{81}{8}}+x^{\frac{225}{8}}-..)$$

Woraus die Zerlegung des letzten Gliedes dieser Gleichung in Factoren folgt.

Aus der Multiplication von 34 und 39 folgt

$$43.\quad (1-2x^3+2x^{12}-2x^{27}+..)^2-(1-2x+2x^4-..)^2$$
$$= 4x[x^{12}]^2.(1-x)^2(1-x^3)^2(1-x^5)^2\ldots 1+x.1+x^5.1+x^7.1+x^{11}\ldots$$
$$= 4x\frac{[x^{12}]^2[x]^2}{[xx]^2}.\frac{[xx]^3[x^3][x^{12}]}{[x][x^4][x^6]^2} = 4x\frac{[x][x^3][x^{12}]^3}{[x^4][x^6]^2}$$

Ebenso aus der Multiplication von 36 und 41

$$44. \quad (1+2x+2x^4+\,.\,.)^2-(1+2x^3+2x^{12}+2x^{27}+\,.\,.)^2$$
$$= 4x[x^{12}]^2.(1+x)^2(1+x^3)^2(1+x^5)^2\ldots 1-x.1-x^5.1-x^7.1-x^{11}\ldots$$
$$= 4x\frac{[x^{12}]^2[xx]^4}{[x]^2[x^4]^2}\cdot\frac{[x][x^6]}{[xx][x^3]} = 4x\frac{[xx]^3[x^6][x^{12}]^2}{[x][x^3][x^4]^2}$$

Also der Quotient

$$45. \quad \frac{(1-2x^3+2x^{12}-2x^{27}+\,.\,.)^2-(1-2x+2x^4-\,.\,.)^2}{(1+2x^3+2x^{12}+2x^{27}+\,.\,.)^2-(1+2x+2x^4+\,.\,.)^2}$$
$$= -\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3\left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)\left(\frac{1-x^5}{1+x^5}\right)^3\left(\frac{1-x^7}{1+x^7}\right)^3\left(\frac{1-x^9}{1+x^9}\right)\ldots$$
$$= \frac{[x]^2[x^3]^2[x^4][x^{12}]}{[xx]^3[x^6]^3}$$

und das Product

$$45^b. \quad \{(1-2x^3+2x^{12}-\,.\,.)^2-(1-2x+2x^4-\,.\,.)^2\}$$
$$\times\{(1+2x^3+2x^{12}+\,.\,.)^2-(1+2x+2x^4+\,.\,.)^2\}$$
$$= -16xx\frac{[xx]^3[x^{12}]^5}{[x^4]^3[x^6]}$$

Aus $28+i30$ folgt

$$46. \quad (1-2x^9+2x^{36}-\,.\,.)-i(1-2x^3+2x^{12}-\,.\,.)$$
$$= 1-x^3.1-x^9.1-x^{15}\ldots\frac{1-i}{x^{\frac{1}{8}}}(x^{\frac{1}{8}}+ix^{\frac{25}{8}}+ix^{\frac{49}{8}}+x^{\frac{121}{8}}+\,.\,.)$$

Nun findet man aus 6 nach dem, was zwischen 22 und 23 gezeigt ist

$$1+x^4y.1+x^{10}y.1+x^{16}y\ldots 1+\frac{xx}{y}.1+\frac{x^8}{y}.1+\frac{x^{14}}{y}\ldots 1-x^6.1-x^{12}\ldots$$
$$= 1+\frac{xx}{y}+x^4y+\frac{x^{10}}{yy}+x^{14}yy+\ldots$$

Also

$$1+x^4i.1-x^{10}i.1+x^{16}i\ldots 1-\frac{xx}{i}.1+\frac{x^8}{i}.1-\frac{x^{14}}{i}\ldots 1+x^6.1-x^{12}.1+x^{18}\ldots$$
$$= 1+ixx+ix^4+x^{10}+x^{14}+\ldots$$

Daher die Zerlegung in Factoren

$$47. \quad (1-2x^3+2x^{12}-\,.\,.)-i(1-2x+2x^4-\,.\,.)$$
$$= 1-x.1-x^3.1-x^5\ldots 1-i.1+x^3.1-x^6.1+x^9\ldots$$
$$\times 1+ix.1+ixx.1-ix^4.1-ix^5.1+ix^7.1+ix^8\ldots$$

und ferner

48. $$(1-2x^3+2x^{12}-\,.\,.)+i(1-2x+2x^4-\,.\,.)$$
$$= 1-x\,.\,1-x^3\,.\,1-x^5\ldots\; 1+i\,.\,1+x^3\,.\,1-x^6\,.\,1+x^9\ldots$$
$$\times 1-ix\,.\,1-ixx\,.\,1+ix^4\,.\,1+ix^5\,.\,1-ix^7\,.\,1-ix^8\ldots$$

49. $$(1+2x^3+2x^{12}+\,.\,.)-i(1+2x+2x^4+\,.\,.)$$
$$= 1+x\,.\,1+x^3\,.\,1+x^5\ldots\; 1-i\,.\,1-x^3\,.\,1-x^6\,.\,1-x^9\ldots$$
$$\times 1-ix\,.\,1+ixx\,.\,1-ix^4\,.\,1+ix^5\ldots$$

50. $$(1+2x^3+2x^{12}+\,.\,.)+i(1+2x+2x^4+\,.\,.)$$
$$= 1+x\,.\,1+x^3\,.\,1+x^5\ldots\; 1+i\,.\,1-x^3\,.\,1-x^6\,.\,1-x^9\ldots$$
$$\times 1+ix\,.\,1-ixx\,.\,1+ix^4\,.\,1-ix^5\ldots$$

Also aus der Multiplication von 47 und 48

51. $$(1-2x^3+2x^{12}-\ldots)^2+(1-2x+2x^4-\ldots)^2$$
$$= 2(1-x)^2(1-x^3)^2(1-x^5)^2\ldots(1+x^3)^2(1-x^6)^2(1+x^9)^2\ldots$$
$$\times 1+xx\,.\,1+x^4\,.\,1+x^8\,.\,1+x^{10}\ldots$$
$$= 2(1-x)^2(1-x^3)^2(1-x^5)^2\ldots(1+x^3)^2\,1+x^9)^2\ldots$$
$$\times(1-x^6)^3(1-x^{12})^2\ldots 1+xx\,.\,1+x^4\,.\,1+x^6\,.\,1+x^8\ldots$$
$$= 2\,\frac{[x]^2[x^6]^4}{[xx]^2[x^3]^2[x^{12}]^2}\cdot\frac{[x^6]^3}{[x^{12}]}\cdot\frac{[x^4]}{[xx]} = \frac{2[x]^2[x^4][x^6]^7}{[x^2]^3[x^3]^2[x^{12}]^3}$$

und aus der Multiplication von 49 und 50

52. $$(1+2x^3+2x^{12}+\,.\,.)^2+(1+2x+2x^4+\ldots)^2$$
$$= 2(1+x)^2(1+x^3)^2(1+x^5)^2\ldots(1-x^3)^2(1-x^6)^2(1-x^9)^2\ldots$$
$$\times 1+xx\,.\,1+x^4\,.\,1+x^8\,.\,1+x^{10}\ldots$$
$$= 2\,\frac{[xx]^4}{[x]^2[x^4]^2}\,[x^3]^2\,\frac{[x^4][x^6]}{[xx][x^{12}]} = \frac{2[xx]^3[x^3]^2[x^6]}{[x]^2[x^4][x^{12}]}$$

und der Quotient

53. $$\frac{(1-2x^3+2x^{12}-\,.\,.)^2+(1-2x+2x^4-\,.\,.)^2}{(1+2x^3+2x^{12}+\,.\,.)^2+(1+2x+2x^4+\,.\,.)^2}$$
$$= \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\left(\frac{1-x^3}{1+x^3}\right)^2\left(\frac{1-x^5}{1+x^5}\right)^2\ldots\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^2\left(\frac{1+x^9}{1-x^9}\right)^2\ldots$$
$$= \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2\left(\frac{1-x^5}{1+x^5}\right)^2\left(\frac{1-x^7}{1+x^7}\right)^2\ldots = \frac{[x]^4[x^4]^2[x^6]^6}{[x^2]^6[x^3]^4[x^{12}]^2}$$

und das Product

54. $$\{(1-2x^3+..)^2+(1-2x+..)^2\}\{(1+2x^3+..)^2-(1+2x+..)^2\}$$
$$= 4\,\frac{[x^6]^8}{[x^{12}]^4} = 4(1-2x^6+2x^{24}-..)^2$$

Aus Formel 23 folgt

55. $$x+x^9+x^{25}+.. = x.\,1+x^8.\,1+x^{16}.\,1+x^{24}\ldots(1-x^{16}-x^{32}+x^{80}+x^{112}-..)$$

$$\tfrac{3}{2}\text{ Exponent } = \square - 1$$

Aus Formel 26 folgt

56. $$x^3+x^{27}+x^{75}+.. = x.\,1+x^8.1+x^{16}.1+x^{24}\ldots(x^2-x^{10}-x^{42}+x^{66}+x^{130}-..)$$

oder $x^{\frac{4}{3}}.\,1+x^8.\,1+x^{16}.\,1+x^{24}\ldots = A,\quad x^2 = t^3$ gesetzt

55. $$x+x^9+x^{25}+.. = A(t-t^{25}-t^{49}+t^{121}+t^{169}-\ldots)$$

56. $$x^3+x^{27}+x^{75}+.. = A(t^4-t^{16}-t^{64}+t^{100}+t^{196}-\ldots)$$

Nun folgt aus der Factorenzerlegung in 24 sehr leicht, wenn man statt x, it statt y, i setzt

$$it-it^4+it^{16}-it^{25}-it^{49}+..$$
$$= it.1-t^3.1+t^{15}.1+t^{21}.1-t^{33}\ldots1+t^{18}.1-t^{36}.1+t^{54}\ldots$$

Also aus 55 — 56

57. $$(x+x^9+x^{25}+..)-(x^3+x^{27}+x^{75}+..)$$
$$= x.1-xx.1+x^{10}.1+x^{14}.1-x^{22}.1-x^{26}\ldots$$
$$\times 1+x^{12}.1-x^{24}.1+x^{36}\ldots1+x^8.1+x^{16}.1+x^{24}\ldots$$

Und so sehr leicht

58. $$(x+x^9+x^{25}+..)+(x^3+x^{27}+x^{75}+..)$$
$$= x.1+xx.1-x^{10}.1-x^{14}.1+x^{22}.1+x^{26}\ldots$$
$$\times 1+x^{12}.1-x^{24}.1+x^{36}\ldots1+x^8.1+x^{16}.1+x^{24}\ldots$$

Also durch Multiplication

59. $$(x+x^9+x^{25}+\,.\,.)^2-(x^3+x^{27}+x^{75}+\,.\,.)^2$$
$$= xx.1-x^4.1-x^{20}.1-x^{28}.1-x^{44}.1-x^{52}\ldots$$
$$\times(1+x^{12})^2(1-x^{24})^2(1+x^{36})^2\ldots(1+x^8)^2(1+x^{16})^2\ldots$$
$$= xx\frac{[x^4][x^{16}]^2[x^{24}]^7}{[x^8]^3[x^{12}]^3[x^{48}]^2}$$

Eben so folgt aus der Factorenzerlegung in 24, wenn man statt x, t und statt y, $-i$ setzt

$$t+it^4-it^{16}-t^{25}-t^{49}\ldots = t.1+it^3.1-it^{15}.1+it^{21}.1-it^{33}\ldots[t^{18}]$$

also

60. $$(x+x^9+x^{25}+\ldots)+i(x^3+x^{27}+x^{75}+\ldots)$$
$$= x.1+ixx.1-ix^{10}.1+ix^{14}.1-ix^{22}\ldots1+x^8.1+x^{16}\ldots1-x^{12}.1-x^{24}\ldots$$

und eben so

61. $$(x+x^9+x^{25}+\ldots)-i(x^3+x^{27}+x^{75}+\ldots)$$
$$= x.1-ixx.1+ix^{10}.1-ix^{14}.1+ix^{22}\ldots1+x^8.1+x^{16}\ldots1-x^{12}.1-x^{24}\ldots$$

Also durch Multiplication

62. $$(x+x^9+x^{25}+\ldots)^2+(x^3+x^{27}+\,.\,.)^2$$
$$= xx\frac{[x^8]^2}{[x^4][x^{16}]}\cdot\frac{[x^{12}][x^{48}]}{[x^{24}]^2}\cdot\frac{[x^{16}]^2}{[x^8]^2}\cdot[x^{12}]^2 = xx\frac{[x^{12}]^3[x^{16}][x^{48}]}{[x^4][x^{24}]^2}$$

Also Product von 59 und 62

63. $$(x+x^9+x^{25}+\ldots)^4-(x^3+x^{27}+x^{75}+\,.\,.)^4 = x^4\frac{[x^{16}]^3[x^{24}]^5}{[x^8]^3[x^{48}]}$$

Durch Multiplication von 62 und 44 folgt

64. $$\{(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{9}{2}}+x^{\frac{25}{2}}+\,.\,.)^2+(x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{27}{2}}+\,.\,.)^2\}$$
$$\times\{(1+2x^2+2x^8+\,.\,.)^2-(1+2x^6+2x^{24}+\,.\,.)^2\}$$
$$= 4xx\frac{[x^4]^3[x^{12}][x^{24}]^2}{[x^2][x^6][x^8]^2}\cdot x\frac{[x^6]^3[x^8][x^{24}]}{[x^2][x^{12}]^2} = 4x^3\frac{[x^4]^3[x^6]^2[x^{24}]^3}{[x^2]^2[x^{12}][x^8]}$$

Durch Multiplication von 59 und 44

65.
$$\left\{(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{9}{2}}+x^{\frac{25}{2}}+\,.\,.)^2-(x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{27}{2}}+\,.\,.)^2\right\}$$
$$\times\left\{(1+2x^2+2x^8+\,.\,.)^2-(1+2x^6+2x^{24}+\,.\,.)^2\right\}$$
$$=4x^3\frac{[xx][x^8]^2[x^{12}]^7}{[x^4]^3[x^6]^3[x^{24}]^2}\cdot\frac{[x^4]^3[x^{12}][x^{24}]^2}{[x^2][x^6][x^8]^2}$$
$$=4x^3\frac{[x^{12}]^8}{[x^6]^4}=4(x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{27}{4}}+x^{\frac{75}{4}}+\,.\,.)^4$$

Man hat ferner

66. $$[x]=\frac{a^{\frac{1}{12}}b^{\frac{1}{3}}(aa-bb)^{\frac{1}{24}}}{2^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{24}}\sqrt{h}}\qquad\qquad\frac{a}{h}=\frac{[x^2]^{10}}{[x]^4[x^4]^4}$$

67. $$[xx]=\frac{a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{6}}(aa-bb)^{\frac{1}{12}}}{2^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{12}}\sqrt{h}}\qquad\qquad\frac{b}{h}=\frac{[x]^4}{[xx]^2}$$

68. $$[x^4]=\frac{a^{\frac{1}{12}}b^{\frac{1}{12}}(aa-bb)^{\frac{1}{6}}}{2^{\frac{4}{3}}x^{\frac{1}{6}}\sqrt{h}}\qquad\qquad\frac{aa-bb}{hh}=16x\frac{[x^4]^8}{[xx]^4}$$

Für die Fünf-Theilung $\left\{\begin{matrix}a & b\\ A & B\end{matrix}\right\}$

$$\left(\frac{a-A}{5A-a}\right)^4=\frac{AA-BB}{aa-bb}\cdot\frac{BB}{bb}$$
$$\left(\frac{B-b}{5B-b}\right)^4=\frac{AA-BB}{aa-bb}\cdot\frac{AA}{aa}$$
$$\frac{a-A}{B-b}=\frac{5B-b}{5A-a}=\sqrt[4]{\frac{aB}{bA}}$$

$$(a-A)(5A-a)^5=256\,Aabb(aa-bb)$$
$$(B-b)(5B-b)^5=256\,Baab(aa-bb)$$

$$(a-A)^5(5A-a)=256\,AaBB(AA-BB)$$
$$(B-b)^5(5B-b)=256\,AAbB(AA-BB)$$

$$a-A=\frac{4x[xx]^2[x^5][x^{20}]}{[x][x^4]}=2^{\frac{4}{3}}\frac{a^{\frac{1}{6}}A^{\frac{1}{6}}B^{\frac{5}{12}}(AA-BB)^{\frac{5}{24}}}{b^{\frac{1}{12}}(aa-bb)^{\frac{1}{24}}}$$

$$5A-a=4\frac{[x][x^4][x^{10}]^2}{[x^5][x^{20}]}=2^{\frac{4}{3}}\frac{a^{\frac{1}{6}}A^{\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{12}}(aa-bb)^{\frac{5}{24}}}{B^{\frac{1}{12}}(AA-BB)^{\frac{1}{24}}}$$

Zu der Theorie der Fünftheilung gehören folgende Theoreme. Wir bezeichnen $1+xy.1+x^3y.1+x^5y\ldots 1+\frac{x}{y}.1+\frac{x^3}{y}.1+\frac{x^5}{y}\ldots$ durch (x,y), so ist

$$[69]\qquad (x,\alpha y).(x,\tfrac{y}{\alpha}) = P\{1+xx(yy+\tfrac{1}{yy})+x^8(y^4+\tfrac{1}{y^4})+\ldots\}$$
$$+Q\{y+\tfrac{1}{y}+x^4(y^3+\tfrac{1}{y^3})+x^{12}(y^5+\tfrac{1}{y^5})+\ldots\}$$

wo P, Q von y unabhängig.

Also

$$(x,\alpha i)(x,\tfrac{\alpha}{i}) = (xx,\alpha\alpha) = P(1-2xx+2x^8-\ldots) = \frac{[xx]^2}{[x^4]}P$$

oder

$$P = (xx,\alpha\alpha)\frac{[x^4]}{[xx]^2}$$

Ferner für $y = -\alpha x$

$$(x,-\alpha\alpha x).(x,-x) = 0$$
$$= P(1+\tfrac{1}{\alpha\alpha}+\alpha\alpha x^4+\tfrac{x^4}{\alpha^4}+\ldots)-Q(\alpha x+\tfrac{1}{\alpha x}+\tfrac{x}{\alpha^3}+\alpha^3x^7+\tfrac{x^7}{\alpha^5}+\ldots)$$

d. i.

$$P\{\alpha+\tfrac{1}{\alpha}+x^4(\alpha^3+\tfrac{1}{\alpha^3})+x^{12}(\alpha^5+\tfrac{1}{\alpha^5})+\ldots\}$$
$$= \frac{Q}{x}\{1+xx(\alpha\alpha+\tfrac{1}{\alpha\alpha})+x^8(\alpha^4+\tfrac{1}{\alpha^4})+\ldots\}$$

Nun ist

$$P = \frac{1}{[xx]^2}\{1+xx(\alpha\alpha+\tfrac{1}{\alpha\alpha})+\ldots\}$$

Also

$$Q = \frac{x}{[xx]}\{(\alpha+\tfrac{1}{\alpha})+x^4(\alpha^3+\tfrac{1}{\alpha^3})+\ldots\}$$

und unser Theorem

$$70.\quad (x,\alpha y).(x,\tfrac{y}{\alpha}) = \frac{1}{[xx]^2}\left\{\begin{array}{l} \{1+xx(\alpha\alpha+\tfrac{1}{\alpha\alpha})+x^8(\alpha^4+\tfrac{1}{\alpha^4})+\ldots\} \\ \times\{1+xx(yy+\tfrac{1}{yy})+x^8(y^4+\tfrac{1}{y^4})+\ldots\} \\ +x\{\alpha+\tfrac{1}{\alpha}+x^4(\alpha^3+\tfrac{1}{\alpha^3})+x^{12}(\alpha^5+\tfrac{1}{\alpha^5})+\ldots\} \\ \times\{y+\tfrac{1}{y}+x^4(y^3+\tfrac{1}{y^3})+x^{12}(y^5+\tfrac{1}{y^5})+\ldots\} \end{array}\right\}$$

oder

$$(x, \alpha y).(x, \tfrac{y}{\alpha}) = \frac{[x^4]^2}{[xx]^2}\{(xx, \alpha\alpha).(xx, yy) + x\alpha y\,(xx, \alpha\alpha xx).(xx, xxyy)\}$$

(Man kann auch leicht die Reihe, wodurch P multiplicirt ist, $= 0$ machen, durch $y = ix$)

71. $$(x, y) + (x, \tfrac{x}{y})\sqrt[4]{\tfrac{x}{yy}} = (x^{\frac{1}{4}}, y^{\frac{1}{2}})\frac{[x^{\frac{1}{2}}]}{[xx]}$$

$$(x, \alpha x) = \tfrac{1}{\alpha}(x, \tfrac{x}{\alpha}), \qquad (x, \alpha xx) = \tfrac{1}{\alpha x}(x, \alpha)$$

Den Satz 70 kann man auch so enonciren

72. $$(x, \alpha).(x, \beta) = \frac{[x^4]^2}{[xx]^2}\{(xx, \alpha\beta).(xx, \tfrac{\alpha}{\beta}) + x\alpha(xx, \alpha\beta xx).(xx, \tfrac{\alpha xx}{\beta})\}$$

Hieraus folgt

$$(x, \tfrac{x}{\alpha}).(x, \tfrac{x}{\beta}) = \frac{[x^4]^2}{[xx]^2}\{(xx, \tfrac{xx}{\alpha\beta}).(xx, \tfrac{\alpha}{\beta}) + \alpha(xx, \alpha\beta).(xx, \tfrac{\alpha xx}{\beta})\}$$

hieraus ferner

73. $$(x, \alpha).(x, \beta) + (x, \tfrac{x}{\alpha}).(x, \tfrac{x}{\beta})\sqrt{\tfrac{x}{\alpha\beta}} = \frac{[x]^2}{[xx]^2}.(x^{\frac{1}{2}}, \sqrt{\alpha\beta}).(x^{\frac{1}{2}}, \sqrt{\tfrac{\beta}{\alpha}})$$

Nun ist

$$\frac{1 + 2x + 2x^4 + \ldots}{1 + 2x^5 + 2x^{20} + \ldots} = \frac{(ix^{\frac{5}{2}}, ix^{\frac{3}{2}}).(ix^{\frac{5}{2}}, -ix^{\frac{1}{2}})}{(ix^{\frac{5}{2}}, -ix^{\frac{3}{2}}).(ix^{\frac{5}{2}}, ix^{\frac{1}{2}})}$$

$$= \frac{(-x^5, xx)(-x^5, -x) + x(-x^5, -x^3)(-x^5, x^4)}{(-x^5, xx)(-x^5, -x) - x(-x^5, -x^3)(-x^5, x^4)}$$

Woraus der erste zu beweisende Satz von selbst folgt. Ebenso ist

$$\frac{1 + 2x + 2x^4 + \ldots}{1 + 2x^5 + 2x^{20} + \ldots} = \frac{1 - \varepsilon x.1 - \varepsilon\varepsilon x.1 - \varepsilon^3 x.1 - \varepsilon^4 x.1 + \varepsilon xx.1 + \varepsilon\varepsilon xx.1 + \varepsilon^3 xx.1 + \varepsilon^4 xx\ldots}{1 + \varepsilon x.1 + \varepsilon\varepsilon x.1 + \varepsilon^3 x.1 + \varepsilon^4 x.1 - \varepsilon xx.1 - \varepsilon\varepsilon xx.1 - \varepsilon^3 xx.1 - \varepsilon^4 xx\ldots}$$

$$= \frac{1 - \varepsilon^4.1 - \varepsilon^3}{1 + \varepsilon^4.1 + \varepsilon}\cdot\frac{(ix^{\frac{1}{2}}, i\varepsilon x^{\frac{1}{2}}).(ix^{\frac{1}{2}}, i\varepsilon\varepsilon x^{\frac{1}{2}})}{(ix^{\frac{1}{2}}, -i\varepsilon x^{\frac{1}{2}}).(ix^{\frac{1}{2}}, i\varepsilon\varepsilon x^{\frac{1}{2}})}$$

$$= \frac{\varepsilon\varepsilon - \varepsilon^3.\varepsilon - \varepsilon^4}{\varepsilon\varepsilon + \varepsilon^3.\varepsilon + \varepsilon^4}\cdot\frac{(-x, -\varepsilon^3 x).(-x, \varepsilon) - \varepsilon x(-x, \varepsilon^3 xx)(-x, -\varepsilon x)}{(-x, -\varepsilon^3 x).(-x, \varepsilon) + \varepsilon x(-x, \varepsilon^3 xx)(-x, -\varepsilon x)}$$

$$= \frac{-\varepsilon + \varepsilon\varepsilon + \varepsilon^3 - \varepsilon^4}{+\varepsilon + \varepsilon\varepsilon + \varepsilon^3 + \varepsilon^4}\cdot\frac{(x, \varepsilon^3 x).(x, -\varepsilon) + \varepsilon^3(x, -\varepsilon^3)(x, \varepsilon x)}{(x, \varepsilon^3 x).(x, -\varepsilon) - \varepsilon^3(x, -\varepsilon^3)(x, \varepsilon x)}$$

Woraus der zweite zu beweisende Satz von selbst folgt.

$$(x,x) = 2(1+xx)^2(1+x^4)^2\ldots = 2\frac{[x^4]^2}{[xx]^2}$$

$$(x,1) = (1+x)^2\;(1+x^3)^2\ldots = \frac{[xx]^4}{[x]^2[x^4]^2}$$

Man hat also

$$(x,\alpha)^2 = \frac{[x^4]^2}{[xx]^2}\left\{(xx,\alpha\alpha)\frac{[x^4]^4}{[xx]^2[x^8]^2} + 2x\alpha(xx,\alpha\alpha xx)\frac{[x^8]^2}{[x^4]^2}\right\}$$

Durch die Entwickelung von $(x,y)^3$ erhält man

$$P\{1+x^3(y^3+\tfrac{1}{y^3})+\ldots\}+Q\{x^{\frac{1}{3}}(y+\tfrac{1}{y})+x^{\frac{4}{3}}(yy+\tfrac{1}{yy})+x^{\frac{16}{3}}(y^4+\tfrac{1}{y^4})+\ldots\}$$

also für $y = -\varepsilon x$

$$(1-\varepsilon\varepsilon)^3\frac{[x^6]^3}{[x^2]^3} = Qx^{-\frac{2}{3}}\{\varepsilon-\varepsilon\varepsilon-(\varepsilon-\varepsilon\varepsilon)xx-\ldots\}$$

oder

$$3x^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{[x^6]^3}{[x^2]^3} = Q(1-xx-x^4+x^{10}+x^{14}-\ldots) = [xx]\,Q$$

also

$$Q = 3x^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{[x^6]^3}{[xx]^4}$$

Durch Entwickelung von $(x,y).(x,-y)^2$ erhält man

$$P'\{1+x^3(y^3+\tfrac{1}{y^3})+\ldots\}+Q'\{x^{\frac{1}{3}}(y+\tfrac{1}{y})+x^{\frac{4}{3}}(yy+\tfrac{1}{yy})+\ldots\}$$

$$(1-\varepsilon\varepsilon)(1+\varepsilon\varepsilon)^2\frac{[x^6][x^8][x^{12}]^2}{[xx][x^4]^2[x^{24}]} = Q'x^{-\frac{2}{3}}(\varepsilon-\varepsilon\varepsilon)[xx]$$

$$Q' = -x^{\frac{2}{3}}\frac{[x^6][x^8][x^{12}]^2}{[xx]^2[x^4]^2[x^{24}]}$$

Man folgert hieraus leicht, dass man setzen darf

$$T(x,y)^3 + U(x,y)(x,-y)^2 = (x^3,y^3)$$

so dass T und U Functionen von x. Um sie zu bestimmen setzen wir

1) $y = x$ so wird $T(x, x)^3 = (x^3, x^3)$ oder $T = \frac{1}{4}\frac{[x^{12}]^2[xx]^6}{[x^6]^2[x^4]^6}$

2) $y = -\varepsilon x$ so wird $T(x, -\varepsilon x)^2 = U(x, +\varepsilon x)^2$

oder

$$T\frac{(1-\varepsilon\varepsilon)^2[x^6]^2}{[xx]^2} = \frac{[x^{12}]^2[xx]^2}{[x^6]^2[x^4]^2}U(1+\varepsilon\varepsilon)^2$$

oder

$$T = -\tfrac{1}{3}U\frac{[xx]^4[x^{12}]^2}{[x^6]^4[x^4]^2}$$

oder

$$U = -\tfrac{3}{4}\frac{[x^6]^2[xx]^2}{[x^4]^4}$$

folglich

$$\frac{T\left[\frac{(x,-y)}{(x,y)}\right]^3 + U\frac{(x,-y)}{(x,y)}}{T + U\left[\frac{(x,-y)}{(x,y)}\right]^2} = \frac{(x^3,-y^3)}{(x^3,y^3)}$$

also

$$\frac{\frac{[xx]^4}{[x^4]^2}\left[\frac{(x,-y)}{(x,y)}\right]^3 - 3\frac{[x^6]^4}{[x^{12}]^2}\frac{(x,-y)}{(x,y)}}{\frac{[xx]^4}{[x^4]^2} - 3\frac{[x^6]^4}{[x^{12}]^2}\left[\frac{(x,-y)}{(x,y)}\right]^2} = \frac{(x^3,-y^3)}{(x^3,y^3)}$$

[IV.]

HUNDERT THEOREME ÜBER DIE NEUEN TRANSSCENDENTEN.

1.

Es sei

$$T = 1 + \frac{a^n-1}{a-1}.t + \frac{a^n-1.a^n-a}{a-1.aa-1}.tt + \frac{a^n-1.a^n-a.a^n-aa}{a-1.aa-1.a^3-1}.t^3$$
$$+ \frac{a^n-1.a^n-a.a^n-aa.a^n-a^3}{a-1.aa-1.a^3-1.a^4-1}.t^4 + \text{u.s.w.}$$

indem wir n, a, t ganz unbestimmt lassen. So oft n eine ganze nicht negative Zahl ist, bricht die Reihe offenbar ab und besteht aus $n+1$ Gliedern, auch sind dann, wie wir in der Abhandlung *Summatio quarundam serierum singularium* gezeigt haben, alle Coëfficienten ungebrochne Functionen von a. Ist aber n gebrochen oder negativ, so findet beides nicht Statt.

Indem man T mit $1+a^n t$ multiplicirt erhält man

$$T.(1+a^n t) = 1 + \frac{a^{n+1}-1}{a-1}.t + \frac{a^{n+1}-1.a^{n+1}-a}{a-1.aa-1}.tt + \frac{a^{n+1}-1.a^{n+1}-a.a^{n+1}-aa}{a-1.aa-1.a^3-1}.t^3 + \text{etc.}$$

Indem man also in T das Element n als veränderlich ansieht, und sich des Functionalzeichens θ bedient, dass

$$T = \theta n$$

wird man haben

$$\theta(n+1) = (1+a^n t)\,\theta n$$

Hieraus folgt das 1. Theorem.

Wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet, ist

$$1+\frac{a^n-1}{a-1}t+\frac{a^n-1.a^n-a}{a-1.aa-1}tt+\frac{a^n-1.a^n-a.a^n-aa}{a-1.aa-1.a^3-1}t^3+\text{ etc.}\,..$$
$$=(1+t)(1+at)(1+aat)(1+a^3t)\,...\,(1+a^{n-1}t)$$

2.

Wenn wir T auf folgende Art schreiben

$$1+\frac{1-a^n}{1-a}t+\frac{1-a^n}{1-a}.\frac{1-a^{n-1}}{1-aa}.att+\frac{1-a^n}{1-a}.\frac{1-a^{n-1}}{1-aa}.\frac{1-a^{n-2}}{1-a^3}a^3t^3$$
$$+\frac{1-a^n}{1-a}.\frac{1-a^{n-1}}{1-aa}.\frac{1-a^{n-2}}{1-a^3}.\frac{1-a^{n-3}}{1-a^4}.a^6.t^4+\text{ etc.}$$

wo die Exponenten von a die Trigonalzahlen sein werden, so erhellet, dass das letzte Glied sein wird

$$a^{\frac{1}{2}(nn-n)}t^n=y^n$$

wenn wir $a^{\frac{1}{2}(n-1)}t=y$ setzen. Die ganze Reihe wird dann, indem wir das letzte Glied mit dem ersten, das vorletzte mit dem zweiten etc. zusammenfassen, für ein gerades n

$$(1+y^n)+\frac{1-a^n}{1-a}t(1+y^{n-2})+\frac{1-a^n}{1-a}.\frac{1-a^{n-1}}{1-aa}at(1+y^{n-4})+\,..$$
$$+\frac{1-a^n}{1-a}.\frac{1-a^{n-1}}{1-aa}..\frac{1-a^{\frac{1}{2}n+3}}{1-a^{\frac{1}{2}n-1}}a^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}n-1)(\frac{1}{2}n-2)}t^{\frac{1}{2}n-1}(1+yy)$$
$$+\frac{1-a^n}{1-a}.\frac{1-a^{n-1}}{1-aa}..\frac{1-a^{\frac{1}{2}n+1}}{1-a^{\frac{1}{2}n}}a^{\frac{1}{2}.\frac{1}{2}n.\frac{1}{2}n-1}t^{\frac{1}{2}n}$$

indem das mittelste Glied isolirt stehen bleibt. Bezeichnen wir dasselbe durch A und setzen $a=xx$, so wird die Reihe

$$A\,\{1+\frac{1-x^n}{1-x^{n+2}}x(y+y^{-1})+\frac{1-x^n}{1-x^{n+2}}.\frac{1-x^{n-2}}{1-x^{n+4}}x^4(yy+y^{-2})$$
$$+\frac{1-x^n}{1-x^{n+2}}.\frac{1-x^{n-2}}{1-x^{n+4}}.\frac{1-x^{n-4}}{1-x^{n+6}}x^9(y^3+y^{-3})+\,...\}$$

u.s.w. welche Reihe aus $\frac{1}{2}(n+2)$ Gliedern besteht und dann abbricht.

Unser Product $(1+t)(1+at)(1+aat)\,..\,(1+a^{n-1}t)$ hingegen verwandelt sich

$$(1+\frac{y}{x^{n-1}})(1+\frac{y}{x^{n-3}})(1+\frac{y}{x^{n-5}})\dots(1+x^{n-1}y)$$

Das Product der ersten Hälfte der Factoren

$$=\frac{y^{\frac{1}{2}n}}{x^{\frac{1}{4}nn}}.(1+\frac{x^{n-1}}{y})(1+\frac{x^{n-3}}{y})(1+\frac{x^{n-5}}{y})\dots(1+\frac{x^3}{y})(1+\frac{x}{y}$$

wozu noch die übrigen kommen

$$(1+xy)(1+x^3y(1+x^5y)\dots(1+x^{n-1}y)$$

Da nun

$$A=\frac{1-x^{n+2}}{1-xx}\cdot\frac{1-x^{n+4}}{1-x^4}\cdot\frac{1-x^{n+6}}{1-x^6}\cdot\cdot\frac{1-x^{2n}}{1-x^n}\cdot\frac{y^{\frac{1}{2}n}}{x^{\frac{1}{4}nn}}$$

wird, so verwandelt sich das erste Theorem in folgendes zweite: *für ein gerades n wird*:

$$1+\frac{1-x^n}{1-x^{n+2}}.x(y+\frac{1}{y})+\frac{1-x^n}{1-x^{n+2}}\cdot\frac{1-x^{n-2}}{1-x^{n+4}}.x^4(yy+\frac{1}{yy})$$

$$+\frac{1-x^n}{1-x^{n+2}}\cdot\frac{1-x^{n-2}}{1-x^{n+4}}\cdot\frac{1-x^{n-4}}{1-x^{n+6}}.x^9(y^3+y^{-3})+\text{ etc.}$$

$$=(1+xy)(1+x^3y)(1+x^5y)\dots(1+x^{n-1}y)(1+\frac{x}{y})(1+\frac{x^3}{y})(1+\frac{x^5}{y})\dots(1+\frac{x^{n-1}}{y})$$

$$\times\frac{1-xx}{1-x^{n+2}}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^{n+4}}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^{n+6}}\cdot\cdot\frac{1-x^n}{1-x^{2n}}$$

3.

Ist n ungerade, so stellt sich die Reihe so dar:

$$(1+y^n)+\frac{1-a^n}{1-a}t(1+y^{n-2})+\frac{1-a^n}{1-a}\cdot\frac{1-a^{n-1}}{1-aa}att(1+y^{n-4})+\dots$$

$$+\frac{1-a^n}{1-a}\cdot\frac{1-a^{n-1}}{1-aa}\cdot\cdot\frac{1-a^{\frac{1}{2}(n+3)}}{1-a^{\frac{1}{2}(n-3)}}a^{\frac{1}{8}(n-3)(n-5)}t^{\frac{1}{2}(n-3)}(1+y^3)$$

$$+\frac{1-a^n}{1-a}\cdot\frac{1-a^{n-1}}{1-aa}\cdot\cdot\frac{1-a^{\frac{1}{2}(n+3)}}{1-a^{\frac{1}{2}(n-1)}}a^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(n-1)\frac{1}{2}(n-3)}t^{\frac{1}{2}(n-1)}(1+y)$$

Machen wir wie vorher $a=xx$ und setzen das Glied, welches hier das letzte ist, $=Bx^{\frac{1}{4}}.(y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})$, so wird die Reihe

$$=B\{x^{\frac{1}{4}}(y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})+\frac{1-x^{n-1}}{1-x^{n+1}}x^{\frac{9}{4}}(y^{\frac{3}{2}}+y^{-\frac{3}{2}})+\frac{1-x^{n-1}}{1-x^{n+1}}\cdot\frac{1-x^{n-3}}{1-x^{n+3}}x^{\frac{25}{4}}(y^{\frac{5}{2}}+y^{-\frac{5}{2}})+\text{etc.}\}$$

welche Reihe aus $\frac{1}{2}(n+1)$ Gliedern besteht und dann abbricht. Von unserm Product stellen wir die ersten $\frac{1}{2}(n-1)$ Factoren so dar

$$\frac{y^{\frac{1}{2}(n-1)}}{x^{\frac{1}{4}(nn-1)}}\cdot\left(1+\frac{x^{n-1}}{y}\right)\left(1+\frac{x^{n-3}}{y}\right)\left(1+\frac{x^{n-5}}{y}\right)\ldots\left(1+\frac{xx}{y}\right)$$

wozu noch kommt

$$(1+y)(1+xxy)(1+x^4y)\ldots(1+x^{n-1}y)$$

Da nun

$$\begin{aligned}B &= \frac{1-x^{n+3}}{1-xx}\cdot\frac{1-x^{n+5}}{1-x^4}\cdot\frac{1-x^{n+7}}{1-x^6}\cdots\frac{1-x^{2n}}{1-x^{n-1}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{4}nn-n+\frac{3}{4}}\cdot y^{\frac{1}{2}(n-1)}y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}nn-n+\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{4}}}\\ &= \frac{1-x^{n+3}}{1-xx}\cdots\frac{1-x^{2n}}{1-x^{n-1}}\cdot\frac{y^{\frac{1}{2}n}}{x^{\frac{1}{4}nn}}\end{aligned}$$

so ergibt das erste THEOREM folgendes DRITTE: *für ein ungerades n ist*

$$\begin{aligned}&x^{\frac{1}{4}}(y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})+\frac{1-x^{n-1}}{1-x^{n+3}}\cdot x^{\frac{9}{4}}(y^{\frac{3}{2}}+y^{-\frac{3}{2}})+\frac{1-x^{n-1}}{1-x^{n+3}}\cdot x^{\frac{25}{4}}(y^{\frac{5}{2}}+y^{-\frac{5}{2}})+\text{ etc.}\\ &= x^{\frac{1}{4}}(y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})(1+xxy)(1+x^4y)(1+x^6y)\ldots(1+x^{n-1}y)\\ &\qquad\times\left(1+\frac{xx}{y}\right)\left(1+\frac{x^4}{y}\right)\left(1+\frac{x^6}{y}\right)\ldots\left(1+\frac{x^{n-1}}{y}\right)\\ &\qquad\times\frac{1-xx}{1-x^{n+3}}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^{n+5}}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^{n+1}}\cdots\frac{1-x^{n-1}}{1-x^{2n}}\end{aligned}$$

4.

Wenn man n ins unendliche wachsen lässt, so verwandeln sich die Reihen und Producte des zweiten und dritten Theorems in unendliche Reihen und Producte. In dieser Gestalt ist das VIERTE THEOREM

$$\begin{aligned}&1+x\left(y+\frac{1}{y}\right)+x^4\left(yy+\frac{1}{yy}\right)+x^9\left(y^3+\frac{1}{y^3}\right)+\text{ etc. in inf.}\\ &=(1+xy)\left(1+\frac{x}{y}\right)(1+x^3y)\left(1+\frac{x^3}{y}\right)(1+x^5y)\left(1+\frac{x^5}{y}\right)\ldots\\ &\quad\times(1-xx)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)\ldots\end{aligned}$$

und DAS FÜNFTE

$$\begin{aligned}&x^{\frac{1}{4}}(y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})+x^{\frac{9}{4}}(y^{\frac{3}{2}}+y^{-\frac{3}{2}})+x^{\frac{25}{4}}(y^{\frac{5}{2}}+y^{-\frac{5}{2}})+\text{ etc. in inf.}\\ &=x^{\frac{1}{4}}(y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})\cdot(1+xxy)(1+x^4y)(1+x^6y)\ldots\\ &\quad\times\left(1+\frac{xx}{y}\right)\left(1+\frac{x^4}{y}\right)\left(1+\frac{x^6}{y}\right)\ldots\\ &\quad\times(1-xx)(1-x^4)(1-x^6)\ldots\end{aligned}$$

5.

Die Functionen, welche durch das vierte und fünfte Theorem in unendliche Producte entwickelt werden, sind von grosser Wichtigkeit, und es wird gut sein sie hier durch besondere Functionalzeichen zu bezeichnen. Wir schreiben daher

$$P(x,y) = 1+x(y+y^{-1})+x^4(yy+y^{-2})+x^9(y^3+y^{-3})+\text{ etc.}$$
$$R(x,y) = x^{\frac{1}{4}}(y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})+x^{\frac{9}{4}}(y^{\frac{3}{2}}+y^{-\frac{3}{2}})+x^{\frac{25}{4}}(y^{\frac{5}{2}}+y^{-\frac{5}{2}})+\text{ etc.}$$

zugleich auch

$$Q(x,y) = 1-x(y+y^{-1})+x^4(yy+y^{-2})-x^9(y^3+y^{-3})+\text{ etc.}$$

wo also $Q(x,y) = P(-x,y) = P(x,-y)$ wird. Der einfachste Werth, welcher y beigelegt werden kann, ist 1 und da die demselben entsprechenden Werthe unserer Function von besonders grosser Wichtigkeit sind und häufig vorkommen werden, so schreiben wir der Kürze wegen statt $P(x,1)$, $Q(x,1)$, $R(x,1)$ schlechtweg Px, Qx, Rx. Wir bemerken noch, dass wo ein Exponent sich blos auf das Argument einer Function bezieht, dieses durch Klammern bezeichnet wird wie $P(x^3)$, ohne Klammern ist immer vorauszusetzen, dass es sich auf die Function bezieht, also Px^3 so viel bedeutet wie $(Px)^3$. Also

$$Px = 1+2x+2x^4+ .$$
$$Qx = 1-2x+2x^4- .$$
$$Rx = 2x^{\frac{1}{4}}+2x^{\frac{9}{4}}+2x^{\frac{25}{4}}+ .$$

Endlich wollen wir durch das Functionalzeichen F in dieser Abhandlung das unendliche Product ausdrücken

$$Fx = (1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)\ldots$$

In diesen Zeichen erscheinen die beiden letzten Theoreme so

4. $$P(x,y) = (1+xy)(1+\tfrac{x}{y})(1+x^3y)(1+\tfrac{x^3}{y})(1+x^5y)(1+\tfrac{x^5}{y})\ldots Fxx$$

5. $$R(x,y) = x^{\frac{1}{4}}(y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})(1+xxy)(1+\tfrac{xx}{y})(1+x^4y)(1+\tfrac{x^4}{y})\ldots Fxx$$

Und so ist offenbar

6. $$Q(x,y) = (1-xy)(1-\tfrac{x}{y})(1-x^3y)(1-\tfrac{x^3}{y})(1-x^5y)(1-\tfrac{x^5}{y})\ldots Fxx$$

ferner indem man $y = 1$ setzt

7. $$Px = (1+x)^2(1-xx)(1+x^3)^2(1-x^4)(1+x^5)^2(1-x^6)\ \ldots$$
8. $$Qx = (1-x)^2(1-xx)(1-x^3)^2(1-x^4)(1-x^5)^2(1-x^6)\ \ldots$$
9. $$Rx = 2x^{\frac{1}{4}}(1+xx)^2(1-xx)(1+x^4)^2(1-x^4)(1+x^6)^2(1-x^6)\ \ldots$$

Substituirt man hier $1+x = \frac{1-xx}{1-x}$, $1+x^3 = \frac{1-x^6}{1-x^3}$ u.s.w. so verwandeln diese Ausdrücke sich in folgende

10. $$Px = \frac{(Fxx)^5}{(Fx)^2(Fx^4)^2}$$
11. $$Qx = \frac{(Fx)^2}{Fxx}$$
12. $$Rx = 2x^{\frac{1}{4}}\frac{(Fx^4)^2}{Fxx}$$

hieraus ergibt sich ferner

13. $Px.Qx = (Qxx)^2$
14. $Px.Rx = \frac{1}{2}(R\sqrt{x})^2$ oder was dasselbe ist

$$Pxx.Rxx = \tfrac{1}{2}(Rx)^2, \qquad Rxx = \frac{(Rx)^2}{2Pxx}$$

$$Qxx(Rx)^2 = 4x^{\frac{1}{2}}.(Fx^4)^3 \quad \text{also}$$

15. $$Fx = \sqrt[3]{\frac{Q(x^{\frac{1}{2}})(Rx^{\frac{1}{4}})^2}{4x^{\frac{1}{8}}}} = \sqrt[3]{\frac{P(x^{\frac{1}{2}})\,Q(x^{\frac{1}{2}})\,R(x^{\frac{1}{2}})}{2x^{\frac{1}{8}}}} = \sqrt[3]{\frac{(Qx)^2R(x^{\frac{1}{2}})}{2x^{\frac{1}{8}}}}$$

ferner

16. $$Px + Qx = 2P(x^4)$$
17. $$Px - Qx = 2R(x^4)$$

Also durch Multiplication nach 14

18. $$(Px)^2 - (Qx)^2 = 2(Rxx)^2$$

Bedeutet ferner i die imaginaire Grösse $\sqrt{-1}$, so wird

19. $$Px + iQx = (1+i)\,Q(ix)$$
20. $$Px - iQx = (1-i)\,P(ix)$$

Also durch Multiplication

21. $$(Px)^2+(Qx)^2 = 2(Pxx)^2$$

und aus der Multiplication von 18 und 21 mit Zuziehung von 14

22. $$(Px)^4-(Qx)^4 = (Rx)^4$$

Man sieht also, dass $(Pxx)^2$ das arithmetische Mittel zwischen $(Px)^2$ und $(Qx)^2$ ist, und da nach 13. die Grösse $(Qxx)^2$ das geometrische Mittel zwischen denselben Grössen vorstellt und da (*Theor. attract. el. p.*) wenn zwei Grössenreihen

$$\begin{matrix} m, & m', & m'', & m''' \dots \\ n, & n', & n'', & n''' \dots \end{matrix}$$

so verbunden sind, dass $m^{(\lambda)}$ immer das arithmetische $n^{(\lambda)}$ das geometrische Mittel zwischen $m^{(\lambda-1)}$ und $n^{(\lambda-1)}$ ist, man die gemeinschaftliche Grenze das arithmetisch geometrische Mittel von m, n oder von irgend ein Paar zusammengehörigen Grössen der beiden Reihen nennt, so ergibt sich das höchst wichtige THEOREM (23):

Das Arithmetisch Geometrische Mittel zwischen $(Px)^2$ *und* $(Qx)^2$ *ist allemal* $= 1$.

Nach dem, was wir am angezeigten Orte bewiesen haben, ist also auch

24. *das Integral* $$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{((Px)^4 \cos\varphi^2 + (Qx)^4 \sin\varphi^2)}}$$

von $\varphi = 0$ *bis* $\varphi = 2\pi$ *ausgedehnt* $= 2\pi$ *oder auch von* $\varphi = 0$ *bis* $\varphi = \frac{1}{2}k\pi$, *wenn* k *irgend eine ganze Zahl bedeutet*, $= \frac{1}{2}k\pi$.

6.

Um den Zusammenhang des Algorithmus des arithmetisch geometrischen Mittels mit unsern Functionen noch weiter zu entwickeln, bemerken wir zuvörderst, dass wenn

$$\frac{n}{m} = \frac{(Qx)^2}{(Px)^2} \text{ und } m = \mu Px^2, \qquad n = \mu Qx^2, \qquad mm-nn = \mu\mu(R)^4$$

gesetzt wird, man hat

$$\begin{array}{lll} m' = \mu(Pxx)^2, & n' = \mu(Qxx)^2, & m'm' - n'n' = \mu\mu(Rxx)^4 \\ m'' = \mu(Px^4)^2, & n'' = \mu(Qx^4)^2, & m''m'' - n''n'' = \mu\mu(Rx^4)^4 \\ m''' = \mu(Px^8)^2, & n''' = \mu(Qx^8)^2, & m'''m''' - n'''n''' = \mu\mu(Rx^8)^4 \\ m'''' = \mu(Px^{16})^2, & n'''' = \mu(Qx^{16})^2, & m''''m'''' - n''''n'''' = \mu\mu(Rx^{16})^4 \end{array}$$

u. s. w. oder allgemein

$$m^{(\lambda)} = \mu(Px^{2^\lambda})^2, \quad n^{(\lambda)} = \mu(Qx^{2^\lambda})^2, \quad m^\lambda m^\lambda - n^\lambda n^\lambda = \mu\mu(Rx^{2^\lambda})^4$$

und dass offenbar μ das arithmetisch geometrische Mittel zwischen m und n selbst ist. So bald wir also den Werth von x, welcher vorgegebenen Werthen von m und n entspricht, zu bestimmen im Stande sind, werden wir jedes Glied der Reihen

$$\begin{array}{lll} m, & m', & m'' \,.\,. \\ n, & n', & n'' \,.\,. \end{array}$$

unmittelbar darstellen, auch die Reihen interpoliren und rückwärts fortsetzen können. Das nächstliegende Mittel x zu bestimmen ist folgendes.

Man sieht leicht, dass die Glieder der Reihe

$$h = \left(\frac{Rx}{2}\right)^4, \quad h' = \left(\frac{Rxx}{2}\right)^2, \quad h'' = \frac{Rx^4}{2}, \quad h''' = \left(\frac{Rx^8}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$
$$h'''' = \left(\frac{Rx^{16}}{2}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad h^{\mathrm{V}} = \left(\frac{Rx^{32}}{2}\right)^{\frac{1}{8}} \ldots$$

sich dem x immer mehr nähern, so dass x die Grenze derselben ist. Man hat also

$$x = h \,.\, \frac{h'}{h} \cdot \frac{h''}{h'} \cdot \frac{h'''}{h''} \cdot \frac{h''''}{h'''} \ldots$$

Nun ist aber nach 14

$$\frac{h}{h'} = (Pxx)^2 \text{ und so } \frac{h'}{h''} = Px^4, \quad \frac{h''}{h'''} = (Px^8)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{h'''}{h''''} = (Px^{16})^{\frac{1}{4}}$$

Also

$$\begin{aligned} x &= \frac{h}{(Pxx)^2 \,.\, Px^4 \,.\, (Px^8)^{\frac{1}{2}} \,.\, (Px^{16})^{\frac{1}{4}} \,.\,.} \\ &= \frac{h}{\frac{m'}{\mu} \cdot \left(\frac{m''}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{m'''}{\mu}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{m''''}{\mu}\right)^{\frac{1}{8}} \ldots} \end{aligned}$$

wir haben folglich

25. $$x = \frac{mm - nn}{16\, m'\mu \left(\frac{m''}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{m'''}{\mu}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{m''''}{\mu}\right)^{\frac{1}{8}} \cdot\cdot}$$

wofür man auch schreiben kann

$$x = \frac{mm - nn}{16\, m' m''} \cdot \left(\frac{m''}{m'''}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{m'''}{m''''}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{m''''}{m^{\mathrm{v}}}\right)^{\frac{1}{8}} \cdots$$

Da die Glieder m', m'', m''' sich äusserst schnell der Gleichheit nähern so erhält man x mit grösster Bequemlichkeit.

[V.]

[1.]

Allgemeines Theorem (1827 Aug. 6)

$$P(x,ty).P(x,\tfrac{y}{t}) = P(xx,tt).P(xx,yy)+R(xx,tt).R(xx,yy)$$

[2.]

Durch Zerlegung in Factoren bestätigt sich leicht,

$$(1+x)(1+x^3)(1+x^5)(1+x^7)\ldots. = M$$

gesetzt:

$$P(ix^{\frac{3}{2}},\quad ix^{\frac{1}{2}}) = \frac{P(x,1)}{M}$$

$$P(ix^{\frac{3}{2}},\, -ix^{\frac{1}{2}}) = \frac{P(x^3,1)}{M}$$

also durch Addition

$$P(x,1)+P(x^3,1) = 2M\,.\,P(x^6,-x)$$
$$P(x,1)-P(x^3,1) = 2Mx.P(x^6,-x^5)$$

also

$$P(x,1)^2-P(x^3,1)^2 = 4MMx.F(x^{12}).(1-x)(1-x^5)(1-x^7)(1-x^{11})(1-x^{13})\ldots$$
$$= 4MMx.\frac{Fx.F(x^6).F(x^{12})}{Fxx.F(x^3)} = 2\sqrt{\frac{pP}{r}}\;R^{\frac{3}{2}}$$

$$P(x, xt) = \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}\sqrt{t}} R(x, t)$$

$$R(x, xt) = \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}\sqrt{t}} P(x, t)$$

$$P(x.1)^2 . P(x,y)^2 = Q(x,1)^2 . Q(x,y)^2 + R(x,1)^2 . R(x,y)^2$$

$$\begin{aligned} P(x,y) . Q(x,y) &= Q(xx,1) . Q(xx,yy) \\ P(x,y)^2 + Q(x,y)^2 &= 2P(xx,1) . P(xx,yy) \\ P(x,y)^2 - Q(x,y)^2 &= 2R(xx,1) . R(xx,yy) \end{aligned}$$

$$P(x,y) . P(xx,yy) = P(x^6,1) . P(x^3,y^3) + \tfrac{1}{2}\{P(x^{\frac{2}{3}},1) - P(x^6,1)\} . \{P(x^{\frac{1}{3}},y) - P(x^3,y^3)\}$$

[3.]

$$\begin{aligned} P(x^3,1) &= P, & Q(x^3,1) &= Q, & R(x^3,1) &= R \\ P(x,1) &= p, & Q(x,1) &= q, & R(x,1) &= r \end{aligned}$$

$$pqr^3 . P(x^3,y^3) = pqR . P(x,y)^3 + 3PQR . P(x,y) . Q(x,y)^2$$

$$pq^3r . P(x^3,y^3) = prQ . P(x,y)^3 - 3PQR . P(x,y) . R(x,y)^2$$

$$\begin{aligned} 3pPQR &= r^3 Q - q^3 R \\ 3qPQR &= r^3 P - p^3 R \\ 3rPQR &= p^3 Q - q^3 P \end{aligned}$$

$$3PPQQ = PPqq + ppQQ + ppqq$$

$$\begin{aligned} 3pP &= \frac{r^3}{R} - \frac{q^3}{Q} = \frac{3Q^3}{q} - \frac{3R^3}{r} \\ 3qQ &= \frac{r^3}{R} - \frac{p^3}{P} = \frac{3P^3}{p} - \frac{3R^3}{r} \\ 3rR &= \frac{p^3}{P} - \frac{q^3}{Q} = \frac{3Q^3}{q} - \frac{3P^3}{p} \end{aligned}$$

$$\frac{r^4 + 3R^4}{rR} = \frac{q^4 + 3Q^4}{qQ} = \frac{p^4 + 3P^4}{pP}$$

$$= 4 + 24xx + 24x^6 + 24x^8 + 48x^{14} + 24x^{18} + 24x^{24} + 48x^{26}$$

$= 8P(xx,1)\,P(x^6,1) - 4\,Q(xx,1)\,Q(x^6,1)$? würde dann sein

$$= 4\sqrt{(pp+qq)(PP+QQ)} - 4\sqrt{pqPQ}$$

$$= 2\sqrt{(pp+qq)(PP+QQ)} + 2\sqrt{(pp-qq)(PP-QQ)}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}-\frac{\mathrm{d}P}{P}=+\tfrac{1}{2}qrQR.\frac{\mathrm{d}x}{x}$$
$$\frac{\mathrm{d}q}{q}-\frac{\mathrm{d}Q}{Q}=-\tfrac{1}{2}prPR.\frac{\mathrm{d}x}{x}$$
$$\frac{\mathrm{d}r}{r}-\frac{\mathrm{d}R}{R}=+\tfrac{1}{2}pqPQ.\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

[4.]

So wie

$$x^{\frac{1}{4}}(y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})+x^{\frac{9}{4}}(y^{\frac{3}{2}}+y^{-\frac{3}{2}})+.+\ldots$$

durch $R(x,y)$ bezeichnet ist, so wollen wir noch

$$x^{\frac{1}{4}}(y^{\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{2}})-x^{\frac{9}{4}}(y^{\frac{3}{2}}-y^{-\frac{3}{2}})+.-\ldots$$

durch $S(x,y)$ bezeichnen. Man hat dann

$$iS(x,y)=R(x,-y)$$

$$S(x,y)=\frac{\sqrt{[Q(x,1)^2.P(x,y)^2-P(x,1)^2.Q(x,y)^2]}}{R(x,1)}$$
$$=\frac{\sqrt{[P(x,1)^2.R(x,y)^2-R(x,1)^2.P(x,y)^2]}}{Q(x,1)}$$

$$R(x,y).S(x,y)=Q(xx,1).S(xx,yy)$$
$$R(x,y)^2+S(x,y)^2=2P(xx,1).R(xx,yy)$$
$$R(x,y)^2-S(x,y)^2=2R(xx,1).P(xx,yy)$$

$$R(x,y).R(x,z)+S(x,y).S(x,z)=2R(xx,yz).P(xx,\tfrac{y}{z})$$
$$R(x,y).R(x,z)-S(x,y).S(x,z)=2R(xx,\tfrac{y}{z}).P(xx,yz)$$
$$R(x,y).S(x,z)+S(x,y).R(x,z)=2S(xx,yz).Q(xx,\tfrac{y}{z})$$
$$R(x,y).S(x,z)-S(x,y).R(x,z)=2S(xx,\tfrac{z}{y}).Q(xx,yz)$$

Setzt man

$$\Sigma e^{-\theta(k+\alpha)^2}=(\theta,\alpha)$$

wo k alle ganzen Zahlen bedeutet, so sind die Theoreme enthalten in

$$(\theta,2\alpha).(\theta,2\beta)=(2\theta,\alpha+\beta).(2\theta,\alpha-\beta)+(2\theta,\alpha+\beta+\tfrac{1}{2}).(2\theta,\alpha-\beta+\tfrac{1}{2})$$

auch ist

$$(\theta, \alpha) = (\theta, -\alpha)$$

[5.]

Man setze

$$\cos\theta = \frac{R(x,y)}{P(x,y)}\cdot\frac{p}{r}, \qquad i\sin\theta = \frac{S(x,y)}{P(x,y)}\cdot\frac{q}{r}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\theta = \frac{R(x^{\frac{1}{2}}, y^{\frac{1}{2}})}{\sqrt{2rP(x,y)}}, \qquad i\sin\tfrac{1}{2}\theta = \frac{S(x^{\frac{1}{2}}, y^{\frac{1}{2}})}{\sqrt{2rP(x,y)}}$$

$$y = \cos u + i\sin u$$

dann ist

$$P(x,y)\,\mathrm{d}\theta = pq\,Q(x,y)\,\mathrm{d}u$$

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(p^4 - r^4\cos\theta^2)}} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(p^4\sin\theta^2 + q^4\cos\theta^2)}}$$

$$R(x,y) = x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}P(x,xy), \qquad S(x,y) = x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}Q(x,xy)$$

Setzt man

$$\sin\psi = \frac{rr}{pp}\cos\theta$$

so wird

$$\cos\psi = \frac{q}{p}\cdot\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}, \qquad \sin\psi = \frac{r}{p}\cdot\frac{R(x,y)}{P(x,y)}$$

$$\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{(r^4 - p^4\sin\psi^2)}}$$

[6.]

$$P(x,y).P(x,z) = P(xx,yz).P(xx,\tfrac{y}{z}) + R(xx,yz).R(xx,\tfrac{y}{z})$$

$$Q(x,y).Q(x,z) = P(xx,yz).P(xx,\tfrac{y}{z}) - R(xx,yz).R(xx,\tfrac{y}{z})$$

$$P(x,y).Q(x,z) = Q(xx,yz).Q(xx,\tfrac{y}{z}) + S(xx,yz).S(xx,\tfrac{y}{z})$$

$$R(x,y).R(x,z) = R(xx,yz).P(xx,\tfrac{y}{z}) + P(xx,yz).R(xx,\tfrac{y}{z})$$

$$P(x,y)^2.P(x,z)^2 + S(x,y)^2.S(x,z)^2 = Q(x,y)^2.Q(x,z)^2 + R(x,y)^2.R(x,z)^2$$

[7.]

$$R(x,1)^7.P(x^7,y^7) = \text{Product aus } \frac{Fx^{14}}{(Fx^2)^7}$$

$$\begin{aligned}
&. \; R(x,1).P(x,y)\\
&. \; \{R(x,\varepsilon).P(x,y)-S(x,\varepsilon).Q(x,y)\}\\
&. \; \{R(x,\varepsilon\varepsilon).P(x,y)-S(x,\varepsilon\varepsilon).Q(x,y)\}\\
&. \; \{R(x,\varepsilon^3).P(x,y)-S(x,\varepsilon^3).Q(x,y)\}\\
&. \; \{R(x,\varepsilon^4).P(x,y)-S(x,\varepsilon^4).Q(x,y)\}\\
&. \; \{R(x,\varepsilon^5).P(x,y)-S(x,\varepsilon^5).Q(x,y)\}\\
&. \; \{R(x,\varepsilon^6).P(x,y)-S(x,\varepsilon^6).Q(x,y)\}
\end{aligned}$$

$$= R(x^7,1).P(x,y)^7 - \;\ldots\ldots\ldots\; + 7\frac{PQR}{pq}.P(x,y).Q(x,y)^6$$

worin $\varepsilon^7 = 1$. Zum Beweise dient, was sich leicht nachweisen lässt:

$$\begin{aligned}
P(x,\varepsilon y).P(x,\tfrac{y}{\varepsilon}) &= P(xx,yy).P(xx,\varepsilon\varepsilon)+R(xx,yy).R(xx,\varepsilon\varepsilon)\\
&= \frac{P(x,y)^2+Q(x,y)^2}{2P(xx,1)}.P(xx,\varepsilon\varepsilon)+\frac{P(x,y)^2-Q(x,y)^2}{2R(xx,1)}.R(xx,\varepsilon\varepsilon)\\
&= P(x,y)^2.\frac{R(x,\varepsilon)^2}{R(x,1)^2}-Q(x,y)^2.\frac{S(x,\varepsilon)^2}{R(x,1)^2}
\end{aligned}$$

[8.]

$$\begin{aligned}
P(x,1) &= p, & \frac{x\,dp}{p\,dx} &= p'\\
Q(x,1) &= q, & \frac{x\,dq}{q\,dx} &= q'\\
R(x,1) &= r, & \frac{x\,dr}{r\,dx} &= r'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}p' &= x-2xx+4x^3-4x^4+6x^5-8x^6+8x^7-8x^8+13x^9-12x^{10}\,..\\
\tfrac{1}{2}q' &= -x-2xx-4x^3-4x^4-6x^5-8x^6-8x^7-8x^8-13x^9-12x^{10}\,..\\
4r' &= 1+8xx-8x^4+32x^6-40x^8+48x^{10}-32x^{12}+64x^{14}-104x^{16}+104x^{18}\,..
\end{aligned}$$

Coëfficient von $x^{2^\mu a^\alpha b^\beta c^\gamma}\,..$ wenn $a, b, c\,..$ Primzahlen, wird

$$A\,\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1}.\frac{b^{\beta+1}-1}{b-1}.\frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1}\,..$$

[worin für jene drei Reihen folgeweise] $A = 2^\mu(-1)^{\mu+1}$, $A = 2^\mu$, $A = 8(3-2^\mu)$

$$4p'-4q'=r^4$$
$$4r'-4p'=q^4$$
$$4r'-4q'=p^4$$

$$\frac{\mathrm{d}px}{px}-\frac{\mathrm{d}px^2}{px^2}=\frac{\mathrm{d}x}{x}\cdot\tfrac{1}{2}(qx)^2\cdot(rx^2)^2$$
$$\frac{\mathrm{d}px}{px}-\frac{\mathrm{d}px^3}{px^3}=\frac{\mathrm{d}x}{x}\cdot\tfrac{1}{2}(qx)\cdot(rx)\cdot(qx^3)\cdot(rx^3)$$
$$\frac{\mathrm{d}px}{px}-\frac{\mathrm{d}px^4}{px^4}=\frac{\mathrm{d}x}{x}\cdot(qx)\cdot(px^2)^2\cdot(rx^4)$$
$$\frac{\mathrm{d}px}{px}-\frac{\mathrm{d}px^5}{px^5}=\frac{\mathrm{d}x}{4x}\cdot\frac{r^4qq(pp-3PP)+R^4QQ(25PP-15pp)}{ppqq-5PPQQ}$$

[9.]

Bei der $5^{\text{plic.}}$ ist (Aug. 29)

$$pp-PP=\quad A.\sqrt{\tfrac{p}{P}}\,,\qquad 5PP-pp=B\sqrt{\tfrac{P}{p}}$$
$$qq-QQ=-A.\sqrt{\tfrac{q}{Q}}\,,\qquad 5QQ-qq=B\sqrt{\tfrac{Q}{q}}$$
$$♂\qquad rr-RR=\quad A.\sqrt{\tfrac{r}{R}}\,,\qquad 5RR-rr=-B\sqrt{\tfrac{R}{r}}$$

$$AB=-2ppPP+2qqQQ+2rrRR=[16pqrPQR]^{\frac{2}{3}},\qquad \frac{A}{B}=\frac{PQR}{pqr}$$

$$A=2^{\frac{4}{3}}.\frac{(PQR)^{\frac{5}{6}}}{(pqr)^{\frac{1}{6}}}\,,\qquad B=2^{\frac{4}{3}}.\frac{(pqr)^{\frac{5}{6}}}{(PQR)^{\frac{1}{6}}}$$

also

$$pp=(QR+qr).\sqrt[6]{\frac{ppPP}{16qrQR}}\ \text{etc.}$$

$$5=-\frac{qr}{QR}+\frac{pr}{PR}+\frac{pq}{PQ}$$

Siehe weiter unten [Art. 11.]

Für die Ableitung dient u. a.

$$P(x^5,x^4).P(x^5,-xx)=P(x^{10},-xx).P(x^{10},-x^6)+xP(x^{10},-x^4).P(x^{10},-x^8)$$
$$P(x^5,-x^4).P(x^5,xx)=P(x^{10},-xx).P(x^{10},-x^6)-xP(x^{10},-x^4).P(x^{10},-x^8)$$

also durch Multiplication

$$
\begin{aligned}
&Q(x^{10}, 1)^2 . P(x^{10}, -x^8) . P(x^{10}, -x^4) \\
&\quad = P(x^{10}, -xx)^2 . P(x^{10}, -x^6)^2 - xx\, P(x^{10}, -x^4)^2 . P(x^{10}, -x^8)^2
\end{aligned}
$$

$$
\frac{(Fx^{10})^4}{(Fx^{20})^2} = \frac{(Fx^4)^3 (Fx^{10})^2}{Fx^2 . Fx^{20}} - xx \frac{Fx^2 . (Fx^{20})^3}{Fx^4 . Fx^{10}}
$$

was mit δ identisch ist, nemlich

$$
p^{\frac{1}{6}} q^{\frac{1}{6}} (\tfrac{1}{2} r)^{\frac{2}{3}} P^{\frac{4}{3}} Q^{\frac{4}{3}} (\tfrac{1}{2} R)^{\frac{2}{3}} =
$$

Auch beweist man leicht

$$
\begin{aligned}
pp &= PP + 4\{x^{\frac{1}{5}} + x^{\frac{16}{5}} + x^{\frac{36}{5}} + x^{\frac{81}{5}} + \ldots\}\{x^{\frac{4}{5}} + x^{\frac{9}{5}} + x^{\frac{49}{5}} + x^{\frac{64}{5}} + \ldots\} \\
&= PP + 4x P(x^5, x^4) . P(x^5, xx) \\
&= PP + 4x \sqrt{\left\{\frac{p}{P} . \frac{(Fx^{10})^5}{Fxx}\right\}} \\
&= PP + 4\sqrt{\frac{p}{P}} . \frac{\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{5}{6}}}{\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{6}}}
\end{aligned}
$$

[10.]

Bei der Trisection ist noch, p, P etc. in voriger Bedeutung genommen und $P(x^{\frac{1}{3}}, 1) = P^0$ gesetzt

$$
\left(\frac{3PP - P^0 P^0}{2}\right)^2 = p^4 - 4\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}}
$$

$$
\left(\frac{3QQ - Q^0 Q^0}{2}\right)^2 = q^4 + 4\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}}
$$

Allgemein wenn $P(x, 1)$, $Q(x, 1)$ gegeben sind und $P(x^n, 1)$, $Q(x^n, 1)$ gesucht werden, wo n ungerade, sind dem $P(x^n, 1)$ coordinirt $\pm\sqrt{\frac{1}{n}} . P(x^{\frac{1}{n}}, 1)$ oder $\pm i\sqrt{\frac{1}{n}} . P(x^{\frac{1}{n}}, 1)$, je nachdem n von der Form $4k+1$ oder $4k-1$ ist. Die Gleichung findet sich leicht aus Entwickelung der Summe der geraden Potenzen der $n+1$ Wurzeln.

[11.]

Setzt man

$$
P(x^5, y^5) = \frac{R}{r^5} . P(x, y)^5 + A . P(x, y)^3 Q(x, y)^2 + \frac{5PQR}{pqr^5} . P(x, y) Q(x, y)^4
$$

so ist auch

$$Q(x^5,y^5) = \frac{5PQR}{pqr^5}\,.\,P(x,y)^4\,.\,Q(x,y) + A\,.\,P(x,y)^2\,.\,Q(x,y)^3 + \frac{R}{r^5}\,Q(x,y)^5$$

Setzt man hier $y = 1$, so erhält man

$$\begin{aligned} Ap^3q^3 &= Pq - \frac{R}{r^5}\,.\,p^5q - \frac{5PQR}{r^5}\,.\,q^4 \\ &= Qp - \frac{R}{r^5}\,.\,q^5p - \frac{5PQR}{r^5}\,.\,p^4 \end{aligned}$$

woraus die Gleichung weiter zurück [Art. 9] folgt

$$0 = pQr - Pqr + pqR - 5PQR$$

daraus

$$A = \frac{r(p^3P - q^3Q) - (p^4+q^4)R}{ppqqr^5}$$

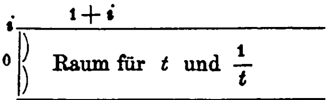
[12.]

Theorem. Wenn der imaginäre Theil von t und $\frac{1}{t}$ zwischen $-i$ und $+i$ liegt, so ist der reelle Theil von

$$\left(\frac{Qt}{Pt}\right)^2$$

positiv.

Geometrisch zu beweisen



Unter dieser Bedingung ist also das arithmetisch geometrische Mittel zwischen

$$\mu P(\tfrac{1}{2}t)^2 \qquad \mu Q(\tfrac{1}{2}t)^2$$

indem man immer das geometrische Mittel zwischen m, n so nimmt, dass $\frac{\sqrt{mn}}{m}$ einen positiven reellen Theil hat,

$$= \mu$$

Ein solches Mittel nennen wir das einfachste Mittel.

Ist das einfachste AG. Mittel zwischen $m, n, = \mu$, das zwischen $m, \sqrt{(mm - nn)}, = \frac{\mu}{t}$, so ist t der Canon des Verhältnisses $\frac{n}{m}$, nemlich

$$\frac{m}{n} = \left(\frac{Qt}{Pt}\right)^2$$

dann ist das einfachste AG. Mittel zwischen m und $-n$

$$= \frac{\mu}{1+2it}$$

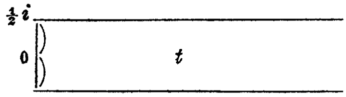
und der dazu gehörige Canon

$$= \frac{t}{1+2it} = \frac{1}{\frac{1}{t}+2i}$$

Die Gleichung

$$\left(\frac{Qt}{Pt}\right)^2 = A$$

hat immer Eine und nur Eine Auflösung in dem Raume



Es sei $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, $\alpha \equiv \delta \equiv 1 \pmod{4}$, β, γ gerade

$$t' = i\frac{\alpha t + \beta i}{\gamma t + \delta i}$$

dann ist

$$\left(\frac{Qt'}{Pt'}\right)^2 = i^\gamma \left(\frac{Qt}{Pt}\right)^2$$

[13.]

Fünftheilung

$$\begin{array}{ll} a & A \\ b & B \\ c = \sqrt{(aa-bb)} & C = \sqrt{(AA-BB)} \end{array}$$

$$2v = -aA + bB + cC$$

$$4v = aa - 6aA + 5AA = -(bb - 6bB + 5BB) = -(cc - 6cC + 5CC)$$

$$v = -A\sqrt{(AA+v)} + B\sqrt{(BB-v)} + C\sqrt{(CC-v)}$$

Die Elimination auf eine Gleichung

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=0$$

angewandt, gibt

$$0=\Sigma(a^4-4a^3b-2aabb+4aabc-24abcd)$$

[14.]

Die $7^{\text{plication}}$ beruht auf

$$[a\sin(\varphi+A)+b\sin(3\varphi+B)]^2\sin(\varphi+k)$$
$$=\alpha\sin(\varphi+l)+\beta\sin(3\varphi+l)+\gamma\sin(5\varphi+l)+\delta\sin(7\varphi+l)$$

[15.]

Bei der Trisection hat man

$$\sqrt{\frac{q}{p}}=n, \qquad \sqrt{\frac{Q}{P}}=N$$

gesetzt,

$$\frac{N^4-n^4}{1-nnNN}=2nN, \qquad \frac{ppQQ-qqPP}{pP-qQ}=2\sqrt{pPqQ}$$

proportional

$$\begin{array}{c|c||c|c||c|c} p^4 & 3\cos\varphi\sin\varphi^3 & q^4 & 3\cos(60^0-\varphi)\sin(60^0-\varphi)^3 & r^4 & 3\cos(120^0-\varphi)\sin(120^0-\varphi)^3 \\ P^4 & \cos\varphi^3\sin\varphi & Q^4 & \cos(60^0-\varphi)^3\sin(60^0-\varphi) & R^4 & \cos(120^0-\varphi)^3\sin(120^0-\varphi) \end{array}$$

[16.]

Wenn innerhalb einer begrenzten Figur überall

$$\frac{\mathrm{dd}V}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{dd}V}{\mathrm{d}y^2}=0$$

an der Grenze hingegen V constant $=A$ ist, so ist nothwendig auch im ganzen Raume $V=A$

Beweis. Es sei $\mathrm{d}M$ ein Element der Fläche und

$$\iint\left\{\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{dd}V}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{dd}V}{\mathrm{d}y^2}\right)(V-A)\right\}\mathrm{d}M=\Omega$$

Wäre V nicht constant, so wäre offenbar das Integral *positiv*. Allein das Integral ist auch

$$\int (V-A)\left(\frac{dV}{dx}dy - \frac{dV}{dy}dx\right)$$

durch den Umfang der Figur ausgedehnt, also $= 0$. Da dies mit dem Vorigen im Widerspruch steht, so ist die Voraussetzung unzulässig.

Ähnliches findet mit drei Unbestimmten Statt.

Es lassen sich hieraus manche schöne Folgerungen ziehen.

Ein Punkt kann innerhalb eines hohlen Raumes nicht im stabilen Gleichgewicht sein, wenn nicht innerhalb des ganzen Raums gar keine Wirkung Statt findet, weder im Fall der Abstossung, noch der Anziehung.

[17.]

Dass in der Peripherie einer Gleichgewichtsfigur keine *negative* Theile sein können, beweist sich so. Gesetzt AB wäre negativ, so wäre $V-A$ (A Werth von V in der Peripherie) auswendig neben AB positiv, neben den andern Theilen negativ. Es wird daher einen endlichen Raum geben, wo dies positive gilt; er sei innerhalb $ABCDE$; dann wäre er aber, da er an der Grenze 0 ist, in diesem Raume constant, welches ein Widerspruch.

Dieselbe Schlussart lässt sich auf drei Dimensionen anwenden.

Bei drei Dimensionen findet, für die Fläche s, wo $V = \text{Const.}$, noch das schöne Theorem statt, dass $\int \frac{dV}{d\rho} ds$, wenn ρ normal gegen s, $= 4\pi M$, wo M ganze Masse (vermuthlich allemal die in einer solchen Fläche eingeschlossene Masse, also ungerechnet die draussen liegende).

Vermuthlich ist der Satz für *jede* einhüllende Fläche gültig, ohne dass V constant zu sein braucht.

Es seien zwei einander einschliessende Flächen, in denen V constant ist, nemlich resp. $V = A$, $V = B$, dW ein Element des Raumes zwischen beiden, p die Anziehungskraft in jedem Punkte, dann ist

$$\int pp\, dW = (B-A).4\pi M$$

wenn M die Masse im innern Raume, wobei angenommen ist, dass im Raume W keine anziehende Masse ist.