

Werk

Titel: Analysis

Jahr: 1866

Kollektion: Mathematica

Digitalisiert: Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen

Werk Id: PPN235999628

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235999628>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235999628>

LOG Id: LOG_0057

LOG Titel: Bemerkungen

LOG Typ: section

Übergeordnetes Werk

Werk Id: PPN235957348

PURL: <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PPN235957348>

OPAC: <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=235957348>

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen
Georg-August-Universität Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen
Germany
Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

B E M E R K U N G E N.

In diesem dritten Bande von GAUSS Werken habe ich alle Abhandlungen und Aufsätze aus dem Gebiete der allgemeinen Analysis und zwar speciell aus der Theorie der algebraischen Functionen, der GAUSSSISCHEN Reihen und der Elliptischen Functionen, so wie einige Mittheilungen das PFAFFSche Theorem und die Construction von Logarithmentafeln betreffend vereinigt. Sie bestehen aus einer Doctordissertation (früher in Quart gedruckt); aus früher veröffentlichten Abhandlungen: fünf in den *'Commentationes societatis regiae scientiarum Göttingensis'* (Quart), einer in den *'Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen'* (Quart) und einer im CRELLESCHEN *'Journal für reine und angewandte Mathematik'* (Quart); ferner aus sechs Anzeigen eigener Abhandlungen in den *'Göttingischen Gelehrten Anzeigen und Nachrichten'* (Octav); aus zwölf Mittheilungen über nicht eigne Schriften in den *'Göttingischen gelehrten Anzeigen'* (Octav) (von GAUSS nicht unterzeichnet aber in Betreff seiner Autorschaft durch die Acten der Göttinger Universitäts-Bibliothek verificirt), in der *'Monatlichen Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde herausgegeben vom Freiherrn von ZACH'* (Octav), in den *'Astronomischen Nachrichten herausgegeben von SCHUMACHER'* (Quart); und auch aus zwei Erläuterungen in der *'Monatlichen Correspondenz'* und in VEGA's *'Sammlung von Hülfstafeln'* (Quart) zu den GAUSSSISCHEN Additions- und Subtractions-Logarithmentafeln. Diese Tafeln selbst habe ich hier nicht abdrucken lassen, weil sie sehr verbreitet sind und das Format dieser Werke zum Gebrauche solcher Tafeln unbequem sein würde.

Bei der Redaction habe ich dieselben Grundsätze befolgt wie in den frühern Bänden. Zur bessern Übersicht der Gegenstände in einem so umfangreichen Bande sind die Hauptlehrsätze auf gleiche Weise durch den Druck ausgezeichnet. Zum leichtern Gebrauch sowohl der ältern Ausgaben als der vorliegenden habe ich bei den Verweisungen auf Schriften, die nicht in diesem Bande selbst sich finden, statt des Ortes der Veröffentlichungen die eignen Titel so wie statt der Nummer der Seite die der Artikel angegeben. Auf Seite 20 in Zeile 15 und 16 ist gemäss einer handschriftlichen Bemerkung *'objectionem secundam et quar-*

tam' statt '*objectionem tertiam et quartam*' und in Zeile 19 ebenso '*objectionem tertiam*' statt '*objectionem primam*' gesetzt. Ausserdem unterscheidet sich die vorliegende Ausgabe von den frühern derselben Schriften nur durch die Berichtigung einiger Druckfehler, wobei ich zum Theil die GAUSSISCHEN Original-Manuscripte benutzen konnte.

Aus dem Handschriftlichen Nachlasse habe ich aufgenommen: die den Seiten 30 und 112 beigefügten Noten, den zweiten Theil der Abhandlung '*Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc.*', eine ausführliche Abhandlung über Interpolation mit einigen in meinen Bemerkungen Seite 328 u. f. erläuterten Zusätzen, und eine Reihe von Abhandlungen, die sich auf die Elliptischen Functionen beziehen.

Die Handschriftlichen Aufzeichnungen habe ich hier wie auch früher bis auf Berichtigung von unerheblichen Schreibfehlern unverändert abdrucken lassen und meine Einschaltungen, die mit Ausnahme der '*Fortsetzung der Untersuchungen über das arithmetisch-geometrische Mittel*' nur in kurzen Sätzen bestehen, durch [Einklammerung] abgesondert. Die geschichtlichen Angaben und erforderlichen Zusätze für den Nachlass über hypergeometrische Reihen und Interpolation habe ich in den jenen Abhandlungen unmittelbar folgenden Bemerkungen zusammengestellt.

Die Redaction der GAUSSISCHEN Arbeiten über Elliptische Functionen wurde Seitens der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen von RIEMANN gewünscht und ihm zu dem Zwecke die Handschriften übergeben. Leider hat er weder eine schriftliche noch mündliche Mittheilung aus diesen seinen Studien hinterlassen. Erst nach dem bedauernswerthen allzufrühen Tode RIEMANN'S und nachdem der vorliegende dritte Band bis auf jenen Theil gedruckt war, konnte ich die GAUSSISCHEN Handschriften zu meiner Bearbeitung übernehmen.

GAUSS hat von seinen Untersuchungen der Functionen, die wir jetzt die Elliptischen nennen, nur einen Theil veröffentlicht: eine Anwendung dieser Theorie auf die höhere Arithmetik in der *Summatio quarundam serierum singularium* 1808 September und eine Anwendung auf die Bestimmung der Säcularstörungen der Planeten in der *Determinatio attractionis, quam in punctum quodvis positionis datae exerceret planeta, si ejus massa per totam orbitam ratione temporis, quo singulae partes describuntur, uniformiter esset distributa*, 1818 Januar. Den grössern Theil hat er niedergelegt in einigen unvollständigen Entwürfen zu Anfängen verschiedener Abhandlungen und in zahlreichen zwischen andern Arbeiten sehr zerstreuten Aufzeichnungen einzelner Formeln. Diese im handschriftlichen Nachlasse befindlichen Untersuchungen habe ich hier in einzelnen Gruppen zusammengestellt jenachdem sie vom Algorithmus des Arithmetisch-Geometrischen Mittels oder einem andern diesem analogen und mit diesem in Verbindung gesetzten Algorithmus ausgehen oder aber sich auf die speciellen Lemniscatischen Functionen beziehen oder endlich die Darstellungen der allgemeinen Functionen durch Producte als wesentliches Hilfsmittel gebrauchen. Die Untersuchung des *Pentagramma mirificum* bildet eine Anwendung der Fünfteilung der ganzen Elliptischen Integrale.

Die Abhandlung mit den beiden Abschnitten *de origine proprietatibusque generalibus numerorum mediorum arithmetico-geometricorum* und *de functionibus transcendentibus quae ex differentiatione mediorum*

arithmetico-geometricorum orientur bildet die erste und zwar eine sehr sorgfältig geschriebene Aufzeichnung in einem Handbuche, welches, wie der Titel besagt, von dem Jahre 1800 an benutzt ist. Die Beschäftigung mit diesem Gegenstande wird aber schon in einer viel frühern Zeit begonnen haben; nach Mittheilungen über eine mündliche Äusserung von GAUSS, scheint er im Jahre 1794 die Beziehungen zwischen den arithmetisch-geometrischen Mitteln und den Potenzreihen, in denen die Exponenten mit den Quadrat-Zahlen fortschreiten, gekannt zu haben.

Die Formeln für den in Art. 18. Seite 389. aufgenommenen Algorithmus, der die von GAUSS eingeführten neuen Transscendenten mit den Quadrat-Verthen der beiden Argumente zurückführt auf die Transscendenten mit den einfachen Argument-Verthen, folgen in einem Handbuche unmittelbar auf eine astronomische Rechnung an deren Schlusse steht 'geendigt d. 2. May 1809'. Die Aufzeichnungen der anderen Untersuchungen über das Arithmetisch-Geometrische Mittel befinden sich theils auf einzelnen nicht datirten Blättern, theils erscheinen sie in den Handbüchern wegen ihrer Kürze an einigen, früher zu grösserer Übersichtlichkeit zwischen verschiedenartigen Arbeiten leer gelassenen, Stellen niedergeschrieben und erlauben keine sichere Zeitangabe.

Wie schon in Art. 12 bemerkt, habe ich geglaubt zur Annehmlichkeit für den Leser diese sehr zerstückelten Untersuchungen durch eine zusammenhängende Darstellung vereinigen zu müssen selbst auf die Gefahr hin, hier einige Entwicklungen hinzustellen, die von GAUSS nicht ausgeführt worden sind, wie z. B. die Ableitung der Differentialgleichung für das Arithmetisch-Geometrische Mittel ohne die Reihen-Entwicklung und die Darstellung durch bestimmte Integrale voranzusetzen, eine Ableitung, die sich an die in Art. 10. ausgeführte Untersuchung anschliesst und sich von der von Herrn BORCHARDT gegebenen ersten derartigen Ableitung unterscheidet. Die in Art. 17. angeregte Frage über den Zusammenhang zwischen den binaren quadratischen Formen mit negativen Determinanten und den von GAUSS gefundenen neuen Transscendenten findet ihre vollständigste Erledigung durch die Untersuchungen des Herrn KRON-ECKER über diesen Gegenstand.

Für die *Lemniscatischen Functionen* besitzen wir die von GAUSS in einem Handbuche verzeichnete Zeitbestimmung '*Functiones Lemniscaticas considerare coeperamus 1797. Januar. 8.*' Von den im Nachlasse vorhandenen Aufzeichnungen scheint nach Papier und Form der Handschrift zu urtheilen, die auf einem besonderen Blatte stehenden und hier von mir mit 1, 2, 3, 4 bezeichneten Artikel der *ersten Gruppe* der Untersuchungen über die Lemniscatischen Functionen die früheste zu sein. Die folgenden hier auf Seite 406—412 unter der gemeinsamen von GAUSS an mehreren Stellen gebrauchten Überschrift: '*Einige neue Formeln die Lemniscatischen Functionen betreffend*' zusammengestellten Aufzeichnungen derselben ersten Gruppe gehören einer ungleich spätern Zeit an, die darin enthaltenen Resultate sind auch wohl viel früher gefunden und theils zur Gedächtnissprobe, theils in dem Streben recht elegante Formeln zu erhalten von Neuem niedergeschrieben und zwar in zwei Handbüchern, von denen das eine im '*November 1801*' das andere '*im Mai 1809 angefangen*' ist. Die Functionen $\sin. \text{lemn.}$ so wie $\cos. \text{lemn.}$ bezeichnet GAUSS überall durch die aus der Zusammenziehung von s und l so wie von c und l gebildeten Schriftzüge. Da diese bis jetzt nicht in Druckzeichen vorhanden sind, so habe ich sie hier durch die Worte selbst ersetzt.

Von den Untersuchungen, welche sich vorzugsweise auf die Darstellung der Lemniscatischen Functionen durch unendliche Producte und durch trigonometrische Reihen beziehen und welche ich als eine *zweite Gruppe* zusammengestellt habe, bilden die ersten vier Artikel die *Scheda prima* eines nach der Angabe des Titelblattes im Juli 1798 begonnenen Notizbuches. Die Artikel 1, 2, 3 sind von GAUSS selbst nummerirt, dann folgt im selben Hefte unmittelbar der Inhalt von Art. [4.] [5.] Seite 415, und hienach mit vielfachen Unterbrechungen durch Astronomische Untersuchungen der Theil der in Art. [17.] Seite 431 aufgenommenen Rechnungen, der mit lateinischem Text erläutert ist, und die einzelnen Theile des Inhalts von Art. [6.] [7.] Seite 417, 418. Der Inhalt von Art. [8.] [9.] [10.] Seite 418, 419, Art. [15.] [16.] Seite 423—425 findet sich zerstreut in einem 1799 November angefangenen Notizbuche. Die Aufzeichnungen der übrigen Untersuchungen gehören, vielleicht mit Ausschluss der Fünfteilung des ganzen lemniscatischen Bogens Art. [13.], wohl einer spätern Zeit an und befinden sich, ausser den in Art. [14.] wiedergegebenen und in ein Handbuch nach dem 20. Febr. 1817 eingetragenen Summationsformeln für das Lemniscatische Integral der zweiten Art, alle auf einzelnen Blättern.

Die der Zeit nach erste unter den im Handschriftlichen Nachlasse erhaltenen die allgemeinen Elliptischen Functionen betreffenden Aufzeichnungen ist wohl die im November 1799 begonnene auf Seite 433—435 abgedruckte Abhandlung *Zur Theorie der neuen Transscendenten I.* die sich in einem Notizbuche dessen Titelblatt die Aufschrift *Varia, imprimis de Integrali $\int \frac{du}{\sqrt{(1 + \mu \sin u^2)}}$, Novembr. 1799'* trägt, zwischen Untersuchungen über ganz verschiedenartige Gegenstände zerstreut befindet.

Die Abhandlung II. mit der Überschrift *'Zur Theorie der transscendenten Functionen gehörig'* folgt in einem Handbuche unmittelbar nach den in der *Theoria motus corporum coelestium* wiedergegebenen Hülftafeln. Diese Untersuchungen, insbesondere die auf die Siebentheilung bezüglichen, werden wohl dem Jahre 1808 angehören und die Veranlassung zu einer Mittheilung an SCHUMACHER gewesen sein.

Die Abhandlung III. mit den Eingangsworten *'Die Theoreme in Bezug auf diejenigen Reihen und unendlichen Producte, welche zu der Theorie der Arithmetisch-Geometrischen Mittel gehören, ordnen wir so:'* Seite 446—460 folgt in einem Handbuche unmittelbar nach einer astronomischen Rechnung, der die Bemerkung beigefügt ist *'geendigt den 28. April 1809'*.

Die Abhandlung IV. *'Hundert Theoreme über die neue Transcendente'* Seite 461—469 steht auf einzelnen Blättern ohne irgend eine Zeitangabe.

Die Abhandlung V. Seite 470—480 mit den Eingangsworten *'Allgemeines Theorem'* enthält die beiden Zeitangaben 1827 Aug. 6. und Aug. 29. Der letzte Theil dieses Aufsatzes bildet wohl eine der frühesten Vorarbeiten von GAUSS für seine *'Allgemeinen Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte'* und lassen vermuthen, dass er den Zusammenhang dieses Gebietes mit einem anderen Gebiete der Analysis, nemlich der

Theorie der Functionen mit complexen Argumenten erkannt habe, ein Zusammenhang welcher RIEMANN auf ein so fruchtbares Gebiet der Forschung geführt hat.

Die Untersuchung des *Pentagramma mirificum*, eines sphärischen Fünfecks, dessen fünf Diagonalen Quadranten sind, befindet sich an zwei getrennten Stellen in einem Handbuche, auf einem besonderen Blatte der Art. [4.]. Das, was ich hier als Art. [1.] und [2.] bezeichnet habe, ist vor dem 23. Januar 1836 geschrieben, das andere enthält in Art. [7.] die Zeitangabe 1843 April 20.

Zwischen den unter Nr. I. zusammengestellten Untersuchungen über die neuen Transscendenten befindet sich auch der Anfang einer Abhandlung mit der Überschrift '*Motus solidi a nullis viribus sollicitati*'. Das Problem ist dort bis zu dem bei der bekannten Auflösung auftretenden elliptischen Integral geführt, so dass zu vermuthen steht, GAUSS habe erkannt, dass die Gleichungen zur Bestimmung dieser Bewegung mit Hülfe der neuen Transscendenten in endlicher Form erscheinen.

Die Aufzeichnung der hier unter V. zusammengestellten Untersuchungen über die neuen Transscendenten, mit den Zeitangaben 1827 August 6 und August 29 ist wohl durch die JACOBSCHEN Briefe an SCHUMACHER datirt aus Königsberg von 1827 Juni 13 und Aug. 2 deren ersterer die algebraischen Gleichungen für die Dreitheilung und Fünfteilung elliptischer Integrale der andere die Gleichung zwischen den trigonometrischen Tangenten der Argumente für die Transformation beliebigen Grades gibt, veranlasst worden. Diese beiden Briefe sind in der im Monat September 1827 ausgegebenen Nr. 123 der 'Astronomischen Nachrichten' veröffentlicht, aber im Original zuvor an GAUSS mitgetheilt worden, wie aus den GAUSSSCHEN Briefen an SCHUMACHER vom 4. und 19. Aug. 1827 hervorgeht. Die Beweise jener JACOBSCHEN Lehrsätze hat dieser selbst durch einen aus Königsberg vom 18. November 1827 datirten in der im Monat December 1827 ausgegebenen Nr. 127 der 'Astronomischen Nachrichten' abgedruckten Briefe an SCHUMACHER veröffentlicht.

Zu dieser Zeit war noch nicht, aber doch im selben Jahre, durch das zweite Heft des zweiten Bandes des CRELLESCHEN Journals für reine und angewandte Mathematik die Abhandlung von ABEL '*Recherches sur les fonctions elliptiques* §. I.—§. VII.' erschienen, und dieses war wohl diejenige Arbeit ABELS, von der GAUSS am 30. Mai 1828 an SCHUMACHER schreibt, 'die, Ihnen gesagt, mir von meinen eignen Untersuchungen wol $\frac{1}{2}$ vorweggenommen hat, und mit diesen zum Theil selbst bis auf die gewählten bezeichnenden Buchstaben übereinstimmt'.

Auf dieselbe Arbeit bezieht sich wohl die folgende Stelle eines Briefs von CRELLE an ABEL vom 15. Mai 1828: — — Voici ce que m'écrit Mr. GAUSS de Goettingue que j'avais également prié de m'envoyer quelque chose sur les fonctions elliptiques dont il s'occupe, comme j'ai appris, plus de 30 ans. 'D'autres occupations m'empêchent pour le moment de rédiger ces recherches. Mr. ABEL m'a prévenu au moins d'un tiers. Il vient d'enfiler précisément la même route dont je suis sorti en 1798. Ainsi je ne m'étonne nullement de ce que, pour la majeure partie, il en soit venu aux mêmes résultats. Comme d'ailleurs dans sa déduction il a mis tant de sagacité de pénétration et d'élégance, je me crois par cela même dispensé de la rédaction de mes propres recherches.' — —

Auch über LEGENDRE besitzen wir einen Ausspruch von GAUSS. In einem Briefe ohne Datum schreibt er an OLBERS 'Sie verlangten in Ihrem letzten Briefe [wahrscheinlich derjenige 'Bremen d. 16. Aug. 1817, *Empfangen den 25. Aug.*' bezeichnete; die Briefe aus jenen Monaten sind: O. an G. Juli 17. — G. an O. Aug. 2. — G. an O. der hier im Auszuge mitgetheilte ohne Datum — O. an G. Nov. 2. — G. an O. Dec. 2.], allertheuerster Freund, mein Urtheil über MOSSOTTIS in den Mailänder Ephemeriden gegebene Methode die Bahnen von H. K. zu berechnen. Als ich Ihnen neulich schrieb, war mir der Gegenstand nicht gegenwärtig genug, ob ich gleich jenen Aufsatz fruher so weit gelesen hatte, dass ich ein Urtheil darüber vorläufig gefasst hatte. In jenem Augenblicke erlaubte mir meine Zeit nicht, mich gleich wieder gehörig in die Sache hineinzustudiren, und ich überging daher Ihre Anfrage. Seitdem habe ich nun wieder Anlass genommen, jenen Aufsatz noch einmal zu lesen, und in den eigentlichen Geist weiter einzudringen, und ich will heute eine Stunde dazu anwenden mich mit Ihnen über diesen Gegenstand zu unterhalten.'

'Geneigt, wie ich von jeher gewesen bin, jeden neuen originellen oder genialen Gedanken mit Liebe aufzunehmen*), wurde ich von der wirklich neuen Idee in MOSSOTTIS Aufsatz bei meiner ersten Lecture frappirt.' — —

*) 'Ich brauche Ihnen wohl nicht zu sagen, dass die neuliche wunderliche Recension von LEGENDRE'S *Exercices de calcul Intégral* in unsern G. A. [Göttingische gelehrte Anzeigen 1817 August 14.] nicht von mir ist, da dieses Werk so manches der oben erwähnten Art enthält.'

Es verdient noch besonders ausgesprochen zu werden, dass in Bezug auf die Theorie der Theilung des Lemniscaten-Bogens der Handschriftliche Nachlass nichts enthält, als was der vorliegende Abdruck an Hülfsätzen dazu darbietet, während in dem Werke '*Disquisitiones arithmeticae*', welches Juli 1801 ausgegeben worden, Art. 335 der Sectio septima, de aequationibus circuli sectiones definientibus, gesagt wird — 'Ceterum principia theoriae, quam exponere aggredimur, multo latius patent, quam hic extenduntur. Namque non solum ad functiones circulares, sed pari successu ad multas alias functiones transcendentes applicari possunt, e. g. ad eas quae ab integrali $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ pendent, praetereaue etiam ad varia congruentiarum genera: sed quoniam de illis functionibus transcendensibus amplum opus peculiare paramus, de congruentiis autem in continuatione disquisitionum arithmeticarum copiose tractabitur, hoc loco solas functiones circulares considerare visum est.' —

ABEL und JACOBI haben GAUSS' Untersuchungen über die Elliptischen Functionen nicht vorgefunden, sie mussten dieses Gebiet der Wissenschaft von Neuem entdecken.

Die speciellen Beziehungen zwischen den Arbeiten von GAUSS in diesem Gebiete der reinen Analysis und den Arbeiten von Anderen werde ich in einer besondern Schrift im Zusammenhange mit einer Geschichte der gesammten wissenschaftlichen Thätigkeit von GAUSS darzustellen versuchen, während ich in diesen seinen eignen Werken angeschlossenen Bemerkungen nur die betreffenden actenmässigen Thatsachen aufgenommen habe.

Gottingen im Juni 1865.

SCHERING.