

## **Werk**

**Titel:** Arithmetik und Algebra : Nachträge zu Band 1 - 3

**Jahr:** 1900

**Kollektion:** Mathematica

**Werk Id:** PPN236010751

**PURL:** <http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN236010751> | LOG\_0058

**OPAC:** <http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=236010751>

## **Terms and Conditions**

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain these Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept the Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library.

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

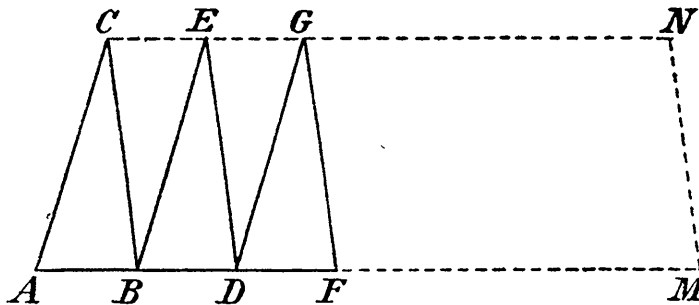
## **Contact**

Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen  
Georg-August-Universität Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen  
Germany  
Email: [gdz@sub.uni-goettingen.de](mailto:gdz@sub.uni-goettingen.de)

[ÜBER DIE WINKEL DES DREIECKS.]

[1.]

Der Beweis, dass die Summe der drei Winkel eines Dreiecks nicht grösser sein kann als  $180^\circ$ , ist unabhängig vom 11. Axiom so zu führen.



Es sei  $A + B + C > 180^\circ$ ; man verlängere  $AB$  in infin. und wiederhole das vorige Dreieck; dann ist per hyp.

$$CBE < ACB \text{ also (Elemente I. 24) } CE < AB.$$

Eben so  $EG = CE$  u. s. w. Man leitet daraus leicht ab, dass, wenn das Dreieck nur oft genug wiederholt wird, die gerade [Linie]  $AM$  grösser ist als die gebrochene  $ACEG \dots NM$ , worin sich das Widersprechende leicht nachweisen lässt. Eine  $n$ malige Wiederholung reicht hin, wenn

$$AC + CB - AB < n(AB - CE).$$

(gefunden 1828 Nov. 18).

[2.]

[Satz 1 = Euklid I. 13: Die Winkel, die eine Gerade mit einer andern bildet, auf der sie steht, sind entweder beide Rechte oder zusammen gleich zwei Rechten.

Satz 2 = Euklid I. 5: In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich.

Satz 3 = Euklid I. 6: Sind in einem Dreieck zwei Winkel einander gleich, so sind auch die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten einander gleich.

Satz 4: In einem Dreieck können nicht zwei Winkel gleich Rechten sein.]

5. Lehrsatz. Kein Winkel eines Dreiecks kann dem Nebenwinkel eines andern Winkels desselben Dreiecks gleich sein.

Es ist nicht möglich, dass  $ACB = ABD$ .

Beweis. Nehmen wir an, es sei  $ACB = ABD$  und unterscheiden drei Fälle.

I. Es sei  $AB = AC$ . Fig. 1. Also (Satz 2)  $ABC = ACB$ , folglich  $ABC = ABD$ ; es sind daher  $ABC, ACB$  rechte Winkel [Satz 1], welches unmöglich ist (Satz 4).

II. Es sei  $AB$  kleiner als  $AC$ . (Fig. 2.) Es liegt daher  $B$  innerhalb einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt  $A$ , Halbmesser =  $AC$ . Die gerade Linie  $CB$  über  $B$  hinaus verlängert muss folglich die Kugelfläche schneiden; das geschehe in  $E$ . Es ist also  $AE = AC$ , daher  $AEB = ACB$  (Satz 2), dann  $AEB = ABD = ABE$ , ferner (Satz 3)  $AB = AE = AC$  gegen die Voraussetzung.

III. Es sei  $AB$  grösser als  $AC$ . Es liegt also  $C$  innerhalb einer Kugelfläche, Centrum  $A$ , Halbmesser  $AB$ , diese Kugelfläche werde von der über  $C$  fortgesetzten  $BC$  in  $E$  geschnitten. Es ist also

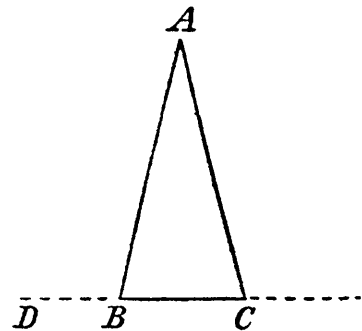


Fig. 1.

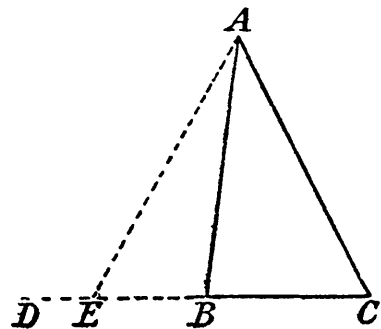


Fig. 2.

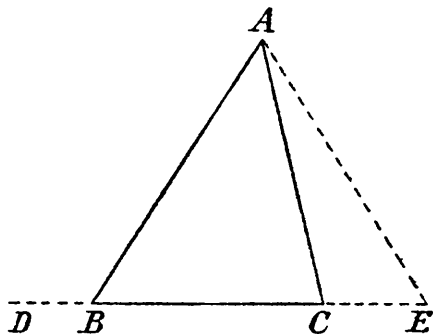
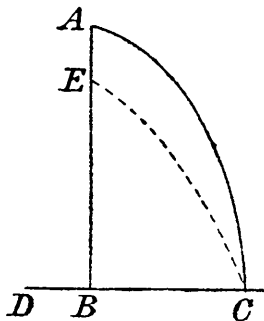


Fig. 3.



$AB = AE$ ,  $ABE = AEB$ ; folglich ist nun aus der Voraussetzung  $ACB = ABD$  so gleich (Satz 1)  $ACE = ABC = ABE = AEB$ . Also ist  $AC = AE = AB$  gegen die Voraussetzung.

6. *Lehrsatz*. Kein Winkel eines Dreiecks kann grösser sein als der Nebenwinkel eines andern Winkels in demselben Dreieck.

$ACB$  kann nicht grösser sein als  $ABD$ .

Beweis. Man beschreibe eine Kegelfläche, Axe  $CB$ , Spitze  $C$ , Winkel dem  $ABD$  gleich. Wäre nun  $ABD$  kleiner als  $ACB$ , so würde die Linie  $CA$  ausserhalb des Kegels liegen (Definition) und da  $B$ , als Punkt in der Axe, innerhalb liegt, so muss die Gerade  $AB$  die Kegelfläche schneiden. Das geschehe in  $E$ . Es wird also  $ECB = EBD$ , welches nicht möglich ist (Satz 5).

## BEMERKUNG.

Das Princip des Aneinanderreihens congruenter Dreiecke, auf dem der Beweis in der Notiz [1] beruht, den GAUSS auf der hintern Seite des Titelblatts seines Exemplars von BAERMANN, *Elementorum Euclidis Libri XV*, Leipzig 1769 notirt hat, war bereits von LEGENDRE im Jahre 1798 angewandt worden (*Éléments de géométrie*, 2<sup>ième</sup> édition, Proposition XIX); genau derselbe Beweis findet sich auch bei LOBATSCHESKI in der Abhandlung *Новыя начала геометрии* (Neue Anfangsgründe der Geometrie) Kap. VI, § 90 vom Jahre 1836.

Die Notiz [2] befindet sich auf einem einzelnen, nicht datirten Zettel. Der darin enthaltene *Lehrsatz 6* ist gleichbedeutend mit Euklid I. 17.

STÄCKEL.