Werk

Titel: Analysis
Jahr: 1866
Kollektion: Mathematica
Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Werk Id: PPN235999628
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235999628
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235999628

LOG Id: LOG_0055
LOG Titel: V. Allgemeine Theoreme
LOG Typ: chapter

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235957348
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235957348
OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235957348

Terms and Conditions

Contact

[V.]

[1.]

Allgemeines Theorem (1827 Aug. 6)

$$P(x,ty).P(x,\tfrac{y}{t}) = P(xx,tt).P(xx,yy)+R(xx,tt).R(xx,yy)$$

[2.]

Durch Zerlegung in Factoren bestätigt sich leicht,

$$(1+x)(1+x^3)(1+x^5)(1+x^7)\ldots = M$$

gesetzt:

$$P(ix^{\frac{3}{2}},\quad ix^{\frac{1}{2}}) = \frac{P(x,1)}{M}$$

$$P(ix^{\frac{3}{2}}, -ix^{\frac{1}{2}}) = \frac{P(x^3,1)}{M}$$

also durch Addition

$$P(x,1)+P(x^3,1) = 2M\,.\,P(x^6,-x)$$
$$P(x,1)-P(x^3,1) = 2Mx.P(x^6,-x^5)$$

also

$$P(x,1)^2-P(x^3,1)^2 = 4MMx.F(x^{12}).(1-x)(1-x^5)(1-x^7)(1-x^{11})(1-x^{13})\ldots$$
$$= 4MMx.\frac{Fx.F(x^6).F(x^{12})}{Fxx.F(x^3)} = 2\sqrt{\frac{pP}{r}}\;R^{\frac{3}{2}}$$

$$P(x, xt) = \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}\sqrt{t}} R(x, t)$$

$$R(x, xt) = \frac{1}{x^{\frac{1}{4}}\sqrt{t}} P(x, t)$$

$$P(x. 1)^2 . P(x,y)^2 = Q(x, 1)^2 . Q(x,y)^2 + R(x, 1)^2 . R(x,y)^2$$

$$\begin{aligned} P(x,y) . Q(x,y) &= Q(xx, 1) . Q(xx, yy) \\ P(x,y)^2 + Q(x,y)^2 &= 2P(xx, 1) . P(xx, yy) \\ P(x,y)^2 - Q(x,y)^2 &= 2R(xx, 1) . R(xx, yy) \end{aligned}$$

$$P(x,y) . P(xx,yy) = P(x^6, 1) . P(x^3, y^3) + \tfrac{1}{2}\{P(x^{\frac{2}{3}}, 1) - P(x^6, 1)\} . \{P(x^{\frac{1}{3}}, y) - P(x^3, y^3)\}$$

[3.]

$$\begin{aligned} P(x^3, 1) &= P, & Q(x^3, 1) &= Q, & R(x^3, 1) &= R \\ P(x, 1) &= p, & Q(x, 1) &= q, & R(x, 1) &= r \end{aligned}$$

$$pqr^3 . P(x^3, y^3) = pqR . P(x,y)^3 + 3PQR . P(x,y) . Q(x,y)^2$$

$$pq^3r . P(x^3, y^3) = prQ . P(x,y)^3 - 3PQR . P(x,y) . R(x,y)^2$$

$$\begin{aligned} 3pPQR &= r^3Q - q^3R \\ 3qPQR &= r^3P - p^3R \\ 3rPQR &= p^3Q - q^3P \end{aligned}$$

$$3PPQQ = PPqq + ppQQ + ppqq$$

$$\begin{aligned} 3pP &= \frac{r^3}{R} - \frac{q^3}{Q} = \frac{3Q^3}{q} - \frac{3R^3}{r} \\ 3qQ &= \frac{r^3}{R} - \frac{p^3}{P} = \frac{3P^3}{p} - \frac{3R^3}{r} \\ 3rR &= \frac{p^3}{P} - \frac{q^3}{Q} = \frac{3Q^3}{q} - \frac{3P^3}{p} \end{aligned}$$

$$\frac{r^4 + 3R^4}{rR} = \frac{q^4 + 3Q^4}{qQ} = \frac{p^4 + 3P^4}{pP}$$

$= 4 + 24xx + 24x^6 + 24x^8 + 48x^{14} + 24x^{18} + 24x^{24} + 48x^{26}$

$= 8P(xx, 1)\, P(x^6, 1) - 4\, Q(xx, 1)\, Q(x^6, 1)$? würde dann sein

$= 4\sqrt{(pp + qq)(PP + QQ)} - 4\sqrt{pqPQ}$

$= 2\sqrt{(pp + qq)(PP + QQ)} + 2\sqrt{(pp - qq)(PP - QQ)}$

$$\frac{dp}{p}-\frac{dP}{P}=+\tfrac{1}{2}qrQR.\frac{dx}{x}$$
$$\frac{dq}{q}-\frac{dQ}{Q}=-\tfrac{1}{2}prPR.\frac{dx}{x}$$
$$\frac{dr}{r}-\frac{dR}{R}=+\tfrac{1}{2}pqPQ.\frac{dx}{x}$$

[4.]

So wie

$$x^{\frac{1}{4}}(y^{\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}})+x^{\frac{9}{4}}(y^{\frac{3}{2}}+y^{-\frac{3}{2}})+.+\ldots$$

durch $R(x,y)$ bezeichnet ist, so wollen wir noch

$$x^{\frac{1}{4}}(y^{\frac{1}{2}}-y^{-\frac{1}{2}})-x^{\frac{9}{4}}(y^{\frac{3}{2}}-y^{-\frac{3}{2}})+.-\ldots$$

durch $S(x,y)$ bezeichnen. Man hat dann

$$iS(x,y)=R(x,-y)$$
$$S(x,y)=\frac{\sqrt{[Q(x,1)^2.P(x,y)^2-P(x,1)^2.Q(x,y)^2]}}{R(x,1)}$$
$$=\frac{\sqrt{[P(x,1)^2.R(x,y)^2-R(x,1)^2.P(x,y)^2]}}{Q(x,1)}$$

$$R(x,y).S(x,y)=Q(xx,1).S(xx,yy)$$
$$R(x,y)^2+S(x,y)^2=2P(xx,1).R(xx,yy)$$
$$R(x,y)^2-S(x,y)^2=2R(xx,1).P(xx,yy)$$

$$R(x,y).R(x,z)+S(x,y).S(x,z)=2R(xx,yz).P(xx,\tfrac{y}{z})$$
$$R(x,y).R(x,z)-S(x,y).S(x,z)=2R(xx,\tfrac{y}{z}).P(xx,yz)$$
$$R(x,y).S(x,z)+S(x,y).R(x,z)=2S(xx,yz).Q(xx,\tfrac{y}{z})$$
$$R(x,y).S(x,z)-S(x,y).R(x,z)=2S(xx,\tfrac{z}{y}).Q(xx,yz)$$

Setzt man

$$\Sigma e^{-\theta(k+\alpha)^2}=(\theta,\alpha)$$

wo k alle ganzen Zahlen bedeutet, so sind die Theoreme enthalten in

$$(\theta,2\alpha).(\theta,2\beta)=(2\theta,\alpha+\beta).(2\theta,\alpha-\beta)+(2\theta,\alpha+\beta+\tfrac{1}{2}).(2\theta,\alpha-\beta+\tfrac{1}{2})$$

auch ist

$$(\theta, \alpha) = (\theta, -\alpha)$$

[5.]

Man setze

$$\cos\theta = \frac{R(x,y)}{P(x,y)}\cdot\frac{p}{r}, \qquad i\sin\theta = \frac{S(x,y)}{P(x,y)}\cdot\frac{q}{r}$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\theta = \frac{R(x^{\frac{1}{2}}, y^{\frac{1}{2}})}{\sqrt{2rP(x,y)}}, \qquad i\sin\tfrac{1}{2}\theta = \frac{S(x^{\frac{1}{2}}, y^{\frac{1}{2}})}{\sqrt{2rP(x,y)}}$$

$$y = \cos u + i\sin u$$

dann ist

$$P(x,y)\,\mathrm{d}\theta = pq\,Q(x,y)\,\mathrm{d}u$$

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(p^4 - r^4\cos\theta^2)}} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{(p^4\sin\theta^2 + q^4\cos\theta^2)}}$$

$$R(x,y) = x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}P(x,xy), \qquad S(x,y) = x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{2}}Q(x,xy)$$

Setzt man

$$\sin\psi = \frac{rr}{pp}\cos\theta$$

so wird

$$\cos\psi = \frac{q}{p}\cdot\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}, \qquad \sin\psi = \frac{r}{p}\cdot\frac{R(x,y)}{P(x,y)}$$

$$\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}\psi}{\sqrt{(r^4 - p^4\sin\psi^2)}}$$

[6.]

$$P(x,y)\,.\,P(x,z) = P(xx,yz)\,.\,P(xx,\tfrac{y}{z}) + R(xx,yz)\,.\,R(xx,\tfrac{y}{z})$$

$$Q(x,y)\,.\,Q(x,z) = P(xx,yz)\,.\,P(xx,\tfrac{y}{z}) - R(xx,yz)\,.\,R(xx,\tfrac{y}{z})$$

$$P(x,y)\,.\,Q(x,z) = Q(xx,yz)\,.\,Q(xx,\tfrac{y}{z}) + S(xx,yz)\,.\,S(xx,\tfrac{y}{z})$$

$$R(x,y)\,.\,R(x,z) = R(xx,yz)\,.\,P(xx,\tfrac{y}{z}) + P(xx,yz)\,.\,R(xx,\tfrac{y}{z})$$

$$P(x,y)^2\,.\,P(x,z)^2 + S(x,y)^2\,.\,S(x,z)^2 = Q(x,y)^2\,.\,Q(x,z)^2 + R(x,y)^2\,.\,R(x,z)^2$$

[7.]

$$R(x,1)^7 . P(x^7,y^7) = \text{Product aus } \frac{Fx^{14}}{(Fx^2)^7}$$
$$. \ R(x,1) . P(x,y)$$
$$. \ \{R(x,\varepsilon) . P(x,y) - S(x,\varepsilon) . Q(x,y)\}$$
$$. \ \{R(x,\varepsilon\varepsilon) . P(x,y) - S(x,\varepsilon\varepsilon) . Q(x,y)\}$$
$$. \ \{R(x,\varepsilon^3) . P(x,y) - S(x,\varepsilon^3) . Q(x,y)\}$$
$$. \ \{R(x,\varepsilon^4) . P(x,y) - S(x,\varepsilon^4) . Q(x,y)\}$$
$$. \ \{R(x,\varepsilon^5) . P(x,y) - S(x,\varepsilon^5) . Q(x,y)\}$$
$$. \ \{R(x,\varepsilon^6) . P(x,y) - S(x,\varepsilon^6) . Q(x,y)\}$$

$$= R(x^7,1) . P(x,y)^7 - \ \ldots\ldots\ldots + 7\frac{PQR}{pq} . P(x,y) . Q(x,y)^6$$

worin $\varepsilon^7 = 1$. Zum Beweise dient, was sich leicht nachweisen lässt:

$$P(x,\varepsilon y) . P(x, \tfrac{y}{\varepsilon}) = P(xx,yy) . P(xx,\varepsilon\varepsilon) + R(xx,yy) . R(xx,\varepsilon\varepsilon)$$
$$= \frac{P(x,y)^2 + Q(x,y)^2}{2P(xx,1)} . P(xx,\varepsilon\varepsilon) + \frac{P(x,y)^2 - Q(x,y)^2}{2R(xx,1)} . R(xx,\varepsilon\varepsilon)$$
$$= P(x,y)^2 . \frac{R(x,\varepsilon)^2}{R(x,1)^2} - Q(x,y)^2 . \frac{S(x,\varepsilon)^2}{R(x,1)^2}$$

[8.]

$$P(x,1) = p, \qquad \frac{x\,dp}{p\,dx} = p'$$
$$Q(x,1) = q, \qquad \frac{x\,dq}{q\,dx} = q'$$
$$R(x,1) = r, \qquad \frac{x\,dr}{r\,dx} = r'$$

$$\tfrac{1}{2}p' = x - 2xx + 4x^3 - 4x^4 + 6x^5 - 8x^6 + 8x^7 - 8x^8 + 13x^9 - 12x^{10} \ldots$$
$$\tfrac{1}{2}q' = -x - 2xx - 4x^3 - 4x^4 - 6x^5 - 8x^6 - 8x^7 - 8x^8 - 13x^9 - 12x^{10} \ldots$$
$$4r' = 1 + 8xx - 8x^4 + 32x^6 - 40x^8 + 48x^{10} - 32x^{12} + 64x^{14} - 104x^{16} + 104x^{18} \ldots$$

Coëfficient von $x^{2^\mu a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots}$ wenn $a, b, c \ldots$ Primzahlen, wird

$$A\,\frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} . \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} . \frac{c^{\gamma+1}-1}{c-1} \ldots$$

[worin für jene drei Reihen folgeweise] $A = 2^\mu(-1)^{\mu+1}$, $A = 2^\mu$, $A = 8(3-2^\mu)$

$$4p' - 4q' = r^4$$
$$4r' - 4p' = q^4$$
$$4r' - 4q' = p^4$$

$$\frac{\mathrm{d}px}{px} - \frac{\mathrm{d}px^2}{px^2} = \frac{\mathrm{d}x}{x}\cdot\tfrac{1}{2}(qx)^2.(rx^2)^2$$
$$\frac{\mathrm{d}px}{px} - \frac{\mathrm{d}px^3}{px^3} = \frac{\mathrm{d}x}{x}\cdot\tfrac{1}{2}(qx).(rx).(qx^3).(rx^3)$$
$$\frac{\mathrm{d}px}{px} - \frac{\mathrm{d}px^4}{px^4} = \frac{\mathrm{d}x}{x}\cdot(qx).(px^2)^2.(rx^4)$$
$$\frac{\mathrm{d}px}{px} - \frac{\mathrm{d}px^5}{px^5} = \frac{\mathrm{d}x}{4x}\cdot\frac{r^4qq(pp-3PP)+R^4QQ(25PP-15pp)}{ppqq-5PPQQ}$$

[9.]

Bei der $5^{\text{plic.}}$ ist (Aug. 29)

$$pp - PP = A.\sqrt{\frac{p}{P}}, \qquad 5PP - pp = B\sqrt{\frac{P}{p}}$$
$$qq - QQ = -A.\sqrt{\frac{q}{Q}}, \qquad 5QQ - qq = B\sqrt{\frac{Q}{q}}$$
$$\text{♂} \qquad rr - RR = A.\sqrt{\frac{r}{R}}, \qquad 5RR - rr = -B\sqrt{\frac{R}{r}}$$

$$AB = -2ppPP + 2qqQQ + 2rrRR = [16pqrPQR]^{\frac{2}{3}}, \qquad \frac{A}{B} = \frac{PQR}{pqr}$$

$$A = 2^{\frac{4}{3}}.\frac{(PQR)^{\frac{5}{6}}}{(pqr)^{\frac{1}{6}}}, \qquad B = 2^{\frac{4}{3}}.\frac{(pqr)^{\frac{5}{6}}}{(PQR)^{\frac{1}{6}}}$$

also

$$pp = (QR + qr).\sqrt[6]{\frac{ppPP}{16qrQR}} \text{ etc.}$$

$$5 = -\frac{qr}{QR} + \frac{pr}{PR} + \frac{pq}{PQ}$$

Siehe weiter unten [Art. 11.]

Für die Ableitung dient u. a.

$$P(x^5, x^4).P(x^5, -xx) = P(x^{10}, -xx).P(x^{10}, -x^6) + xP(x^{10}, -x^4).P(x^{10}, -x^8)$$
$$P(x^5, -x^4).P(x^5, xx) = P(x^{10}, -xx).P(x^{10}, -x^6) - xP(x^{10}, -x^4).P(x^{10}, -x^8)$$

also durch Multiplication

$$Q(x^{10},1)^2.P(x^{10},-x^8).P(x^{10},-x^4)$$
$$= P(x^{10},-xx)^2.P(x^{10},-x^6)^2 - xx\,P(x^{10},-x^4)^2.P(x^{10},-x^8)^2$$

$$\frac{(Fx^{10})^4}{(Fx^{20})^2} = \frac{(Fx^4)^3(Fx^{10})^2}{Fx^2.Fx^{20}} - xx\frac{Fx^2.(Fx^{20})^3}{Fx^4.Fx^{10}}$$

was mit δ identisch ist, nemlich

$$p^{\frac{1}{6}}q^{\frac{1}{6}}(\tfrac{1}{2}r)^{\frac{2}{3}}P^{\frac{4}{3}}Q^{\frac{4}{3}}(\tfrac{1}{2}R)^{\frac{2}{3}} =$$

Auch beweist man leicht

$$pp = PP + 4\{x^{\frac{1}{5}} + x^{\frac{16}{5}} + x^{\frac{36}{5}} + x^{\frac{81}{5}} + ..\}\{x^{\frac{4}{5}} + x^{\frac{9}{5}} + x^{\frac{49}{5}} + x^{\frac{64}{5}} + ..\}$$
$$= PP + 4x\,P(x^5,x^4).P(x^5,xx)$$
$$= PP + 4x\sqrt{\left\{\frac{p}{P}.\frac{(Fx^{10})^5}{Fxx}\right\}}$$
$$= PP + 4\sqrt{\frac{p}{P}}.\frac{\left(\frac{PQR}{2}\right)^{\frac{5}{6}}}{\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{1}{6}}}$$

[10.]

Bei der Trisection ist noch, p, P etc. in voriger Bedeutung genommen und $P(x^{\frac{1}{3}},1) = P^0$ gesetzt

$$\left(\frac{3PP - P^0P^0}{2}\right)^2 = p^4 - 4\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$$
$$\left(\frac{3QQ - Q^0Q^0}{2}\right)^2 = q^4 + 4\left(\frac{pqr}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$$

Allgemein wenn $P(x,1)$, $Q(x,1)$ gegeben sind und $P(x^n,1)$, $Q(x^n,1)$ gesucht werden, wo n ungerade, sind dem $P(x^n,1)$ coordinirt $\pm\sqrt{\frac{1}{n}}.P(x^{\frac{1}{n}},1)$ oder $\pm i\sqrt{\frac{1}{n}}.P(x^{\frac{1}{n}},1)$, je nachdem n von der Form $4k+1$ oder $4k-1$ ist. Die Gleichung findet sich leicht aus Entwickelung der Summe der geraden Potenzen der $n+1$ Wurzeln.

[11.]

Setzt man

$$P(x^5,y^5) = \frac{R}{r^5}.P(x,y)^5 + A.P(x,y)^3Q(x,y)^2 + \frac{5PQR}{pqr^5}.P(x,y)Q(x,y)^4$$

so ist auch

$$Q(x^5,y^5) = \frac{5PQR}{pqr^5}.P(x,y)^4.Q(x,y) + A.P(x,y)^2.Q(x,y)^3 + \frac{R}{r^5}Q(x,y)^5$$

Setzt man hier $y = 1$, so erhält man

$$\begin{aligned} Ap^3q^3 &= Pq - \frac{R}{r^5}.p^5q - \frac{5PQR}{r^5}.q^4 \\ &= Qp - \frac{R}{r^5}.q^5p - \frac{5PQR}{r^5}.p^4 \end{aligned}$$

woraus die Gleichung weiter zurück [Art. 9] folgt

$$0 = pQr - Pqr + pqR - 5PQR$$

daraus

$$A = \frac{r(p^3P - q^3Q) - (p^4+q^4)R}{ppqqr^5}$$

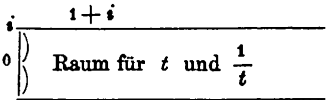
[12.]

Theorem. Wenn der imaginäre Theil von t und $\frac{1}{t}$ zwischen $-i$ und $+i$ liegt, so ist der reelle Theil von

$$\left(\frac{Qt}{Pt}\right)^2$$

positiv.

Geometrisch zu beweisen



Unter dieser Bedingung ist also das arithmetisch geometrische Mittel zwischen

$$\mu P(\tfrac{1}{2}t)^2 \qquad \mu Q(\tfrac{1}{2}t)^2$$

indem man immer das geometrische Mittel zwischen m, n so nimmt, dass $\frac{\sqrt{mn}}{m}$ einen positiven reellen Theil hat,

$$= \mu$$

Ein solches Mittel nennen wir das einfachste Mittel.

Ist das einfachste AG. Mittel zwischen $m, n, = \mu$, das zwischen $m, \sqrt{(mm - nn)}, = \frac{\mu}{t}$, so ist t der Canon des Verhältnisses $\frac{n}{m}$, nemlich

$$\frac{m}{n} = \left(\frac{Qt}{Pt}\right)^2$$

dann ist das einfachste AG. Mittel zwischen m und $-n$

$$= \frac{\mu}{1+2it}$$

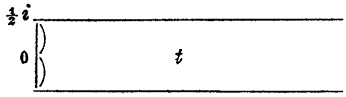
und der dazu gehörige Canon

$$= \frac{t}{1+2it} = \frac{1}{\frac{1}{t}+2i}$$

Die Gleichung

$$\left(\frac{Qt}{Pt}\right)^2 = A$$

hat immer Eine und nur Eine Auflösung in dem Raume



Es sei $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, $\alpha \equiv \delta \equiv 1 \pmod{4}$, β, γ gerade

$$t' = i\frac{\alpha t + \beta i}{\gamma t + \delta i}$$

dann ist

$$\left(\frac{Qt'}{Pt'}\right)^2 = i^\gamma \left(\frac{Qt}{Pt}\right)^2.$$

[13.]

Fünftheilung

$$\begin{array}{ll} a & A \\ b & B \\ c = \sqrt{(aa-bb)} & C = \sqrt{(AA-BB)} \end{array}$$

$$2v = -aA + bB + cC$$

$$4v = aa - 6aA + 5AA = -(bb - 6bB + 5BB) = -(cc - 6cC + 5CC)$$

$$v = -A\sqrt{(AA+v)} + B\sqrt{(BB-v)} + C\sqrt{(CC-v)}$$

Die Elimination auf eine Gleichung

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}=0$$

angewandt, gibt

$$0=\Sigma(a^4-4a^3b-2aabb+4aabc-24abcd)$$

[14.]

Die $7^{\text{plication}}$ beruht auf

$$[a\sin(\varphi+A)+b\sin(3\varphi+B)]^2\sin(\varphi+k)$$
$$=\alpha\sin(\varphi+l)+\beta\sin(3\varphi+l)+\gamma\sin(5\varphi+l)+\delta\sin(7\varphi+l)$$

[15.]

Bei der Trisection hat man

$$\sqrt{\frac{q}{p}}=n,\qquad \sqrt{\frac{Q}{P}}=N$$

gesetzt,

$$\frac{N^4-n^4}{1-nnNN}=2nN,\qquad \frac{ppQQ-qqPP}{pP-qQ}=2\sqrt{pPqQ}$$

proportional

$$\begin{array}{c|c||c|c||c|c} p^4 & 3\cos\varphi\sin\varphi^3 & q^4 & 3\cos(60^0-\varphi)\sin(60^0-\varphi)^3 & r^4 & 3\cos(120^0-\varphi)\sin(120^0-\varphi)^3 \\ P^4 & \cos\varphi^3\sin\varphi & Q^4 & \cos(60^0-\varphi)^3\sin(60^0-\varphi) & R^4 & \cos(120^0-\varphi)^3\sin(120^0-\varphi) \end{array}$$

[16.]

Wenn innerhalb einer begrenzten Figur überall

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y^2}=0$$

an der Grenze hingegen V constant $=A$ ist, so ist nothwendig auch im ganzen Raume $V=A$

Beweis. Es sei $\mathrm{d}M$ ein Element der Fläche und

$$\iint\left\{\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y^2}\right)(V-A)\right\}\mathrm{d}M=\Omega$$

Wäre V nicht constant, so wäre offenbar das Integral *positiv*. Allein das Integral ist auch

$$\int (V-A)\left(\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}y - \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\mathrm{d}x\right)$$

durch den Umfang der Figur ausgedehnt, also $=0$. Da dies mit dem Vorigen im Widerspruch steht, so ist die Voraussetzung unzulässig.

Ähnliches findet mit drei Unbestimmten Statt.

Es lassen sich hieraus manche schöne Folgerungen ziehen.

Ein Punkt kann innerhalb eines hohlen Raumes nicht im stabilen Gleichgewicht sein, wenn nicht innerhalb des ganzen Raums gar keine Wirkung Statt findet, weder im Fall der Abstossung, noch der Anziehung.

[17.]

Dass in der Peripherie einer Gleichgewichtsfigur keine *negative* Theile sein können, beweist sich so. Gesetzt AB wäre negativ, so wäre $V-A$ (A Werth von V in der Peripherie) auswendig neben AB positiv, neben den andern Theilen negativ. Es wird daher einen endlichen Raum geben, wo dies positive gilt; er sei innerhalb $ABCDE$; dann wäre er aber, da er an der Grenze 0 ist, in diesem Raume constant, welches ein Widerspruch.

Dieselbe Schlussart lässt sich auf drei Dimensionen anwenden.

Bei drei Dimensionen findet, für die Fläche s, wo $V=$ Const., noch das schöne Theorem statt, dass $\int \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\rho}\mathrm{d}s$, wenn ρ normal gegen s, $=4\pi M$, wo M ganze Masse (vermuthlich allemal die in einer solchen Fläche eingeschlossene Masse, also ungerechnet die draussen liegende).

Vermuthlich ist der Satz für *jede* einhüllende Fläche gültig, ohne dass V constant zu sein braucht.

Es seien zwei einander einschliessende Flächen, in denen V constant ist, nemlich resp. $V=A$, $V=B$, $\mathrm{d}W$ ein Element des Raumes zwischen beiden, p die Anziehungskraft in jedem Punkte, dann ist

$$\int pp\,\mathrm{d}W = (B-A).4\pi M$$

wenn M die Masse im innern Raume, wobei angenommen ist, dass im Raume W keine anziehende Masse ist.