Werk

Titel: Arithmetik und Algebra : Nachträge zu Band 1 - 3

Jahr: 1900

Kollektion: Mathematica

Werk Id: PPN236010751

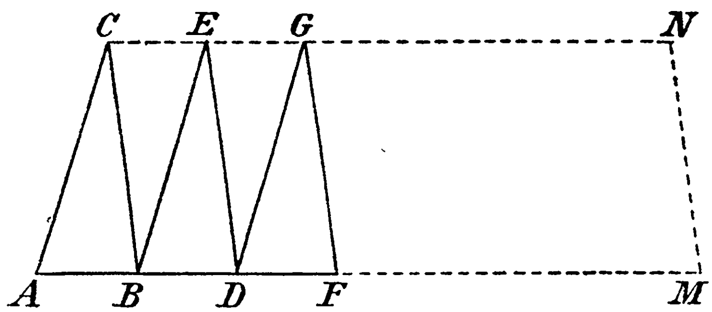
PURL: http://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?PID=PPN236010751|LOG_0058

OPAC: http://opac.sub.uni-goettingen.de/DB=1/PPN?PPN=236010751

[ÜBER DIE WINKEL DES DREIECKS.]

[1.]

Der Beweis, dass die Summe der drei Winkel eines Dreiecks nicht grösser sein kann als 180^0, ist unabhängig vom 11. Axiom so zu führen.



Es sei $A+B+C > 180^0$; man verlängere AB in infin. und wiederhole das vorige Dreieck; dann ist per hyp.

$$CBE < ACB \quad \text{also} \quad (\text{Elemente I. } 24) \quad CE < AB.$$

Eben so $EG = CE$ u. s. w. Man leitet daraus leicht ab, dass, wenn das Dreieck nur oft genug wiederholt wird, die gerade [Linie] AM grösser ist als die gebrochene $ACEG \ldots . NM$, worin sich das Widersprechende leicht nachweisen lässt. Eine $n$malige Wiederholung reicht hin, wenn

$$AC + CB - AB < n(AB - CE).$$

(gefunden 1828 Nov. 18).

[2.]

[*Satz 1* = Euklid I. 13: Die Winkel, die eine Gerade mit einer andern bildet, auf der sie steht, sind entweder beide Rechte oder zusammen gleich zwei Rechten.

Satz 2 = Euklid I. 5: In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich.

Satz 3 = Euklid I. 6: Sind in einem Dreieck zwei Winkel einander gleich, so sind auch die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten einander gleich.

Satz 4: In einem Dreieck können nicht zwei Winkel gleich Rechten sein.]

5. *Lehrsatz.* Kein Winkel eines Dreiecks kann dem Nebenwinkel eines andern Winkels desselben Dreiecks gleich sein.

Es ist nicht möglich, dass $ACB = ABD$.

Beweis. Nehmen wir an, es sei $ACB = ABD$ und unterscheiden drei Fälle.

I. Es sei $AB = AC$. Fig. 1. Also (Satz 2) $ABC = ACB$, folglich $ABC = ABD$; es sind daher ABC, ACB rechte Winkel [Satz 1], welches unmöglich ist (Satz 4).

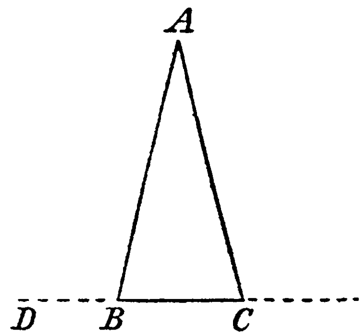


Fig. 1.

II. Es sei AB kleiner als AC. (Fig. 2.) Es liegt daher B innerhalb einer Kugelfläche, deren Mittelpunkt A, Halbmesser $= AC$. Die gerade Linie CB über B hinaus verlängert muss folglich die Kugelfläche schneiden; das geschehe in E. Es ist also $AE = AC$, daher $AEB = ACB$ (Satz 2), dann $AEB = ABD = ABE$, ferner (Satz 3) $AB = AE = AC$ gegen die Voraussetzung.

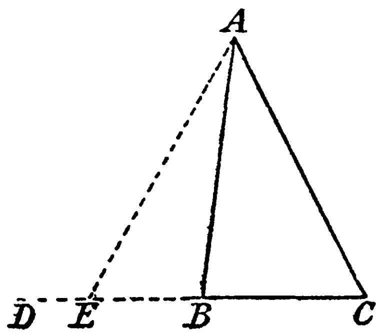


Fig. 2.

III. Es sei AB grösser als AC. Es liegt also C innerhalb einer Kugelfläche, Centrum A, Halbmesser AB, diese Kugelfläche werde von der über C fortgesetzten BC in E geschnitten. Es ist also

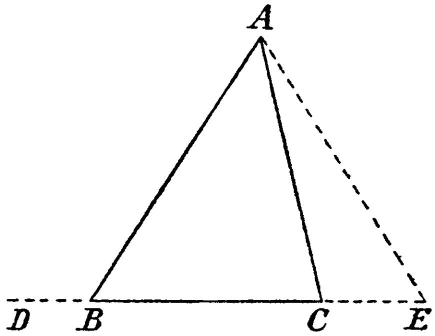
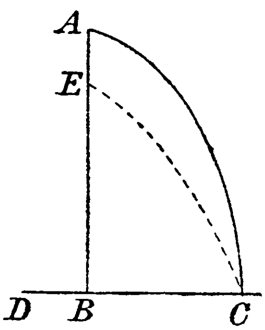


Fig. 3.

$AB = AE$, $ABE = AEB$; folglich ist nun aus der Voraussetzung $ACB = ABD$ sogleich (Satz 1) $ACE = ABC = ABE = AEB$. Also ist $AC = AE = AB$ gegen die Voraussetzung.

6. Lehrsatz. Kein Winkel eines Dreiecks kann grösser sein als der Nebenwinkel eines andern Winkels in demselben Dreieck.

ACB kann nicht grösser sein als ABD.



Beweis. Man beschreibe eine Kegelfläche, Axe CB, Spitze C, Winkel dem ABD gleich. Wäre nun ABD kleiner als ACB, so würde die Linie CA ausserhalb des Kegels liegen (Definition) und da B, als Punkt in der Axe, innerhalb liegt, so muss die Gerade AB die Kegelfläche schneiden. Das geschehe in E. Es wird also $ECB = EBD$, welches nicht möglich ist (Satz 5).

BEMERKUNG.

Das Princip des Aneinanderreihens congruenter Dreiecke, auf dem der Beweis in der Notiz [1] beruht, den GAUSS auf der hintern Seite des Titelblatts seines Exemplars von BAERMANN, Elementorum Euclidis Libri XV, Leipzig 1769 notirt hat, war bereits von LEGENDRE im Jahre 1798 angewandt worden (Éléments de géométrie, 2ième édition, Proposition XIX); genau derselbe Beweis findet sich auch bei LOBATSCHEFSKIJ in der Abhandlung Новыя начала геометріи (Neue Anfangsgründe der Geometrie) Kap. VI, § 90 vom Jahre 1836.

Die Notiz [2] befindet sich auf einem einzelnen, nicht datirten Zettel. Der darin enthaltene *Lehrsatz 6* ist gleichbedeutend mit Euklid I. 17.

STÄCKEL.